arXiv:2304.02073v1 [math.FA] 4 Apr 2023

强拓扑传递性、超混合及其与其他动力学性质的关系

Ian Curtis*、Sean Griswold*、Abigail Halverson*、Eric Stilwell*、SarahTeske*、David Walmsley†、Shaozhe Wang*

摘要

最近，人们提出并研究了动力学性质的两个更强版本：强拓扑传递性，这是拓扑传递性的一种更强版本；以及超混合，这是混合性质的一种更强版本。我们通过两个主要结果继续研究这些概念。首先，我们证明存在强拓扑传递但不弱混合的动力系统。随后我们证明，在 ℓ^p 或 c_0 上存在一个强拓扑传递但不混合的加权后移。

1 引言

若存在一个元素 $x \in X$（称为超循环元），使得其在 T 作用下的轨道 $\mathrm{orb}(T,x) = \{x, Tx, T^2x, T^3x, \ldots\}$ 在 X 中稠密，则称拓扑向量空间 X 上的连续线性映射（以下简称算子） $T\colon X \to X$ 为超循环。用 $\mathbb{N}$ 表示正整数集，用 $\mathbb{N}_0$ 表示非负整数集。给定 X 中的非空开子集 U 和 V，返回集 $N(U,V)$ 定义为 $N(U,V) = \{n \in \mathbb{N}_0\colon T^n(U) \cap V \neq \emptyset\}$。若 X 是度量空间，则称连续映射 $T\colon X \to X$ 拓扑传递（或弱混合，

*圣奥拉夫学院，诺斯菲尔德，明尼苏达州 55057

†数学、统计学与计算机科学系，圣奥拉夫学院，诺斯菲尔德，明尼苏达州55057*2020 MSC:* 47A16, 37B02

混合），如果对于 X 中任意非空开子集 U 和 V， $N(U,V)$ 非空（或包含任意长的区间；或其补集有限）。当 X 第二可数且具有 Baire性质时，根据 Birkhoff传递定理[6]，超循环性等价于拓扑传递性。超循环性已成为算子理论中一个十分活跃的研究领域，并与数学的其他分支有诸多联系。关于其历史、核心思想及详细介绍，感兴趣的读者可参阅专著 [5, 10]。

根据我们的定义，以下蕴含关系显而易见：

$$\text{mixing} \quad \Longrightarrow \quad \text{weakly mixing} \quad \Longrightarrow \quad \text{topologically transitive.}$$

最近， [4, 1, 3, 2], 中提出并研究了拓扑传递性和混合的更强版本。

定义 1.1. 设 X 为拓扑向量空间， T 为 X上的算子。若对 X的每个非空开子集 U，都有.....，则称 T 为强拓扑传递的（当 X 第二可数且具有 Baire性质时，也称为强超循环的）。

$$X \setminus \{0\} \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(U).$$

若对 X的每个非空开子集 U，都有.....，则称 T 为超混合的。

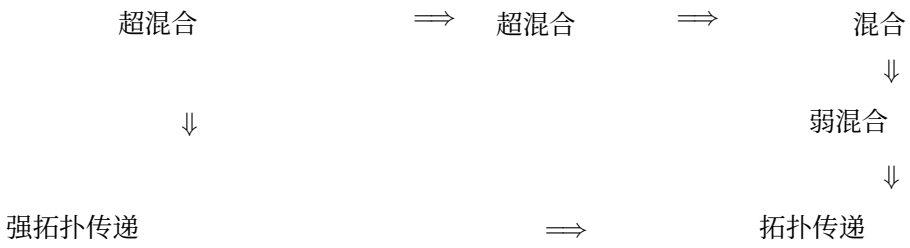
$$X = \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{n=i}^{\infty} T^n(U)}.$$

若对 X的每个非空开子集 U，都有.....，则称 T 为超混合的。

$$X = \bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{n=i}^{\infty} T^n(U).$$

注 1.2. 由于 [2, 注 2.5], ，上文给出的超混合定义与 [2, 定义 1.1]中的超混合原始定义一致。

根据定义，以下蕴含关系显而易见：



在 [2], 中，作者探讨了上述图示中尚未涉及的、关于 ℓ^p 和 c_0上加权后移算子族的若干蕴含关系。例如，他们证明了 ℓ^p 或 c_0 上的每个混合加权后移实际上都是超混合的，但不一定是超混合。作者还给出了一个混合加权后移的例子，它不是强拓扑传递的。弱混合加权移位的例子（但不是混合的）早已广为人知 [10, 注 4。10], 结果表明，对于加权后移位族，拓扑传递性蕴含弱混合性质（见 [10, 第 4 节。1]）。鉴于这些结果，上述图示中还有两个关于加权后移位族的蕴含关系有待探讨，这促使作者在 [2] 提出以下问题。

问题 1.3. 设 B_w 是 ℓ^p 或 c_0 上的强拓扑传递加权后移。B_w 必须是超混合吗？B_w 必须是混合吗?

在第 3 节中，我们通过以下结果对这些问题给出否定回答。

定理 1.4。在 ℓ^p or c_0 上，存在一个加权后移，它是强拓扑传递的（即强超循环），但不是混合的。

这一结果与 [2], 中的结果共同补全了上述关于 ℓ^p 或 c_0 上的加权后移算子族的图表。

在谈及这一点之前，我们将在第 2 节中把强拓扑传递、超混合和超混合的定义，从向量空间上的算子推广到度量空间上的连续映射。随后，我们将一些经典动力系统归类为超混合或强拓扑传递。在此过程中，我们或许会令人意外地给出一个强拓扑传递但非弱混合的映射实例。我们还将证明，存在并非超混合的混合映射，这说明上图

度量空间的情形已证明是完备的。

2 度量空间情形

本节中，设 X 为度量空间，其度量为 d，且 $T: X \to X$ 为连续映射。称有序对 (X,T) 为一个动力系统，不过我们将直接称 $T: X \to X$为一个动力系统。我们采用算子理论中的惯例，将 Tx 记作 $T(x)$。

在这种情形下，超混合和超混合的定义同样适用，无需作任何修改。为了快速找到超混合映射的例子，有一个简单的判据可用于检验若干重要的动力系统。

定理 2.1. 设 $T: X \to X$ 是一个动力系统，具有如下性质：对于每个非空开集 U，存在 $j \in \mathbb{N}$使得 $T^j(U) = X$。那么 T是超混合的。

证明。我们首先证明 T 是满射。设 $y \in X$ 和 U 是 X的非空开子集。对于某个 $j \in \mathbb{N}$，有 $T^j(U) = X$，这意味着 $T^j x = T(T^{j-1}x) = y$。因此 T是满射，这意味着对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $T^n(X) = X$。于是对于 $n \geq j$，有 $T^n(U) = T^{n-j}(X) = X$，这意味着

$$X = \bigcap_{n=j}^{\infty} T^n(U) \supseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{n=i}^{\infty} T^n(U),$$

这表明 T 是超混合的。 □

例 2.2. (a) “帐篷映射” $T: [0,1] \to [0,1]$ 定义为 $T(x) = 2x$ 若$x \in [0, \frac{1}{2}]$，$T(x) = 2 - 2x$ 若 $x \in]\frac{1}{2}, 1]$ 显然满足定理 2.1 中的条件；参见 [10,例 1.12(a)]。

(b) 在单位圆 S^1上，由 $T(z) = z^2$ 给出的“倍增映射” $T: S^1 \to S^1$ 满足上述判据；参见 [10, 例 1.12(b)]。

(c) 在所有 0-1序列 $\Sigma_2 = \{(x_n)_{n\geq 0}$ 的空间上：$x_n \in \{0,1\}\}$，考虑“移位”

σ： $\Sigma_2 \to \Sigma_2$ 定义为

$$\sigma(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Σ_2 上的度量定义为

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}.$$

容易看出，若 $x = (x_n)_{n\geq 0}$ 和 $y = (y_n)_{n\geq 0}$ 是 Σ_2 中满足 $x_n = y_n$（对 $n = 0, 1, \ldots, j$）的序列，则 $d(x, y) \leq 2^{-j}$。为证明 σ 具有上述性质，设 U 是 X 的一个非空开子集。于是存在 $u \in U$ 和 $\epsilon > 0$，使得球$B_\epsilon(u) := \{x \in X : d(x, u) < \epsilon\} \subseteq U$。

选择 $j \in \mathbb{N}$ 使得 $2^{-j} < \epsilon$，并令 $x \in X$。那么元素 $v := (u_0, \ldots, u_j, x_0, x_1, x_2, \ldots)$ 属于 U，因为 $d(v, u) \leq 2^{-j} < \epsilon$，且我们已安排 $\sigma^j(v) = x$。因此 $\sigma^j(U) = X$，所以 σ 是超混合的。

(d) 不存在作用于巴拿赫空间 X 上的（线性且有界）算子 T 能满足定理 2.1 中的性质。因此，该判据不适用于线性情形。

文献 [2, 注 2.5] 表明，拓扑向量空间上的单射算子从来都不是超混合的。[2, 定理 2.3] 中的论证基于一个超混合性判据，该判据利用了算子的线性。我们证明，尽管缺乏线性，度量空间上的任何单射映射甚至都不是超混合的。

定理 2.3。设 X 为度量空间，且 $T : X \to X$ 为一个非恒等映射的连续映射。如果 T 是单射的，那么 T 不是超混合的。

证明。通过证明存在一个非空开子集 $U \subset X$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}_0$，都有 $T^n(U) \cap T^{n+1}(U) = \emptyset$，我们建立一个比“不是超混合的”更强的结论。实现这一点的主要依据是下面的事实。

事实 2.4. 如果 $T : X \to X$ 不是恒等映射，那么存在 X的一个非空开子集 U，使得 $U \cap T(U) = \emptyset$。

接受这一事实后，我们可以得出如下结论。设 U 是该事实给出的 X 的一个非空开子集。设 $n \in \mathbb{N}_0$。为导出矛盾，假设 $T^n(U) \cap T^{n+1}(U) \neq \emptyset$。那么$T^n u_1 = T^{n+1} u_2$对某些 u_1, $u_2 \in U$成立。由于 T^n 是单射，我们有 $u_1 = Tu_2$。但这样一来$T(U) \cap U \neq \emptyset$，这是不可能的。因此，对于任意 $n \in \mathbb{N}_0$，必有 $T^n(U) \cap T^{n+1}(U) = \emptyset$，这表明每个集合 $\bigcap_{n=i}^{\infty} T^n(U)$ 都是空集。

□

该事实的证明。设 $x \in X$具有 $Tx \neq x$，并设 $\epsilon = d(x, Tx)$。由于 T连续，存在 $\delta > 0$，使得 $d(x, y) < \delta$意味着 $d(Tx, Ty) < \frac{\epsilon}{2}$。令 $\rho =$为 δ 与 $\frac{\epsilon}{2}$ 的最小值，并令 U为球$B_\rho(x)$: $= \{y \in X : d(x, y) < \rho\}$。

反设 $U \cap T(U)$ 非空。则存在 $u \in U$，使得$Tu \in U$。于是 $d(Tu, x) < \rho \leq \frac{\epsilon}{2}$，并且由于 $d(u, x) < \rho \leq \delta$，我们也有 $d(Tx, Tu) < \frac{\epsilon}{2}$。但是

$$d(Tx, x) \leq d(Tx, Tu) + d(Tu, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

这就产生了矛盾。该事实的证明至此结束。 □

拓扑向量空间上存在许多著名的单射混合算子例子。其中最著名的是 Birkhoff 于 1929年给出的例子，事实上，这也是超循环算子的第一个例子 [7]。Birkhoff 证明，在整函数空间 $H(\mathbb{C})$ 上，赋予其在紧子集上一致收敛的通常拓扑后，任何由 $T(f)(z) = f(z + a)$ 定义的平移算子 $T : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ 都是混合的，条件是 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$（见[10, 例 3.8]）。就我们的目的而言，这些例子连同定理 2.3 表明，存在不是超混合的混合算子。

现在我们转而关注强拓扑传递性。强拓扑传递性的定义涉及零向量，因此需要稍作修改，才能适用于一般度量空间 X。我们选择强化整体条件如下：我们称 $T : X \to X$ 是强拓扑传递的，若对于 X 的每个非空开子集 U，都有 $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(U)$。作为拓扑传递性质的更强版本，强

拓扑传递性和弱混合值得相互比较。 [2, 例 4.3] 表明，混合映射虽然必然是弱混合的，却未必是强拓扑传递的。我们的下一个结果表明，对于一般度量空间，强拓扑传递性未必蕴含弱混合性质。

定理 2.5. 设 X 是一个没有孤立点的完备度量空间，并设 $T\colon X \to X$ 是一个满射、拓扑传递的等距变换。那么 T 是强拓扑传递的，但不是弱混合的。

证明. 根据 Birkhoff 传递定理（该定理最早发表于 [6], ），关于 X 和 T 的假设意味着 X 必须有一个由超循环元组成的稠密集。设 $U \subseteq X$ 是非空开集。那么存在某个元素 $a \in U$，其轨道稠密，且 $\delta > 0$ 使得球 $B_\delta(a) \subseteq U$。

设 $x \in X$。由于 $\{a, Ta, T^2a, \ldots\}$ 在 X 中稠密，存在某个 $j \in \mathbb{N}$，使得 $x \in B_\delta(T^j a)$。我们证明，球 $B_\delta(a)$ 在 T 下的像为 $T(B_\delta(a)) = B_\delta(Ta)$。

首先，令 $y \in T(B_\delta(a))$。那么对于某个 $x \in B_\delta(a)$，有 $Tx = y$，由于 T 是等距变换，我们得到

$$d(y, Ta) = d(Tx, Ta) = d(x, a) < \delta.$$

因此 $y \in B_\delta(Ta)$，这表明 $T(B_\delta(a)) \subseteq B_\delta(Ta)$。

接下来，令 $y \in B_\delta(Ta)$。由于 T 是满射，存在 $x \in X$ 使得 $Tx = y$。于是

$$d(x, a) = d(Tx, Ta) = d(y, Ta) < \delta,$$

这表明 $B_\delta(Ta) \subseteq T(B_\delta(a))$。因此 $T(B_\delta(a)) = B_\delta(Ta)$。

由于 T^j 也是满射等距变换， $x \in B_\delta(T^j a)$ 意味着 $x \in T^j(B_\delta(a))$。因此 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} T^n(B_\delta(a)) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} T^n(U)$，这表明 T 是强拓扑传递的。

我们通过给出一个开集 U 来证明 T 不是弱混合；对于该开集， $N(U,U)$ 不可能包含两个连续整数。设 $a \in X$ 是 T 的一个超循环元，并设 $\delta = d(Ta,a)$。令$U = B_{\delta/4}(a)$。反设 $N(U,U)$ 包含整数 n 和 $n+1$。那么存在 $u_1, u_2 \in U$，使得 $T^n u_1 \in U$ 和 $T^{n+1}u_2 \in U$。于是

$$d(Tu_2,u_1) = d(T^{n+1}u_2, T^n u_1) \le d(T^{n+1}u_2,a) + d(a,T^n u_1) < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2},$$

wh这里我们利用了 T^n 是等距变换这一事实，得到了上面的第一个等式。但接下来

$$\begin{aligned} d(Ta,a) &\le d(Ta,Tu_2) + d(Tu_2,u_1) + d(u_1,a) \\ &= d(a,u_2) + d(Tu_2,u_1) + d(u_1,a) \\ &< \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4} = \delta, \end{aligned}$$

这是不可能的。 □

前述定理最典型的应用是单位圆 S^1 上的任意“无理旋转”，其定义为 $T\colon\ S^1 \to S^1$, $Tz = e^{i2\pi\theta}z$，其中 $\theta \in [0,1[$ 是无理数。很容易看出，这种圆周旋转是满射等距变换。要证明 T 有稠密轨道则需要更多工作；证明见 [9, 定理 3.13]。

3 加权后移算子

由于结构简单而丰富， ℓ^p 和 c_0 上的加权后移算子族是检验线性动力系统中任何新概念的试验场。回忆一下， c_0 是所有满足 $x_n \to 0$的有界序列 $(x_n)_{n\ge0}$ 在 $\mathbb{C}$ 中的空间，其范数 c_0 定义为 $\|x\| = \sup_{n\ge0}|x_n|$。对于$1 \le p < \infty$， ℓ^p 是所有满足 $\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^p < \infty$的复数序列 $(x_n)_{n\ge0}$ 的空间， ℓ^p 上的范数定义为 $\|x\| = (\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^p)^{1/p}$。

设 X 为 c_0，或为其中一个 ℓ^p 空间， $1 \le p < \infty$。我们用 $e_n, n \ge 0$ 表示 X 的标准基向量，其唯一的非零项是第 n 位上的 1。因此， X 中的每个 $x = (x_0, x_1, \ldots)$ 都可以写成 $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i e_i$。如果 $w = (w_n)_{n\ge0}$ 是一个由正数组成的有界序列，

加权后移算子 B_w 定义为 $B_w e_0 = 0, B_w e_n = w_n e_{n-1}$ ，其中 $n \geq 1$。我们只考虑满射加权后移算子。一个直接的练习可证明， B_w是满射，当且仅当 $\sup_{n\geq 0} \frac{1}{w_n} < \infty$。每个加权后移算子都对应一个前移位 S ，它在 X 的标准基上定义为 $Se_n = \frac{e_{n+1}}{w_{n+1}}$。当 B_w 是满射时， S 在整个 X上都有定义，并且该前移位是 X上 B_w 的右逆，也就是说 $B_w S = I$，其中 I 是作用于 X 上的恒等算子。

为简化记号，我们对 $i, j \geq 1$ 记作 $M_i^j = w_i w_{i+1} \cdots w_{i+j-1}$。那么对于任意 $x \in X$， $S^n x$ 的公式为

$$S^n x = (0, 0, \ldots, 0, \frac{x_0}{M_1^n}, \frac{x_1}{M_2^n}, \frac{x_2}{M_3^n}, \ldots). \tag{3.1}$$

B_w 是拓扑传递（等价地，超循环）或混合的相应判定条件为

$$\text{topologically transitive: } \sup_{n\geq 1} M_1^n = \infty, \qquad \text{mixing: } \lim_{n\to\infty} M_1^n = \infty.$$

关于这一结果以及更多后移的背景知识，我们请感兴趣的读者参阅 [10, 第 4 节1] 及其中的参考文献。

B_w 为超混合的权序列判定条件由 [2, 定理 4.4]，得出，具体为

$$\sup_{n\geq 1} M_1^n = \infty \text{ and } \inf_{n,k\geq 1} M_n^k > 0. \tag{3.2}$$

注意，上述第一个条件仅仅表示 B_w 是拓扑传递的。超混合的判定是借助以下结果 [2, 定理 4.1] 得出的。

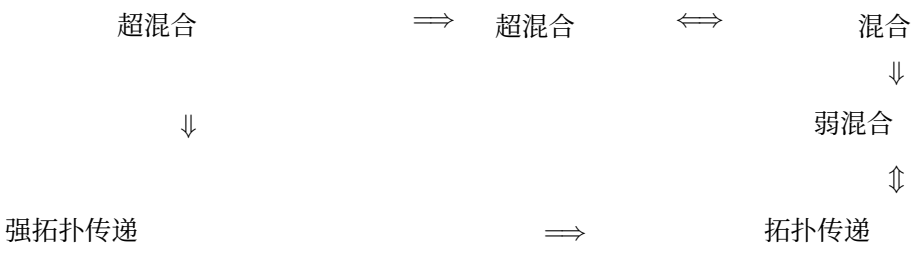
定理 3.1（[2, 定理 4.1]）。对于作用于 c_0 或 ℓ^p 上的加权后移 B_w ，有以下结论:

(i) B_w 是超混合的，当且仅当 B_w 是满射，且对每个非零向量$x \in X$， $S^n x \to 0$ 。

(ii) B_w 是强拓扑传递的，当且仅当 B_w 是满射，并且对于任意非零向量 $x \in X$，存在一个序列 $(n_k)_k$ 属于 $\mathbb{N}$，使得 $S^{n_k}x \to 0$。

如上所述，已知存在一种依赖权序列、用于刻画 B_w 是否为超混合的条件，但尚无依赖权序列、用于刻画强拓扑传递性的条件。为找到这种刻画，人们希望构造大量强拓扑传递的加权后移位实例。当然，任何超混合的 B_w 都既是强拓扑传递的，也是混合的，因此我们已经有了许多实例。定理 1.4 表明，存在不是混合的强拓扑传递加权后移位。结合 [2], 中的结果，该结论的证明表明，下图已完整呈现这些关系。

图 3.2. 对于定义在 ℓ^p 或 c_0上的加权后移位这一族，以下蕴含关系成立，且一般而言，不存在图中未显示的其他蕴含关系。



我们已准备好证明主要结果。

下面证明定理 1.4。我们以递归方式构造一个权序列 $w = (w_n)_{n\geq 0}$，使用块 b_1、b_2、b_3 等。偶数编号的块只包含 2，而奇数编号的块只包含 1 2 和 1。前三个块定义为 $b_1 := \{\frac{1}{2}\}$、$b_2 := \{2\}$ 和 $b_3 := \{\frac{1}{2}\}$。为描述其余块的结构，令 $|b_n|$ 表示块 b_n 中项的数量，并令 $s_n = \sum_{i=2}^{n} |b_i|$，其中 $n \geq 3$。其余块定义如下。对于偶数 n，b_n 将是一个包含 s_{n-1} 2 的块。对于奇数 $n \geq 5$，b_n 具有以下性质：

(i) b_n 包含的1 2的数量与前一个块中的 2 的数量相同，该数量恰好为 $|b_{n-1}| = s_{n-2}$;

(ii) b_n 以1 2开始并结束；

(iii) 在 b_n 中，每一对相邻的1 2之间都有 s_{n-1} 1。

由于每个块中的项数增长得非常快，我们引入一些记号，以便直观地表示权序列。令 $t^{(j)}$ 表示权重 t 重复 j 次，并令$[t^{(j)}r]_k$ 表示权重串 $t^{(j)}r$ 重复 k 次。例如，

$$\left[1^{(5)}\frac{1}{2}\right]_3 = 11111\frac{1}{2}11111\frac{1}{2}11111\frac{1}{2}.$$

有了这些记号，我们就可以直观地表示我们的权序列。

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{b_1}\underbrace{2}_{b_2}\underbrace{\frac{1}{2}}_{b_3}\underbrace{2^{(s_3)}}_{b_4}\underbrace{\frac{1}{2}1^{(s_4)}\frac{1}{2}}_{b_5}\underbrace{2^{(s_5)}}_{b_6}\underbrace{\frac{1}{2}\left[1^{(s_6)}\frac{1}{2}\right]_{s_5-1}}_{b_7}\underbrace{2^{(s_7)}}_{b_8}\underbrace{\frac{1}{2}\left[1^{(s_8)}\frac{1}{2}\right]_{s_7-1}}_{b_9}\cdots$$

根据上面的性质 (i)，将块 $b_2, b_3, \ldots b_{2k+1}$ 中的所有权重相乘，结果总是 1。更具体地说，由于这些块中的项数总和为 s_{2k+1}，我们构造了权序列，使得对所有 $k \geq 1$，都有 $M_1^{s_{2k+1}} = 1$ 。因此， B_w 不是混合的，因为 M_1^n不趋于 ∞。还需证明 B_w 是强拓扑传递的。

为此，令 $n_k = s_{2k+2}$ 对每个 $k \in \mathbb{N}$成立。我们声称以下不等式对$k \geq 2$成立：

$$M_i^{n_k} \geq \frac{1}{2} \text{ whenever } i > s_{2k+1}, \text{ and} \tag{3.3}$$

$$M_i^{n_k} \geq 2^k \text{ whenever } 1 \leq i \leq s_{2k+1}. \tag{3.4}$$

回想一下， $M_i^{n_k}$是由 n_k 个连续权重相乘得到的，起始权重为 w_i。首先，假设 $i > s_{2k+1}$。由于 s_{2k+1} 是块 b_2 到 b_{2k+1}中的项总数，任何满足 $j \geq i$的权重 w_j都属于满足 $l \geq 2k+2$的块 b_l。根据构造， b_l要么不包含等于1 2的权重，要么包含 s_{2k+2} 1，将其中任意一对1 2隔开。因此，乘积 $M_i^{n_k}$至多包含一个1 2因子；又因为其余因子都为1或2，所以（3.3）成立。

现在假设 $1 \le i \le s_{2k+1}$。我们先低估 $M_i^{n_k}$中2的个数。乘积 $M_i^{n_k}$中的第一个权重 w_i必定属于块 b_2、.....、b_{2k+1}之一。由于 n_k是块 b_2、.....、b_{2k+2}中的项总数，乘积 $M_i^{n_k}$必定包含块 b_{2k+2}中的每一项。由于 b_{2k+2} 是一个完全由2组成的块，乘积 $M_i^{n_k}$至少包含$|b_{2k+2}| = s_{2k+1}$ 2个2。

现在，我们对 $M_i^{n_k}$ 中 $1\,2$ 的数量进行高估。由于块 b_{2k+3} 中任意一对相邻 $1\,2$ 之间都有 $s_{2k+2} = n_k$ 1个，因此乘积 $M_i^{n_k}$ 中最后一个权重要么出现在块 b_{2k+2} 中，要么出现在块 b_{2k+3} 的前 n_k 项中。根据我们构造的性质 (ii) 和 (iii)， b_{2k+2} 中没有 $1\,2$，而块 b_{2k+3} 的前 n_k 项中恰有一个 $1\,2$。考虑到根据性质 (i)，从块 b_2 到块 b_{2k+1} 中 $1\,2$ 的总数为

$$1 + |s_3| + \cdots + |s_{2k-1}| = |b_2| + |b_4| + \cdots + |b_{2k}|,$$

乘积 $M_i^{n_k}$ 中出现的 $1\,2$ 数量的一个高估为

$$1 + |b_2| + |b_4| + \cdots + |b_{2k}| < s_{2k}.$$

将对 2 的数量的低估与对 $1\,2$ 数量的高估结合起来，可得 $M_i^{n_k}$ 是一个 2 的幂，其指数至少为 $s_{2k+1} - s_{2k} = |b_{2k+1}|$。由于当 $k \ge 2$ 时 $|b_{2k+1}| \ge k$，估计式 (3.4) 得证。

最后，我们证明定理 3.1 的条件 (ii) 得到满足。注意，由于 $\sup_{n\ge 0} \frac{1}{w_n} \le 2$， B_w 是满射。令 $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i e_i$ 为 ℓ^p 或 c_0 和 $\epsilon > 0$中的一个非零向量。存在某个 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\|\sum_{i=N}^{\infty} x_i e_i\| < \frac{\epsilon}{4}$。取 K，使得对于任意 $k \ge K$，我们都有$\frac{1}{2^k} < \frac{\epsilon}{2\|x\|}$和 $s_{2k+1} > N$。令 $k > K$。若 $i \ge s_{2k+1}$，则根据 (3.3)， $M_{i+1}^{n_k} \ge \frac{1}{2}$，因此 (3.1) 蕴含

$$\left\| S^{n_k}\left(\sum_{i=s_{2k+1}}^{\infty} x_i e_i \right) \right\| \le \left\| \sum_{i=s_{2k+1}}^{\infty} 2x_i e_i \right\| \le \left\| \sum_{i=N}^{\infty} 2x_i e_i \right\| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.5}$$

若反之 $0 \le i < s_{2k+1}$，则根据 (3.4)，$M_{i+1}^{n_k} \ge 2^k > \frac{2\|x\|}{\epsilon}$，因此 (3.1) 同样蕴含

$$\left\| S^{n_k} \left(\sum_{i=0}^{s_{2k+1}-1} x_i e_i \right) \right\| \le \left\| \sum_{i=0}^{s_{2k+1}-1} \frac{x_i}{2^k} e_i \right\| < \frac{1}{2^k}\|x\| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{3.6}$$

综合估计式 (3.5) 和 (3.6) 可得 $\|S^{n_k}x\| < \epsilon$，这验证了定理 3.1 的条件 (ii)，从而完成证明。

□

证明实际上表明，存在一个序列 n_k，使得对所有 $x \in X$ 都有 $S^{n_k}x \to 0$，这比强拓扑传递性的条件 (ii) 更强。定理 1.4 的证明给出了一个强拓扑传递的加权后移位的新例子。我们邀请感兴趣的读者思考以下问题。

问题 3.3. 我们能否刻画出这样的权序列：它们在 ℓ^p 和 c_0 上产生强拓扑传递的加权后移位，如上文式 (3.2)（即 [2, 定理 4.4]）所示?

匿名审稿人指出了另一个自然的问题。

问题 3.4. 是否存在一个作用于巴拿赫空间的线性有界算子，它是强拓扑传递的，但不是弱混合的?

在巴拿赫空间上存在一个线性有界算子，它是拓扑传递的，但不是弱混合的；这是 De la Rosa 和 Read 的一项深刻结果 [8]；另见 [5]，其中给出了关于 ℓ^p 和 c_0的相关例子。回答这个问题的一个难点在于，若存在能够肯定回答该问题的此类例子，它们必然不是加权后移位，因为每个超循环加权后移位都满足超循环性判据，因此是弱混合的（见 [10, 第 4 节.1]）。定理 2.5 的证明思路也无济于事，因为不存在作为等距变换的线性有界算子是超循环的。事实上，任何等距变换的轨道都是有界的，因此不可能在巴拿赫空间中稠密。

4 致谢

我们感谢匿名审稿人提出的修改意见和建议，这些意见和建议提升了论文的质量。我们也感谢其提出问题 3.4。

参考文献

[1] Mohammad Ansari. 某些类别算子的强拓扑传递性. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 25(5):677–685, 2018.[2]Mohammad Ansari. 超混合与超混合算子. J. Math. Anal. Appl., 498(1):Paper No. 124952, 13, 2021.[3] Mohammad Ansari, Karim Hedayatian, and Bahram Khani-Robati. 巴拿赫空间算子的强超循环性. J. Korean Math. Soc., 58(1):91–107, 2021.[4] Mohammad Ansari, Bahram Khani-Robati, and Karim Hedayatian. 关于算子集的稠密性与传递性. Turkish J. Math., 42(1):181–189, 2018.[5] Fr´ed´eric Bayart and Etienne Matheron. 线性算子动力学，第179卷，剑桥数学丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2009.[6] 乔治·D·伯克霍夫. 曲面变换及其动力学应用. Acta Math., 43(1):1–119, 1922。

[7] 乔治·D·伯克霍夫。关于整函数的一个初等定理的证明。巴黎科学院，189:473–475,1929年。

[8] Manuel de la Rosa 和 Charles Read。一个直和不具超循环性的超循环算子。《算子理论杂志》，61(2):369–380, 2009年。

[9] RobertL. Devaney。《混沌动力系统导论》。Addison-Wesley 非线性研究丛书。Addison-Wesley 出版公司，高级图书项目，雷德伍德城（加利福尼亚州），第二版，1989年。

[10]Karl-G. Grosse-Erdmann 和 Alfredo Peris Manguillot。《线性混沌》。Universitext。施普林格，伦敦，2011。