arXiv:2304.02083v2 [math.OC] 3 Jul 2024

基于蒙特卡罗框架的粒子网格法控制 Vlasov–Poisson 等离子体

JAN BARTSCH*、PATRIK KNOPF†、STEFANIA SCHEURER‡、和 J ¨ORG WEBER§

摘要。 弗拉索夫–泊松系统描述等离子体在所谓无碰撞状态下的时间演化。研究受外部磁场影响的高温等离子体，是热核聚变研究中最重要的方面之一。本文针对弗拉索夫–泊松系统构建并分析一个动力学最优控制问题，其中控制由外部磁场表示。这类最优控制问题的主要目标是将等离子体约束在相空间的某个区域内。首先，我们从数学分析的角度研究该最优控制问题，即证明至少存在一个全局极小值点，并通过伴随方法严格推导局部极小化解的一阶必要最优性条件。随后，我们构建一个蒙特卡罗框架，采用粒子网格法求解状态方程和伴随方程，并应用非线性共轭梯度法求解优化问题。最后，我们给出数值实验，成功验证了所构建的优化框架。

关键词。 Vlasov–Poisson 系统、集合最优控制问题、多组分等离子体、蒙特 e Carl-卡罗方法、粒子网格法、磁约束。

AMS 学科分类。 49J20, 35Q83, 49M05, 62P35, 65C05, 90C15

1. 引言。 研究受外部磁场影响的高温等离子体，是热核聚变研究中最重要的方面之一 [16, 51]。在这一背景下，等离子体磁约束尤为重要。磁约束的理念是施加磁场，以影响等离子体，使其与反应堆壁保持一定距离。这是必要的，因为等离子体若与壁碰撞就会冷却下来（从而中断聚变过程），甚至可能损坏反应堆。本文研究的是使等离子体按预期方式受到影响的最优控制问题。具体而言，针对磁约束，我们希望控制等离子体，使其粒子不会离开相空间中的某个预定区域。

为从数学上描述由电子和离子组成的等离子体的时间演化，我们采用气体动力学理论。假设离子只有一种，其质量为 m_+，电荷为 q，并用 m_- 表示带电荷$-q$的电子质量。我们将空间区域设为 $\mathbb{R}^{d_x}$，速度空间设为 $\mathbb{R}^{d_v}$。此外，为表示相空间中的密度，$f^+ = f^+(t, x, v) \geq 0$ 表示离子的分布函数，而 $f^- = f^-(t, x, v) \geq 0$ 表示电子的分布函数。此外，ρ_f 表示相应的电荷密度，其定义如下：

$$\rho_f(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{d_v}} f^+(t,x,v)\,\mathrm{d}v - \int_{\mathbb{R}^{d_v}} f^-(t,x,v)\,\mathrm{d}v. \tag{1.1}$$

在本文中，我们考虑处于所谓无碰撞区域的等离子体。也就是说，我们认为粒子之间的所有碰撞都极为罕见，可以忽略不计。这是一种广泛采用且合理的近似，尤其适用于托卡马克装置中的聚变等离子体（例如，参见 [1, 41]）。此外，我们只考虑静电效应。这意味着仅考虑自生电场，而忽略自生磁场。这样做是合理的，因为为了控制等离子体，我们还将施加外部磁场 $B = B(t, x)$，其强度通常远高于自生磁场。在这种情况下，分布函数 $f^\pm$ 随时间的演化由 Vlasov–Poisson 系统描述。在此模型中，时间演化

*德国康斯坦茨大学数学系（jan.bartsch@uni-konstanz.de）。
†德国雷根斯堡大学数学系（patrik.knopf@ur.de）。
‡德国斯图加特大学SimTech集群（stefania.scheurer@iws.uni-stuttgart.de）。§奥地利维也纳大学数学学院（joerg.weber@univie.ac.at）。

分布函数 $f^{\pm}$ 由以下偏微分方程描述:

$$\partial_t f^- + v \cdot \partial_x f^- - \frac{q}{m_-}(E_f + v \times B) \cdot \partial_v f^- = 0, \tag{1.2a}$$

$$\partial_t f^+ + v \cdot \partial_x f^+ + \frac{q}{m_+}(E_f + v \times B) \cdot \partial_v f^+ = 0. \tag{1.2b}$$

这些一阶偏微分方程称为*Vlasov* 方程，而 E_f 是由等离子体粒子诱导的自洽电场。按照 Vlasov 方程领域的常用记法，我们写作 $\partial_x := \nabla_x$ 和 $\partial_v := \nabla_v$ ，分别表示对 x 和 v的偏导梯度。

由于电子和离子的存在，（1.2a）和（1.2b）的动力学表现出很强的异质性。特别是，系统包含多个数量级各不相同的时空尺度，因此等离子体的数值模拟极具挑战性。为了使讨论符合物理实际，并确保系统参数选取的数量级合理，我们采用与等离子体相关特征量进行缩放。这些特征量包括等离子体频率 ω_{pe}、热速度 $v_{\mathrm{th},\,\pm}$ 以及德拜长度 L_{DE}。它们可由以下公式表示:

$$\omega_{\mathrm{pe}} = \sqrt{\frac{n_- q^2}{\varepsilon_0 m_-}}, \qquad v_{\mathrm{th},\pm} = \sqrt{\frac{k_B T_\pm}{m_\pm}}, \qquad L_{\mathrm{DE}} = \frac{v_{\mathrm{th},-}}{\omega_{\mathrm{pe}}}.$$

其中， n_- 是电子的数密度， ε_0 是介电常数， $T_\pm$ 是相应物种的特征温度， k_B 是玻尔兹曼常数。根据这些定义，我们以 $\omega_{\mathrm{pe}}^{-1}$为时间单位，以 L_{DE} 为位置单位，并以$v_{\mathrm{th},\,\pm}$为速度单位。为考虑速度的不同尺度，我们引入无量纲常数因子

$$\mu_x^+ = \frac{v_{\mathrm{th},+}}{v_{\mathrm{th},-}}, \qquad \mu_v^+ = \frac{m_-}{\mu_x^+ m_+}, \qquad \mu_x^- = 1, \qquad \mu_v^- = -1.$$

这些尺度参数非常有用，因为它们使我们能够在相同的时间尺度上研究电子和离子的时间演化。通过这种重新标度，弗拉索夫–Poisson方程（1.2a）和（1.2b）（给定初始数据 $\mathring{f} = (\mathring{f}^-,\ \mathring{f}^+)$)可以改写为

$$\partial_t f^\pm + \mu_x^\pm v \cdot \partial_x f^\pm + \mu_v^\pm (E_f + \mu_x^\pm v \times B) \cdot \partial_v f^\pm = 0, \tag{1.3a}$$

$$f^\pm|_{t=0} = \mathring{f}^\pm \tag{1.3b}$$

（参见 [40, 附录 I]）。这里，根据维数 d_x，自洽电场表示为

$$E_f(t,x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} \rho_f(t,y)\,\mathrm{d}y & \text{if } d_x = 1, \\ \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)}{|x-y|^2}\rho_f(t,y)\,\mathrm{d}y & \text{if } d_x = 2, \\ \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)}{|x-y|^3}\rho_f(t,y)\,\mathrm{d}y & \text{if } d_x = 3, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 ρ_f 定义同式（1.1）。

通常，参数 $T_\pm$ 和 n_- 的量级分别为 10^7–$10^8\,\mathrm{K}$ 和 10^{20}–$10^{21}\mathrm{m}^{-3}$，因此 μ_x^+ 和 μ_v^+ 的量级均为 10^{-2}。为大致了解其中涉及的尺度，时间、长度、电子速度、离子速度、电场和磁场均以.....为单位测量

$$\omega_{\mathrm{pe}}^{-1} \sim 10^{-12}\text{–}10^{-11}\,\mathrm{s}, \qquad L_{\mathrm{DE}} \sim 10^{-4}\,\mathrm{m}, \qquad v_{\mathrm{th},-} \sim 10^7\text{–}10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad v_{\mathrm{th},+} \sim 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

$$E^0 = \frac{m_- L_{\mathrm{DE}} \omega_{\mathrm{pe}}^2}{q} \sim 10^8\text{–}10^9\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}, \qquad B^0 = \frac{m_- \omega_{\mathrm{pe}}}{q} \sim 10^0\text{–}10^1\,\mathrm{T}.$$

（回想一下，$1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot(\mathrm{C}\cdot\mathrm{s}^2)^{-1}$，且 $1\,\mathrm{T} = 1\,\mathrm{kg}\cdot(\mathrm{C}\cdot\mathrm{s})^{-1}$。）实际聚变反应堆中施加的典型外部磁场，大小约为 B^0。事实上，技术上能够产生超过 45 T 的磁场，参见 [28]。因此，无量纲化后的磁场 B 的模大致应为 1。此外，无量纲化后的分布函数 $f^{\pm}$ 以单位 $n_- v^{-3}$ th $\pm$计量。</output>

此外，我们假设初始总电荷为零，即

$$\int_{\mathbb{R}^{d_x}} \rho_{\mathring{f}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^{d_x}}\int_{\mathbb{R}^{d_v}} (\mathring{f}^{+} - \mathring{f}^{-})(x,v)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0,$$

从物理角度来看，这是一个合理的假设，因为非电离原子所含的质子数与电子数相同。我们指出，Vlasov 方程会在时间演化过程中保持这种电荷中性。请注意，无需为 $f^{\pm}$施加边界条件，因为我们没有对粒子规定任何界限（至少在本文的理论部分如此），并且分布函数 $f^{\pm}$ 在所有时刻的相空间中都将具有紧支撑。

尽管 Vlasov–Poisson 系统通常在全维情形 $d_x = d_v = 3$下讨论，我们也将研究其低维版本。这些版本描述了分布函数 $f^{\pm}$ 关于某些空间分量或速度分量保持不变的情形。下文中，我们假设速度维数为 $d_v \in \{2,3\}$，空间维数为 $d_x \in \mathbb{N}$，其中 $d_v - 1 \le d_x \le d_v$。记作 $d = (d_x, d_v)$。此时，外部磁场是一个函数 $B\colon [0,\infty) \times \mathbb{R}^{d_x} \to \mathbb{R}^{d_B}$，满足

$$d_B := \begin{cases} 1 & \text{if } d_v = 2, \\ 3 & \text{if } d_v = 3. \end{cases} \tag{1.5}$$

这是因为，如果速度仅为二维，我们只能考虑垂直于（v_1，v_2）平面的磁场，因此只需指定 B的一个向量分量。此外，内部电场是一个函数 $E_f\colon [0,\infty) \times \mathbb{R}^{d_x} \to \mathbb{R}^{d_x}$。为构建 d维版本的（1.3），我们引入以下记号：

$$F \otimes G := \begin{cases} F \times G & \text{if } F, G \in \mathbb{R}^3, \\ \left(\begin{smallmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{smallmatrix}\right) G & \text{if } F \in \mathbb{R}^2,\ G \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

此外，对于任意向量 $F \in \mathbb{R}^n, G \in \mathbb{R}^m$，当满足 n，$m \in \mathbb{N}$时，我们将它们的和与数量积定义为：将较短的向量用零补齐。这意味着

$$F + G := \begin{cases} F + G & \text{if } n = m, \\ \left(\begin{smallmatrix} F \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + G & \text{if } n < m, \\ F + \left(\begin{smallmatrix} G \\ 0 \end{smallmatrix}\right) & \text{if } n > m, \end{cases} \qquad F \cdot G := \begin{cases} F \cdot G & \text{if } n = m, \\ \left(\begin{smallmatrix} F \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot G & \text{if } n < m, \\ F \cdot \left(\begin{smallmatrix} G \\ 0 \end{smallmatrix}\right) & \text{if } n > m. \end{cases}$$

这样，结合（1.4），我们可以将 d维的弗拉索夫–泊松系统（1.3）表述为

$$\partial_t f^{\pm} + \mu_x^{\pm} v \cdot \partial_x f^{\pm} + \mu_v^{\pm}(E_f + \mu_x^{\pm} v \otimes B) \cdot \partial_v f^{\pm} = 0, \tag{1.6a}$$

$$f^{\pm}|_{t=0} = \mathring{f}^{\pm}. \tag{1.6b}$$

文献从许多不同角度研究了 Vlasov–Poisson 系统。Kurth [38] 首次证明了标准 Vlasov– Poisson 系统（即具有 $B \equiv 0$）在紧支撑且连续可微的初始数据下的局部经典适定性结果。随后，Batt [7] 证明了一项延拓判据：只要速度/动量支集受到控制，这类局部时间解就可以延拓。在 $d = (2,2)$ 且 $B \equiv 0$ 的情形下，Ukai 与 Okabe [54] 以及 Wollman [57]（几乎同时）证明了唯一全局经典解的存在性。在全维情形 $d = (3,3)$（仍具有 $B \equiv 0$）下，唯一全局经典解的整体存在性由以下研究分别且

同时在 Pfaffelmoser 的开创性研究 [44] 和 Lions 与 Perthame 的研究 [39]中得到证明。值得一提的是，这两种证明所采用的技术大不相同。Schaeffer 在 [48]中给出了 Pfaffelmoser 证明的大幅简化版本。随后，Knopf [33, 34] 改编了 Pfaffelmoser/Schaeffer 的证明，$d =$ 以证明在维数，的情况下，即使存在一类非平凡外部磁场，也能得到整体存在性结果。Knopf 与 Weber [37]证明了在 $d =$，的情形下，对非平凡磁场也有类似的整体存在性结果。关于外部磁场作用下 *Vlasov–Poisson* 系统的稳态（即时间无关解），另请参见 [8, 12, 35, 37, 45, 50] 及其中的参考文献。此外，磁约束问题（包括略有不同的等离子体模型）也曾在例如 [14, 29, 43, 59]中得到研究。

此外，Knopf [33, 34] 以及 Knopf 与 Weber [36]研究了以外部磁场作为控制量的 Vlasov–Poisson 系统最优控制问题。随后，Weber [55, 56]研究了更复杂的 Vlasov–Maxwell 方程的最优控制问题。我们还要提及，Glass [26] 以及 Glass 与 Han-Kwan [27] 研究了 Vlasov–Poisson 系统的可控性（在控制理论的背景下）。

在本研究中，我们扩展了 [33, 34] 中发展的最优控制理论，使其更适用于数值研究。具体而言，我们证明了可容许控制所需的正则性条件可以放宽。这使得一阶最优性条件更为简单，也更易于通过数值方法处理。为求解最优性系统，我们采用了 Bartsch [3, 6]基于蒙特卡罗框架开发的粒子网格法。

本文结构安排如下：第2节首先介绍一些记号和预备知识。随后，在第3.1 小节和第3.2小节中，我们分别讨论磁场属于 C^1 和 $W^{1,\infty}$时 *Vlasov–Poisson* 系统的适定性。由此可以定义控制到状态算子，并在第3.3小节中展示该算子的主要性质。在第3.4小节中，我们介绍可容许控制集合；在第3.5小节中，我们在集体控制问题框架下提出力场中的动力学最优控制问题。具体而言，我们阐述代价泛函的构造，其中包括集体轨迹项、最终构型贡献项，以及控制的惩罚项。针对这一问题，我们随后证明给定控制空间中解的存在性。接着，在第3.7节中，我们采用伴随方法，为局部最优控制推导一阶必要最优性条件。在第4节中，我们详细讨论用于求解最优性系统的数值方法。具体而言，我们说明如何计算代价泛函的梯度，并以此实现非线性共轭梯度方法（例如，参见 [11]）。在第5节中，我们给出数值实验结果，验证了所实现方法的有效性。对于 Vlasov–Poisson 系统的数值求解器，我们采用著名的 *Landau* 阻尼效应以及双流不稳定性效应作为测试案例。此外，我们通过求解等离子体磁约束最优控制问题，展示优化方法的功能。与无控制情形相比，我们确实观察到在规定的时间区间内，受控等离子体实现了约束。

2. 符号与预备知识。 在全文中，为简洁起见，我们将在方便时记作 $z = (x,\ v) \in \mathbb{R}^{d_x} \times \mathbb{R}^{d_v}$。

对于由两个函数构成的任意元组 $f = (f^-,\ f^+)$，f的范数均指这两个分量的范数之和，即

$$\|f\|_X := \|f^-\|_X + \|f^+\|_X$$

对于任意范数 $\|\cdot\|_X$。

对于任意具有紧支撑且零均值的函数 $\varrho \in L^1(\mathbb{R}^{d_x})$，我们记作

$(-\Delta_x)^{-1}\varrho = U_\varrho$ 表示泊松方程的解

$$-U_\varrho'' = \varrho \quad \text{with} \quad \lim_{x\to-\infty} U_\varrho(x) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{x\to\infty} U_\varrho(x) \text{ exists in } \mathbb{R}$$

若 $d_x = 1$ 或

$$-\Delta_x U_\varrho = \varrho \quad \text{with} \quad U_\varrho(x) \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty$$

若 $d_x \in \{2,3\}$，分别。

我们首先给出一些重要的估计，稍后将用这些估计根据底层电荷密度来界定自洽电场。

LEMMA 2.1. 令 $d_x \in \{1,2,3\}$ 且令 $\varrho \in L^2(\mathbb{R}^{d_x})$ 满足 支撑 $\varrho \subset B_r(\mathbb{R}^{d_x})$，其中存在某个$r > 0$ 以及 $\int_{\mathbb{R}^{d_x}} \varrho(x)\mathrm{d}x = 0$。此外，我们定义

$$E(x) := -\nabla_x(-\Delta_x)^{-1}\varrho(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} \varrho(y)\,\mathrm{d}y & \text{if } d_x = 1, \\ \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)}{|x-y|^2}\varrho(y)\,\mathrm{d}y & \text{if } d_x = 2, \\ \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)}{|x-y|^3}\varrho(y)\,\mathrm{d}y & \text{if } d_x = 3. \end{cases}$$

对所有 $x \in \mathbb{R}^{d_x}$均成立。于是有如下结论：

(a) $E \in L^2(\mathbb{R}^{d_x})$，且存在常数 $C = C(d_x, r) > 0$ 使得

$$\|E\|_{L^2(\mathbb{R}^{d_x})} \le C\|\varrho\|_{L^2(\mathbb{R}^{d_x})}.$$

(b) 若 $d_x = 1$，则 $E \in L^\infty(\mathbb{R}^{d_x})$ 满足

$$\|E\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{d_x})} \le \|\varrho\|_{L^1(\mathbb{R}^{d_x})}.$$

若 $d_x \in \{2,3\}$，并且 $\varrho \in L^\infty(\mathbb{R}^{d_x})$，则 $E \in L^\infty(\mathbb{R}^{d_x})$ 满足

$$\|E\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{d_x})} \le C\|\varrho\|_\infty$$

对于某个常数 $C = C(d_x, r) > 0$。

(c) 若还满足 $\varrho \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^{d_x})$，则 $E \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^{d_x})$ 满足

$$\|E\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^{d_x})} \le c\Big[\big(1 + \|\varrho\|_\infty\big)\big(1 + \ln_+ \|\nabla\varrho\|_\infty\big) + \|\varrho\|_1\Big]$$

对于某个常数 $c = c(d_x, r) > 0$。

证明。 在情形 $d_x = 1$下，证明是直接的。对于 $d_x = 3$，(a) 和 (b) 例如已在 [34, 引理 2(c)], 中给出，且 (c) 已在 [46, 引理 P1]中证明。情形 $d_x = 2$可仿照情形 $d_x = 3$证明。 □

需要指出的是，在上述引理的若干处，关于 ϱ 的假设可以放宽，而在情形 $d_x \in \{1,2\}$ 下关于 E 的估计可以改进。不过，这些结果已足以满足后续使用的需要，并使我们能够同时处理所有情形 $d_x \in \{1,2,3\}$。

3. 最优控制问题的分析。本节考虑有限时间范围 $[0,T]$，其中 $T > 0$，以及相空间 $\mathbb{R}^D$，其中 $D := d_x + d_v$，这里 $d := (d_x, d_v) \in \{(1,2),(2,2),(2,3)\}$。我们研究由 (1.6) 控制的分布函数 $f^\pm$ 的演化。对于任意固定的半径 $R_x, R_v > 0$，定义

$$\Omega_x := B^{d_x}_{R_x}(0), \quad \Omega_v := B^{d_v}_{R_v}(0), \quad \Omega := \Omega_x \times \Omega_v,$$

其中，上标表示球的维数。我们进一步固定任意的初始数据 $\mathring{f} = (\mathring{f}^-, \mathring{f}^+)$，满足 $\mathring{f}^\pm \in C^1_c(\mathbb{R}^D;\ \mathbb{R}^+_0)$ 且 $\operatorname{supp} \mathring{f}^\pm \subset \Omega$。我们将看到，最终时刻$T > 0$ 可以作如下选择，使解的支集始终包含在 Ω 中。在此背景下，关键在于该 T 选择不依赖于外部磁场的选取。因此，只需在 $[0,T] \times \Omega_x$上定义外部磁场。于是，它是一个函数 $B\colon [0,T] \times \Omega_x \to \mathbb{R}^{d_B}$，其中 d_B由式（1.5）给出。

3.1. 磁场属于 C^1 类时的经典适定性。 我们首先证明，对于连续可微的外部磁场，Vlasov–Poisson 系统（1.6）在 $[0,T]$ 上具有经典适定性。特别地，最终时刻 T 可以选取为独立于 B，从而使 $f^\pm$ 的支集始终包含在 Ω 中。 —

PROPOSITION 3.1（磁场属于 C^1 类时的经典适定性）。存在一个终止时间 $T>0$，它仅取决于 f、R_x、R_v 和 d，使得对于所有磁场 $B\in C^1([0,T]\times\Omega_x;\,\mathbb{R}^{d_B})$，*Vlasov–Poisson 系统 (1.6)* 关于初始数据 $\mathring{f}$ 存在唯一的经典解 $f=(f^-,f^+)$，且 $f^\pm\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^D)$；对于所有 $t\in[0,T]$，均有 $\operatorname{supp} f^\pm(t)\subset\Omega$。 —

证明。首先，令 $T>0$ 任意。由于 $B\in C^1([0,T]\times\Omega_x;\,\mathbb{R}^{d_B})$，它可以延拓为函数 $B\in C_b^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d_x};\,\mathbb{R}^{d_B})$，这意味着 $B|_{[0,T]\times\Omega_x}=B$。 —

我们首先假设 f 是 Vlasov–Poisson 系统（1.6）的经典解。我们用 $Z^\pm=(X^\pm,\,V^\pm)(s,\,t,\,z$表示特征系统的唯一解

$$\dot{x}(s)=v(s),\quad \dot{v}(s)=\mu_v^\pm E_f\big(s,x(s)\big)+\mu_x^\pm\mu_v^\pm v(s)\otimes\overline{B}\big(s,x(s)\big) \tag{3.1}$$

分别满足初始条件 $Z^\pm(t,\,t,\,z)=z$；对任意给定的 $z=(x,\,v)\in\mathbb{R}^6$均成立。由于 $\operatorname{supp}\mathring{f}\subset\Omega=\Omega_x\times\Omega_v$，存在仅依赖于 $\mathring{f}$ 的 $R_x^0\in]0,\,R_x[$ 和 $R_v^0\in]0,\,R_v[$，使得 $\operatorname{supp}\mathring{f}\subset B_{R_x^0}(0)\times B_{R_v^0}(0)$。为界定 $f^\pm$ 的支集，我们定义以下量

$$\mathbb{X}(t):=\max_\pm\Big\{|x|\;\Big|\;\exists v\in\mathbb{R}^{d_v},\,s\in[0,t]:(x,v)\in\operatorname{supp}f^\pm(s)\Big\}, \tag{3.2a}$$

$$\mathbb{V}(t):=\max_\pm\Big\{|v|\;\Big|\;\exists x\in\mathbb{R}^{d_x},\,s\in[0,t]:(x,v)\in\operatorname{supp}f^\pm(s)\Big\} \tag{3.2b}$$

只要解存在，对所有 t 均成立。由于 f 沿特征流保持不变，这些量也可以表示为

$$\mathbb{X}(t):=\max_\pm\Big\{|X(s,0,x,v)|\;\Big|\;s\in[0,t]\wedge\exists v\in\mathbb{R}^{d_v}:(x,v)\in\operatorname{supp}\mathring{f}\Big\}, \tag{3.3}$$

$$\mathbb{V}(t):=\max_\pm\Big\{|V(s,0,x,v)|\;\Big|\;s\in[0,t]\wedge\exists x\in\mathbb{R}^{d_x}:(x,v)\in\operatorname{supp}\mathring{f}\Big\}. \tag{3.4}$$

在这 个下文中，我们用 C 表示仅依赖于 $\mathring{f}$ a
可以通 rd 以 with
行改变其取值。

情形 $d=(2,3)$。磁场 B 存在唯一全局经典解，这一点已在 [37, 定理 3.1] 中证明。此外，该定理的证明还表明

$$\mathbb{X}(t)\le R_x^0+\int_0^t\mathbb{V}(s)\,\mathrm{d}s\le R_x^0+t\,\mathbb{V}(t), \tag{3.5}$$

$$\mathbb{V}(t)\le\left[(1+R_v^0)^{\frac14}+C\int_0^t(1+s)^{\frac14}\,\mathrm{d}s\right]^4-1 \tag{3.6}$$

对所有 $t\ge0$ 均成立。注意，(3.5) 和 (3.6) 的右端均为递增函数，并分别在 $t=0$ 处取值 R_x^0 和 R_v^0。因此，选取足够小的 T，即可确保对所有 $t\in[0,T]$，$\mathbb{X}(t)<R_x$ 且 $\mathbb{V}(t)<R_v$。需要指出的是，T 的选取仅取决于 $\mathring{f}$ 和 d，因为 R_x^0、R_v^0 和 C 至多取决于 $\mathring{f}$ 和 d。因此，解 f 仅取决于 $B|_{[0,T]\times\Omega_x}=B$，而不取决于延拓 B。

该情形 $d=(2,\,2)$。这里可以沿用情形 $d=(2,\,3)$ 中的相同思路。事实上，处理起来更简单，因此我们省略细节。

情形 $d=(1,\,2)$。这一情形甚至比高维情形更简单，但由于我们稍后将对这一情形进行数值研究，因此在此给出详细说明。与高维情形一样，可通过标准的不动点论证（例如参见 [46, 第 1.2] 节）证明存在一个局部经典解 f，该解在其右极大时间区间 $[0,T_{\max}[$ 上存在，且对应于磁场 B。此外，众所周知，为了证明 $T_{\max}=\infty$，

只需证明 $\mathbb{V}(t)$ 在 $[0,T_{\max}[$ 的任意有限子区间上保持有界（例如参见定理 [46, 定理 2。1]）。

因此，令 $0\le t\le s<T_{\max}$ 和 $z=(x,\ v)\in \operatorname{supp}\ \mathring{f}^{-}\cup \operatorname{supp}\ \mathring{f}^{+}$ 为任意元素。利用微积分基本定理，可得

$$\tfrac{1}{2}|V^{\pm}(s,t,z)|^2\le \tfrac{1}{2}(R_v^0)^2+C\int_t^s |V^{\pm}(\tau,t,z)|\,\|E_f(\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{d_x})}\,\mathrm{d}\tau. \tag{3.7}$$

注意，含磁场的项为零，因为

$$V^{\pm}(s,t,z)\cdot\big(V^{\pm}(s,t,z)\otimes \overline{B}(s,X^{\pm}(s,t,z))\big)=0.$$

利用引理 2.1(b)在以下情形 $d_x=1$，并回忆 f 沿保持测度的特征流为常数，由此可得

$$\|E_f(\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{d_x})}\le \|\rho_f(\tau)\|_{L^1(\mathbb{R}^{d_x})}\le \|f(\tau)\|_{L^1(\mathbb{R}^D)}=\|\mathring{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^D)}$$

对所有 $\tau\in[0,T_{\max}[$ 均成立。因此可得

$$\tfrac{1}{2}|V^{\pm}(s,t,z)|^2\le \tfrac{1}{2}(R_v^0)^2+C\int_t^s |V^{\pm}(\tau,t,z)|\,\mathrm{d}\tau. \tag{3.8}$$

应用 Gronwall 引理 [19, 定理 5], 的二次型版本，可推出

$$|V^{\pm}(s,t,z)|\le R_v^0+C(s-t) \tag{3.9}$$

利用微积分基本定理，我们进一步推导出估计

$$|X^{\pm}(s,t,z)|\le R_x^0+C\int_t^s |V(\tau,t,z)|\,\mathrm{d}\tau\le R_x^0+C(s-t)+C(s-t)^2. \tag{3.10}$$

结合（3.9）和（3.10），因此可得

$$\mathbb{X}(t)\le R_x^0+Ct+Ct^2,\quad \mathbb{V}(t)\le R_v^0+Ct$$

对所有 $t\in[0,T_{\max}[$ 均成立。因此，我们得出结论：$T_{\max}=\infty$。此外，通过将 T 取得足够小，可确保对所有 $t\in[0,T]$，$\mathbb{X}(t)<R_x$ 和 $\mathbb{V}(t)<R_v$。由于常数 C 仅取决于 $\mathring{f}$ 和 d，因此 T 的选取也仅取决于这些量。特别地，解 f 仅取决于 $B|_{[0,T]\times\Omega_x}=B$，而不取决于扩展 B。 □

Remark 3.2. 我们指出，目前尚不清楚能否以相同方式处理情形 $d=(3,3)$。仅依照 *[33, 定理 13],* 的证明，只能得到估计

$$\mathbb{V}(t)\le C_B(1+t)^{21/2} \tag{3.11}$$

$\mathring{}$可以建立，其中常数 C_B 依赖于 f、R_x、R_v和$\|B\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega_x))}$。基于这一不等式，终止时间 T 无法选取为与$\|B\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega_x))}$ 无关。然而，由于我们希望使用定义在区间 $[0,T]$ 上的磁场，其中$T>0$ 应当与 B 的选取无关，这就造成了先有鸡还是先有蛋的问题。一个有趣的开放问题是，在情形 $d=(3,3)$ 下，能否也建立形式如 *(3.11)* 且常数与 B 无关的估计。

Lemma 3.3（经典解的一致有界性）。令 $K>0$ 为任意值，令$B\in C^1([0,T]\times\Omega_x;\ \mathbb{R}^{d_B})$，其中$\|B\|_{W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega_x)}\le K$，并令 f 为初始数据 f 对应的$\mathring{}$经典解（*1.6*）。那么，存在一个仅依赖于 $\mathring{f}^{\pm}$、R_x、R_v、d 和 K 的常数 $c>0$，使得

$$\|f^{\pm}\|_{W^{1,\infty}([0,T]\times\mathbb{R}^D)}\le c.$$

证明。由于 f 沿特征流保持不变，因此有 $\|f^{\pm}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)} = \|\mathring{f}^{\pm}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)}$ 对所有 $t \in [0,T]$ 均成立。此外，利用 引理 2.1(b) 和 (c) 中给出的电场估计，可以完全按照 [34,引理 6] 中的方法，得到 $\|D_{(x,v)} f^{\pm}\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^D)}$ 的一致有界性。 □

LEMMA 3.4（经典解的局部 *Lipschitz* 估计）。设 $K > 0$ 为任意值。对于 $i \in \{1,2\}$，设 $B_i \in C^1([0,T]\times\Omega_x;\ \mathbb{R}^{d_x})$ 满足 $\|B_i\|_{W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega_x)} \le K$，并设 $\mathring{f}_i$ 表示初始数据为 f 的方程 *(1.6)* 的相应经典解。那么，存在一个常数 $L > 0$，它仅依赖于 R_x、R_V、$\mathring{f}^{\pm}$ 和 K，使得

$$\|f_1^{\pm} - f_2^{\pm}\|_{C([0,T];L^2(\mathbb{R}^D))} \le L\,\|B_1 - B_2\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^D)}.$$

证明。记 $\bar{B} := B_1 - B_2$ 和 $\bar{f}^{\pm} = f_1^{\pm} - f_2^{\pm}$，并令 $C > 0$ 表示一个通用的常数，它仅依赖于 R，f 和 K，且其值可能随行而变化。于是，$\bar{f}^{\pm}$ 满足弗拉索夫方程

$$\partial_t \bar{f}^{\pm} + \mu_x^{\pm} v\cdot\partial_x \bar{f}^{\pm} + \mu_v^{\pm}(E_{f_1} + \mu_x^{\pm} v\otimes B_1)\cdot\partial_v \bar{f}^{\pm} + \mu_v^{\pm}(E_{\bar{f}} + \mu_x^{\pm} v\otimes \bar{B})\cdot\partial_v f_2^{\pm} = 0,$$

现在我们分别将这些方程乘以 $\bar{f}^{\pm}$。对所得方程在 $\mathbb{R}^D$ 上积分，并利用分部积分以及引理 2.1(a) 和引理 3.3，可得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\bar{f}^{\pm}\|_{L^2(\mathbb{R}^D)}^2 &= -2\int_{\mathbb{R}^D} \big(\mu_v^{\pm}(E_{\bar{f}} + \mu_x^{\pm} v\otimes\bar{B})\cdot\partial_v f_2^{\pm}\big)\bar{f}^{\pm}\,\mathrm{d}z \\
&\le C\big(\|E_{\bar{f}}\|_{L^2(\mathbb{R}^D)} + \|\bar{B}\|_{L^2(\mathbb{R}^D)}\big)\|\partial_v f_2^{\pm}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^D)}\|\bar{f}^{\pm}\|_{L^2(\mathbb{R}^D)} \\
&\le C\|\bar{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^D)}^2 + C\|\bar{B}\|_{L^2(\mathbb{R}^D)}\|\bar{f}^{\pm}\|_{L^2(\mathbb{R}^D)}
\end{aligned}$$

在 $[0,T]$ 上。将此估计从 0 到 t 对时间积分后，我们先使用标准版本，再使用 Gronwall 引理的二次版本 [19, 定理 5]，从而得出结论。 □

3.2. 磁场属于 $W^{1,\infty}$ 类时的强适定性。 现在我们证明，对于 Lipschitz连续（即属于 $W^{1,\infty}$ 类）的外部磁场，弗拉索夫–Poisson 系统（1.6）在 $[0,T]$ 上具有强适定性。

THEOREM 3.5（磁场属于 $W^{1,\infty}$ 类时的强适定性）。存在$T > 0$，仅依赖于 $\mathring{f}^{\pm}$, R_x, R_v和 d，使得对于所有 $B \in W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega_x;\ \mathbb{R}^{d_B})$，均存在弗拉索夫–*Poisson* 系统（*1.6*）的唯一强解 $f = (f^-, f^+)$，满足 $f^{\pm} \in W^{1,\infty}\big([0,T]\times\mathbb{R}^D\big)$，其初始数据为 $\mathring{f}$，且对所有 $t \in [0,T]$，*supp* $f^{\pm}(t) \subset \Omega$。

证明。任取 $B \in \overline{W^{1,\infty}}([0,T]\times\Omega_x;\ \mathbb{R}^{d_B})$。现在我们选取一个序列 $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^1([0,T]\times\Omega_x;\ \mathbb{R}^{d_B})$，使得

$$\begin{aligned}
&\|B_k\|_{W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega_x)} \le \|B\|_{W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega_x)} \quad \text{for all } k\in\mathbb{N}, \\
&\text{and} \quad B_k \to B \quad \text{in } L^2([0,T]\times\overline{\Omega_x}) \text{ as } k\to\infty.
\end{aligned}$$

根据命题 3.1，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在 Vlasov–Poisson 系统（1.6）在区间 $[0,T]$ 上的唯一经典解 $f_k = (f_k^-,\ f_k^+)$（其中 T 与 k 无关），其初始数据为 $\mathring{f}$，且对所有 $t \in [0,T]$，$\mathrm{supp}\ f_k^{\pm}(t) \subset \Omega$。由引理 3.3，我们进一步得知，序列 $(f_k^{\pm})_{k\in\mathbb{N}}$ 在空间 $W^{1,\infty}\big([0,T]\times\mathbb{R}^D\big)$ 中有界。因此，存在 $f = (f^-,\ f^+)$，使得 $f \in W^{1,\infty}\big([0,T]\times\mathbb{R}^D\big)$

$$f_k^{\pm} \overset{*}{\rightharpoonup} f^{\pm}, \quad \partial_t f_k^{\pm} \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t f^{\pm}, \quad \partial_{z_i} f_k^{\pm} \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_{z_i} f^{\pm} \quad \text{in } L^\infty\big([0,T]\times\mathbb{R}^D\big),$$

对所有 $i \in \{1,\dots,D\}$，当 $k\to\infty$ 沿着一个未经重新标记的子序列变化时。特别地，由于对所有 $t \in [0,T]$，$\mathrm{supp}\ f_k^{\pm}(t) \subset \Omega$，因此这意味着对所有 $t \in [0,T]$，$\mathrm{supp}\ f^{\pm}(t) \subset \overline{\Omega}$。现在令 $r > 0$ 使得 $\Omega \subset B_r(0)$。此外，由引理 3.3 可知，序列 $(f_k^{\pm})_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $W^{1,8}\big([0,T]\times B_r(0)\big)$ 中也有界。由于 $8 > D+1$，嵌入

$W^{1,8}([0,T]\times B_r(0)) \hookrightarrow C([0,T]\times B_r(0))$是紧的。由于 $f^{\pm}$的支集以及所有 $f_k^{\pm}$的支集始终包含在 $\Omega \subset B_r(0)$中，因此我们有

$$f_k^{\pm} \to f^{\pm} \quad \text{in } C([0,T]\times\mathbb{R}^D)$$

作为 $k\to\infty$ 子序列提取的结果。特别是，这证明 f 满足初始条件。利用 引理 2.1(b)和 (c)，我们进一步得到

$$E_{f_k} \to E_f \quad \text{in } C([0,T]\times\overline{\Omega}_x;\mathbb{R}^{d_x}).$$

将针对 1.6所写的 Vlasov 方程（ B_k 和 f_k ）乘以任意测试函数 $\varphi\in C_c^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^D)$，并对所得方程在 $[0,T]\times\mathbb{R}^D$上积分，我们可以利用上述收敛性取极限 $k\to\infty$。借助变分法基本引理，我们得出 $f\in C([0,T]\times\mathbb{R}^D)\cap W^{1,\infty}([0,T]\times\mathbb{R}^D)$ 几乎处处满足 Vlasov 方程（ 1.6），其中 $[0,T]\times\mathbb{R}^D$。这意味着 f是磁场 B 和初始数据 $_\circ f$对应的 Vlasov–Poisson 系统强解，并满足所需的支集条件。

该强解的唯一性可通过一个直接的 Gronwall 论证得出，这与引理 3.4证明中的论证类似。因此，证明完成。 □

3.3. 控制到状态算子及其性质。

Definition 3.6（控制到状态算子）。对于任意磁场 $B\in W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega_x;\ \mathbb{R}^{d_B})$，令 $f_B=(f_B^-,\ f_B^+)$满足 $f_B^{\pm}\in W^{1,\infty}([0,T]\times\mathbb{R}^D)$，并为 *Vlasov–Poisson* 系统(1.6)的唯一强解。则算子

$$f_\cdot = (f_\cdot^-, f_\cdot^+) : W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega_x;\mathbb{R}^{d_B}) \to W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega)^2, \quad B\mapsto f_B$$

称为控制到状态算子。

现在我们将推导控制到状态算子的若干重要性质。特别地，由于缺乏更高阶正则性，我们将证明关于比 $W^{1,\infty}$-范数更弱的范数的局部 Lipschitz 连续性和 Fr´echet 可微性。为此，回顾一下， $W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega)\subset C([0,T];\ L^2(\mathbb{R}^D))\subset C([0,T];\ H^{-1}(\mathbb{R}^D))$，这里的嵌入是连续嵌入（并通过在 Ω 外延拓为零来扩展）。

Theorem 3.7（有界性与局部 Lipschitz 连续性）。任取 $K>0$ 。°则存在仅依赖于 f、 R_x、 R_v、 d 和 K 的常数 C、$L\geq 0$，使得：

(a) 对所有 $B\in W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega_x;\ \mathbb{R}^{d_B})$，若满足$\|B\|_{W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega_x)}\leq K$，

$$\|f_B^{\pm}\|_{W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega)}\leq C.$$

(b) 对所有 B_1、 $B_2\in W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega_x;\ \mathbb{R}^{d_B})$，若满足$\|B_i\|_{W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega_x)}\leq K$，其中 $i=1$取 2，2，

$$\|f_{B_1}^{\pm}-f_{B_2}^{\pm}\|_{C([0,T];L^2(\mathbb{R}^D))}\leq L\|B_1-B_2\|_{L^2([0,T]\times\Omega_x)}.$$

证明。与定理 3.5的证明一样，我们用一个序列 $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset C^1([0,T]\times\Omega_x;\ \mathbb{R}^{d_B})$ 逼近任意 $B\in W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega_x;\ \mathbb{R}^{d_B})$，该序列满足

$$\begin{aligned}&\|B_k\|_{W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega_x)}\leq\|B\|_{W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega_x)}\leq K \quad \text{for all } k\in\mathbb{N},\\ &\text{and} \quad B_k\to B \quad \text{in } L^2([0,T]\times\overline{\Omega_x}) \text{ as } k\to\infty.\end{aligned}$$

然后，如定理 3.5的证明中所示，相应的经典解 f_{B_k} 满足

$$\begin{aligned}&\|f_{B_k}^{\pm}\|_{W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega)}\leq c,\\ &f_{B_k}^{\pm}\overset{*}{\rightharpoonup} f_B^{\pm},\quad \partial_t f_{B_k}^{\pm}\overset{*}{\rightharpoonup}\partial_t f_B^{\pm},\quad \partial_{z_i} f_{B_k}^{\pm}\overset{*}{\rightharpoonup}\partial_{z_i} f_B^{\pm} \quad \text{in } L^\infty\big([0,T]\times\mathbb{R}^D\big),\\ &\text{and} \quad f_{B_k}^{\pm}\to f_B^{\pm} \quad \text{in } C([0,T]\times\mathbb{R}^D)\end{aligned}$$

经过子序列提取。因此，(a) 可由 引理 3.3以及 * 的弱下半连续性 $L^\infty([0,T]\times\Omega)$-范数得出，而 (b) 则可由 引理 3.4 通过取极限 $k\to\infty$得出。

□

THEOREM 3.8（弗雷歇可微性）。控制到状态算子按如下意义是弗雷歇可微的：对于每个 $B \in W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega_x;\mathbb{R}^{d_B})$，存在一个线性算子

$$\begin{cases} f_B'[\cdot] = \big(f_B'^{-}[\cdot], f_B'^{+}[\cdot]\big) : W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega_x;\mathbb{R}^{d_B}) \to W^{1,\infty}([0,T]\times\mathbb{R}^D)^2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad H \mapsto f_B'[H] \end{cases}$$

使得

$$\frac{\|f_{B+H}^{\pm} - f_B^{\pm} - f_B'^{\pm}[H]\|_{C([0,T];H^{-1}(\mathbb{R}^D))}}{\|H\|_{L^2([0,T]\times\Omega_x)}} \to 0 \quad as\ \|H\|_{L^2([0,T]\times\Omega_x)} \to 0.$$

证明。任取 $B,\ H \in W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega_x;\mathbb{R}^{d_B})$。设 $f_B'[H] \in H^1([0,T]\times\mathbb{R}^D)$ 为该系统的唯一强解

$$\begin{cases} \partial_t f^{\pm} + \mu_x^{\pm} v\cdot\partial_x f^{\pm} + \mu_v^{\pm}(E_{f_B} + \mu_x^{\pm} v\otimes B)\cdot\partial_v f^{\pm} = -\mu_v^{\pm}(E_f + \mu_x^{\pm} v\otimes H)\cdot\partial_v f_B^{\pm}, \\ f^{\pm}|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

并设 $f_{\mathcal{R}}[H] \in H^1([0,T]\times\mathbb{R}^D)$ 为该系统的唯一强解

$$\begin{cases} \partial_t f^{\pm} + \mu_x^{\pm} v\cdot\partial_x f^{\pm} + \mu_v^{\pm}(E_{f_B} + \mu_x^{\pm} v\otimes B)\cdot\partial_v f^{\pm} = -\mu_v^{\pm} E_f\cdot\partial_v f_B^{\pm} + \mathcal{R}, \\ f^{\pm}|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

其中

$$\mathcal{R} := -\mu_v^{\pm}(E_{f_{B+H}-f_B} - \mu_x^{\pm} v\otimes H)\cdot\big(\partial_v f_{B+H}^{\pm} - \partial_v f_B^{\pm}\big).$$

我们指出，这些强解 $f_B'[H]$ 和 $f_{\mathcal{R}}[H]$ 的存在性与唯一性 [34, 可完全按照 2], 推论 $d=$中的方法建立；该推论研究了如下情形下此类线性弗拉索夫方程的强适定性（3，3）。为进一步了解 $f_B'^{\pm}[H]$（t）对所有 $t\in[0,T]$的支集，我们定义 $Z_B^{\pm} =$（$X_B^{\pm}$，$V_B^{\pm}$）（s，t，z）表示特征系统的唯一解

$$\dot{x}(s) = v(s), \quad \dot{v}(s) = \mu_v^{\pm} E_{f_B}\big(s,x(s)\big) + \mu_x^{\pm}\mu_v^{\pm} v(s)\otimes B\big(s,x(s)\big) \tag{3.14}$$

分别满足初始条件 $Z_B^{\pm}(t,\ t,\ z) = z$，对于任意给定的 $z =(x,\ v)\in\mathbb{R}^6$。按照 [34, 推论 2], 的证明，我们可推出 $f_B'^{\pm}[H]$ 可表示为

$$f_B'^{\pm}[H](t,z) = -\int_0^t \big[\mu_v^{\pm}(E_f + \mu_x^{\pm} v\otimes H)\cdot\partial_v f_B^{\pm}\big]\big(s, Z_B^{\pm}(s,t,z)\big)\,\mathrm{d}s$$

对于所有 $(t,\ z)\in[0,T]\times\mathbb{R}^D$。回想一下，$f_B$ 沿特征流 Z_B保持不变，由此可得

$$\operatorname{supp} f_B'^{\pm}[H](t) \subseteq \bigcup_{s\in[0,T]} \operatorname{supp} f_B^{\pm}\big(s, Z_B(s,t,\cdot)\big) = \operatorname{supp} f_B^{\pm}(t) \subseteq \overline{\Omega}$$

对于所有 $t\in[0,T]$。类似地，我们还得到 $\operatorname{supp} f_{\mathcal{R}}^{\pm}[H](t)\subset\Omega$ 对于所有 $\overline{t}\in[0,T]$。此外，容易验证 $f_{B+H}^{\pm} - f_B^{\pm} - f_B'^{\pm}[H]$ 是方程 (3.13) 的一个强解，因此，由唯一性可知，

$$f_{B+H}^{\pm} - f_B^{\pm} - f_B'^{\pm}[H] = f_{\mathcal{R}}^{\pm}[H]. \tag{3.15}$$

接下来需要为 $f_{\mathcal{R}}[H]$ 推导一个合适的界。为了估计 $\|f_{\mathcal{R}}[H]\|_{C([0,T];H^{-1}(\mathbb{R}^D))}$，我们采用与 [47], 中类似的思路；在该处，这类技巧曾用于弱

解。对于任意 $t \in [0,T]$，令 $\phi(t,\cdot) = (\phi^-(t,\cdot)\ \phi^+(t,\cdot)) \in H^1(\mathbb{R}^D)^2$ 表示泊松方程的唯一解

$$\begin{cases} -\Delta_z \phi^\pm(t,\cdot) = f^\pm_{\mathcal{R}}[H](t,\cdot) & \text{in } \mathbb{R}^D, \\ \lim\limits_{|z|\to\infty} \phi^\pm(t,z) = 0, \end{cases}$$

其中，Δ_z 表示 $\mathbb{R}^D$中的拉普拉斯算子。根据 $f_{\mathcal{R}}[H]$的正则性，我们可借助椭圆正则性理论推得 $\phi \in H^1(0,\ T;\ H^2(\Omega)) \cap L^2(0,\ T;\ H^3(\Omega))$。现在令$\varphi \in H^1(\mathbb{R}^D)$和 $t \in [0,T]$ 任意。利用分部积分，我们得到

$$\begin{aligned} \left|\left(f^\pm_{\mathcal{R}}[H](t),\varphi\right)_{L^2(\mathbb{R}^D)}\right| &= \left|\left(-\Delta_z\phi^\pm(t),\varphi\right)_{L^2(\mathbb{R}^D)}\right| \\ &= \left|\left(\nabla_z\phi^\pm(t),\nabla_z\varphi\right)_{L^2(\mathbb{R}^D)}\right| \le \|\nabla_z\phi^\pm(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^D)}\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^D)}. \end{aligned}$$

此处，∇_z 表示 $\mathbb{R}^D$中的梯度算子。注意，由于解 $\phi^\pm$ 在 $|z|\to\infty$时衰减得足够快，分部积分不会产生任何边界项。对所有满足$\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \le 1$ 的 $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^D)$以及所有 $t \in [0,T]$取上确界，我们得出

$$\|f^\pm_{\mathcal{R}}[H]\|_{C([0,T];H^{-1}(\mathbb{R}^D))} \le \|\nabla_z\phi^\pm\|_{C([0,T];L^2(\mathbb{R}^D))}. \tag{3.16}$$

因此，剩下的工作是对该不等式右侧推导一个合适的界。注意到 $f^\pm_{\mathcal{R}}[H](0,\ \cdot) = 0$ 意味着 $\phi^\pm(0,\ \cdot) = 0$。利用 $\phi^\pm$，系统（3.13）可改写为

$$\begin{cases} -\partial_t\Delta_z\phi^\pm - \mu^\pm_x v\cdot\partial_x\Delta_z\phi^\pm - \mu^\pm_v(E_{f_B} + \mu^\pm_x v\otimes B)\cdot\partial_v\Delta_z\phi^\pm = \mu^\pm_v E_{\Delta_z\phi}\cdot\partial_v f^\pm_B + \mathcal{R}, \\ \phi^\pm|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

两边乘以 $\phi^\pm$ 并使用微积分基本定理，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\nabla_z\phi^\pm(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^D)} = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^D} \big\{&\mu^\pm_x v\cdot\partial_x\Delta_z\phi^\pm\,\phi^\pm + \mu^\pm_v(E_{f_B} + \mu^\pm_x v\otimes B)\cdot\partial_v\Delta_z\phi^\pm\,\phi^\pm \\ &+ \mu^\pm_v E_{\Delta_z\phi}\cdot\partial_v f^\pm_B\,\phi^\pm + \mathcal{R}\,\phi^\pm\big\}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}s \end{aligned}$$

通过分部积分，该方程可改写为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\nabla_z\phi^\pm(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^D)} = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^D} \Big\{&\mu^\pm_x\partial_x\phi^\pm\cdot\partial_v\phi^\pm - \mu^\pm_v f^\pm_B E_{\Delta_z\phi}\cdot\partial_v\phi^\pm \\ &+ \mu^\pm_v\big[D_x(E_{f_B} + \mu^\pm_x v\otimes B)\partial_x\phi^\pm\big]\cdot\partial_v\phi^\pm \\ &+ \mu^\pm_v(f_{B+H} - f_B)\big[E_{f_{B+H}-f_B} + \mu^\pm_x v\otimes H\big]\cdot\partial_v\phi^\pm\Big\}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3.17}$$

对于所有 $t \in [0,T]$。根据高斯定理和富比尼定理，我们有

$$\rho_{\Delta_v\phi}(t,x) = 0 \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}^{d_x}} \rho_{\Delta_x\phi}(t,x)\,\mathrm{d}x = 0$$

对于所有 $t \in [0,T]$ 和 $x \in \mathbb{R}^{d_x}$。由于 $\Delta_z\phi = \Delta_x\phi + \Delta_v\phi$，这意味着

$$E_{\Delta_z\phi} = E_{\Delta_x\phi} = -\partial_x(-\Delta_x)^{-1}\int_{\mathbb{R}^{d_v}}\Delta_x(\phi^+ - \phi^-)\,\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^{d_v}}\partial_x(\phi^+ - \phi^-)\,\mathrm{d}v$$

沿着 [47] 中的论证思路，同时利用已建立的对 $f_{\mathcal{R}}[H]$支集上的一致控制，我们推得

$$\|E_{\Delta_z\phi}\|_{L^2(\Omega)} \le C\sum_{\pm}\|\partial_x\phi^\pm\|_{L^2(\mathbb{R}^D)}. \tag{3.18}$$

利用 H¨older 不等式并结合（3.18），引理 3.3 和引理 3.4 对（3.17）的右端进行估计，我们得到如下估计

$$\begin{aligned}(3.19)\qquad &\sum_{\pm}\|\nabla_z\phi^{\pm}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^D)}\\ &\le C\sum_{\pm}\int_0^t\left(\|\nabla_z\phi^{\pm}(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^D)}+\|H\|^2_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^{d_x})}\|\nabla_z\phi^{\pm}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^D)}\right)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 $C>0$ 不依赖于 H。首先应用 Gronwall 引理的标准形式，再应用其二次形式，定理 5], ，我们得出

$$\sum_{\pm}\|\nabla_z\phi^{\pm}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^D)}\le C'\|H\|^2_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^{d_x})},$$

其中 $C'>0$ 不依赖于 H。根据（3.15）和（3.16），可得

$$\|f^{\pm}_{B+H}-f^{\pm}_B-f'^{\pm}_B[H]\|_{C([0,T];H^{-1}(\mathbb{R}^D))}\le C'\|H\|^2_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^{d_x})},$$

这就证明了该结论。 □

3.4. 可容许控制集。 现在我们引入适用于该最优控制问题的磁场集合。令 $\mathcal{V}$ 表示希尔伯特空间$H^1([0,T]\times\Omega_x;\mathbb{R}^{d_B})$，并在其上定义加权内积

$$\begin{aligned}(3.20)\qquad (B_1,B_2)_{\mathcal{V}}:=&(B_1,B_2)_{L^2([0,T]\times\Omega_x)}+\kappa_t(\partial_tB_1,\partial_tB_2)_{L^2([0,T]\times\Omega_x)}\\ &+\kappa_x(D_xB_1,D_xB_2)_{L^2([0,T]\times\Omega_x)}\end{aligned}$$

对于给定的向量 $\kappa=(\kappa_t,\ \kappa_x)$，其中 $\kappa_t,\ \kappa_x>0$，以及所有 $B_1,\ B_2\in\mathcal{V}$。由此诱导的范数为

$$(3.21)\qquad \|B\|_{\mathcal{V}}:=(B,B)_{\mathcal{V}}^{\frac{1}{2}}\quad\text{for all } B\in\mathcal{V}.$$

Definition 3.9. 对于任意 $i\in\{0,...,d_x\}$、$j\in\{1,...,d_B\}$，设 a_{ij}、$b_{ij}\in L^\infty([0,T]\times\Omega_x)$ 均为在 $[0,T]\times\Omega_x$ 上几乎处处满足 $a_{ij}\le 0\le b_{ij}$ 的函数。则集合

$$\mathbb{B}_{\mathrm{ad}}:=\left\{B\in\mathcal{V}\;\middle|\;\begin{array}{l}a_{0j}\le\partial_tB_j\le b_{0j}\ a.e.\ in\ [0,T]\times\Omega_x,\\ a_{ij}\le\partial_{x_i}B_j\le b_{ij}\ a.e.\ in\ [0,T]\times\Omega_x\\ for\ all\ i\in\{1,...,d_x\}\ and\ j\in\{1,...,d_B\}\end{array}\right\}$$

称为可容许控制集。

一方面，从物理角度来看，选择可容许控制集的动机在于，现实中的外部磁场不会具有任意大的空间梯度，也不会随时间任意快速变化。特别是，如 [5, 图 5], 所示，选择 $L^2($ $[0,T]\times\Omega_x;\ \mathbb{R}^{d_B})$而非 $\mathcal{V}$，可能会导致控制量在局部不连续，这样的最优控制在物理上并不合理。另一方面，从数学角度来看，这一选择很有用，因为集合 $\mathbb{B}_{\mathrm{ad}}$ 具有以下性质：

Lemma 3.10. 存在一个常数 $C>0$，它仅取决于 R_x、d、κ、盒约束 a_{ij} 和 b_{ij}、$i\in\{0,...,d_x\}$、$j\in\{1,...,d_B\}$，使得

$$\|B\|_{W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega_x)}\le C\big(1+\|B\|_{\mathcal{V}}\big)\quad for\ all\ B\in\mathbb{B}_{\mathrm{ad}}.$$

In 具体而言，这意味着每个场 $B\in\mathbb{B}_{\mathrm{ad}}$ 在 $[0,T]\times\Omega_x$ 上都是 *Lipschitz*连续的。

证明。 对于所有 $B\in\mathbb{B}_{\mathrm{ad}}\cap C^1([0,T]\times\overline{\Omega_x};\mathbb{R}^{d_B})$、$(t,x)\in[0,T]\times\Omega_x$和 $j\in\{1,...,d_B\}$,

$$\begin{aligned}|B_j(t,x)|&\le|\Omega_x|^{-1}\int_{\Omega_x}\left(|B_j(t,x)-B_j(t,y)|+|B_j(t,y)|\right)\mathrm{d}y\\ &\le 2R_x\,\|\nabla_xB_j(t)\|_{L^\infty(\Omega_x)}+|\Omega_x|^{-\frac{1}{2}}\|B_j\|_{C([0,T];L^2(\Omega_x))}\le C\big(1+\|B\|_{\mathcal{V}}\big)\end{aligned}$$

对于某个仅依赖于 R_x、d、κ 以及盒约束 a_{ij} 和 b_{ij}的常数 $C > 0$。由于 $C^1([0,T]\times\Omega_x;\mathbb{R}^{d_B}) \subset \mathcal{V}$是稠密的，我们得出

$$\|B\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega_x)} \le C + C\|B\|_{\mathcal{V}}$$

对所有 $B \in \mathbb{B}_{\mathrm{ad}}$ 均成立。结合纳入 $B \in \mathbb{B}_{\mathrm{ad}}$ 的盒约束，即可证明该结论。

□

3.5. 最优控制问题的表述。现在，我们讨论代价泛函的表述，其中包括针对分布函数和控制的惩罚项。与 [3,4], 一样，我们采用集体控制问题中的代价泛函形式；例如，参见 [13] 及其中的参考文献。我们定义

$$J(f,B) \coloneqq \sum_{\pm}\int_0^T\int_{\Omega_x}\int_{\Omega_v}\theta^{\pm}(t,x,v)f^{\pm}(t,x,v)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \sum_{\pm}\int_{\Omega_x}\int_{\Omega_v}\varphi^{\pm}(x,v)f^{\pm}(T,x,v)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x + \frac{\alpha}{2}\|B\|_{\mathcal{V}}^2, \tag{3.22}$$

其中，$\alpha > 0$作为项 $\|B\|_{\mathcal{V}}^2$ 的权重，该项用于惩罚控制的影响。涉及 $f^{\pm}$ 的各项可解释为加权期望值，这类期望值常用于统计力学中的动理学方程。

我们将式 (3.22) 中的第一项称为跟踪项（亦称积分代价），将第二项称为最终观测项（亦称终端代价）。跟踪项旨在惩罚粒子分布偏离预先给定的（依赖时间的）均值相空间剖面 $z_{\mathfrak{d}}^{\pm}(t)$。类似地，最终观测项用于惩罚其偏离最终时刻 T 的预先给定均值相空间剖面 $z_T^{\pm}$。一种合理的选择是 $\theta^{\pm}(t,z) = \Theta^{\pm}\left(|z - z_{\mathfrak{d}}^{\pm}(t)|^2\right)$，其中 $\Theta^{\pm}$ 连续可微且单调递增。这样，当所有粒子在每个时间 $t \in [0,T]$ 的位置和速度均等于 $z_{\mathfrak{d}}^{\pm}(t)$ 时，跟踪部分将达到全局最小值。类似地，最终观测项可取为 $\varphi^{\pm}(z) = \Phi^{\pm}\left(|z - z_T^{\pm}|^2\right)$，其中 $\Phi^{\pm}$ 是连续可微的递增函数，从而使最终时刻粒子的平均相空间构型接近 $z_T^{\pm}$。不过，为了尽可能保持 $\theta^{\pm}$ 和 $\varphi^{\pm}$ 的一般性，我们作出如下假设：

ASSUMPTION 3.11. 我们假设 $\theta^{\pm} \in C^1\left([0,T]\times\Omega\right)$ 和 $\varphi^{\pm} \in C^1(\Omega)$ 均有下界，且对每个 $t \in [0,T]$，它们分别在 $z_{\mathfrak{d}}^{\pm}(t) \in \Omega$ 和 $z_T^{\pm} \in \Omega$处取得全局最小值。此外，我们分别假设它们在 $z_{\mathfrak{d}}^{\pm}(t)$ 和 $z_T^{\pm}$ 的邻域内是凸的。

我们指出，极小值点邻域内的局部凸性假设对于我们的数学分析并非必要。不过，考虑到我们希望通过优化实现的目标，这一假设是合理的，也会带来定性上更好的数值结果。对于（3.22）中的第三项，我们选择 $\mathcal{V}$，如第3.4节所述。特别地，范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ 由（3.21）给出。

现在，我们可以表述动力学最优控制问题：

$$\min J(f,B) \qquad \text{s.t.} \qquad (f,B) \in W^{1,\infty}\left([0,T]\times\mathbb{R}^D\right)^2 \times \mathbb{B}_{\mathrm{ad}} \text{ satisfies (1.6)}, \tag{3.23}$$

其中，J 定义见式（3.22），而 $\mathbb{B}_{\mathrm{ad}}$ 由定义3.9给出。

3.6. 最优控制的存在性。借助定义 3.6中的控制到状态算子，我们将最优控制问题（3.23）重新表述为所谓的约化最优控制问题：

$$\min_{B\in\mathbb{B}_{\mathrm{ad}}} \widetilde{J}(B). \tag{3.24}$$

此处，$\widetilde{J}(B)$ 定义了所谓的约化代价泛函。现在我们证明 (3.24) 的解的存在性：

THEOREM 3.12（最优解的存在性）。设 $\theta^{\pm}$ 和 $\varphi^{\pm}$ 满足假设3.11。最优控制问题 (3.24) 至少存在一个全局最优解 B。

证明。 利用对所有 $t \in [0,T]$ 都成立的 $\|f_B^{\pm}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^D)} = \|\mathring{f}^{\pm}\|_{L^1(\mathbb{R}^D)}$，我们得到如下估计

$$\widetilde{J}(B) \geq \sum_{\pm} (T \inf \theta^{\pm} + \inf \varphi^{\pm}) \|\mathring{f}^{\pm}\|_{L^1(\mathbb{R}^D)} + \frac{\alpha}{2}\|B\|_{\mathcal{V}}^2 \quad \text{for all } B \in \mathbb{B}_{\mathrm{ad}}.$$

因此，泛函 J 具有强制性且有下界。因此，$\widetilde{J}$ 的任意极小化序列 $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{B}_{\mathrm{ad}}$ 在 $\mathcal{V}$ 中有界，进而由引理 3.10 可知，它在 $W^{1,\infty}([0,T]\times\Omega_x)$ 中也有界。于是，提取适当的子序列后，该序列收敛，且在 $\mathcal{V}$ 中弱收敛于某个 B；同时，B_k 的偏导数在 $L^{\infty}([0,T]\times\Omega_x)$ 中弱-* 收敛于 B 的偏导数。特别地，$B \in \mathbb{B}_{\mathrm{ad}}$ 和 $B_k \to B$ 在 $L^2([0,T]\times\Omega_x)$ 中强收敛。仿照定理 3.7 的证明可知，$f_{B_k} \to f_{\bar{B}}$ 在 $C([0,T];\, L^2(\mathbb{R}^D))$ 中强收敛，且 $f_{\bar{B}} \in W^{1,\infty}([0,T];\, L^2(\mathbb{R}^D))$。这一点以及对 $f_{B_k}^{\pm}(t)$ 支集的一致控制（参见定理 3.5）直接推出，$\widetilde{J}$ 中含有 f_{B_k} 的各项收敛到相应的、以 $f_{\bar{B}}$ 代替的表达式。因此，由于 $\mathcal{V}$-范数具有弱下半连续性，我们得出

$$\widetilde{J}(\bar{B}) \leq \liminf_{k\to\infty} \widetilde{J}(B_k).$$

这证明了 $\bar{B}$ 是 J的极小化解。 □

我们指出，在我们的动力学模型（1.6）中，洛伦兹力 $\mu_v^{\pm}(E_f + \mu_x^{\pm} v \otimes B)$ 乘以了 $\partial_v f^{\pm}$，这种双线性结构使我们的优化问题成为非凸且非线性的问题。因此，一般而言，无法证明极小化解 $\bar{B}$的唯一性。不过，如果某些参数（此处为 T/α）足够小，通常就可以推出唯一性。在我们的情形中也可以得到这样的结果，但我们省略证明，并请感兴趣的读者参阅 [36]，其中讨论了一个非常相似的情形。

还需要特别指出，在上述证明中，我们关键地依赖于沿极小化序列的磁场偏导数先验一致有界，以便在极限处得到 Lipschitz 磁场，并能够在 Vlasov–Poisson 系统中取极限。原则上，可以设想两种方式来确保这一先验性质：第一种方式是采用我们所选择的方法，即对磁场使用一个相当弱的范数，该范数不控制 Lipschitz 范数，而是对磁场的偏导数施加盒约束。第二种方式是不施加任何盒约束，而是为磁场选取一个确实能够控制 Lipschitz 范数的更强范数。就我们下面将要进行的工作而言，第二种方法的优点在于，它会使一阶必要最优性条件成为一个椭圆方程，从而可以利用经典椭圆正则性理论逐步提升最优磁场的正则性。其缺点是，限制性更强的控制空间可能会导致最优控制在定量上不如更一般的控制空间所得到的结果。例如，如果代价泛函惩罚高阶导数，那么控制量通常最好接近常数。然而，这可能并非真正实现优化目标的最佳选择。此外，由一阶必要最优性条件导出的椭圆方程阶数会高于二阶（因为一开始为磁场选择了比 H^1 更强的范数），因此第二种方法从数值角度来看更为不便。另一方面，第一种方法的缺点是必然需要施加盒约束，因此一般只能得到一个变分不等式。不过，正如我们稍后将讨论的，在数值计算部分忽略这些盒约束是合理的，从而使一阶必要最优性条件成为一个仅有二阶的椭圆问题。因此，从数值角度来看，第一种方法更具吸引力，这也是我们选择采用它的原因。

3.7. 一阶必要最优性条件。由于控制到状态算子 $B \mapsto f_B$ 是弗´雷歇可微的（见定理 3.8），且约化代价泛函

关于 f_B 线性且连续，因此根据链式法则可知，J 也是弗´雷歇可微的。

现在令 $B \in \mathbb{B}_{\mathrm{ad}}$ 为任意函数。为推导 $J'(B)$ 的公式，以便进行数值计算，并获得一阶必要最优性条件，我们采用所谓的伴随方法。因此，固定一个截断函数 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^D)$，其中 $\chi = 1$ 属于 $B_{R^*}(0)$，并令 $R^* > 0$ 充分大，至少满足 $\Omega \subset B_{R^*}(0)$。于是，通过形式拉格朗日方法可推导出伴随系统，其形式如下：

$$\partial_t \lambda^\pm + \mu_x^\pm v \cdot \partial_x \lambda^\pm + \mu_v^\pm (E_{f_B} + \mu_x^\pm v \otimes B) \cdot \partial_v \lambda^\pm = \Phi^\pm_{f_B,\lambda}\chi \tag{3.25a}$$

$$\lambda^\pm|_{t=T} = -\varphi^\pm \tag{3.25b}$$

with

$$\Phi^\pm_{f_B,\lambda} := \theta^\pm \pm \nabla_x \cdot (-\Delta_x)^{-1} \left(\sum_\pm \int_{\Omega_v} \mu_v^\pm \lambda^\pm \partial_v f_B^\pm \,\mathrm{d}v \right).$$

由于伴随系统是线性的，我们仿照 [34, 第 5] 节的做法，证明系统（3.25）存在唯一强解 $\lambda_B = (\lambda_B^-, \lambda_B^+)$，且满足

$$\lambda_B^\pm \in H^1\big((0,T)\times\mathbb{R}^D\big) \subset C\big([0,T]; H^1(\mathbb{R}^D)\big).$$

请注意，截断函数 χ 对于获得这一适定性结果是必要的。由于对所有 $t \in [0,T]$，$\operatorname{supp} f^\pm(t) \subset \Omega$，因此我们知道 $\Phi^\pm_{f_B,\lambda}$ 至多取决于 $\lambda_B^\pm$ 在 Ω $[0,T]\times$ 中的取值。因此，我们可以仿照 [34, 备注 2(b)] 进行论证，从而得出：只要 $R^* > 0$ 取得足够大，$\lambda_B^\pm|_{[0,T]\times\Omega}$ 就与截断函数 χ 的选择无关。

在后续定理中，我们将看到，$J'(B)$ 也至多取决于 $[0,T]\times\Omega$ 中 $\lambda_B^\pm$ 的取值。因此，当 $R^* > 0$ 选得足够大时，$\widetilde{J}'(B)$ 以及一阶必要最优性条件均与 χ 的选择无关。

THEOREM 3.13. 令 $B \in \mathbb{B}_{\mathrm{ad}}$ 任意，并令对应的状态为 f_B，再令 $\lambda_B^\pm = (\lambda_B^-, \lambda_B^+)$ 为伴随系统 (3.25) 对应的强解。

那么，约化代价泛函 J 在点 B 处的 *Fr´echet* 导数为

$$\widetilde{J}'(B)[H] = \alpha(B,H)_{\mathcal{V}} + \big(\mathcal{G}(B), H\big)_{L^2([0,T]\times\Omega_x)} \tag{3.26}$$

对所有方向 $H \in \mathcal{V}$，其中

$$\mathcal{G}(B) := -\sum_\pm \mu_x^\pm \mu_v^\pm \int_{\Omega_v} v \otimes \partial_v f_B^\pm \lambda_B^\pm \,\mathrm{d}v. \tag{3.27}$$

现在，设 $B^* \in \mathbb{B}_{\mathrm{ad}}$ 是最优控制问题(3.24)的局部最优解，即存在 $\delta > 0$ 使得

$$\widetilde{J}(B^*) \le \widetilde{J}(B) \quad \textit{for all } B \in \mathbb{B}_{\mathrm{ad}} \textit{ with } \|B - B^*\|_{\mathcal{V}} < \delta.$$

那么，B^* 满足变分不等式

$$\widetilde{J}'(B^*)[B-B^*] = \alpha(B^*, B-B^*)_{\mathcal{V}} + \big(\mathcal{G}(B^*), B-B^*\big)_{L^2([0,T]\times\Omega_x)} \ge 0 \tag{3.28}$$

对于所有 $B \in \mathbb{B}_{\mathrm{ad}}$。特别是，如果 $a_{0j} < \partial_t B_j^* < b_{0j}$，$a_{ij} < \partial_{x_i} B_j^* < b_{ij}$ 几乎处处成立于 $[0,T]\times\Omega_x$，对于所有 $i \in \{1,\dots,d_x\}$，且 $j \in \{1,\dots,d_B\}$，B^* 是以下具有齐次诺伊曼边界条件的椭圆系统的弱解：

$$-\alpha \operatorname{div}_{(t,x)}\big(\mathbf{K}\nabla_{(t,x)} B_j^*\big) + \alpha B_j^* = -[\mathcal{G}(B^*)]_j \quad \textit{in } (0,T)\times\Omega_x, \tag{3.29a}$$

$$\big(\mathbf{K}\nabla_{(t,x)} B_j^*\big)\cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{在 } \partial\big((0,T)\times\Omega_x\big) \tag{3.29b}$$

对所有 $j \in \{1,\dots,d_B\}$。这里，$\mathbf{K} = \operatorname{diag}(\kappa_t, \kappa_x, \dots, \kappa_x) \in \mathbb{R}^{(1+d_x)\times(1+d_x)}$，$\mathbf{n}$ 表示定义在 $\partial\big((0,T)\times\Omega_x\big)$ 上的外单位法向量场。

证明。 现在令 $B \in \mathbb{B}_{\mathrm{ad}}$ 和 $H \in \mathcal{V}$ 为任意值。利用链式法则，我们得到 n

$$\widetilde{J}'(B)[H] = \alpha(B,H)_{\mathcal{V}} + \sum_{\pm} \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} \varphi^{\pm} f_B'^{\pm}[H](T)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x + \sum_{\pm} \int_0^T \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} \theta^{\pm} f_B'^{\pm}[H]\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

由于 λ_B 是伴随系统的相应强解，我们可以利用（ $\theta^{\pm}$ 和 $\varphi^{\pm}$分别替换它们。这由（3.25a）和（3.25b）得到

$$\begin{aligned}\widetilde{J}'(B)[H] &= \alpha(B,H)_{\mathcal{V}} - \sum_{\pm} \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} \lambda_B^{\pm}(T)\, f_B'^{\pm}[H](T)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x \\ &+ \sum_{\pm} \int_0^T \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} \left[\partial_t \lambda_B^{\pm} + \mu_x^{\pm} v \cdot \partial_x \lambda_B^{\pm} + \mu_v^{\pm}(E_{f_B} + \mu_x^{\pm} v \otimes B) \cdot \partial_v \lambda_B^{\pm}\right] f_B'^{\pm}[H]\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{\pm} \int_0^T \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} \mp \nabla_x \cdot (-\Delta_x)^{-1} \left(\sum_{\pm} \int_{\Omega_v} \mu_v^{\pm} \lambda_B^{\pm} \partial_v f_B^{\pm}\,\mathrm{d}v \right) f_B'^{\pm}[H]\,\mathrm{d}w\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

现在我们回顾一下，

$$E_{f_B'[H]} = -\nabla_x (-\Delta_x)^{-1} \left(\sum_{\pm} \pm \int_{\Omega_v} f_B'^{\pm}[H]\,\mathrm{d}v \right)$$

并且 $f_B'^{\pm}[H]|_{t=0} = 0$。因此，通过分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}\widetilde{J}'(B)[H] &= \alpha(B,H)_{\mathcal{V}} \\ &- \sum_{\pm} \int_0^T \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} \left[\partial_t f_B'^{\pm} + \mu_x^{\pm} v \cdot \partial_x f_B'^{\pm} + \mu_v^{\pm}(E_{f_B} + \mu_x^{\pm} v \otimes B) \cdot \partial_v f_B'^{\pm}\right] \lambda_B^{\pm}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &- \sum_{\pm} \int_0^T \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} \left[\mu_v^{\pm} E_{f_B'} \cdot \partial_v f_B^{\pm}\right] \lambda_B^{\pm}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

为简洁起见，我们用 $f_B'^{\pm}$ 代替 $f_B'^{\pm}[H]$ 。由于 $f_B'[H]$ 是方程（3.12）的强解，我们可以利用（3.12）改写上述方程的最后两行。因此，我们有

$$\widetilde{J}'(B)[H] = \alpha(B,H)_{\mathcal{V}} - \int_0^T \int_{\Omega_x} \left(\sum_{\pm} \mu_x^{\pm} \mu_v^{\pm} \int_{\Omega_v} v \otimes \partial_v f_B^{\pm} \lambda_B^{\pm}\,\mathrm{d}v \right) \cdot H\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

这验证了（3.26）。

现在假设 B^* 是 局部最优控制 ，对应最优控制问题（3.24）。由于 $\mathbb{B}_{\mathrm{ad}}$ 是凸的，我们推得

$$0 \le \widetilde{J}'(B^*)[B - B^*] = \alpha(B^*, B - B^*)_{\mathcal{V}} + \left(\mathcal{G}(B^*), B - B^*\right)_{L^2([0,T]\times\Omega_x)}$$

对所有 $B \in \mathbb{B}_{\mathrm{ad}}$均成立，其中等号是由（3.26）得出的。这证明了（3.28）。

特别地，如果对所有 $i \in \{1,\dots,d_x\}$ 和 $j \in \{1,\dots,d_B\}$， $a_{0j} < \partial_t B_j^* < b_{0j}$, $a_{ij} < \partial_{x_i} B_j^* < b_{ij}$ 在 $[0,T] \times \Omega_x$ 中几乎处处成立，则函数 B^* 不会触及盒约束，因此我们甚至可以沿任意方向变分。由此得到

$$0 = \widetilde{J}'(B^*)[H] = \alpha(B^*, H)_{\mathcal{V}} + \left(\mathcal{G}(B^*), H\right)_{L^2([0,T]\times\Omega_x)}$$

对所有方向 $H \in \mathcal{V}$。由于这正是（3.29）的弱形式，我们得出B^* 是该椭圆系统的一个弱解。因此，证明完毕。 □

4. 蒙特卡罗框架与数值优化。 我们的目标是通过基于梯度的优化方案求解由状态方程 (1.6)、伴随方程 (3.25) 和一阶必要最优性条件 (3.28) 组成的最优性系统，其中状态方程和伴随方程通过基于蒙特卡罗框架的粒子网格法求解。请回想一下，伴随变量 $\lambda^\pm$ 的主要作用是实现约化梯度的高效计算。

为计算伴随变量，我们也将 $\lambda^\pm$ 解释为分布函数，并通过广义粒子网格法求解伴随方程。鉴于我们的实现，我们假设 $\theta^\pm$ 和 $\varphi^\pm$ 均可解释为概率分布，且可以轻易地从中抽取服从该分布的随机数。我们规定 $\theta^\pm$ 和 $\varphi^\pm$具有如下结构，这与假设 3.11相一致:

$$\theta^\pm(t,z) = -\frac{C_{\theta^\pm}}{\sqrt{(2\pi)^D \det(\Sigma_{\theta^\pm})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z - z_{\mathfrak{d}}^\pm(t))^T \Sigma_{\theta^\pm}^{-1}(z - z_{\mathfrak{d}}^\pm(t))\right), \tag{4.1a}$$

$$\varphi^\pm(z) = -\frac{C_{\varphi^\pm}}{\sqrt{(2\pi)^D \det(\Sigma_{\varphi^\pm})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z - z_T^\pm)^T \Sigma_{\varphi^\pm}^{-1}(z - z_T^\pm)\right), \tag{4.1b}$$

其中 $C_{\theta^\pm}$, $C_{\varphi^\pm} > 0$, $\Sigma_{\theta^\pm}$ 和 $\Sigma_{\varphi^\pm}$ 是 $\mathbb{R}^{D\times D}$ 中的协方差矩阵，我们假设它们为对角矩阵。此外，函数 $z_{\mathfrak{d}}^\pm(t)$ 和 $z_T^\pm$ 表示数值粒子所期望的相空间分布，需根据优化目标进行调整。

本节聚焦于情形 $d = (d_x, d_v) = (1, 2)$，并选择 Ω_x 为有界区间。不过，我们指出，我们的方法同样适用于高维情形。为在维数 $d = (1, 2)$下重述最优性系统，我们使用关系式 $v\cdot\partial_x = v_1\partial_x$, $E\cdot\partial_v = E\partial_{v_1}$, $v\otimes B = (v_2B, -v_1B)$, $(v\otimes B)\cdot\partial_v = v_2B\partial_{v_1} - v_1B\partial_{v_2}$,$-\nabla_x(-\Delta_x)^{-1}a = -\nabla_x\cdot(-\Delta_x)^{-1}(a,b)^T = \int_{-\infty}^x a\mathrm{d}y$，其中函数 a 和 b适当选取。我们进一步假设，在 $\mathbb{B}_{\mathrm{ad}}$ 的定义中，函数 $-a_{ij}$ 和 b_{ij} 选取得足够大，使得优化过程中出现的所有控制量 B 均严格位于盒约束范围内。因此，根据定理 3.13，一阶必要最优性条件实际上是一个等式。于是，维数为 (1, 2) 时的最优性系统由状态方程构成

$$\partial_t f^\pm + \mu_x^\pm v_1\partial_x f^\pm + \mu_v^\pm(E_f + \mu_x^\pm v_2 B)\partial_{v_1} f^\pm - \mu_x^\pm\mu_v^\pm v_1 B\partial_{v_2} f^\pm = 0, \tag{4.2a}$$

$$f^\pm|_{t=0} = \mathring{f}^\pm \tag{4.2b}$$

with

$$E_f = \int_{-\infty}^x \rho_f\, dy = \int_{-\infty}^x \int_{\Omega_v} (f^+ - f^-)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}y, \tag{4.3}$$

伴随方程

$$\begin{aligned}\partial_t\lambda^\pm + \mu_x^\pm v_1\partial_x\lambda^\pm + \mu_v^\pm(E_f + \mu_x^\pm v_2 B)\partial_{v_1}\lambda^\pm - \mu_x^\pm\mu_v^\pm v_1 B\partial_{v_2}\lambda^\pm \\ = \theta^\pm \mp \int_{-\infty}^x \left(\sum_\pm \int_{\Omega_v} \mu_v^\pm\lambda^\pm\partial_{v_1} f^\pm\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}y,\end{aligned} \tag{4.4a}$$

$$\lambda^\pm|_{t=T} = -\varphi^\pm, \tag{4.4b}$$

以及一阶必要最优性条件

$$-\alpha\,\mathrm{div}_{(t,x)}\big(\mathbf{K}\nabla_{(t,x)}B\big) + \alpha\,B = -\mathcal{G}(B) \quad \text{in } (0,T)\times\Omega_x, \tag{4.5a}$$

$$\big(\mathbf{K}\nabla_{(t,x)}B\big)\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \partial\big((0,T)\times\Omega_x\big) \tag{4.5b}$$

对所有 $j \in \{1, ..., d_B\}$，其中 $\mathcal{G}(B)$，$\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{n}$ 的定义与定理 3.13中相同。回想一下，现在我们有 $d_x = 1$ 和 $d_B = 1$，这意味着 B 和 $\mathcal{G}(B)$ 是标量函数。

现在我们继续介绍数值格式。一般而言，气体的时间演化可以通过粒子方法来描述（例如，参见 [18]）。具体而言，这类方法也适用于描述等离子体。从这个意义上说，可以利用蒙特卡罗框架来发挥气体或等离子体固有的自然结构。然而，求解本文所出现方程还有其他方法。其中一些方法例如见 [53]。

本文中，我们实现了一种所谓的粒子网格（PIC）方法（例如参见 [9]）。其基本思想是用数值粒子近似分布函数；这些粒子由带标签的指针表示，指针指向包含位置和速度等物理信息的结构体。粒子在拉格朗日框架下处理，也就是说，通过求解弗拉索夫方程的特征系统来计算粒子的演化。需要指出的是，这种方法无需引入网格来离散相空间中的研究区域。然而，由于特征系统中涉及电场和磁场，我们还需要计算这些量，因此实际上必须生成网格。随后，在网格的网格点处计算场。对于任意一个数值粒子，场对该粒子的影响通过插值技术计算。

本质上，PIC 流程中的一个时间步包括更改表示粒子的结构中的内容，即位置和速度，并在需要时添加或删除指针（数值粒子）。更准确地说，我们需要求解特征系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = \mu_x^{\pm} v_1(t), \quad & \dot{v_1}(t) = \mu_v^{\pm}\, E_f(t, x(t)) + \mu_x^{\pm}\mu_v^{\pm} v_2(t)\, B(t, x(t)), \\ & \dot{v_2}(t) = -\mu_x^{\pm}\mu_v^{\pm} v_1(t)\, B(t, x(t)) \end{aligned} \tag{4.6}$$

使用合适的常微分方程求解器。在此过程中，还需要通过数值方法计算电场 E_f。

自由流动时间为 Δt，并将其选作输入参数。在此时间段内，必须对微观运动方程（4.6）进行积分。为此，我们采用所谓的 ***Boris*** 推进器 (例如，参见 [10,58])。这种辛方法的一项重要性质是，即使存在磁场，也能保持数值粒子的微观能量不变。为表述该算法，我们在 $\mathbb{R}^3$ 中将位置和速度扩展为向量，不足部分用零填充。这样做的优点是，该算法可以轻松适用于更高维的情形。Boris 推进器的实现如下：算法 4.1。

算法 4.1 Boris 推进器（$d = (1,2)$）

要求： 速度和位置 $v, x \in \mathbb{R}^3$，磁场 $B \in \mathbb{R}$，电场 $E \in \mathbb{R}$，电荷q，时间步 Δt

确保： u $\quad$ p更新后的 $\quad$ p位置和速度

y1: 定义 $\boldsymbol{E} = (E,0,0) \in \mathbb{R}^3$和 $\boldsymbol{B} = (0,0,B) \in \mathbb{R}^3$2: 计算 $r = q\boldsymbol{B}\frac{\Delta t}{2}$ 和 $s = 2r/(1 + ||r||_2^2)$3: 计算 $v^- = v + q\boldsymbol{E}\frac{\Delta t}{2}$，然后 $v' = v^- + v^- \times r$，最后 $v^+ = v^- + v' \times s$4: 更新速度 $v = v^+ + q\boldsymbol{E}\frac{\Delta t}{2}$ 和位置 $x = x + v\Delta t$5: **返回** (x, v)

更新位置时，必须考虑物理域的有界性和边界条件。在接下来的数值计算中，我们考虑位置坐标的周期边界条件。

为了初始化数值粒子，其运动随后由算法 4.1决定，我们采用蒙特卡罗方法。这意味着我们通过初始化大量 $\mathring{f}^{\pm}$ 数值粒子来离散化初始数据 N_f。此外，我们将时间区间 $[0,T]$ 划分为 N_t 个大小为 $\Delta t = T/N_t$的子区间。因此，第 k个时间步的时间为 $t^k = k\Delta t$，$k = 0,$ ……，N_t。

在实现中，我们将 F 定义为指向表示数值粒子的结构体的带标签指针列表。对于任意 $p = 1, \ldots\ldots, N_f$，我们用 $F_{\pm}^{k}[p]$ 表示在第 k个时间步时离子或电子中第 p个粒子的指针。此外，令$F_{\pm}^{k}[p].v_i$、 $i = 1, 2$表示在第 k个时间步时第 p个粒子的速度，并令 $F_{\pm}^{k}[p].x$表示在第 k个时间步时第 p个粒子的位置。类似地， Λ 表示指向表示伴随粒子的结构体的带标签指针列表。

为了使用一种能够直接生成样本的密度（例如高斯密度或均匀密度）初始化粒子列表，我们按照给定的分布对 N_f 粒子进行位置和速度抽样。

然而，出于下文将要解释的若干原因，初始条件可能需要由某个任意分布 $g = g(x, v)$ 给出。为此，有几种可行的方法。例如，可以使用所谓的逆变换抽样技术，但这需要已知累积分布函数的逆函数（参见例如 [52, 第 2 章。1]）。本文采用接受-拒绝法，借助另一个概率密度 $h = h(x, v)$，从所需的概率密度 $g = g(x, v)$ 中抽样（参见 [15, 算法 A_1]）。在这种情况下， h 的选取应使得从 h 中抽取样本易于实现。此外，我们要求存在一个常数 $k > 0$，使得对于所有 $(x, v) \in \Omega$，均有 $g(x, v) \leq k\, h(x, v)$。该方法的伪代码见算法 4.2。

算法 4.2 采用接受-拒绝算法近似一般初始数据 要求：目标密度 $g(x, v)$，辅助密度 $h(x, v)$，目标粒子数 N1：设置 $p = 1$；初始化空列表 $L^0$2：当 $p < N$ 时执行 3：从 h生成样本 y_p 4：从均匀分布 $\mathcal{U}(0, 1)$生成样本 u_p 5：如果 $u_p < {}^{g}(y_p)\, k\, h(y_p)$，则 6：接受样本 y_p，并生成具有相应位置和速度的粒子，将其添加到列表 $L^0$7：$p = p + 1$8：结束如果 // 否则：拒绝样本 9：结束循环 10：返回 L^0

由于我们需要在优化过程中计算电场、伴随方程的右端以及代价泛函的梯度，因此需要引入一个网格，将所考虑的相空间区域离散化。

为此，我们考虑一个有界速度域 $\Omega_v := (-v_{\max}, v_{\max})^2 \subset \mathbb{R}^2$。这里， $v_{\max} > 0$ 用作阈值，数值粒子的速度分量不应超过该阈值。只要考虑的初始分布 $\mathring{f}^{\pm} = \mathring{f}^{\pm}(x, v)$ 是紧支撑的，或以足够快的速率衰减至零，这一参数的设置就是合理的。特别地，这允许初始分布关于速度分量呈类高斯形式。现在，我们将 Ω_v划分为边长为 $\Delta v = 2v_{\max}/N_v$ 的等尺寸、互不重叠的正方形单元，其中 $N_v \geq 2$。在这一划分上，我们对其中的速度采用单元中心表示

$$\Omega_{\Delta v} := \left\{ (v_1^l, v_2^m) \in \Omega_v \;\middle|\; l, m = 1, \ldots, N_v \right\},$$

其中 $v_1^l := (l - 1/2)\,\Delta v - v_{\max}$ 且 $v_2^m := (m - 1/2)\;\Delta v - v_{\max}$。

类似地，我们考虑 $\Omega_x = (0, x_{\max}) \subset \mathbb{R}$，其中 $x_{\max} > 0$，并定义一个长度为 $\Delta x = x_{\max}/N_x$ 的区间划分，其中 $N_x \geq 2$。在此划分上，我们定义

$$\Omega_{\Delta x} := \left\{ x^i \in \Omega \;\middle|\; i = 1, \ldots, N_x \right\}, \qquad x^i := (i - 1/2)\Delta x.$$

因此，我们得到了离散化的相空间 $\Omega_{\Delta x} \times \Omega_{\Delta v}$。

现在，我们将以中心位于 (x^i, v_1^l, v_2^m) 的单元在第 k 个时间步时的占据数记为 $(f^{\pm})^k_{ilm}$，其中该单元属于 $\in\Omega_{\Delta x} \times\Omega_{\Delta v}$。为构造此函数，我们统计时间步 k 时位置和速度位于中心为 (x^i, v_1^l, v_2^m) 的单元中的粒子。因此，我们定义

$$(f^{\pm})^k_{ilm} \coloneqq \sum_{p=1}^{N_f} \mathbb{1}_{ilm}\left(F^k_{\pm}[p].x, F^k_{\pm}[p].v_1, F^k_{\pm}[p].v_2\right), \tag{4.7}$$

其中，$\mathbb{1}_{ilm}(\cdot, \cdot, \cdot)$ 表示中心位于 (x^i, v_1^l, v_2^m) 的单元的示性函数。如果一个粒子离开中心位于 (x^i, v_1^l, v_2^m) 的单元，并进入中心位于 $(x^{i'}, v_1^{l'}, v_2^{m'})$ 的单元，则 $(f^{\pm})_{ilm}$ 的值减 1，而 $(f^{\pm})_{i'l'm'}$ 的值加 1。请注意，若将 $v_{\max}$ 设得足够大，粒子速度超出 Ω_v 边界的概率会非常低，但可能并非为零。因此，在实现中，我们会跟踪速度超出 Ω_v 边界的粒子，并在此类粒子数超过某一阈值时发出警告。

为求解伴随系统，我们必须以不同方式处理速度超过阈值$v_{\max}$ 的情况。由于需要添加额外的粒子，以计入伴随动理学方程中的源项（右端），粒子实际到达边界 $v_{\max}$ 的现象可能会非常频繁地发生。然而，根据（3.26），代价泛函的梯度仅取决于伴随变量 $\lambda^{\pm}(t)$ 在 $f^{\pm}(t)$ 支集上的取值。因此，只要 $f^{\pm}(t)$ 的支集保持有界，我们在计算梯度时只需考虑速度分量位于 Ω_v 内部的伴随粒子。我们按如下方式计算与伴随粒子相关的占据数：

$$(\lambda^{\pm})^k_{ilm} = \sum_{p=1}^{N^{\pm}_{\lambda,k}} \mathbb{1}_{ilm}\left(\Lambda^k_{\pm}[p].x, \Lambda^k_{\pm}[p].v_1, \Lambda^k_{\pm}[p].v_2\right), \tag{4.8}$$

其中，$N^{\pm}_{\lambda,k}$ 表示第 k 个时间步的数值粒子数。

为了计算维数为 (1,2) 时的电场，我们选择算法 4.3 所给出的步骤，该步骤采用简单的求积公式，对电子密度与离子密度之差进行积分。因此，我们将电场表示为

$$E_f(t,x) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{x} \rho_f(t,y)\,\mathrm{d}y - \int_{x}^{\infty} \rho_f(t,y)\,\mathrm{d}y\right) \tag{4.9}$$

以避免我们对积分作一阶近似时因不对称性而产生较大误差。该公式可由恒等式证明：

$$\int_{-\infty}^{x} \rho_f(t,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_f(t,y)\,\mathrm{d}y - \int_{x}^{\infty} \rho_f(t,y)\,\mathrm{d}y = -\int_{x}^{\infty} \rho_f(t,y)\,\mathrm{d}y$$

这是准中性条件 $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_f(t,y)\,\mathrm{d}y = 0$ 的推论；由于我们使用数量相同的离子和电子，该条件成立。由于存在多个嵌套 for 循环，计算时间可能较长。不过，可以对关于 i 的循环进行并行化。

算法 4.3 电场的计算（对于 $d = (1,2)$）

要求： $((f^-)^k, (f^+)^k)$
确保： 值 E_f 积分（4.3）

```
for i = 0 to N_x do
    for l, m = 0 to N_v do
        Calculate charge density ρ_i^k = ρ_i^k + ((f^+)^k_ilm − (f^−)^k_ilm)
    end for
    Calculate (E_f^+)_i^k = (E_f)^k_{i−1} + ρ_i^k Δx and (E_f^−)_i^k = (E_f)^k_{N_x−i} + ρ^k_{N_x−i−1} Δx
```

6: 组装电场 $(E_f)_i^k = \frac{1}{2}\left((E_f^+)_i^k - (E_f^-)_i^k \right)$ （参见（4.9））7: **结束循环**8: **返回** E_f

---

现在我们可以给出算法 4.4，以便使用我们的蒙特卡罗框架求解状态方程（4.2）。

算法 4.4 正向求解器（针对 $d = (1, 2)_f$ 要求：初始条件 $\mathring{f}^{\pm}$，控制 B^k，适用于 $k = 0, \ldots, N_t$ 确保：1 的时间演化：使用高斯密度作为辅助密度，通过算法 4.2 和 $g = \mathring{f}^-$ 及 $g = \mathring{f}^+$ 生成初始粒子 $F_{\pm}^0$ 2：对于 $k = 0$ 到 $N_t - 1$，执行 3：通过算法 4.3，使用输入 $F_{\pm}^k$ 计算 E_f^k 4：对于 $p = 1$ 到 N_f，执行 5：通过电场 E_f^k 和磁场 B^k 的线性插值，应用 Boris 推进器（算法 4.1）更新 $F_{\pm}^k[p].x$ 和 $F_{\pm}^k[p].v$ 6：结束循环 7：结束循环

Remark 4.1. 请注意，文献中有多种求解 *Vlasov–Poisson* 问题的方法；概述请参见 *[17]*。具体而言，有些方案直接使用加权粒子，因此在运行过程中无需进行耗时的抽样。通常，若只需数值求解正向问题，电荷密度 ρ_f 才是真正重要的量，因为它比各分布函数 $f^{\pm}$ 更容易可视化。然而，在我们的情况下，为了计算控制B，我们确实需要在同一网格上计算分布函数 f 以及伴随变量 g。因此，为了计算 f 和 g，我们对相应的数值粒子进行分段常数插值。当然，更高阶的插值（例如使用样条）或散乱数据逼近技术会更加精确，但由于数值粒子数量庞大，计算成本也会非常高。如果只需更精确地求解正向问题，这些技术或许是合理的。然而，在我们的情形中，正向问题和反向（伴随）问题都必须反复求解；鉴于当前的计算能力，这些方法似乎难以实现。

接下来，我们给出一种求解伴随系统的类似方案。正如我们将看到的，为了处理伴随 Vlasov 方程右端的源项，我们需要创建额外的数值粒子。伴随方程（3.25）可改写为

$$\partial_t \lambda^{\pm} = \mathcal{F}^{\pm}(f^{\pm}, \lambda^{\pm}, B) + \mathcal{R}^{\pm}(\lambda^{\pm}, f^{\pm}) + \mathcal{S}^{\pm}. \tag{4.10}$$

这里，$\mathcal{F}^{\pm}$ 表示将由 Boris 推进器（算法 4.1）处理的“弗拉索夫”项。源项 $\mathcal{S}^{\pm}$ 由 $\mathcal{S}^{\pm} = \theta^{\pm}$给出。此外，$\mathcal{R}^{\pm}$ 表示反应项

$$\mathcal{R}^{\pm}(\lambda^{\pm}, f^{\pm}) \coloneqq \mp \int_{-\infty}^{x} \int_{\Omega_v} \sum_{\pm} \mu_v^{\pm} \lambda^{\pm} \partial_{v_1} f^{\pm} \, \mathrm{d}v \mathrm{d}y. \tag{4.11}$$

注意，在（4.11）中，导数作用于已知量 f，因为正向问题已预先求解。导数采用二阶有限差分格式近似。我们还注意到，项 $\mathcal{R}^{\pm}$ 与电场属于同一类型。因此，可以采用与计算 E_f相同的积分方法来求解。由于反应项 $\mathcal{R}^{\pm}$ 出现在伴随方程的右端

因此，总电荷不守恒。为此，在求解伴随系统时，我们可能需要添加额外的数值粒子。我们结合使用欧拉方法和算子分裂，得到递推公式

$$(\lambda^{\pm})_{ilm}^{k+1} = (\lambda^{\pm})_{ilm}^{k} + \Delta t \left(\mathcal{R}((\lambda^{\pm})_{ilm}^{k}, (f^{\pm})_{ilm}^{k}) + \mathcal{S}^{\pm} \right). \tag{4.12}$$

因此，在时间步$k+1$，相空间中以（x^i，v_1^l，v_2^m）为中心的每个单元中的粒子数，都必须根据（4.12）右端第二项的值进行调整。也就是说，必须在以（x^i，v_1^l，v_2^m）为中心的相空间单元中添加粒子（或在必要时移除粒子）。添加粒子就是将具有给定位置和速度的元素加入粒子列表。移除粒子则更为复杂，因为需要找到位置和速度均处于所考虑相空间单元内的粒子。这当然非常耗时。然而，在 $C_{\theta^\pm}$ 和 $C_{\varphi^\pm}$ 的定义中选择足够大的常数，可确保伴随方程的右端非负。因此，无需移除数值粒子。在和 $\theta^\pm$ 的定义中选择足够大的常数 $\varphi^\pm$ （参见（4.1））， 可确保伴随方程的右端非负。我们在算法 4.5 中用伪代码概述了这一过程。

算法 4.5 在时间 t^k 实现反应项和源项 要求： $\Lambda_{\pm}^k$, $F_{\pm}^k$, $\theta^{\pm}(t^k, z)$ 确保：在时间步结束时 $\Lambda_{\pm}^k$

1：使用泊松求解器算法 4.3 求解器，对所有单元 $x^i, i = 1, \ldots, N_x$，计算 $(N^{\pm})_{\mathcal{R}}^i$ ，作为积分 (4.11) 的值。 2：对于 $i = 1$ 到 N_x ，执行 3：对于 $l, m = 1$ 到 N_v ，执行 4：使用 $\theta^{\pm}(t, z)$ 的解析表达式，计算将在相空间单元 (x^i, v_1^l, v_2^m) 中生成的粒子数量 $N_{\theta^\pm}^{ilm}$

5 $N_{\pm}^{ilm} = N_{\theta^\pm}^{ilm} - N^{\pm}{}_{\mathcal{R}}^{i}$ ：设置 ( )：如果 $N_{\pm}^{ilm} > 0$ ，则 7：在当前速度单元 $(v_1^l,$

6 $v_2^m)$ 中创建速度均匀分布、在当前位置单元 x^i 中位置均匀分布的 $N_{\pm}^{ilm}$ 个粒子 8：将它们添加到 $\Lambda_{\pm}^k$ 9：结束如果 // 如果 $N_{\pm}^{ilm} \leq 0$，则不执行任何操作 10：结束循环 11：结束循环 12：将生成的粒子添加到 $\Lambda_{\pm}^k$ 中现有的粒子

汇总所有子程序后，我们可以构建求解后向模型的最终方法，见算法 4.6。在此算法中，我们也考虑了源项 $\mathcal{S}^{\pm}$ 的影响。请注意，算法 4.6 是一阶方法，因为我们采用了一阶算子分裂。

算法 4.6 反向求解器（针对 $d = (1,2)$）

要求： 函数 $\varphi^{\pm}$ 和 $\theta^{\pm}$、控制 $B^k, k = 0, \ldots, N_t$、解以及相应的电场 $(F_{\pm}^k, E_f^k)$ 、 $k = 0, \ldots, N_t$， 它们属于正向问题

确保： λ的时间演化

使用 $-\varphi^{\pm}$ 和直接抽样生成满足终端条件（$\Lambda_{\pm}^{N_t}$）的粒子
当 $k = N_t - 1$ **递减至** 0 **时执行**
  对于 $p = 1$ **到** N_q^k **do**
    根据 Boris 算法更新$\Lambda_{\pm}^k[p].x$ 和$\Lambda_{\pm}^k[p].v$
  结束循环
  使用 $F_{\pm}^k$、 $\theta^{\pm}$ 和 算法 4.5求解反应项和源项。
结束循环

接下来，我们关注梯度方程（3.26）。为了更新控制，我们需要计算约化代价泛函在希尔伯特空间 $\mathcal{V}$中的梯度表示。该表示可推导如下。假设~约化代价泛函具有足够的正则性，则其一阶泰勒展开 $J(B)$ 在希尔伯特空间 X 中为

$$\widetilde{J}(B+\epsilon\,\delta B)=\widetilde{J}(B)+\epsilon\,\left(\nabla\widetilde{J}(B)|_X,\delta B\right)_X+\mathcal{O}(\epsilon^2).$$

~这里，梯度 $\nabla J(B)|_X$ 取决于希尔伯特空间的选择 X 及其对应的内积。选择 $X=L^2((0,T)\times\Omega_x)$，并按照推导（3.29）的过程进行，可得

$$\begin{aligned}\nabla\widetilde{J}(B)|_{L^2}&=-\alpha\,\mathrm{div}_{(t,x)}\big(\mathbf{K}\nabla_{(t,x)}B\big)+\alpha B+\mathcal{G}(B)\\&=-\alpha\kappa_t\partial_t^2B-\alpha\kappa_x\partial_x^2B+\alpha B+\mathcal{G}(B)\end{aligned}\tag{4.13}$$

对于 $X=\mathcal{V}$ 的选择，我们可以根据泰勒级数无论选择 X 如何都必须逐项相同这一事实来确定梯度，即，

$$\left(\nabla\widetilde{J}(B)|_{\mathcal{V}},\delta B\right)_{\mathcal{V}}=\left(\nabla\widetilde{J}(B)|_{L^2},\delta B\right)_{L^2}.$$

回顾 $\mathcal{V}$ 上内积的定义（见（3.20）），按照推导~（3.29）的过程可得 $\nabla J(B)|_{\mathcal{V}}$ 由以下椭圆型边值问题给出

$$-\kappa_t\,\partial_t^2\nabla\widetilde{J}(B)|_{\mathcal{V}}-\kappa_x\,\partial_x^2\nabla\widetilde{J}(B)|_{\mathcal{V}}+\nabla\widetilde{J}(B)|_{\mathcal{V}}=\nabla\widetilde{J}(B)|_{L^2}\qquad\text{in }(0,T)\times\Omega_x,\tag{4.14a}$$

$$\left(\kappa_t\,\partial_t\nabla\widetilde{J}(B)|_{\mathcal{V}},\kappa_x\,\partial_x\nabla\widetilde{J}(B)|_{\mathcal{V}}\right)^T\cdot\mathbf{n}=0\qquad\text{在 }\partial((0,T)\times\Omega_x)\text{ 上},\tag{4.14b}$$

其中，$\mathbf{n}$ 表示 $\partial\big((0,T)\times\Omega_x\big)$ 上的外单位法向量场。

~为根据（$\nabla JB)|_{L^2}$（4.13）计算梯度，我们采用有限差分离散。我们将优化梯度组装成向量 $g\in\mathbb{R}^{(N_x-2)}$。因此，使用矩形求积公式近似定义 $\mathcal{G}(B)$ 中的积分（参见（3.27））。这样，对于 $k=0,\ldots,N_t$ 和 $i=2,\ldots,N_x-1$，可得公式

$$G_i^k:=-\sum_{\pm}\mu_x^{\pm}\mu_v^{\pm}\sum_{l,m}^{N_v-1}\left(l(f^{\pm})_{i,l,m+1}^k-(l-m)(f^{\pm})_{ilm}^k-m(f^{\pm})_{i,l+1,m}^k\right)(\lambda^{\pm})_{ilm}^k.$$

~根据（4.14），梯度的有限差分近似 $\nabla J(B)|_{L^2}$ 为

$$g_i^k:=\alpha B_i^k-\frac{\alpha\,\kappa_x}{\Delta x^2}\left(B_{i+1}^k-2B_i^k+B_{i-1}^k\right)-\frac{\alpha\,\kappa_t}{\Delta t^2}\left(B_i^{k+1}-2B_i^k+B_i^{k-1}\right)+(\Delta v)^2(\Delta t)G_i^k$$

对于 $k=0,\ldots,N_t$ 和 $i=2,\ldots,N_x-1$。

~现在，通过采用标准有限差分方法求解椭圆问题（4.14），计算梯度 $\nabla J(B)|_{\mathcal{V}}$。由此得到的线性方程组具有五对角分块矩阵结构，可通过广义托马斯算法高效求解。

请注意，为了与我们的最优控制问题（$\mathcal{V}$ 3.24）的表述保持一致，我们需要在正确的希尔伯特空间中计算梯度。此外，请回想引理3.10 指出，选择 $\mathcal{V}$ 可得到 Lipschitz 连续控制量。

为了求得局部最优控制，我们将确定性的基于梯度的优化技术与粒子方法相结合。基于上述准备，现在可以表述~该算法，该算法给出优化方案所需的梯度 $\nabla J(B)|_{\mathcal{V}}$。

~**算法4.7**计算梯度 $\nabla J(B)|_{\mathcal{V}}$

Require: control $B(t,x)$, $\mathring{f}^{\pm}(x,v)$, $\varphi^{\pm}(x,v)$, $\theta^{\pm}(t,x,v)$

1：使用算法 4.4 并输入 $\mathring{f}^{\pm}$, B求解弗拉索夫–Poisson 系统 (4.2) 2：使用算法 4.6 并输入 $-\varphi^{\pm}$, $\theta^{\pm}$, B求解伴随系统 (4.4) 3：根据 (4.7) 和 (4.8) 计算分布函数 $f^{\pm}$ 和 $\lambda^{\pm}$ ~4：根据 (4.13) 组装 $\nabla J(B)|_{L^2}$ ~5：通过求解 (4.14) 计算 $\nabla J(B)|_{\mathcal{V}}$

我们指出，基于算法4.7，我们可以实现许多不同的基于梯度的优化方案来求解优化问题（例如，参见 [11]）。在本文中，我们选择非线性共轭梯度（NCG）方法。关于该方法在随机情形下的扩展，参见 [31, 49]。这是一种迭代方法，通过以下算法构造控制函数的极小化序列（B^{ℓ}）。

算法 4.8非线性共轭梯度方案

输入： $f^{\pm}(B^0, t, x, v)$, $\varphi^{\pm}(x, v)$, $\theta^{\pm}(t, x, v)$ 1： $\ell = 0$, $E > tol$2：根据算法4.7计算 $h^0 = -\nabla \widetilde{J}(B^0)|_{\mathcal{V}}$ 3：当 $E > tol$ 且 $\ell < \ell_{\max}$ 时，执行 4：使用线搜索方案确定沿 h^{ℓ}5 $B^{\ell+1} = B^{\ell} + \sigma_{\ell}\, h^{\ell}$ 方向的步长 σ_{ℓ} ：更新控制量6：：根据算法4.7计算$d^{\ell+1} = \nabla \widetilde{J}\ B^{\ell+1}$ 7：使用Fletcher–Reeves公式计算 β_{ℓ} 8：设置 $h^{\ell+1} = -d^{\ell+1} + \beta_{\ell}\, h^{\ell}$9：$E = \|B^{\ell+1} - B^{\ell}\|_2$10：设置 $\ell = \ell + 1$11：结束循环 12：返回(B^{ℓ}, f^{ℓ})

在算法 4.8中，容差 $tol > 0$ 和最大迭代次数 $\ell_{\max} \in \mathbb{N}$ 用作终止准则。我们采用带有Armijo条件的回溯线搜索。因子 β_{ℓ} 基于Fletcher–Reeves公式；更多详细信息和参考文献请参见 [11] 。

一次算法 4.8迭代的计算开销估算如下。使用算法 4.4求解Vlasov–Poisson方程的开销包括生成初始条件所需的 $\mathcal{O}(N_f)$，以及 $\mathcal{O}(N_t N_x N_v^2 N_f^2)$，因为每个时间步都必须组装概率密度函数（$\mathcal{O}(N_f)$），根据算法 4.3计算电场（$\mathcal{O}(N_x N_v^2)$），并为每个粒子计算新的位置和速度（$\mathcal{O}(N_f)$）。因此，求解Vlasov–Poisson模型方程的估计开销为 $\mathcal{O}(N_t N_x N_v^2 N_f^2)$。使用算法 4.6求解伴随方程时，无需求解电场方程，但需要通过算法 4.5纳入源项和反应项，估计其开销为 $\mathcal{O}(N_x N_v^2)$。由此，求解伴随模型的估计开销为 $\mathcal{O}(N_t(N_f^2 + N_x N_v^2))$。此外，计算时间和空间上的 L^2梯度所需的积分运算为 $\mathcal{O}(N_t N_x)$，使用Thomas算法计算 H^1 梯度则需 $\mathcal{O}(N_t N_x)$次运算。总之，单次优化迭代的计算复杂度为 $\mathcal{O}(N_t N_x N_v^2 N_f^2 + N_t N_x)$。此估算未考虑线搜索；在线搜索中，计算泛函需要$\mathcal{O}(N_t N_x N_v^2)$次运算，为此求解Vlasov–Poisson方程需要 $\mathcal{O}(N_t N_x N_v^2 N_f^2)$次运算。

Remark 4.2. 我们指出，为了与第 *3* 节中的数学分析保持一致，实际上需要将结果投影到集合 $\mathbb{B}_{\mathrm{ad}}$ 上，该集合规定了控制量导数的界。不过，如果在定义 $-a_{ij}$ 和 b_{ij} 时，$\mathbb{B}_{\mathrm{ad}}$ *(*参见定义3.9*)* 先验地将其取为足够大的值，则可以预期迭代值 B^{ℓ} 实际上永远不会达到盒约束。在这种情况下，无需进行投影（参见定理3.13）。事实上，在第*5*节给出的数值实验中，我们观察到，迭代值的偏导数 B^{ℓ} 始终有界，且该界关于 ℓ一致。因此，

我们可以认为，最初施加了适当的盒约束，但控制量在优化过程中从未达到这些约束。

关于类似情况下 H^1-投影的实际实现，请参阅 [5,第 4]节。为计算该投影，还需要求解另一个优化问题。

5. 数值实验。 本节将测试第4节介绍的数值方法的实现。首先，我们将研究求解 Vlasov–Poisson 系统的测试案例，随后求解一个最优控制问题，其中需要将等离子体限制在相空间的某个区域内。所有实验中，我们的尺度参数均设为 $\mu_x = \mu_v = 0.01$ 。

Landau 阻尼。 我们首先测试算法 算法 4.4中给出的 Vlasov–Poisson 模型求解器。不施加控制（即 $B \equiv 0$），并预期观察到所谓的*Landau* 阻尼，这是无碰撞等离子体的一种典型特征（参见，例如 [16, 32, 41]）。与 [32], 类似，我们首先考虑电子的以下初始分布：

$$\mathring{f}^-(x,v) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}|v|^2\right)(1+\alpha\cos(k\,x)) \quad \text{for all } (x,v)\in\Omega_x\times\Omega_v. \tag{5.1}$$

在这种情况下，我们设定 $x_{\max} = 4\pi$， $v_{\max} = 10$， $k = 0.5$ 和 $\alpha = 0.5$。此外，我们使用$N_f = 5\cdot 10^4$， $\Delta t = 0.05$， $\Delta x = 0.1256$， $\Delta v = 0.1$。请注意，(5.1) 是对平衡函数的扰动，该平衡函数在速度上服从麦克斯韦分布，在空间上服从均匀分布。此初始条件通过使用 算法 4.2实现。为观察 Landau 阻尼，离子初始时必须处于热平衡和空间平衡态。通过对位置进行均匀分布直接抽样、对速度进行麦克斯韦分布直接抽样，可实现此条件。

与通常做法一样，我们对分布函数在 Ω_x的边界处关于 x 施加周期边界条件。根据 Landau 阻尼的理论结果（例如，参见开创性研究 [42]），这些边界条件确实是恰当的选择；相关研究考虑的是空间周期性设置下的 Vlasov–Poisson 系统，尽管本文的数学分析并未涵盖这种情形。因此，在本实验中，数值粒子穿越 Ω_x 的周期边界实际上是预期的。

在图 1(a)中，绘出了能量平方范数随时间的演化情况。这意味着，展示的是量

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\Omega_x} |E_f(t,x)|^2\,\mathrm{d}x \tag{5.2}$$

的演化情况。我们预期它会以某种速率 γ_{L_1} 指数衰减，这一点确实可以在图 1(a)中观察到。特别是，我们的数值结果与 [30, 图2]中的结果非常吻合。请注意，经过一段时间后， $\mathcal{E}$ 的值又略有上升。这是因为我们的初始条件（5.1）相对于平衡态采用了较大的扰动。非线性朗道理论预期会出现这种增长（例如，参见 [2,24]），并且可以计算出某个增长率 γ_{L_2} （例如，参见 [30]）。其中得到了理论值$\gamma_{L_1} = 0.562$ 和 $\gamma_{L_2} = 0.168$ 。不过，由于我们的计算中也存在数值噪声，增长率与理论值略有偏差。这是由数值误差造成的，因为我们只采用了一阶粒子方法（参见 [20]）。我们指出，这种现象也可以在 [32] 和 [22], 中观察到，而且似乎迄今还无法完全避免此类误差。

双流不稳定性。 正向求解器的下一个测试案例是出现所谓的双流不稳定性，这是等离子体另一种广为人知的行为（参见例如 [16, 第 6 章6] 或 [25]）。我们在维数为 $d = (1, 1)$ 的情况下运行此测试案例，不施加任何控制（即 $B \equiv 0$）。当两束速度方向相反的电子束在静态背景离子的作用下随时间演化时，就会发生这种不稳定性。为此，电子关于速度的初始分布是两个高斯分布之和

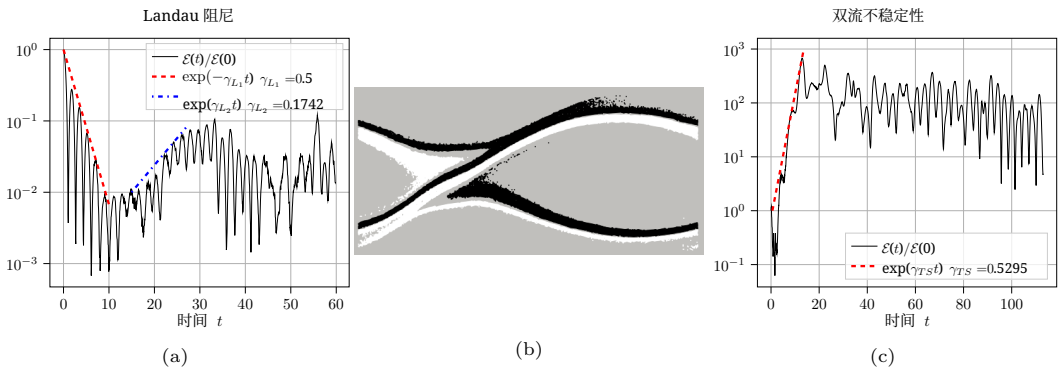


图 1：Landau 阻尼和双流不稳定性实验的结果。(a) 绘制 $\mathcal{E}(t)/\mathcal{E}(0)$（参见 (5.2)），纵坐标采用对数刻度，绘制其随时间的变化，以及 $\gamma_{L_1} = 0.5$ 和 $\gamma_{L_2} = 0.1742$；(b) 双流不稳定性的表现。初始速度为正的粒子以黑色显示，而初始速度为负的粒子以白色显示。(c) 对于双流不稳定性测试案例，绘制 $\mathcal{E}(t)/\mathcal{E}(0)$ 随时间的变化，其中 $\gamma_{TS} = 0.5295$

.

其中心分别位于 v_{TS} 和 $-v_{\mathrm{TS}}$。更准确地说，我们从一个在空间上略微偏离平衡态的电子初始条件出发：对于 $(x,\ v) \in \Omega_x \times \Omega_v$，我们取

$$\mathring{f}^-(x,v) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma_{\mathrm{TS}}^2}}\left(\exp\left(-\frac{(v-v_{\mathrm{TS}})^2}{2\sigma_{\mathrm{TS}}}\right) + \exp\left(-\frac{(v+v_{\mathrm{TS}})^2}{2\sigma_{\mathrm{TS}}}\right)\right)(1+\alpha\cos(k\,x))\,,$$

其中 σ_{TS} 必须小于 v_{TS}。与 [30], 中一样，我们考虑取值 $\sigma_{\mathrm{TS}} = \pi/2, v_{\mathrm{TS}} = 0.1, \alpha = 0.01$, $k = 0.5$。此外，我们假设离子的速度服从麦克斯韦分布，且在空间中均匀分布。数值参数选为$N_f = 5\cdot 10^4, \Delta t = 0.05, x_{\max} = 4\pi, v_{\max} = 10, \Delta x = 0.1256, \Delta v = 0.04$。图 1(b) 展示了双流不稳定性的表现。纵坐标表示速度，横坐标表示位置。图 1(c) 展示了相对电能$\mathcal{E}(t)/\mathcal{E}(0)$ 随时间的变化。我们的结果与 [30]中的结果非常吻合。特别是，我们的数值增长率 $\gamma_{TS} = 0.5295$ 与理论增长率 0.4952 相差不大。

通过最优控制，使受限初始分布随时间保持受限。 在正向求解器通过这些测试后，我们继续测试整个优化方法，即 算法 4.8。我们的目标是找到一种控制，使等离子体受到约束（即等离子体远离区域 Ω_x的边界），且处于时间区间$[0,T]$内，前提是初始状态受限。更具体地说，我们采用 $\theta^{\pm}$ 和 $\varphi^{\pm}$ 在（4.1）中给出的结构，以及相空间分布

$$z_{\mathfrak{d}}^{\pm} = z_T^{\pm} = (x_{\max}/2, 0, 0) \in \mathbb{R}^{d_x}\times\mathbb{R}^{d_v},$$

在这种情况下，它们与时间无关。我们选择这些量，是为了确保粒子的平均位置接近空间区域 $\Omega_x = (0,\ x_{\max})$ 的中心，并且粒子的平均速度接近零。方差矩阵选为

$$\Sigma_{\theta^{\pm}} = \Sigma_{\varphi^{\pm}} = \mathrm{diag}(100, \sqrt{\pi/8}\bar{v}, \sqrt{\pi/8}\bar{v}) \in \mathbb{R}^{(d_x+d_v)\times(d_x+d_v)},$$

其中 $\bar{v} = 1$是我们选定的期望速度（参见 [23]）。此外，我们将初始数据选为光滑的钟形函数 $\mathring{f}^{\pm}$，它们在 Ω_x 内紧支撑，且关于轴 $x = x_{\max}/2$对称。具体而言，定义$\mathring{\epsilon} = \frac{x_{\max}}{4}$和 $\sigma_v = 0.01$后，我们选取（参见 [21, 附录 C.4]）

$$\mathring{f}^{\pm}(x,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\sigma_v^2}\exp\left(-\dfrac{2\sigma_v^2}{|v|^2}\right)\exp\left(-\dfrac{1}{1-(x/\mathring{\epsilon})}\right) & \text{if } \left|x-\frac{x_{\max}}{2}\right| \le \mathring{\epsilon}, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

数值参数设定为 $N_f = 10^3$, $\Delta t = 0.3$, $x_{\max} = 10^3$, $\Delta x = 10^2$, $v_{\max} = 5 \cdot 10^3$, $\Delta v = 10^3$, 控制权重设定为 $\alpha = 10^{-4}$ 和 $\kappa_t = \kappa_x = 10^{-4}$。在图 2(a)左图中，绘出了未施加任何控制时模型的演化结果。具体而言，图中展示了电子和离子分布的均值与方差随时间的变化 $[0, T]$，以及数值粒子偏离空间区域 Ω_x中心的最大偏差 $\max(\Delta_x^{\pm}$。对于每个时间步$k = 1, \ldots, N_t$，该最大偏差定义为

$$\max(\Delta_x^{\pm}) \coloneqq \max_{p \in 1,\ldots,N_f} \left(\left| F_{\pm}^k[p].x - \frac{x_{\max}}{2} \right| \right). \tag{5.3}$$

The （离散）均值以及关于位置的方差按通常方式定义，即 ,

$$\mathbb{E}[f](t^k) \coloneqq \frac{1}{N_f} \sum_{p=1}^{N_f} F^k[p].x, \qquad \sigma^2[f](t,x) \coloneqq \frac{1}{N_f} \left(\sum_{p=1}^{N_f} (F^k[p].x)^2 - (\mathbb{E}[f](t^k))^2 \right). \tag{5.4}$$

从 图 2(a) 左图中可以清楚地看出， $f^{\pm}$ 的支集不断扩大，最终充满整个区域 Ω_x ，如果不施加控制。相反，如图 2(a) 右图所示，通过我们的优化方法 B 得到的局部最优控制使得 $f^{\pm}$ 的支集远离区间 Ω 的边界$_x$。事实上，分布函数 f^+ （与离子相关联）的支集在整个时间过程中几乎没有变化。计算得到的最优控制如图 2(b)所示。值得一提的是，我们在未假设任何关于控制的额外知识的情况下开始了优化方法，即仅通过选择$B \equiv 0$来初始化控制。总而言之，这说明了我们的最优控制方法能够找到一个外部磁场 B ，使受限初始状态在整个时间过程中保持受限，至少在一个较短的时间区间内如此。

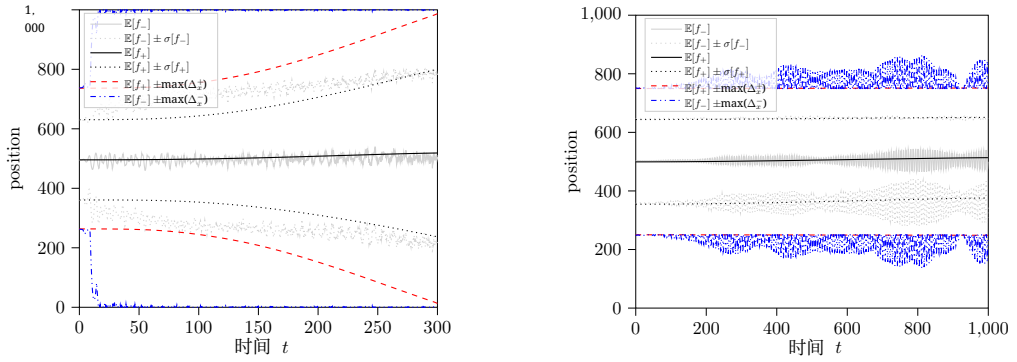
在图 2(c)中，我们绘制了泛函的收敛历史。回顾一下，我们采用粒子方法，并且每次求解状态方程时都会重新采样初始条件。通过这种方式，我们希望找到一种（局部）最优控制，使其不仅适用于数值粒子的某个特定初始分布。然而，这会导致代价泛函的收敛过程并非单调，而是在收敛末期出现振荡。

在图 3中，我们绘制了密度

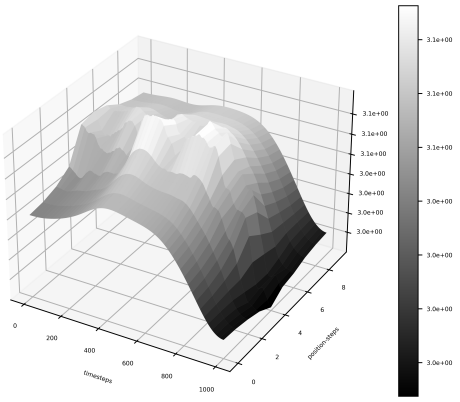
$$\rho_{f^{\pm}}(t,x) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^{d_v}} f^{\pm}(t,x,v)\,\mathrm{d}v, \tag{5.5}$$

未施加控制（$B \equiv 0$）以及采用我们的优化策略计算得到的控制下的密度图。这些图还清楚地表明，我们的控制能够使粒子远离边界。在图 3(a)中，无控制情形下，电子在很短时间后便到达边界，而离子则在时间区间末期到达边界。相反，在图 3(b)中，粒子在整个时间区间内都明显远离边界。

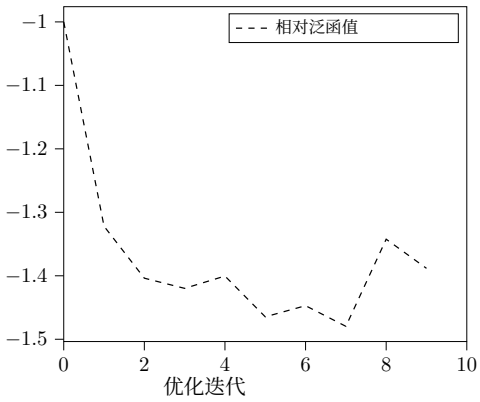
6. 致谢。Stefania Scheurer的部分研究经费由康斯坦茨大学的Zukunftskolleg提供。Jan Bartsch的部分研究经费由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助的SFB 1432“涨落与非线性”（项目编号 425217212）提供；Patrik Knopf的部分研究经费则由DFG资助的RTG 2339“界面、复杂结构与奇异极限”提供。此外，J¨org Weber获得了瑞典研究理事会的资助（资助编号 2020-00440）。谨对所有这些资助表示衷心感谢。我们还感谢Leo Basov（德国航空航天中心哥廷根分部）就实现的数值验证提出了非常有帮助的意见。我们也谨向匿名审稿人致谢，感谢他们提出的有益问题和意见。



(a) 均值、方差及相对于中心的最大偏差的演化 $f^{\pm}$；参见（5.3）和（5.4） the 定义。左：无控制情形；右：受控情形



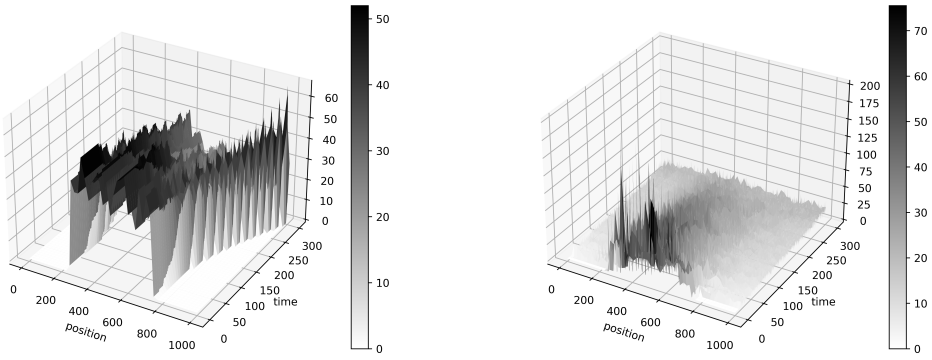
（b）计算所得控制量的曲面图



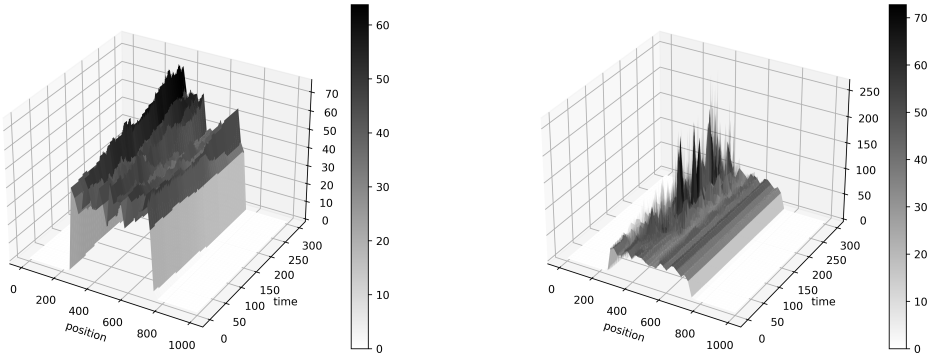
（c）代价泛函的收敛历史 $\widetilde{J}$（相对于数值 $J(B \equiv 0)$ 的相对值 ~）

Fig. 2：采用齐次诺伊曼边界条件的算法 4.8 中给出的优化过程 i n time 以及控制量的空间

[1] Badsi, M., and Herda *numerical modeling of plasmas* 53 *ESAIM Proc. Surveys* 2016, 22 离子体的建模与模拟。载于，第 卷。EDP Sci.，Les Ulis，第 – 37 页。[2] Bailey, V. L., J., and Denavit *Physics of Fluids*, J. 无碰撞等离 *13* 2 1970 451 458 子体中的非线性振荡。，（2月），–。[3] Bartsch, J., and Borzì, A. MOCOKI：一种用于线性动力学模型作用力下最优控制的蒙特卡罗方法。 *Comput. Phys. Commun. 266* (2021), 108030。[4] Bartsch, J., Borzì, A., Fanelli, F., and Roy, S. 对Brockett集成最优控制问题的理论研究。 *Calc. Var. Partial Differential Equations 58* 5 2019 162, , （），论文 34 编号。[5] Bartsch, J., Borzì, A., Fanelli, F., and Roy, S. 对Brockett集成最优控制问题的数值研究。 *Numer. Math. 149*, 1（2021），1–42。[6] Bartsch, J., Nastasi, G., and Borzì, A. 蒙特卡罗框架下Keilson-Storer主方程的最优控制。 *J. Comput. Theor. Transp.* (2021)。[7] Batt, J. *J. Differential* 恒星动力学初 *Equations 25* 3 1977 342 364 值问题的全局对称解。，（），–。[8] Belyaeva, Y. O., Gebhard, B., and Skubachevskii, A. L. 构造平衡Vlasov-Poisson等离子体构型的一般方法。 *Kinet. Relat. Models 14*, 2（2021），257–282。[9] Birdsall, C. K., and Langdon, A. B. *Plasma physics via computer simulation*。CRC Press, 2004。[10] Boris, J. P. Cylrad粒子推进器。载于 *Proc. Fourth Conference on Numerical Simulation of Plasmas* (1970)，第3页。[11] Borzì, A. and Schulz V. *Computational Optimization of Systems Governed by Partial Differential*, , , 第 卷。 *Equations* 8 *Computational Science & Engineering* 工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州，2012。[12] Braasch, P., Rein, G., and Vukadinović, J. 平衡等离子体的非线性稳定性——能量-Casimir方法的扩展。 *SIAM J. Appl. Math. 59*, 3（1999），831–844。



(a) 未受控密度（左：离子，右：电子）



(b) 受控密度（左：离子，右：电子）

图 3：数值离子（左）和电子（右）电荷密度的演变（参见（5.5））。上方：未施加控制时的行为；下方：施加由我们的优化过程计算得出的控制后的行为，该控制如图 2(b)所示。

[13] Brockett, R. 李乌维尔方程控制笔记。载于 *Control of partial differential equations* 2048 *Lecture Notes in Math.* 2012, 101 129 , Springer丛书第 *Control of partial differential equations* 2048 *Lecture Notes in Math.* 2012, 101 129 卷，海德堡，第–页。

[14] Caprino, S., Cavallaro, G., and Marchioro, C. 磁约束下Vlasov–Poisson等离子体的时间演化。《物理学前沿》4（2012年），729–742。[15] Casella, G., Robert, C. P., and Wells, M. T. 广义接受-拒绝抽样方案。载于 *A festschrift for Herman Rubin*, *IMS Lecture Notes Monogr. Ser.* 第45卷，Inst. Math. Statist.，Beachwood，OH，2004年，第342–347页。[16] Chen, F. F., et al. *Introduction to plasma physics and controlled fusion*，第1卷。Springer，1984年。[17] Chertock, A. 确定性粒子方法实用指南。载于 *Handbook of numerical methods for hyperbolic problems* 18 *Handb. Numer. Anal.* , Elsevier/North-Holland *Handbook of numerical methods* 丛书第*for hyperbolic problems* 18 *Handb. Numer. Anal.* 卷，阿姆斯特丹，2017年，第177–202页。[18] Crowe, C. T. Schwarzkopf J. D. Sommerfeld M. and Tsuji Y. *Multiphase flows with droplets* , , , , , , 。CRC出版社，。 *and particles* 2011

[19] Dragomir, S. S. *Some Gronwall type inequalities and applications*。Nova Science Publishers, Inc.，Hauppauge，NY，2003年。[20] Edwards, E. and Bridson R. *Internat. J. Numer.* , , 一种高阶精度粒子网格 *Methods Engrg. 90* 9 2012 1073 1088 法。， （），–。[21] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*，第二版， *Graduate Studies in Mathematics*第19卷。美国数学会，Providence，RI，2010年。[22] Finn, D. S., Knepley, M. G., Pusztay, J. V., and Adams, M. F. 使用PETSc-PIC研究Landau阻尼。《物理学前沿》（2023年）。[23] Garcia, A. L. *Numerical Methods for Physics*。Prentice Hall，Englewood Cliffs，NJ，2000年。[24] Gary, S. P. 麦克斯韦分布等离子体中的三阶振荡。《物理学前沿》3（1967年3月），570–581。[25] Ghorbanalilu, M., Abdollahzadeh, E., and Rahbari, S. E. 非广延统计中双流不稳定性的粒子网格模拟。《物理学前沿》3（2014年），399–407。[26] Glass, O. Vlasov-Poisson系统的可控性。《物理学前沿》2（2003年），332–379。

[27] Glass, O., and Han-Kwan, D. 存在外力场时Vlasov-Poisson系统的可控性。《物理学前沿》10（2012年），5453–5491。[28] Hahn, S., Kim, K., Kim, K., Hu, X., Painter, T., Dixon, I., Kim, S., Bhattarai, K. R., Noguchi,S. Jaroszynski J. and Larbalestier D. C. 45 5 , , , , 。由高温超导磁体产生的-特斯拉直流磁场。《物理学前沿》7762（2019年6月），496–499。[29] Han-Kwan, D. 托卡马克等离子体的约束。《物理学前沿》6（2010年），2337–2367。[30] Ho, A., Datta, I. A. M., and Shumlak, U. 用于高保真数值模拟的基于物理的自适应等离子体模型。《物理学前沿》（2018年9月），105。[31] Jin, X.-B., Zhang, X.-Y., Huang, K., and Geng, G.-G. 具有方差缩减的随机共轭梯度算法。《物理学前沿》5（2019年），1360–1369。[32] Kirchhart, M., and Wilhelm, R.-P. Vlasov–Poisson方程的数值流迭代。《物理学前沿》（2023年）。[33] Knopf, P. 通过外部磁场对Vlasov-Poisson等离子体进行最优控制。博士论文，拜罗伊特大学，https://epub.uni-bayreuth.de/id/eprint/3387，2017年。[34] Knopf, P. *Calc. Var.* 通过外部磁场*Partial Differential Equations 57* 5 2018 134, 37对Vlasov-Poisson等离子体进行最优控制。， （），论文编号：。[35] Knopf, P. *Math.* 无限长圆柱中*Methods Appl. Sci. 42* 18 2019 6369 6384Vlasov-Poisson等离子体的受限稳态。， （），–。[36] Knopf, P., and Weber, J. 通过固定磁场线圈对Vlasov-Poisson等离子体进行最优控制。《物理学前沿》3（2020年），961–988。[37] Knopf, P., and Weber, J. 具有外部磁场的二维半Vlasov-Poisson系统：整体适定性及受限稳态的稳定性。《物理学前沿》（），论文编号：。[38] Kurth, R. 恒星动力学的初值问题。《物理学前沿》（1952年），213–229。[39] Lions, P.-L., and Perthame, B. 三维Vlasov-Poisson系统的矩传播与正则性。《物理学前沿》2（1991年），415–430。[40] Mangeney, A., Califano, F., Cavazzoni, C., and Travnicek, P. Vlasov–Maxwell方程组的积分数值格式。《物理学前沿》2（2002年），495–538。[41] Miyamoto, K., et al. *Plasma physics for controlled fusion*，第92卷。Springer，2016年。[42] Mouhot, C., and Villani, C. 关于Landau阻尼。《物理学前沿》1（2011年），29–201。[43] Nguyen, T. T., Nguyen, T. V., and Strauss, W. 1.5维Vlasov–Maxwell系统的全局磁约束。《物理学前沿》1（2015年），153–168。[44] Pfaffelmoser, K. 一般初始数据下三维Vlasov-Poisson系统的全局经典解。《物理学前沿》2（1992年），281–303。[45] Rein, G. *Math. Methods Appl. Sci.* 有界区域中稳态*15* 5 1992 365 374无碰撞等离子体的存在性。， （），–。[46] Rein, G. 天体物理学中的无碰撞动理学方程——Vlasov-Poisson系统。载于*of differential equations: evolutionary equations. Vol. III* *Handbook* ，《微分方程手册》。Elsevier/North-Holland，阿姆斯特丹，2007年，第383–476页。[47] Robert, R. ´ ` ´ *C. R.* 紧支集*Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 324* 8 1997 873 877Vlasov-Poisson方程弱解的唯一性。， （），–。[48] Schaeffer, J. 三维Vlasov-Poisson系统光滑解的整体存在性。《物理学前沿》8-9（1991年），1313–1335。[49] Schraudolph, N. N., and Graepel *Proceed-* , T. 迈向随机*ings of the 9th International Conference on Neural Information Processing 2002. ICONIP'02.*共轭梯度方法。载于，（2002年），第2卷，IEEE，第853–856页。[50] Skubachevskiĭ, A. L. 均匀磁场中双组分等离子体的Vlasov-Poisson方程。《物理学前沿》2(416)（2014年），107–148。[51] Stacey, W. M. *Fusion plasma physics*。约翰·威立父子出版公司，2005年。[52] Steele, J. M. 非均匀随机变量生成（Luc Devroye），1987年。[53] Tajima, T. *Computational Plasma Physics: With Applications to Fusion and Astrophysics*。《物理学前沿》。CRC Press，2019年。[54] Ukai, S., and Okabe, T. 二维Vlasov方程大时间范围内的经典解。《物理学前沿》2（1978年），245–261。[55] Weber, J. 容器中的高温等离子体——一个最优控制问题。《物理学前沿》3（2020年），2895–2929。[56] Weber, J. *ESAIM Control Optim.* 二维Vlasov–*Calc. Var. 27* 2021 19Maxwell系统的最优控制。（），S。[57] Wollman, S. *Comm. Pure* 二维*Appl. Math. 33* 2 1980 173 197Vlasov-Poisson系统的全时间解。， （），–。[58] Zenitani, S., and Umeda, T. 粒子网格模拟中的Boris求解器。《物理学前沿》11（2018年），112110。[59] Zhang, K. Z. *Math. Methods* 边界处的磁约*Appl. Sci. 44* 7 2021 5705 5738束可近似镜面反射。， （），–。