# 冻结自变量斯图姆-刘维尔算子的恢复的一致稳定性

Maria Kuznetsova[1]

摘要。本文研究根据谱和附加数据恢复带冻结自变量的 Sturm–Liouville 算子的问题。针对这一反问题，我们证明了其具有一致稳定性这一重要性质，即位势关于输入数据呈 Lipschitz 连续依赖。

关键词：逆谱问题；冻结自变量；Sturm–Liouville 算子；一致稳定性　2010年数学主题分类：34K29，34A55

arXiv:2304.02090v1 [math.SP] 4 Apr 2023

## 1. 引言

逆谱问题旨在根据算子的谱特征恢复算子。关于这一方向，最完整的结果涉及经典微分算子（见 [1–4]）。本文研究带冻结自变量的 Sturm–Liouville 算子。与经典算子不同，它是非局部的。因此，研究带冻结自变量算子的逆谱问题需要采用非传统方法。

我们研究根据边值问题 $\mathcal{B}_{a,\ \alpha,\ \beta}(q)$ 的谱　$\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$恢复复值位势　$q \in L_2(0,\pi)$:

$$\ell y := -y''(x) + q(x)y(a) = \lambda y(x), \quad x \in (0,\pi), \tag{1}$$

$$y^{(\alpha)}(0) = y^{(\beta)}(\pi) = 0, \tag{2}$$

其中　$a \in [0,\pi]$ 和　$\alpha$，　$\beta \in \{0,1\}$. 表达式　$\ell y$ 确定了带有冻结自变量的 Sturm–Liouville 算子。同时，方程（1）属于所谓的荷载微分方程 [5–8], ，这类方程在数学、物理学、数学生物学等领域都有应用。

本文旨在通过谱和一些附加数据获得反问题的稳定性。这一性质保证，对任意固定输入数据施加小扰动会导致解发生小扰动，并且可用于数值算法的开发，参见 [9–11]。在此，我们证明涉及一致估计的更强的一致稳定性。此前，已有多位作者研究了一致稳定性（参见 [12–18]），这使他们能够更好地理解所研究反问题的本质。

关于含冻结自变量算子的逆谱问题的多个方面已在 [19–29] 中得到研究。特别是， [22–24, 26, 27], 研究了由谱　$\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 确定的反问题，其中分别采用不同方法处理了有理数和无理数　$a/\pi$　的情形。近期工作 [30], 提出了一种适用于这两种情形的统一新方法，据此证明了如下谱刻画：任意序列　$\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$　是某个边值问题 $\mathcal{B}_{a,\ \alpha,\ \beta}(q)$ 的谱，当且仅当

$$\lambda_n = \rho_n^2, \quad \rho_n = z_n + \frac{\nu_n}{n}\varphi_\alpha(az_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2, \tag{3}$$

其中我们记

$$z_n := n - \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \varphi_\alpha(x) := \begin{cases} \sin x, & \alpha = 0, \\ \cos x, & \alpha = 1. \end{cases}$$

我们还提及　[31] 中的另一种通用方法，该方法可用于获得谱刻画。

公式（3）给出了特殊的渐近行为，其中第　$n$ 个余项中的乘子为　$\varphi_\alpha(az_n)$，$n \in \mathbb{N}$. 若　$a/\pi$　是无理数，该乘子永远不会变为 0，尽管其绝对值可以任意小。若　$a/\pi$ 是有理数，　$\varphi_\alpha(az_n)$ 的取值呈周期性，且可能包含 0。设 $\Omega = \{\underline{n} \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_\alpha(az_n) = 0\}$ 且 $\Omega = \mathbb{N} \setminus \Omega$。公式（3）表明，对于任意　$q$，谱部分　$\{\lambda_n\}_{n\in\Omega}$ 都相同，即

[1]数学系，萨拉托夫国立大学，电子邮件：　*kuznetsovama@info.sgu.ru*

这一部分没有提供有用信息。在 [30], 中已证明，为了唯一确定 $q$，还应设定系数 $\xi_n = \int_0^\pi \varphi_\alpha(z_n t)\, q(t)\, dt$ 的部分 $\{\xi_n\}_{n\in\Omega} \in \ell_2$， $n \in \mathbb{N}$. 因此，我们必须考虑以下反问题。

反问题 1. 给定 $\{\lambda_n\}_{n\in\overline{\Omega}}$ 和 $\{\xi_n\}_{n\in\Omega}$，求出 $q \in L_2(0,\pi)$。

设 $\|\cdot\|$ 为空间 $\ell_2$ 中的经典范数，并且

$$\left\|\{x_n\}_{n\in\overline{\Omega}}\right\|_{\mathbf{a}} := \left\|\left\{x_n \varphi_\alpha^{-1}(a z_n)\right\}_{n\in\overline{\Omega}}\right\|.$$

若条件 (3) 成立，则值 $\left\|\{n(\rho_n - z_n)\}_{n\in\overline{\Omega}}\right\|_{\mathbf{a}}$ 有限。

我们证明以下关于反问题 1 一致稳定性的定理。

定理 1. 固定 $r > 0$，并考虑两个边值问题 $\mathcal{B}_{a,\alpha,\beta}(q)$ 和 $\mathcal{B}_{a,\alpha,\beta}(\tilde{q})$，其谱分别为 $\{\rho_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\tilde{\rho}_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$。若条件

$$\left\|\{n(\rho_n - z_n)\}_{n\in\overline{\Omega}}\right\|_{\mathbf{a}} \le r, \quad \left\|\{n(\tilde{\rho}_n - z_n)\}_{n\in\overline{\Omega}}\right\|_{\mathbf{a}} \le r \tag{4}$$

成立，则有如下不等式

$$\|q - \tilde{q}\|_{L_2(0,\pi)} \le C_r \Xi + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\|\{\xi_n - \tilde{\xi}_n\}_{n\in\Omega}\right\|, \quad \Xi := \left\|\{n(\rho_n - \tilde{\rho}_n)\}_{n\in\overline{\Omega}}\right\|_{\mathbf{a}}, \tag{5}$$

其中 $\xi_n = \int_0^\pi q(t)\varphi_\alpha(z_n t)\, dt$， $\tilde{\xi}_n = \int_0^\pi \tilde{q}(t)\varphi_\alpha(z_n t)\, dt$，且常数 $C_r$ 仅依赖于 $r$.

定理 1 的表述意味着，位势 $q$ 对由条件 (3)、$\left\|\{n(\rho_n - z_n)\}_{n\in\overline{\Omega}}\right\|_{\mathbf{a}} \le r$ 和 $\{\xi_n\}_{n\in\Omega} \in \ell_2$. 确定的集合中的反问题 1 输入数据具有 Lipschitz 连续依赖性。

文献 [15–18] 获得了其他类型非局部算子恢复的一致稳定性。其中针对非局部算子的方法采用了根据谱重建特征函数的一致稳定性。我们遵循相同的策略。与文献 [15–18], 相比，本文的具体之处在于用于衡量谱之间距离的量 $\Xi$。其定义涉及除以 $\varphi_\alpha(z_n a)$，而该值可能任意接近 0。因此，在定理 1 的证明中，需要对特征函数之差进行专门估计。

## 2. 预备知识

考虑关于 $\lambda$ 的整函数 $\Delta(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda) = (-1)^{\alpha(1-\beta)} \frac{\varphi_{|\beta-\alpha|}(\pi\rho)}{\rho^{1-\alpha-\beta}} + \\ + (-1)^{\alpha} \left( \frac{\varphi_\beta((\pi-a)\rho)}{\rho^{2-\alpha-\beta}} \int_0^a q(t)\varphi_\alpha(t\rho)\, dt + \frac{\varphi_\alpha(a\rho)}{\rho^{2-\alpha-\beta}} \int_a^\pi q(t)\varphi_\beta((\pi-t)\rho)\, dt \right),$$

其中及下文中， $\lambda = \rho^2$. 在 [26, 30], 中已证明， $\Delta(\lambda)$ 是边值问题 $\mathcal{B}_{a,\alpha,\beta}(q)$ 的特征函数，即当且仅当 $\Delta(\lambda_n) = 0.$ 时，数 $\lambda_n$ 是特征值。边值问题 $\mathcal{B}_{a,\alpha,\beta}(q)$ 的特征值序列 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ （计入代数重数）称为谱。

对于特征函数，我们得到如下表示式:

$$\Delta(\lambda) = (-1)^{\alpha(1-\beta)} \frac{\varphi_{|\beta-\alpha|}(\pi\rho)}{\rho^{1-\alpha-\beta}} + \frac{1}{\rho^{2-\alpha-\beta}} \int_0^\pi \varphi_{1-|\beta-\alpha|}(t\rho)\, W(t)\, dt, \quad W \in L_2(0,\pi), \tag{6}$$

其中 $\int_0^\pi W(t)\ dt = 0$ 如果 $\alpha = \beta = 0.$ 公式 (6) 的证明见 [22, 23]，适用于有理数 $a/\pi$；对于无理数 $a/\pi$，计算过程类似。已知可以从谱 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 唯一恢复 $\Delta(\lambda)$，进而唯一恢复 $W(t)$（参见 [22–24, 26]）。此外，我们还必须

获得关于数值 $\rho_n = \sqrt{\lambda_n}$, $n \in \mathbb{N}$ 的恢复 $W(t)$ 的一致稳定性，其中 $\arg \rho_n \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

˜考虑两个谱 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 我们约定，若某个符号 $\gamma$ 表示与 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$相关的对象，则带波浪号的符号 $\tilde{\gamma}$ 表示与˜ $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 相关的类似对象。为简便起见，我们记 $\hat{}\gamma := \gamma - \tilde{\gamma}$. 我们还用同一个符号 $C_r$ 表示仅依赖于 $r$.的不同常数

引理 1. 设

$$\big\|\{n(\rho_n - z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\big\| \le r, \quad \big\|\{n(\tilde{\rho}_n - z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\big\| \le r, \tag{7}$$

其中 $r > 0$ 为固定值。于是，以下不等式成立:

$$\|W\|_{L_2(0,\pi)} \le C_r, \quad \|\tilde{W}\|_{L_2(0,\pi)} \le C_r; \quad \|\hat{W}\|_{L_2(0,\pi)} \le C_r\big\|\{n\hat{\rho}_n\}_{n\in\mathbb{N}}\big\|. \tag{8}$$

引理 1 可由 [32, 定理 7], 推出，因为 $\Delta(\rho^2)$ 是 [32]中研究的正弦型函数的一个特例。证明定理 1 还需要以下引理。

引理2. 设 $M > 0$. 若 $\|W\|_{L_2(0,\pi)} \le M$ 且 $\Delta(\lambda)$ 由式 (6) 给出，则

$$|\Delta(\rho^2)| \le C_M n^{\alpha+\beta-1} \text{ for } |\rho - z_n| \le M,\ n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

证明。考虑 t he 情形 $\alpha = \beta = 0$ （其他情形可类似处理）。由 (6) 得

$$\Delta(\rho^2) = \frac{\sin\rho\pi}{\rho} + \int_0^\pi \frac{\cos\rho t}{\rho^2} W(t)\,dt, \quad \int_0^\pi W(t)\,dt = 0, \tag{10}$$

且 $z_n = n$. 令 $|\rho - n| \le M$，其中某个 $n \in \mathbb{N}$.

若 $n - M > 2$, 则对于 $|\rho - n| \le M$，有

$$|\rho|^{-1} \le (n - M)^{-1} \le C_M n^{-1}; \quad |\sin\rho\pi| < C_M; \quad |\cos\rho t| < C_M,\ t \in [0, \pi].$$

将这些估计代入 (10)，得到 $|\Delta(\rho^2)| \le C_M n^{-1} + C_M n^{-2}\|W\|_{L_2(0,\pi)} \le C_M n^{-1}$，并且 (9) 对于 $n - M > 2$. 得证

若 $n - M \le 2$, 则对于 $|\rho - n| \le M$，不等式 $|\rho| \le 2(M + 1)$ 成立。考虑圆$R_M = \big\{\lambda \in \mathbb{C}: \ |\lambda| \le 4(M + 1)^2\big\}$，它位于 $\lambda$-平面内。对于 $\lambda = \rho^2 \in R_M$，有以下估计

$$|\rho \sin\rho\pi| \le C_M, \quad |\cos\rho t| \le C_M,\ t \in [0, \pi],$$

因此, $|\lambda\Delta(\lambda)| \le C_M$.将 Schwartz 引理应用于 $R_M$ 中的函数 $\lambda\Delta(\lambda)$，得到 $|\Delta(\lambda)| \le C_M$当 $\lambda \in R_M$. 时，由于 $n \le M + 2$, 可得 $|\Delta(\rho^2)| \le C_M n^{-1}$当$|\rho| \le 2(M + 1)$, 且当 $|\rho - n| \le M$. 时。引理得证。

□

## 3. 定理 1 的证明

注意，系统 $\{\varphi_\alpha(z_n t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 除以 $\sqrt{\pi/2}$ 后成为正交基（若 $\alpha = \beta = 1$，则第一个函数应除以 $\sqrt{\pi}$ ）。于是，我们得到不等式

$$\|\hat{q}\|_{L_2(0,\pi)} \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\big\|\{\hat{\xi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}\big\| \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big(\big\|\{\hat{\xi}_n\}_{n\in\Omega}\big\| + \big\|\{\hat{\xi}_n\}_{n\in\overline{\Omega}}\big\|\Big). \tag{11}$$

In [30], 已证明 $\xi_n = (-1)^{n+1-\alpha} z_n^{2-\alpha-\beta} \Delta(z_n^2)\varphi_\alpha^{-1}(z_n a)$ $n \in \Omega$, 由此得 ¯ lds

$$\hat{\xi}_n = (-1)^{n+1-\alpha} z_n^{2-\alpha-\beta} \frac{\hat{\Delta}(z_n^2)}{\varphi_\alpha(z_n a)}, \quad n \in \overline{\Omega}.$$

因此，我们必须估计

$$\big\|\{\hat{\xi}_n\}_{n\in\overline{\Omega}}\big\| = \big\|\{\hat{\Delta}(z_n^2) z_n^{2-\alpha-\beta}\}_{n\in\overline{\Omega}}\big\|_{\mathbf{a}}. \tag{12}$$

此外，对于 $n \in \overline{\Omega}$，我们分别考虑每个值 $\hat{\Delta}(z_n^2)$，并将其表示为以下形式。

$$\hat{\Delta}(z_n^2) = -\tilde{d}_n \hat{\rho}_n + \hat{d}_n(z_n - \rho_n), \quad \tilde{d}_n := \lim_{\rho \to z_n} \tilde{f}(\rho), \quad \tilde{f}(\rho) := \frac{\tilde{\Delta}(\rho^2)}{\rho - \tilde{\rho}_n}, \tag{13}$$

$\tilde{}$ $\hat{}$ 对于 $d_n$ 和 $f(\rho)$，我们使用不带波浪号的类似记号。下面利用 Schwartz引理分别估计 $d_n$ 和 $d_n$。

a) 显然，$\|\{x_n\}_{n\in\overline{\Omega}}\| \le \|\{x_n\}_{n\in\overline{\Omega}}\|_{\mathbf{a}}$. 此外，由 (3) 得

$$\big\|\{n(\rho_n - z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\big\| = \big\|\{n(\rho_n - z_n)\}_{n\in\overline{\Omega}}\big\| \le \big\|\{n(\rho_n - z_n)\}_{n\in\overline{\Omega}}\big\|_{\mathbf{a}}.$$

于是，条件 (4) 得到 (7)，并且根据引理 1，不等式 (8) 成立。考虑下面三个圆:

$$\tilde{S}_n = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - \tilde{\rho}_n| < 2r\}, \quad S_n = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - \rho_n| < 4r\}, \quad Z_n = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_n| < 6r\}.$$

不等式 (7) 得到 $z_n \in \tilde{S}_n$ 和 $\tilde{S}_n \subset S_n \subset Z_n$. 。由 (8) 和引理2，对于 $Z_n$ 中的函数 $\tilde{\Delta}(\rho^2)$，我们得到估计 (9)，其中 $M = \max(C_r, 6r)$。对 $\tilde{S}_n$ 中的函数$\tilde{\Delta}(\rho^2)$应用 Schwartz引理，得到

$$\big|\tilde{f}(\rho)\big| \le C_r n^{\alpha+\beta-1},\ \rho \in \tilde{S}_n; \quad \big|\tilde{d}_n\big| = \Big|\lim_{\rho\to z_n} \tilde{f}(\rho)\Big| \le C_r n^{\alpha+\beta-1}. \tag{14}$$

类似地，我们有

$$|f(\rho)| \le C_r n^{\alpha+\beta-1}, \quad \rho \in S_n. \tag{15}$$

b) 注意到

$$\hat{d}_n = \lim_{\rho\to z_n} \frac{g(\rho)}{\rho - \tilde{\rho}_n}, \quad g(\rho) := \hat{\Delta}(\rho^2) + \hat{\rho}_n f(\rho), \quad g(\tilde{\rho}_n) = 0.$$

由公式 (6) 可得 $\hat{\Delta}(\rho^2) = \rho^{\alpha+\beta-2}\int_0^\pi \varphi_\alpha(\rho t)\,\hat{W}(t)\,dt$. 仿照引理2的证明，利用 (8)，可得不等式

$$\big|\hat{\Delta}(\rho^2)\big| \le \frac{C_r}{n^{2-\alpha-\beta}} \|\hat{W}\|_{L_2(0,\pi)} \le \frac{C_r}{n^{2-\alpha-\beta}}\Xi, \quad \rho \in Z_n. \tag{16}$$

为了估计 $g(\rho)$ 中的第二项，我们利用 (15) 以及 $|n\hat{\rho}_n| \le \Xi$ :

$$|\hat{\rho}_n f(\rho)| \le \frac{C_r}{n^{2-\alpha-\beta}}\Xi, \quad \rho \in S_n. \tag{17}$$

结合 合 (16) 和 (17)，可得 $|g(\rho)| \le C_r n^{\alpha+\beta-2}\Xi$ 属于 $\tilde{S}_n$. 由 Schwartz引理 ，

$$\left|\frac{g(\rho)}{\rho - \tilde{\rho}_n}\right| \le C_r n^{\alpha+\beta-2}\Xi,\ \rho \in \tilde{S}_n; \quad \big|\hat{d}_n\big| \le C_r n^{\alpha+\beta-2}\Xi. \tag{18}$$

最后，将 (14) 和 (18) 与 (13) 合并，得到

$$\big|\hat{\Delta}(z_n^2)\big| \le \frac{C_r|\hat{\rho}_n|}{n^{1-\alpha-\beta}} + \frac{C_r\Xi|z_n - \rho_n|}{n^{2-\alpha-\beta}}, \quad n \in \overline{\Omega}.$$

两边乘以 $n^{2-\alpha-\beta}\varphi_\alpha^{-1}(z_n a)$ 并取 $\ell_2$-范数，可得

$$\big\|\{\hat{\Delta}(z_n^2) z_n^{2-\alpha-\beta}\}_{n\in\overline{\Omega}}\big\|_{\mathbf{a}} \le C_r\Big(\big\|\{n\hat{\rho}_n\}_{n\in\overline{\Omega}}\big\|_{\mathbf{a}} + \Xi\big\|\{n(\rho_n - z_n)\}_{n\in\overline{\Omega}}\big\|_{\mathbf{a}}\Big) \le C_r\Xi.$$

应用估计式 (11) 和 (12) 即可完成证明。 □

备注。类似地，可以研究恢复 $q$ 的稳定性，其中的估计涉及 $\{\lambda_n\}_{n\in\overline{\Omega}}$而非$\{\rho_n\}_{n\in\overline{\Omega}}$. 。特别地，在 $\alpha = \beta = 0$ 的情况下，我们证明了以下定理。

定理 2。固定 $r > 0$，并考虑两个边值问题$\mathcal{B}_{a,\ 0,\ 0}(q)$和$\mathcal{B}_{a,\ 0,\ 0}(\tilde{q})$，其谱分别为$\tilde{}$ $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。若条件

$$\left\|\{\lambda_n - n^2\}_{n\in\overline{\Omega}}\right\|_{\mathbf{a}} \le r, \quad \left\|\{\tilde{\lambda}_n - n^2\}_{n\in\overline{\Omega}}\right\|_{\mathbf{a}} \le r$$

成立，则我们有如下不等式

$$\|\hat{q}\|_{L_2(0,\pi)} \le C_r\left\|\{\hat{\lambda}_n\}_{n\in\overline{\Omega}}\right\|_{\mathbf{a}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\|\{\hat{\xi}_n\}_{n\in\Omega}\right\|. \tag{19}$$

实际上，在没有附加假设的情况下，这一定理无法由定理 1 推出。为证明该定理，我们对定理 1 的证明进行了调整。最重要的改动是，我们必须证明引理 1 的类似结论，其中在 (8) 式右侧用 $\left\|\{\hat{}\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right\|$ 替代 $\left\|\{n\hat{}\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right\|$。对于 $\alpha = \beta = 0$ 的情形，所需结论已在 [15] 中证明。

致谢。本研究得到俄罗斯科学基金会第 22-21-00509 号项目资助，https://rscf.ru/project/22-21-00509/。作者感谢 Sergey Buterin 提供的宝贵意见。

## 参考文献

[1] Borg G. 关于 Sturm–Liouville 特征值问题的一种逆转，数学学报 78（1946年），1–96。[2] Marchenko V.A.《Sturm–Liouville 算子及其应用》，Naukova Dumka，基辅，1977年；英文译本，Birkh¨auser，1986年。[3] Levitan B.M.《逆 Sturm–Liouville 问题》，Nauka，莫斯科，1984年；英文译本，VNU Sci.Press，乌得勒支，1987年。[4] Freiling G., Yurko V.A.《逆 Sturm–Liouville 问题及其应用》，NOVA Science Publishers，纽约，2001年。[5] Krall A.M. 一般微分系统与一般微分边值系统的发展，《Rocky Mountain J. Math.》5（1975年），493–542。[6] Nakhushev A.M.《加载方程及其应用》，Nauka，莫斯科，2012年。[7] Lomov I.S. 加载微分算子：谱展开的收敛性，《微分方程》50（2014年），第8期，1070–1079。[8] Polyakov D.M. 二阶微分算子周期问题的非局部扰动，《微分方程》57（2021年），11–18。[9] Ignatiev M., Yurko V. 求解逆 Sturm–Liouville 问题的数值方法，《数学结果》52（2008年），63–74。[10] Bondarenko N., Buterin S. 卷积积分微分算子逆谱问题的数值解与稳定性，《非线性科学与数值模拟通讯》89（2020年），105298。[11] Bondarenko N.P., Gaidel A.V. 二次微分铅笔反问题的可解性与稳定性，《数学》9（2021年），第20期，文章2617。[12] Savchuk A.M., Shkalikov A.A. 位势属于 Sobolev 空间的 Sturm–Liouville 算子反问题：一致稳定性，《函数分析及其应用》44（2010年），270–285。

[13] Hryniv R.O. 狄拉克算子逆谱问题中的解析性与一致稳定性，《J. Math. Phys.》52（2011年），文章063513。[14] Hryniv R.O. 奇异 Sturm–Liouville 逆谱问题中的解析性与一致稳定性，《Inverse Problems》27（2011年），文章065011。[15] Buterin S. 卷积积分微分算子逆谱问题的一致稳定性，《Appl. Math. Comput.》390（2021年），文章125592。[16] Buterin S.A. 根据谱恢复 Sturm–Liouville 算子的卷积扰动的完全稳定性，《Journal of Differential Equations》282（2021年），67–103。[17] Buterin S., Djuri´c N., 带常时滞的狄拉克算子反问题：唯一性、刻画与一致稳定性，《Lobachevskii J. Math.》43（2022年），第6期，1492–1501。[18] Buterin S. 具有全局时滞的几何图上的函数微分算子与逆谱问题，《数学结果》78（2023年），文章79。[19] Albeverio S., Hryniv R.O., Nizhnik L.P. 非局部 Sturm–Liouville 算子的逆谱问题，《Inverse Problems》23（2007年），第2期，523–535。[20] Nizhnik L.P. 非局部 Sturm–Liouville 算子的逆特征值问题，《Meth. Func. Anal. Top.》15（2009年），第1期，41–47。[21] Nizhnik L.P. 非局部 Sturm-Liouville 反问题，《Inverse Problems》26（2010年），第12期，125006。[22] Bondarenko N.P., Buterin S.A., Vasiliev S.V. 带冻结自变量的 Sturm–Liouville 算子的逆谱问题，《J. Math. Anal. Appl.》（2019年），第1期，1028–1041。[23] Buterin S.A., Vasiliev S.V. 关于冻结自变量与区间长度成有理比例的 Sturm-Liouville 型算子的恢复，《J. Inv. Ill-posed Probl.》27（2019年），第3期，429–438。[24] Buterin S., Kuznetsova M. 关于带冻结自变量的 Sturm–Liouville 型算子的反问题：有理情形，《Comp. Appl. Math.》39（2020年），文章5。[25] Buterin S., Hu Y.T. 带冻结自变量的 Hill 型算子逆谱问题，《Anal. Math. Phys.》11（2021年），文章75。[26] Wang Y.P, Zhang M., Zhao W., Wei X. 无理情形下带冻结自变量的 Sturm–Liouville 算子的重构，《Applied Mathematics Letters》111（2021年），106590。[27] Tsai T.M., Liu H.F., Buterin S., Chen L.H, Shieh C.T. 带冻结自变量的 Sturm–Liouville 型算子与切比雪夫多项式，《Math. Meth. Appl. Sci.》45（2022年），第16期，9635–9652。[28] Kuznetsova M. 闭集上带冻结自变量的 Sturm–Liouville 算子反问题，《Itogi Nauki Tekh.》，《Ser. Sovrem. Mat. Prilozh.》，《Temat. Obz.》208（2022年），49–62。[29] Bondarenko N.P. 带冻结自变量的 Sturm-Liouville 反问题的有限差分逼近，《Appl. Math. Comput.》413（2022年），126653。[30] Kuznetsova M. 带冻结自变量的 Sturm–Liouville 算子之谱的充要条件，《Applied Mathematics Letters》131（2022年），108035。[31] Dobosevych O., Hryniv R. 带冻结自变量的微分算子的重构，《Axioms》11（2022年），第1期，文章24。[32] Buterin S.A. 关于渐近分离零点的正弦型函数恢复的一致稳定性，《Math. Notes》111（2022年），343–355。