arXiv:2304.02093v1 [math.RT] 4 Apr 2023

关于 $Sp_4(L)$ 的仿射 Deligne-Lusztig 簇

ZHONGWEI YANG

Abstract. 本文研究了 $Sp_4(L)$ 的仿射 Deligne-Lusztig 簇的空与非空性及维数公式。我们主要计算了类型为 $\sim C_2$ 的 Iwahori-Hecke 代数的类多项式的次数。随后，我们对群 $Sp_4(L)$ 的仿射 Deligne-Lusztig 簇的空与非空性及维数公式给出明确描述。

Contents

1. 引言 1
2. 预备知识 2
2.1. 伊wahori-魏尔群 2
2.2. 类多项式 3
2.3. “维数 = 次数”定理 4
3. 类型为 $\widetilde{C}_2$ 伊wahori-赫克代数的类多项式 5
3.1. 共轭类 5
3.2. 类多项式 9
4. 应用 24
4.1. 空与非空性及维数公式 24
4.2. G¨ortz-Haines-Kottwitz-Reuman 的猜想 29
5. 致谢 29
参考文献 29

1. Introduction

仿射 Deligne-Lusztig 簇这一概念最早由 Rapoport 在 [Ra05], 中引入，是（经典）Deligne-Lusztig 簇的类比。仿射 Deligne-Lusztig 簇 $X_{\tilde{w}}(b)$ 是算术几何研究中的重要组成部分。更确切地说，它在研究带有伊瓦霍里层结构的志村簇的约化时发挥着关键作用。具体而言，它与牛顿分层和 Kottwitz-Rapoport 分层的交集密切相关。志村簇特殊纤维上有两种重要的分层：由某些 σ-共轭类 $[b] \subset G(L)$ 编号的牛顿分层；由某些 $\tilde{w} \in W$ 编号的 Kottwitz-Rapoport 分层。与 $[b]$ 相关的牛顿分层和与 $\tilde{w}$ 相关的 Kottwitz-Rapoport 分层的交集，与仿射 Deligne-Lusztig 簇 $X_{\tilde{w}}(b)$ 有关，见 [HR17]。受志村簇研究的启发，人们可能会对研究仿射 Deligne-Lusztig 簇的空性与非空性以及维数公式感兴趣。尽管许多人已研究这些基本问题（例如参见 [GHKR10], [GH10], [GHN15], [He14], [He21], [MST19], [R02], [R04], [Y16] ），但对于任意 b 和 $\tilde{w}$ 下的 $X_{\tilde{w}}(b)$，这些问题仍未得到完整解答。最近，X. He 确立了任意 $b \in G(L)$ 及大多数 $\tilde{w} \in W$ （见 [He21]）对应的 $X_{\tilde{w}}(b)$ 的非空性结果和维数公式。

我们受到一项卓越结果的启发，即“维数 = 度数”定理（定理2.7），该定理由 He 在 [He14]，中提出，指出仿射 Deligne-Lusztig 簇的空性与非空性以及维数公式，可以由相应仿射赫克代数的类多项式得到。

本文计算了$\tilde{}$型 C_2的伊wahori-赫克代数的类多项式。随后，我们利用类多项式的相关结果，对 $Sp_4(L)$的仿射德林涅-卢斯蒂格簇的空/非空性及维数公式给出明确描述。

回顾仿射德林涅-卢斯蒂格簇的定义。设 $\mathbb{F}_q$ 为含有 q 个元素的有限域，k为其代数闭包， $L = \mathrm{k}((\epsilon))$为洛朗级数域。设 σ 为 L上的标准弗罗贝尼乌斯自同构， G 为定义在 $\mathbb{F}_q$上的连通约化群。自同构 σ 在环群 $G(L)$上诱导出一个自同构，我们仍记作 σ。设 I 为 $G(L)$的一个 σ-稳定伊wahori子群， W 为相应的伊wahori-魏尔群。我们$\dot{}$有伊wahori-布鲁哈分解 $G(L) = \bigsqcup_{\tilde{w}\in\widetilde{W}} I\tilde{w}I$，其中 $\tilde{w} \in G(L)$是 $\tilde{w} \in W$的一个$\widetilde{}$$\widetilde{}$代表元。对任意 $\tilde{w} \in W$ 和 $b \in G(L)$，仿射德林涅-卢斯蒂格簇 $X_{\tilde{w}}(b)$定义为

$$X_{\tilde{w}}(b) = \{gI \in G(L)/I | g^{-1}b\sigma(g) \in I\dot{\tilde{w}}I\}.$$

2. Preliminary

2.1. 伊wahori-魏尔群。沿用之前的记号： $\mathbb{F}_q$、 k L和 σ。假设 $F = \mathbb{F}_q((\epsilon))$是劳朗级数域。设 G 是定义在 F 上的连通约化群，并且在 L的一个温和分歧扩张上分裂。设 $S \subset G$ 是 F上的一个极大 L-分裂环面， $T = Z_G(S)$是它的中心化子， N是 T的正规化子。

定义 2.1。与 G 相关联的代数环群 LG 是定义在 k 上、表示如下函子的归纳群概形

$$R \longmapsto LG(R) = G(R((\epsilon)))$$

在 k-代数范畴上。

设 $\mathbb{A}$ 是环群 $G(L)$中对应于 S 的公寓， $\mathfrak{a}_C$ 是 $\mathbb{A}$中的一个 σ-不变阿尔科夫。设 $I \subset G(L)$是对应于$\sim$$\mathfrak{a}_C$ 在 L 上的伊wahori子群， $\mathbb{S}$ 是 $\mathfrak{a}_C$各墙上的简单反射集合。

定义 2.2。与 S 关联的有限 Weyl 群为 $W = N(L)/T(L)$，与 S 关联的伊wahori-魏尔群为 $W = N(L)/T(L)_1$，，其中 $T(L)_1$ 是 $T(L)$ 的唯一抛物型子群。

Weyl 群 W 是一个 Coxeter 群（定义见[Bo02] ）。伊wahori-$\widetilde{}$魏尔群 W 与 $I\backslash G(L)/I$一一对应，并且有$Iwahori\text{-}Bruhat$$\dot{}$$\widetilde{}$分解 $G(L) = \bigsqcup_{\tilde{w}\in\widetilde{W}} I\tilde{w}I$，其中 $\tilde{w} \in G(L)$ 是 $\tilde{w} \in W$的任意一个代表元。

$\bar{}$令 $\Gamma = \mathrm{Gal}(L/L)$，并令 P 为 $X_*(T)$ 的 Γ-余不变量。按照 [HR08]，通过在 $\mathbb{A}$ 中选取一个特殊顶点，我们将 $T(L)/T(L)_1$ 识别为 P。并且有一个$\widetilde{}$分裂短正合列 $1 \longrightarrow P \longrightarrow W \longrightarrow W \longrightarrow 1$ 以及一个半直积$\sim$ $\widetilde{}$ $W = P \rtimes W$。σ 在 $G(L)$ 上的自同构诱导出 W 上的自同构，记为 δ。 δ 给出 $\mathbb{S}$ 上的一个双射。我们在 $\mathbb{A}$ 中选取一个特殊顶点，使得前述分裂短正合列在 δ 作用下保持不变。因此， δ 在 W 上诱导出一个自同构，我们仍用同一符号表示它。

令 Φ 为G在 L上的（G, S）的根集， Φ^+ 为正根集，Φ_a 为仿射根集。令 $\mathbb{S}$ 为 Φ 中的简单根集。我们将 $\mathbb{S}$与 W中的简单反射集等同，因此 $\mathbb{S}$ 是 δ-稳定的真子集

~$\mathbb{S}$。令 G_1 为 $G(L)$中由所有抛物型子群生成的子群，并令~$N_1 = N(L) \cap G_1$。根据 [BT84],，四元组（G_1, I, N_1, $\mathbb{S}$）构成一个双 Tits 系统，其仿射 Weyl 群为 $W_a = N_1/(N(L) \cap I)$。我们将 W_a 与 G的导出群 G_{der} 的单连通覆盖 G_{sc} 的 Iwahori-Weyl 群等同。令T_{sc}为由 T给出的 G_{sc}的极大环面。因此我们有 $W_a = X_*(T_{\mathrm{sc}})_\Gamma \rtimes W$。这表明存在一个约化根系 Δ，使得 $W_a = Q^\vee(\Delta) \rtimes W(\Delta)$，其中 $Q^\vee(\Delta)$是 Δ的余根格。下文中，我们将用 Q 表示 $Q^\vee(\Delta)$，并将 Q 与 $X_*(T_{\mathrm{sc}})_\Gamma$ 等同，将 W 与 $W(\Delta)$等同。

~2.2. 类多项式。一般而言，伊wahori-魏尔群 W 并非 Coxeter~群，而是拟 Coxeter 群；按如下意义理解： $W = W_a \rtimes \Omega$，其中 Ω 是~~的子群，由 W 中长度为 0 的元素组成； $\tilde{w} \in W$ 的长度（记作$\ell(\tilde{w})$）定义为 $\tilde{w}(\mathfrak{a}_C)$与$\mathfrak{a}_C$ 之间在 $\mathbb{A}$中的“仿射根超平面”数量。

现在，我们类比 Coxeter 系统所关联的 Hecke 代数的定义，回顾拟 Coxeter 群所关联的 Hecke 代数。

~~~~~定义 2.3. 设 H 为与 W关联的 Hecke 代数，即 H 是一个~结合 $A = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-代数，其基为 $T_{\tilde{w}}$ （其中 $\tilde{w} \in W$），乘法定义如下：

$$T_{\tilde{x}} T_{\tilde{y}} = T_{\tilde{x}\tilde{y}}, \quad \text{if } \ell(\tilde{x}) + \ell(\tilde{y}) = \ell(\tilde{x}\tilde{y});$$

$$(T_s - v)(T_s + v^{-1}) = 0, \quad \text{for } s \in \widetilde{\mathbb{S}}.$$

~注意，映射 $T_{\tilde{w}} \mapsto T_{\delta(\tilde{w})}$ 定义了一个 A-代数自同构 H，我们仍将其记作 δ。

对于任意 $\tilde{w}$, $\tilde{w}' \in \widetilde{W}$若存在某个 $\tilde{x} \in$使得 $\tilde{w}' = \tilde{x}\tilde{w}\delta(\tilde{x})^{-1}$，则称 W 为 δ-共轭的。~ W。对于 $\tilde{w}$、 $\tilde{w}' \in \widetilde{W}$ 和 $s_i \in \widetilde{\mathbb{S}}$，若 $\tilde{w}' = s_i \tilde{w} s_{\delta(i)}$ 且 $\ell(\tilde{w})' \leqslant \ell(\tilde{w})$，则记作 $\tilde{w} \xrightarrow{s_i}_\delta \tilde{w}'$。若存在由 $\widetilde{W}$ 中元素组成的序列 $\tilde{w} = \tilde{w}_0$、 $\tilde{w}_1$、 $\cdots$、 $\tilde{w}_n = \tilde{w}'$，使得对于任意 k、 $\tilde{w}_{k-1} \xrightarrow{s_i}_\delta \tilde{w}_k$，存在某个 $s_i \in \tilde{\mathbb{S}}$，则记作 $\tilde{w} \to_\delta \tilde{w}'$。若 $\tilde{w} \to_\delta \tilde{w}'$ 且 $\tilde{w}' \to_\delta \tilde{w}$，则记作 $\tilde{w} \approx_\delta \tilde{w}'$。若存在某个 $\tau \in$，使得 $\tilde{w} \approx_\delta \tau\tilde{w}'\delta(\tau)^{-1}$，则记作 $\tilde{w} \tilde{\approx}_\delta \tilde{w}'$ Ω。

~~如果 $\tilde{w}$, $\tilde{w}' \in W$满足 $\ell(\tilde{w}) = \ell(\tilde{w}')$~~，且存在 $\tilde{x} \in W$使得 $\tilde{w}' = \tilde{x}\tilde{w}\delta(\tilde{x})^{-1}$并且 $\ell(\tilde{x}\tilde{w}) = \ell(\tilde{x}) + \ell(\tilde{w})$，或者$\ell(\tilde{w}\delta(\tilde{x})^{-1}) = \ell(\tilde{x}) + \ell(\tilde{w})$，我们称它们是初等强 δ-共轭。若存在一列 $\tilde{w} = \tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \cdots, \tilde{w}_n = \tilde{w}'$，其中各元素属于 W，且对任意 i，$\tilde{w}_{i-1}$ 都与 $\tilde{w}_i$初等强 δ-共轭，则称 $\tilde{w}$, $\tilde{w}'$是强 δ-共轭。若 $\tilde{w}$ 与 $\tilde{w}'$ 强 δ-共轭，我们记作 $\tilde{w} \tilde{\sim}_\delta \tilde{w}'$。

在 [HN14], He 和 Nie 证明，任意 W 的 δ-~~ $\mathbb{O}$ 共轭类中的 $w_{\mathbb{O}}$ 最小长度元素满足一些特殊性质，从而推广了 Geck 和 Pfeiffer [GP93] 关于有限魏尔群的结果。这些性质在研究仿射 Deligne-Lusztig 簇和仿射赫克代数时发挥着关键作用。在[He14] 和 [HN14], 中证明，对于任意 δ-共轭类 $\mathbb{O}$，我们可以固定一个最小长度代表元 $w_{\mathbb{O}}$，并考虑 $T_{w_{\mathbb{O}}}$ 在 $H/[H, H]_\delta$ 中的像，其中 $[H, H]_\delta$ ~~~~~是由所有 δ-~交换子生成的 A-子模（我们将 H 视为左 A-模）（即对于任意 h, $h' \in H$, $[h, h']_\delta = hh' - h'\delta(h)$）。此外， $T_{w_{\mathbb{O}}}$ 与 ~ ~ ~的选择无关，并构成 $H/[H, H]_\delta$的一组基。[HN14 定理 6.7] 证明了

~ ~ ~~定理 2.4（He-Nie）。元素 $T_{\tilde{w}_{\mathbb{O}}}$ 构成 $H/[H, H]_\delta$ 的一个 A-基，其中~$\mathbb{O}$ 遍历 W 的所有 δ-共轭类。
~~~~~

从现在起，为简便起见，我们将 $T_{\tilde{w}_{\mathbb{O}}}$ 记作 $T_{\mathbb{O}}$。对于任意 $\tilde{w} \in W$ 和一个 δ-共轭类 $\mathbb{O}$，存在唯一的 $f_{\tilde{w},\,\mathbb{O}} \in A$ 使得

$$T_{\tilde{w}} \equiv \sum_{\mathbb{O}} f_{\tilde{w},\mathbb{O}} T_{\mathbb{O}} \quad \mod\ [\widetilde{H},\ \widetilde{H}]_{\delta}.$$

$f_{\tilde{w},\,\mathbb{O}}$ 是一个系数非负的 $\mathbb{Z}[v-v^{-1}]$ 多项式。这称为与 $\tilde{w}$ 和 $\mathbb{O}$ 相关联的类多项式，并可按以下方式归纳构造：

若 $\tilde{w}$ 是某个 δ 共轭类中的最小长度元素，$\widetilde{W}$，则定义

$$f_{\tilde{w},\mathbb{O}} = \begin{cases} 1, & \text{if } \tilde{w} \in \mathbb{O}, \\ 0, & \text{if } \tilde{w} \notin \mathbb{O}. \end{cases}$$

若 $\tilde{w}$ 不是其 δ-共轭类中的最小长度元素，且对于任意 $\tilde{w}' \in W$满足 $\ell(\tilde{w}') < \ell(\tilde{w})$，$f_{\tilde{w}',\,\mathbb{O}}$ 按如下方式构造。根据 [HN14],，存在 $\tilde{w}_1 \approx_{\delta} \tilde{w}$ 和 $\sim s_i \in \mathbb{S}$，使得 $\ell(s_i\tilde{w}_1 s_{\delta(i)}) < \ell(\tilde{w}_1) = \ell(\tilde{w})$。此时，$\ell(s_i\tilde{w}) < \ell(\tilde{w})$，并定义 $f_{\tilde{w},\,\mathbb{O}}$ 为

$$f_{\tilde{w},\mathbb{O}} = (v-v^{-1}) f_{s_i\tilde{w}_1,\mathbb{O}} + f_{s_i\tilde{w}_1 s_{\delta(i)},\mathbb{O}}.$$

2.3. “维数 = 次数”定理。我们称元素 $\tilde{w} \in W$ 为 δ-直元素，当且仅当对任意 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\ell(\tilde{w}\delta(\tilde{w})\cdots\delta^{n-1}(\tilde{w})) = n\ell(\tilde{w})$。如果一个 δ-共轭类包含某个直元素，则称其为直共轭类。我们用 $\cdot_{\sigma}$ 表示 σ在 $G(L)$上的 σ-共轭作用，其定义为对任意$g,\ \ g' \in G(L),\ \ g \cdot_{\sigma} g' = gg'\sigma(g)^{-1}$。我们有以下关于 $G(L)$上 σ-共轭类 $B(G)$的 Kottwitz 分类。

定理 2.5（Kottwitz，He）。对于 W的任意直 δ-共轭类 $\mathbb{O}$，固定一个最小长度代表元 $\tilde{w}_{\mathbb{O}}$。则

$$G(L) = \bigsqcup_{\mathbb{O}} G(L) \cdot_{\sigma} \tilde{w}_{\mathbb{O}},$$

这里，$\mathbb{O}$ 遍历 W的所有直 δ-共轭类。

令 $(P/Q)_{\delta}$ 表示 P/Q 上的 δ-余不变量，令

$$\kappa : \widetilde{W} \longrightarrow \widetilde{W}/W_a \cong P/Q \longrightarrow (P/Q)_{\delta}$$

表示自然投影。我们称 κ 为 Kottwitz 映射。

令 $P_{\mathbb{Q}} = P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 和 $P_{\mathbb{Q}}/W$ 为 $P_{\mathbb{Q}}$ 关于 W 的自然作用的商。我们可以将 $P_{\mathbb{Q}}/W$ 与 $P_{\mathbb{Q},+} = \{\chi \in P_{\mathbb{Q}} \mid \alpha(\chi) \geqslant 0,\ for\ all\ \alpha \in \Phi^+\}$. 令$P^{\delta}_{\mathbb{Q},+}$ 表示 $P_{\mathbb{Q},+}$ 中的 δ-不变点集。

由于 $W \rtimes \langle\delta\rangle$ 在 $Aut(W)$ 中的像是有限群，对于每个 $\tilde{w} = t^{\chi}w \in W$，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\delta^n = 1$且 $w\delta(w)\delta^2(w)\cdots\delta^{n-1}(w) = 1$。于是，对某个 $\lambda \in P$，有 $\tilde{w}\delta(\tilde{w})\delta^2(\tilde{w})\cdots\delta^{n-1}(\tilde{w}) = t^{\lambda}$。令 $\nu_{\tilde{w}} = \lambda/n \in P_{\mathbb{Q}}$和 $\bar{\nu}_{\tilde{w}}$为 $P_{\mathbb{Q},+}$ 中对应的元素。注意，$\nu_{\tilde{w}}$ 与 n 的选择无关。令 $\bar{\nu}_{\tilde{w}}$为 $P_{\mathbb{Q},+}$ 中唯一落在 $\nu_{\tilde{w}}$ 的 W-轨道内的元素。由于$t^{\lambda} = \tilde{w}t^{\delta(\lambda)}\tilde{w}^{-1} = t^{w\delta(\lambda)}$, $\bar{\nu}_{\tilde{w}} \in P^{\delta}_{\mathbb{Q},+}$。我们称映射 $\widetilde{W} \longrightarrow P^{\delta}_{\mathbb{Q},+}$ 为 Newton 映射，其中 $\tilde{w} \mapsto \bar{\nu}_{\tilde{w}}$。我们定义

$$f : \widetilde{W} \longrightarrow P^{\delta}_{\mathbb{Q},+} \times (P/Q)_{\delta} \quad by \quad \tilde{w} \longmapsto (\bar{\nu}_{\tilde{w}},\ \kappa(\tilde{w})).$$

由 [Ko97], f 可知，它在 δ-共轭类上为常数 W。我们将该映射的像记为 $B(W,\ \delta)$。

注 2.6. (1) σ-共轭类 $B(G)$ 与 W 的直共轭类之间存在一个双射。

(2) $G(L)$的任意 σ-共轭类都包含一个代表元，位于 W。此外，映射 $f\colon W \longrightarrow P^{\delta}_{\mathbb{Q},+} \times (P/Q)_{\delta}$ 实际上是定义在$G(L)$上的映射的限制，其中 $b \mapsto (\bar{\nu}_b,\ \kappa(b))$，我们称 $\bar{\nu}_b$ 为 b的牛顿向量。

“维数 = 次数”定理是[He14] 中的一个主要结果，

定理 2.7（He）。设 $b \in G(L)$且 $\tilde{w} \in W$。则

$$\dim(X_{\tilde{w}}(b)) = \max_{\mathbb{O}} \frac{1}{2}(\ell(\tilde{w}) + \ell(\mathbb{O}) + \deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}})) - \langle \bar{\nu}_b, 2\rho \rangle,$$

这里，$\mathbb{O}$ 遍历 W 的 δ-共轭类，满足 $f(\mathbb{O}) = f(b)$，而 $\ell(\mathbb{O})$是 $\mathbb{O}$中任意最小长度元素的长度，且 ρ 是 Φ^+的所有正根之和的一半。

注记 2.8. 我们约定，空簇的维数和零多项式的次数均为 $-\infty$。

定理2.7 表明，仿射 Deligne-Lusztig 簇 $X_{\tilde{w}}(b)$ 的维数及其空与非空的情形仅取决于数据 $(W, \delta, \tilde{w}, f(b))$，因此与 G的选择无关。该定理也启发了我们对 Iwahori-赫克代数的类多项式进行研究。

3. Class polynomials for the Iwahori-Hecke algebra of type C_2

3.1. 共轭类。设 W 为 $Sp_4(L)$的伊wahori-魏尔群。则 $W = P \rtimes W = W_a \rtimes \Omega$，其中 P 为余权格，W 为Weyl 群，而 W_a 为由 $\mathbb{S} = \{s_1,\ s_2\}$ 和 $\mathbb{S} = \{s_0,\ s_1,\ s_2\}$分别生成的仿射 Weyl 群。这里，$s_1$、$s_2$ 分别是对应于简单根α_1 和 α_2 的简单反射，而 s_0 是对应于 $\alpha_0 = 2\alpha_1 + \alpha_2$的简单反射。

设 $\epsilon_1 = \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2$，$\epsilon_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$，则余权格 $P = \mathbb{Z}\epsilon_1 \oplus \mathbb{Z}\epsilon_2 = \{m\epsilon_1 + n\epsilon_2 | m,\ n \in \mathbb{Z}\}$。令 $\Lambda_1 = \epsilon_1 = \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2$，$\Lambda_2 = 2\epsilon_2 = \alpha_1 + \alpha_2$，则余根格 $Q = \mathbb{Z}\Lambda_1 \oplus \mathbb{Z}\Lambda_2 = \{m\Lambda_1 + n\Lambda_2 | m,\ n \in \mathbb{Z}\}$。我们有 $W_a = Q \rtimes W$。

为了方便起见，我们给出 Q 的一个划分。令 $\Xi_1 = \{-2m\Lambda_1 + (m+n+1)\Lambda_2,\ -(2m+1)\Lambda_1 + (m+n+1)\Lambda_2 | m,\ n \in \mathbb{N}\}$, $\Xi_2 = \{(m+1)\Lambda_1 + n\Lambda_2 | m,\ n \in \mathbb{N}\}$,$\Xi_3 = \{(m+n+2)\Lambda_1 - (n+1)\Lambda_2 | m,\ n \in \mathbb{N}\}$, $\Xi_4 = \{(n-m+1)\Lambda_1 - (n+1)\Lambda_2 | m,\ n \in \mathbb{N}\}$，以及 $\Xi_5 = \{-(m+2n)\Lambda_1 + n\Lambda_2 | m,\ n \in \mathbb{N}\}$。则 $Q = \bigsqcup_{i=1}^{5} \Xi_i$。

子群 Ω 由一个元素 τ 生成，使得 $\tau^2 = 1$（1 是 W 中的单位元）以及 $\tau s_0 \tau^{-1} = s_2$、$\tau s_1 \tau^{-1} = s_1$、$\tau s_2 \tau^{-1} = s_0$。元素 τ 将记作 $t^{\epsilon_2} s_2 s_1 s_2$，而简单反射 s_0 将记作 $t^{\Lambda_1} s_1 s_2 s_1$。

对于任意 $\tilde{w} \in \widetilde{W}$，$\tilde{w}$ 的共轭类为 $\widetilde{W} \cdot \tilde{w} = \{\tilde{w}'\tilde{w}\tilde{w}'^{-1} | \ \forall\ \tilde{w}' \in W\}$。我们将 $\widetilde{W}$ 中的一个元素写作 $t^{\lambda} w \tau^r$，其中 $\lambda \in Q$、$w \in W$ 和 $r \in \{0,\ 1\}$。对于环群 $Sp_4(L)$，Iwahori-魏尔群 W 是仿射 Weyl 群 W_a 与 $W_a\tau = \{t^{\lambda} w\tau | \lambda \in Q,$ 和 $w \in W\}$ 的不交并。容易看出，如果 $\sim\tilde{w} \in W_a$，那么 $W \cdot \tilde{w} \subset W_a$。如果 $\tilde{w} \in W_a\tau$，那么 $W \cdot \tilde{w} \subset W_a\tau$。现在，我们给出 W_a 和 $W_a\tau$ 中的所有共轭类。

引理 3.1. 设 $\mathbb{O}_2 = \{t^{\lambda} s_1 s_2,\ t^{\lambda} s_2 s_1 | \lambda \in Q\}$。则 $\widetilde{W} \cdot (s_1 s_2) = \mathbb{O}_2$。

证明。设 $\tilde{w} = s_1 s_2 \in W_a$。那么

$$\tilde{w}'\tilde{w}\tilde{w}'^{-1} = \begin{cases} t^{\lambda - w s_1 s_2 w^{-1}(\lambda)} w s_1 s_2 w^{-1}, & \text{if } \tilde{w}' = t^{\lambda} w \\ t^{\lambda + w(\Lambda_2 - \Lambda_1) - w s_2 s_1 w^{-1}(\lambda)} w s_2 s_1 w^{-1}, & \text{if } \tilde{w}' = t^{\lambda} w\tau. \end{cases}$$

$\widetilde{\ }$这表明 $W\cdot(s_1s_2)\subseteq\mathbb{O}_{2\circ}$ 现在，对于任意 $\tilde{w}\in\mathbb{O}_2$，通过对 $\ell(\tilde{w})$ 进行归纳法，我们证明 $\tilde{w}$ 与 s_1s_2 共轭。如果 $\tilde{w}\in\mathbb{O}_2$ 且 $\ell(\tilde{w})=2$，那么 $\tilde{w}$ 显然与 s_1s_2 共轭。我们假设，对于任意 $\tilde{w}_1\in\mathbb{O}_2$ 和 $\ell(\tilde{w}_1)<\ell(\tilde{w})$，$\tilde{w}_1$ 与 s_1s_2 共轭。对于任意 $\tilde{w}\in\mathbb{O}_2$，那么 $\tilde{w}$ 的形式为 $t^{\lambda}s_1s_2$ 或 $t^{\lambda}s_2s_1$，且 $\lambda\in Q_{\circ}$ 由于 $\tau t^{\lambda}s_2s_1\tau^{-1}=t^{\Lambda_1+s_2s_1s_2(\lambda)}s_1s_2$ 且 $\ell(t^{\lambda}s_2s_1)=\ell(\tau t^{\lambda}s_2s_1\tau^{-1})$，只需证明 $\tilde{w}=t^{\lambda}s_1s_2$ 与 s_1s_2 共轭。

如果 $\lambda\in\Xi_1$ 且可以取 $\tilde{w}'=s_1$，则 $\tilde{w}_1=\tilde{w}'t^{\lambda}s_1s_2\tilde{w}'^{-1}=t^{s_1(\lambda)}s_2s_1$且 $\ell(t^{s_1(\lambda)}s_2s_1)=\ell(t^{\lambda}s_1s_2)-2_{\circ}$ 如果 $\lambda\in\Xi_2$ 且 $\lambda\neq(m+1)\Lambda_1\,(m\in\mathbb{N})$，令 $\tilde{w}'=s_0s_1=t^{\Lambda_1}s_1s_2$，则 $\tilde{w}_1=\tilde{w}'t^{\lambda}s_1s_2\tilde{w}'^{-1}=t^{2\Lambda_1-\Lambda_2+s_1s_2(\lambda)}s_1s_2$ 且$\ell(t^{2\Lambda_1-\Lambda_2+s_1s_2}(\lambda)s_1s_2)=\ell(t^{\lambda}s_1s_2)-2_{\circ}$ 如果 $\lambda=(m+1)\Lambda_1\,(m\in\mathbb{N}_+)$，令 $\tilde{w}'=s_1s_0=t^{\Lambda_2-\Lambda_1}s_2s_1$，则 $\tilde{w}_1=\tilde{w}'t^{\lambda}s_1s_2\tilde{w}'^{-1}=t^{\Lambda_2+s_2s_1}(\lambda)s_1s_2$ 且 $\ell(t^{\Lambda_2+s_2s_1}(\lambda)s_1s_2)=\ell(t^{\lambda}s_1s_2)-2_{\circ}$ 如果 $\lambda=\Lambda_1$, $\tilde{w}=t^{\lambda}s_1s_2=t^{\Lambda_1}s_1s_2=s_0s_1$，则它与 s_1s_2共轭。如果$\lambda\in\Xi_3$，令 $\tilde{w}'=s_0=t^{\Lambda_1}s_1s_2s_1$，则 $\tilde{w}_1=\tilde{w}'t^{\lambda}s_1s_2\tilde{w}'^{-1}=t^{2\Lambda_1-\Lambda_2+s_1s_2s_1}(\lambda)s_2s_1$且 $\ell(t^{2\Lambda_1-\Lambda_2+s_1s_2s_1}(\lambda)s_2s_1)=\ell(t^{\lambda}s_1s_2)-2_{\circ}$ 如果 $\lambda\in\Xi_4$，令 $\tilde{w}'=s_2$，则 $\tilde{w}_1=\tilde{w}'t^{\lambda}s_1s_2\tilde{w}'^{-1}=t^{s_2(\lambda)}s_2s_1$ 且 $\ell(t^{s_2(\lambda)}s_2s_1)=\ell(t^{\lambda}s_1s_2)-2_{\circ}$ 如果 $\lambda\in\Xi_5$ 且$\lambda\neq-m\Lambda_1\,(m\in\mathbb{N})$，令 $\tilde{w}'=s_2s_1$，则 $\tilde{w}_1=\tilde{w}'t^{\lambda}s_1s_2\tilde{w}'^{-1}=t^{s_2s_1}(\lambda)s_1s_2$ 且$\ell(t^{s_2s_1}(\lambda)s_1s_2)=\ell(t^{\lambda}s_1s_2)-2_{\circ}$ 如果 $\lambda=-m\Lambda_1\,(m\in\mathbb{N}_+)$，令 $\tilde{w}'=s_1s_2$，则 $\tilde{w}_1=\tilde{w}'t^{\lambda}s_1s_2\tilde{w}'^{-1}=t^{s_1s_2}(\lambda)s_1s_2$ 且 $\ell(t^{s_1s_2}(\lambda)s_1s_2)=\ell(t^{\lambda}s_1s_2)-2_{\circ}$ 因此，根据归纳法，$\tilde{w}_1=\tilde{w}'t^{\lambda}s_1s_2\tilde{w}'^{-1}$ 与 s_1s_2共轭。因此，$\tilde{w}=t^{\lambda}s_1s_2$ 与 s_1s_2共轭$\widetilde{\ }$。因此，$W\cdot(s_1s_2)=\mathbb{O}_{2\circ}$ □

引理 3.2. 设 $\mathbb{O}'_2=\{t^{(2m+1)\Lambda_1+n\Lambda_2}s_1s_2s_1s_2|m,\ n\in\mathbb{Z}\}_{\circ}$ 则 $\widetilde{W}\cdot(s_0s_2)=\mathbb{O}'_{2\circ}$

证明。由于 $s_0s_2=s_2s_0=\tau s_0s_2\tau^{-1}=t^{\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2$，且对于任意 $\tilde{w}'=t^{\lambda}w$或 $t^{\lambda}w\tau$，我们有 $\tilde{w}'s_0s_2\tilde{w}'^{-1}=t^{w(\Lambda_1)+2\lambda}s_1s_2s_1s_2$，因此 $\widetilde{W}\cdot(s_0s_2)\subseteq\mathbb{O}'_{2\circ}$

对于任意 $\tilde{w}\in\mathbb{O}'_2$，我们对 $\ell(\tilde{w})$ 使用归纳法，以证明 $\tilde{w}$ 与 s_0s_2共轭。若 $\tilde{w}=t^{\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2$，则 $\tilde{w}=s_0s_2$ 且 $\ell(\tilde{w})=2$，$\tilde{w}$ 显然与 s_0s_2共轭。对于任意 $\tilde{w}\in\mathbb{O}'_2$，我们假设：若 $\tilde{w}_1\in\mathbb{O}'_2$ 满足 $\ell(\tilde{w}_1)<\ell(\tilde{w})$，则 $\tilde{w}_1$ 与 s_0s_2共轭。

对于任意 $\tilde{w}\in\mathbb{O}'_2$，它都可以写成 $t^{(2m+1)\Lambda_1+(\pm n-m)\Lambda_2}s_1s_2s_1s_2$，其中 $m\in\mathbb{Z}$和 $n\in\mathbb{N}_{\circ}$ 由于 $\tau t^{(2m+1)\Lambda_1+(-n-m)\Lambda_2}s_1s_2s_1s_2\tau^{-1}=t^{(2m+1)\Lambda_1+(n-m)\Lambda_2}s_1s_2s_1s_2$和 $\ell(t^{(2m+1)\Lambda_1+(-n-m)\Lambda_2}s_1s_2s_1s_2)=\ell(t^{(2m+1)\Lambda_1+(n-m)\Lambda_2}s_1s_2s_1s_2)$，只需考虑满足 $m\in\mathbb{Z}$ 和 $n\in\mathbb{N}$的 $\tilde{w}=t^{(2m+1)\Lambda_1+(n-m)\Lambda_2}s_1s_2s_1s_2$。若 $m\leqslant-1$，令 $\tilde{w}'=s_1$，则 $\tilde{w}_1=\tilde{w}'\tilde{w}\tilde{w}'^{-1}=t^{-(2m+1)\Lambda_1+(m+n+1)\Lambda_2}s_1s_2s_1s_2$ 且 $\ell(\tilde{w}_1)=\ell(\tilde{w})-2_{\circ}$ 若 $m=n=0$，则 $\tilde{w}=t^{\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2=s_0s_2{}_{\circ}$ 若 $m>0$，$n\geqslant0$ 或$m=0$，$n>0$，令 $\tilde{w}'=s_0$，则 $\tilde{w}_1=\tilde{w}'\tilde{w}\tilde{w}'^{-1}=t^{-(2n-1)\Lambda_1+(n-m)\Lambda_2}s_1s_2s_1s_2$ 且$\ell(\tilde{w}_1)=\ell(\tilde{w})-2_{\circ}$ 由归纳法，$\tilde{w}_1$ 与 s_0s_2 共轭。因此，$\tilde{w}$ 与s_0s_2共轭。□

引理 3.3. 设 $\mathbb{O}_{s_{1212}}=\{t^{2m\Lambda_1+n\Lambda_2}s_1s_2s_1s_2|m,\ n\in\mathbb{Z}\}_{\circ}$ 则 $\widetilde{W}\cdot(s_1s_2s_1s_2)=\mathbb{O}_{s_{1212}\circ}$

证明。 证明与引理 3.2的证明非常相似，故略去。 □

引理 3.4. 设 $Q_+=\{\lambda\in Q|\alpha(\lambda)\geqslant0,\ \alpha\in\Phi^+\}=\{m\Lambda_1+n\Lambda_2|m,\ n\in\mathbb{N}\}_{\circ}$ 对于任意 $\lambda\in Q_+$，设 $\mathbb{O}_{\lambda}=\{t^{w(\lambda)}|w\in W\}_{\circ}$ 则 $\widetilde{W}\cdot t^{\lambda}=\mathbb{O}_{\lambda\circ}$

证明。对于任意 $\lambda\in Q_+$ 和 $w\in W$, $wt^{\lambda}w^{-1}=t^{w(\lambda)}{}_{\circ}$ 此外，$\ell(t^{w(\lambda)})=\ell(t^{\lambda})_{\circ}$ 该引理由此得出

$$\tilde{w}'t^{\lambda}\tilde{w}'^{-1}=\begin{cases}t^{w(\lambda)}, & \text{if } \tilde{w}'=t^{\chi}w\\ t^{ws_2s_1s_2(\lambda)}, & \text{if } \tilde{w}'=t^{\chi}w\tau.\end{cases}$$

□

下文中，令 k 为任意非负整数。

引理 3.5。设 $\mathbb{O}_{4k+1}=\{t^{\pm k(\Lambda_2-\Lambda_1)+m'\Lambda_1}s_1s_2s_1,\ t^{\pm k\Lambda_1+m'(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2|m'\in\mathbb{Z}\}$。则 $\widetilde{W}\cdot(t^{k\Lambda_1}s_2)=\mathbb{O}_{4k+1}$。

证明。设 $\tilde{w}'=t^{m\Lambda_1+n\Lambda_2}w$。那么

$$\tilde{w}'t^{k\Lambda_1}s_2\tilde{w}'^{-1}=\begin{cases}t^{k\Lambda_1+2n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2, & \text{if } w\in\{1,\ s_2\}\\ t^{-k\Lambda_1+2n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2, & \text{if } w\in\{s_1s_2s_1,\ s_1s_2s_1s_2\}\\ t^{k(\Lambda_2-\Lambda_1)+2(m+n)\Lambda_1}s_1s_2s_1, & \text{if } w\in\{s_1,\ s_1s_2\}\\ t^{-k(\Lambda_2-\Lambda_1)+2(m+n)\Lambda_1}s_1s_2s_1, & \text{if } w\in\{s_2s_1,\ s_2s_1s_2\}.\end{cases}$$

设 $\tilde{w}'=t^{m\Lambda_1+n\Lambda_2}w\tau$。那么

$$\tilde{w}'t^{k\Lambda_1}s_2\tilde{w}'^{-1}=\begin{cases}t^{-k(\Lambda_2-\Lambda_1)+(2m+2n+1)\Lambda_1}s_1s_2s_1, & \text{if } w=1\\ t^{-k\Lambda_1+(2n+1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2, & \text{if } w=s_1\\ t^{k(\Lambda_2-\Lambda_1)+(2m+2n+1)\Lambda_1}s_1s_2s_1, & \text{if } w=s_2\\ t^{k\Lambda_1+(2n+1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2, & \text{if } w=s_1s_2\\ t^{-k\Lambda_1+(2n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2, & \text{if } w=s_2s_1\\ t^{-k(\Lambda_2-\Lambda_1)+(2m+2n-1)\Lambda_1}s_1s_2s_1, & \text{if } w=s_1s_2s_1\\ t^{k\Lambda_1+(2n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2, & \text{if } w=s_2s_1s_2\\ t^{k(\Lambda_2-\Lambda_1)+(2m+2n-1)\Lambda_1}s_1s_2s_1, & \text{if } w=s_1s_2s_1s_2.\end{cases}$$

因此，引理得证。 □

引理 3.6。设 $\mathbb{O}'_{6k+1}=\{t^{\pm k\Lambda_2+m'(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1,\ t^{\pm k(2\Lambda_1-\Lambda_2)+m'\Lambda_2}s_2s_1s_2|m'\in\mathbb{Z}\}$。那么 $\widetilde{W}\cdot(t^{k\Lambda_2}s_1)=\mathbb{O}'_{6k+1}$。

证明。设 $\tilde{w}'=t^{m\Lambda_1+n\Lambda_2}w$。那么

$$\tilde{w}'t^{k\Lambda_2}s_1\tilde{w}'^{-1}=\begin{cases}t^{k\Lambda_2+m(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1, & \text{if } w\in\{1,\ s_1\}\\ t^{-k\Lambda_2+m(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1, & \text{if } w\in\{s_2s_1s_2,\ s_1s_2s_1s_2\}\\ t^{k(2\Lambda_1-\Lambda_2)+(m+2n)\Lambda_2}s_2s_1s_2, & \text{if } w\in\{s_2,\ s_2s_1\}\\ t^{-k(2\Lambda_1-\Lambda_2)+(m+2n)\Lambda_2}s_2s_1s_2, & \text{if } w\in\{s_1s_2,\ s_1s_2s_1\}.\end{cases}$$

设 $\tilde{w}'=t^{m\Lambda_1+n\Lambda_2}w\tau$。则

$$\tilde{w}'t^{k\Lambda_2}s_1\tilde{w}'^{-1}=\begin{cases}t^{-k\Lambda_2+m(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1, & \text{if } w\in\{1,\ s_1\}\\ t^{k\Lambda_2+m(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1, & \text{if } w\in\{s_2s_1s_2,\ s_1s_2s_1s_2\}\\ t^{-k(2\Lambda_1-\Lambda_2)+(m+2n)\Lambda_2}s_2s_1s_2, & \text{if } w\in\{s_2,\ s_2s_1\}\\ t^{k(2\Lambda_1-\Lambda_2)+(m+2n)\Lambda_2}s_2s_1s_2, & \text{if } w\in\{s_1s_2,\ s_1s_2s_1\}.\end{cases}$$

由上述关系可证得此引理。 □

引理 3.7. 设

$$\mathbb{O}'_{6k+3}=\{t^{\pm(k\Lambda_2+\Lambda_1)+m'(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1,\ t^{\pm(k(2\Lambda_1-\Lambda_2)+\Lambda_1)+m'\Lambda_2}s_2s_1s_2|m'\in\mathbb{Z}\}.$$

则 $\widetilde{W}\cdot(t^{k(2\Lambda_1-\Lambda_2)+\Lambda_1}s_2s_1s_2)=\mathbb{O}'_{6k+3}$。

证明。 证明方法与引理 3.6 类似，此处略去。 □

由引理 3.1、3.2、3.3、3.4、3.5、3.6、3.7，以及

$$W_a=\mathbb{O}_2\sqcup\mathbb{O}'_2\sqcup\mathbb{O}_{s_1212}\sqcup(\sqcup_{\lambda\in Q_+}\mathbb{O}_\lambda)\sqcup_{k\in\mathbb{N}}(\mathbb{O}_{4k+1}\sqcup\mathbb{O}'_{6k+1}\sqcup\mathbb{O}'_{6k+3}).$$

我们有

命题 3.8。 W_a 中的共轭类为： $\mathbb{O}_2$、 $\mathbb{O}'_2$、 $\mathbb{O}_{s_1212}$、 $\mathbb{O}_\lambda$ （$\lambda\in Q_+$）以及 $\mathbb{O}_{4k+1}$、$\mathbb{O}'_{6k+1}$、 $\mathbb{O}'_{6k+3}$ （$k\in\mathbb{N}$）。

引理 3.9. 设 $\mathbb{O}_{1,\tau}=\{t^\lambda s_2\tau,\ t^\lambda s_1s_2s_1\tau|\lambda\in Q\}$。则 $\widetilde{W}\cdot(s_2\tau)=\mathbb{O}_{1,\tau}$。

证明。设 $\tilde{w}' = t^{m\Lambda_1+n\Lambda_2}w_\circ$ 则

$$\tilde{w}' s_2\tau\tilde{w}'^{-1} = \begin{cases} t^{2(m+n)\Lambda_1-m\Lambda_2}s_2\tau, & \text{if } w=1 \\ t^{(2m+2n-1)\Lambda_1-(m-1)\Lambda_2}s_2\tau, & \text{if } w=s_1 \\ t^{-(2n-1)\Lambda_1+(m+2n)\Lambda_2}s_1s_2s_1\tau, & \text{if } w=s_2 \\ t^{(2m+2n-1)\Lambda_1-(m-1)\Lambda_2}s_2\tau, & \text{if } w=s_1s_2 \\ t^{(2m+2n-1)\Lambda_1-m\Lambda_2}s_2\tau, & \text{if } w=s_2s_1 \\ t^{-(2n-1)\Lambda_1+(m+2n-1)\Lambda_2}s_1s_2s_1\tau, & \text{if } w=s_1s_2s_1 \\ t^{-2(n-1)\Lambda_1+(m+2n-1)\Lambda_2}s_1s_2s_1\tau, & \text{if } w=s_2s_1s_2 \\ t^{2(m+n-1)\Lambda_1-(m-1)\Lambda_2}s_2\tau, & \text{if } w=s_1s_2s_1s_2. \end{cases}$$

设 $\tilde{w}' = t^{m\Lambda_1+n\Lambda_2}w\tau_\circ$ 则

$$\tilde{w}' s_2\tau\tilde{w}'^{-1} = \begin{cases} t^{-(2n-1)\Lambda_1+(m+2n)\Lambda_2}s_1s_2s_1\tau, & \text{if } w=1 \\ t^{(2m+2n-1)\Lambda_1-(m-1)\Lambda_2}s_2\tau, & \text{if } w=s_1 \\ t^{2(m+n)\Lambda_1-m\Lambda_2}s_2\tau, & \text{if } w=s_2 \\ t^{-2n\Lambda_1+(m+2n)\Lambda_2}s_1s_2s_1\tau, & \text{if } w=s_1s_2 \\ t^{-2(n-1)\Lambda_1=(m+2n-1)\Lambda_2}s_1s_2s_1\tau, & \text{if } w=s_2s_1 \\ t^{2(m+n-1)\Lambda_1-(m-1)\Lambda_2}s_2\tau, & \text{if } w=s_1s_2s_1 \\ t^{(2m+2n-1)\Lambda_1-m\Lambda_2}s_2\tau, & \text{if } w=s_2s_1s_2 \\ t^{-(2n-1)\Lambda_1+(m+2n-1)\Lambda_2}s_1s_2s_1\tau, & \text{if } w=s_1s_2s_1s_2. \end{cases}$$

因此，引理得证。 □

引理 3.10。设 $\mathbb{O}'_{1,\ \tau} = \{t^\lambda s_1\tau | \lambda \in Q\}_\circ$ 则 $\widetilde{W}\cdot(s_1\tau) = \mathbb{O}'_{1,\ \tau}$。

证明。对于任意 $\tilde{w}' = t^{m\Lambda_1+n\Lambda_2}w$或 $t^{m\Lambda_1+n\Lambda_2}w\tau$，我们有

$$\tilde{w}' s_1\tau\tilde{w}'^{-1} = \begin{cases} t^{2m\Lambda_1+2n\Lambda_2}s_1\tau, & \text{if } w\in\{1,\ s_1\} \\ t^{(2m+1)\Lambda_1+(2n-1)\Lambda_2}s_1\tau, & \text{if } w\in\{s_2,\ s_2s_1\} \\ t^{(2m-1)\Lambda_1+2n\Lambda_2}s_1\tau, & \text{if } w\in\{s_1s_2,\ s_1s_2s_1\} \\ t^{2m\Lambda_1+(2n-1)\Lambda_2}s_1\tau, & \text{if } \in\{s_2s_1s_2,\ s_1s_2s_1s_2\}. \end{cases}$$

此引理得证。 □

引理 3.11. 设 $Q'_+ = \{\lambda \in Q_+ | \lambda \neq m'\Lambda_1,\ m' \in \mathbb{N}\}_\circ$ 对于任意 $\lambda \in Q'_+$，令$\mathbb{O}_{\lambda,\ \tau} = \widetilde{W}\cdot(t^\lambda s_2s_1s_2\tau)_\circ$ 那么

$$\mathbb{O}_{\lambda,\tau} = \{t^{\lambda'}s_2s_1s_2\tau \mid \lambda' \textit{ is one of the following elements}\},$$

$$\lambda' = \begin{cases} w(\lambda), & \text{if } w\in\{1,\ s_1\} \\ w(\lambda)-\Lambda_1+\Lambda_2, & \text{if } w\in\{s_2,\ s_2s_1\} \\ w(\lambda)+\Lambda_1, & \text{if } w\in\{s_1s_2,\ s_1s_2s_1\} \\ w(\lambda)+\Lambda_2, & \text{if } w\in\{s_2s_1s_2,\ s_1s_2s_1s_2\}. \end{cases}$$

证明。可通过直接计算证明。 □

引理 3.12. 设 $\mathfrak{o}(k) \in \{k+1,\ -k\}$，并且

$$\mathbb{O}_{4k+2,\tau} = \{t^{\mathfrak{o}(k)\Lambda_1+m'(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2\tau,\ t^{\mathfrak{o}(k)(\Lambda_2-\Lambda_1)+m'\Lambda_1}s_2s_1\tau |\ m' \in \mathbb{Z}\}.$$

那么 $\widetilde{W}\cdot(t^{(k+1)\Lambda_1}s_1s_2\tau) = \mathbb{O}_{4k+2,\ \tau}$。

证明。设 $\tilde{w}' = t^{m\Lambda_1+n\Lambda_2}w_\circ$ 那么

$$\tilde{w}'t^{(k+1)\Lambda_1}s_1s_2\tau\tilde{w}'^{-1} = \begin{cases} t^{(k+1)\Lambda_1+2n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2\tau, & \text{if } w=1 \\ t^{(k+1)\Lambda_1+(2n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2\tau, & \text{if } w=s_2 \\ t^{(k+1)(\Lambda_2-\Lambda_1)+(2m+2n)\Lambda_1}s_2s_1\tau, & \text{if } w=s_1 \\ t^{(k+1)(\Lambda_2-\Lambda_1)+(2m+2n-1)\Lambda_1}s_2s_1\tau, & \text{if } w=s_1s_2 \\ t^{-k(\Lambda_2-\Lambda_1)+(2m+2n)\Lambda_1}s_2s_1\tau, & \text{if } w=s_2s_1 \\ t^{-k(\Lambda_2-\Lambda_1)+(2m+2n-1)\Lambda_1}s_2s_1\tau, & \text{if } w=s_2s_1s_2 \\ t^{-k\Lambda_1+2n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2\tau, & \text{if } w=s_1s_2s_1 \\ t^{-k\Lambda_1+(2n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2\tau, & \text{if } w=s_1s_2s_1s_2. \end{cases}$$

对 $\tilde{w}' = t^{m\Lambda_1+n\Lambda_2}w\tau$进行类似的计算。因此，引理得证。 □

引理 3.13。设

$$\mathbb{O}'_{6k,\tau} = \{t^{\pm k(2\Lambda_1-\Lambda_2)+m'\Lambda_2}\tau,\ t^{\pm k\Lambda_2+\Lambda_1+m'(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1s_2s_1s_2\tau |\ m' \in \mathbb{Z}\}.$$

则 $\widetilde{W}\cdot(t^{k\Lambda_2+\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2\tau) = \mathbb{O}'_{6k,\ \tau}$。

本引理及下一条引理的证明与引理 3.12 的证明相当类似，故略去。

引理 3.14。 设 $\mathfrak{o}(k)$ 如 引理3.12 及

$$\mathbb{O}'_{6k+4,\tau} = \{t^{\mathfrak{o}(k)\Lambda_2+m'(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1s_2s_1s_2\tau,\ t^{\mathfrak{o}(k)(2\Lambda_1-\Lambda_2)-\Lambda_1+m'\Lambda_2}\tau |\ m' \in \mathbb{Z}\}.$$

则 $\widetilde{W}\cdot(t^{(k+1)\Lambda_2}s_1s_2s_1s_2\tau) = \mathbb{O}'_{6k+4,\ \tau}$。

根据引理 3.9、3.10、3.11、3.12、3.13、3.14以及

$$W_a\tau = \mathbb{O}_{1,\tau} \sqcup \mathbb{O}'_{1,\tau} \sqcup (\sqcup_{\lambda\in Q'_+}\mathbb{O}_{\lambda,\tau}) \sqcup_{k\in\mathbb{N}} (\mathbb{O}_{4k+2,\tau} \sqcup \mathbb{O}'_{6k,\tau} \sqcup \mathbb{O}'_{6k+4,\tau}).$$

我们有

命题 3.15。 $W_a\tau$中的共轭类为：$\mathbb{O}_{1,\ \tau}$, $\mathbb{O}'_{1,\ \tau}$, $\mathbb{O}_{\lambda,\ \tau}(\lambda \in Q'_+)$ 和 $\mathbb{O}_{4k+2,\ \tau}$, $\mathbb{O}'_{6k,\ \tau}$, $\mathbb{O}'_{6k+4,\ \tau}(k \in \mathbb{N})$。

3.2. 类多项式。为简便起见，对于任意 $\tilde{w}, \tilde{w}' \in W$，我们将 $T_{\tilde{w}} \equiv T_{\tilde{w}'} \bmod [\widetilde{H}, \widetilde{H}]$ (或 $[\widetilde{H}, \widetilde{H}]_\delta$) 记作 $T_{\tilde{w}} \equiv T_{\tilde{w}'}$，并将 $v - v^{-1}$ 记作 $[v]$。设 $Q_{++} := Q_+ - (\mathbb{N}\Lambda_1 \cup \mathbb{N}\Lambda_2)$，对于任意 $\lambda = m\Lambda_1 + n\Lambda_2 \in Q_+$，设 $\Lambda_\lambda := Q_{++} \cap (\{\lambda - n'(2\Lambda_1 - \Lambda_2) | n' \in \mathbb{N}_+\} \cup \{\lambda - n'(\Lambda_2 - \Lambda_1) | n' \in \mathbb{N}_+\})$, $\Lambda^1_\lambda = Q_{++} \cap \{\lambda - n'(2\Lambda_1 - \Lambda_2) | n' \in \mathbb{N}\}$, $\Lambda^2_\lambda = Q_{++} \cap \{\lambda - n'(\Lambda_2 - \Lambda_1) | n' \in \mathbb{N}_+\}$, $\Lambda^{1,2}_\lambda = \Lambda^1_\lambda \cup \Lambda^2_\lambda$, $\Lambda^{<,1}_\lambda = \Lambda^1_\lambda - \{\lambda\}$, $\Lambda^{\leqslant,2}_\lambda = \Lambda^2_\lambda \cup \{\lambda\}$。此外，令 $\diamondsuit_\lambda$ 为由以下顶点界定的闭凸集：$0, (\frac{m}{2}+n)\Lambda_2, (m+n)\Lambda_1, \lambda$。设 $\Lambda^{\lambda}_\lambda = Q_{++} \cap \diamondsuit_\lambda \setminus \{\lambda\}$ 和 $\Lambda^{\leqslant}_\lambda = Q_{++} \cap \diamondsuit_\lambda$。

在本节余下部分中，我们将计算所有 $\tilde{w}$ and $\mathbb{O}$对应的类多项式的次数。

3.2.1. $\tilde{w} \in W_a$。

命题 3.16. 若 $\lambda \in Q_+$ and $\tilde{w} \in \mathbb{O}_\lambda$，则

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}}) = \begin{cases} 0, & \text{if } \mathbb{O} = \mathbb{O}_\lambda \\ -\infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。 由引理 3.4可知， $\mathbb{O}_\lambda$ 中的所有元素具有相同的长度。因此，对于任意$\tilde{w}$, $\tilde{w}' \in \mathbb{O}_\lambda$, $T_{\tilde{w}} \equiv T_{\tilde{w}'} = T_{\mathbb{O}_\lambda}$。 □

令 $\tilde{w} \in \mathbb{O}_2$，则我们可以将 $\tilde{w}$ 写成 $t^\lambda w$，其中 $w \in \{s_1s_2, s_2s_1\}$ 且 $\lambda = m\Lambda_1 + n\Lambda_2 \in Q$，并且 $m, n \in \mathbb{Z}$。我们希望计算 $f_{\tilde{w},\ \mathbb{O}}$，其中 $\tilde{w} \in \mathbb{O}_2$。由于

$$T_{t^{m\Lambda_1+n\Lambda_2}s_1s_2} \equiv T_{\tau\cdot(t^{m\Lambda_1+n\Lambda_2}s_1s_2)} = T_{t^{(m-1)\Lambda_1-(m+n-1)\Lambda_2}s_2s_1}$$

and

$$T_{t^{m\Lambda_1+n\Lambda_2}s_2s_1}\equiv T_{\tau\cdot(t^{m\Lambda_1+n\Lambda_2}s_2s_1)}=T_{t^{(m+1)\Lambda_1-(m+n)\Lambda_2}s_1s_2},$$

只需考虑 $\lambda=m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n\Lambda_1$，其中 $m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}_{+\circ}$ 现在，假设 m, $n\in\mathbb{N}_{+\circ}$

命题 3.17. 对任意 $\tilde{w}\in\mathbb{O}_2$，我们定义 $\tilde{w}=\tilde{w}_i\,(1\leqslant i\leqslant 8)$，其中

$$\tilde{w}_1=t^{n\Lambda_1}s_2s_1,\ \tilde{w}_2\in\{t^{n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2s_1,\ t^{n\Lambda_1}s_1s_2,\ t^{(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2\},$$
$$\tilde{w}_3\in\{t^{m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n\Lambda_1}s_1s_2,\ t^{-m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2s_1\},$$
$$\tilde{w}_4=t^{m\Lambda_2+(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2,\ \tilde{w}_5=t^{m\Lambda_2+(n-1)\Lambda_1}s_2s_1,$$
$$\tilde{w}_6=t^{m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n\Lambda_1}s_2s_1,\ \tilde{w}_7\in\{t^{m\Lambda_2+n\Lambda_1}s_1s_2,$$
$$t^{m\Lambda_2+n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2s_1\},\ \tilde{w}_8=t^{(1-m)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2.$$

Then

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}})=\begin{cases}2, & \text{if } \mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_\lambda|\ \lambda\in\lambda(\tilde{w})\}\\ 1, & \text{if } \mathbb{O}\in\mathbb{O}_{\tilde{w}}^{\leqslant}\\ 0, & \text{if } \mathbb{O}=\mathbb{O}_2\\ -\infty, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

在上述公式中,

$$\lambda(\tilde{w})=\begin{cases}\Lambda^{<}_{n\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_1\\ \Lambda^{<}_{(n-1)\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_2\\ \Lambda^{\leqslant}_{m\Lambda_2+(n-1)\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_3 \text{ or } \tilde{w}_7\\ \Lambda^{\leqslant}_{(m-1)\Lambda_2+n\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_4 \text{ or } \tilde{w}_8\\ \Lambda^{\leqslant}_{m\Lambda_2+(n-2)\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_5\\ \Lambda^{\leqslant}_{(m+1)\Lambda_2+(n-2)\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_6.\end{cases}$$

$\mathbb{O}_{\tilde{w}}^{\leqslant}=\{\mathbb{O}_{4i+1}|1\leqslant i\leqslant n(\tilde{w})\}\cup\{\mathbb{O}'_{6i+3}|0\leqslant i\leqslant n'(\tilde{w})\}\cup\{\mathbb{O}'_{6i+1}|1\leqslant i\leqslant n''(\tilde{w})\}$，其中

$$n(\tilde{w})=\begin{cases}n-1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_1 \text{ or } \tilde{w}_2\\ m+n-1, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_3,\ \tilde{w}_4,\ \tilde{w}_6,\ \tilde{w}_7,\ \tilde{w}_8\}\\ m+n-2, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_5,\end{cases}$$

$$n'(\tilde{w})=\begin{cases}\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_1\\ \lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_2\\ m+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_3 \text{ or } \tilde{w}_7\\ m+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-1, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_4,\ \tilde{w}_5,\ \tilde{w}_8\}\\ m+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_6,\end{cases}$$

$$n''(\tilde{w})=\begin{cases}\lfloor\frac{n}{2}\rfloor, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_1\\ \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_2\\ m+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_3 \text{ or } \tilde{w}_7\\ m+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_4,\ \tilde{w}_5,\ \tilde{w}_8\}\\ m+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_6.\end{cases}$$

证明。若 $\tilde{w}=\tilde{w}_1$，则

$$\begin{aligned}T_{\tilde{w}}&\equiv[v]T_{s_2t^{n\Lambda_1}s_2s_1}+T_{s_2\cdot(t^{n\Lambda_1}s_2s_1)}=[v]T_{t^{n\Lambda_1}s_1}+T_{t^{n\Lambda_1}s_1s_2}\\ &\equiv[v]T_{t^{n\Lambda_1}s_1}+T_{(\tau s_0)\cdot(t^{n\Lambda_1}s_1s_2)}=[v]T_{t^{n\Lambda_1}s_1}+T_{t^{(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2}\\ &\equiv[v]T_{t^{n\Lambda_1}s_1}+[v]T_{s_1t^{(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2}+T_{s_1\cdot(t^{(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2)}\\ &=[v](T_{t^{n\Lambda_1}s_1}+T_{t^{(n-1)\Lambda_1}s_2})+T_{t^{(n-1)\Lambda_1}s_2s_1}\end{aligned}$$

$$\equiv \cdots\cdots$$
$$\equiv [v](\sum_{i=1}^{n-1} T_{\mathbb{O}_{4i+1}} + \sum_{i=1}^{n} T_{t^{i\Lambda_1}s_1}) + T_{\mathbb{O}_2}.$$

And

$$T_{t^{i\Lambda_1}s_1} \equiv \begin{cases} \sum_{\lambda\in\Lambda_{i\Lambda_1}} [v]T_{\mathbb{O}_\lambda} + T_{\mathbb{O}'_{6\frac{i-1}{2}+3}}, & i \text{ is odd} \\ \sum_{\lambda\in\Lambda_{i\Lambda_1}} [v]T_{\mathbb{O}_\lambda} + T_{\mathbb{O}'_{6\frac{i}{2}+1}}, & i \text{ is even.} \end{cases}$$

由上述计算可推得

$$f_{t^{n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2s_1,\mathbb{O}} = f_{t^{n\Lambda_1}s_1s_2,\mathbb{O}} = f_{t^{(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2,\mathbb{O}}.$$

因此，关于 $\tilde{w}_2$ 的结果得以获得。

若 $\tilde{w} = \tilde{w}_3 = t^{m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n\Lambda_1}s_1s_2$，则

$$\tilde{w} \xrightarrow{s_0} t^{-n\Lambda_1-(m-1)\Lambda_2}s_2s_1 \tilde{\sim} t^{m\Lambda_2+(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2$$
$$\xrightarrow{s_1} t^{m\Lambda_2+(n-1)\Lambda_1}s_2s_1 \xrightarrow{s_0} t^{-(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)-(n-1)\Lambda_1}s_1s_2$$
$$\tilde{\sim} t^{-(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2s_1 \approx t^{(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n\Lambda_1}s_1s_2.$$

因此 $T_{\tilde{w}} \equiv [v]T_{t^{(1-n)\Lambda_1-m\Lambda_2}s_1} + T_{t^{-n\Lambda_1-(m-1)\Lambda_2}s_2s_1}$

$$\equiv [v]T_{t^{m\Lambda_2+(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1} + T_{t^{m\Lambda_2+(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2}$$

$$\equiv [v]T_{t^{m\Lambda_2+(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1} + [v]T_{t^{m\Lambda_2+(n-1)\Lambda_1}s_2} + T_{t^{m\Lambda_2+(n-1)\Lambda_1}s_2s_1}$$

$$\equiv [v]T_{t^{m\Lambda_2+(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1} + [v]T_{t^{m\Lambda_2+(n-1)\Lambda_1}s_2}$$

$$+[v]T_{t^{-m(2\Lambda_1-\Lambda_2)-(n-2)\Lambda_1}s_{212}} + T_{t^{(1-m)(2\Lambda_1-\Lambda_2)-(n-1)\Lambda_1}s_1s_2}$$

$$\equiv [v]T_{t^{m\Lambda_2+(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1} + [v]T_{t^{m\Lambda_2+(n-1)\Lambda_1}s_2} + [v]T_{t^{m\Lambda_2+(n-2)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1}$$

$$+ T_{t^{(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n\Lambda_1}s_1s_2}$$

$$\equiv \cdots\cdots$$

$$\equiv [v]\sum_{i=1}^{m}(T_{t^{i\Lambda_2+(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1} + T_{t^{i\Lambda_2+(n-1)\Lambda_1}s_2} + T_{t^{i\Lambda_2+(n-2)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1})$$

$$+T_{t^{n\Lambda_1}s_1s_2}.$$

结合前面的情形，

$$T_{t^{i\Lambda_2+j\Lambda_1}s_2} \equiv [v] \sum_{\lambda\in\Lambda^2_{i\Lambda_2+j\Lambda_1}} T_{\mathbb{O}_\lambda} + T_{\mathbb{O}_{4(i+j)+1}},$$

and

$$T_{t^{i\Lambda_2+j(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1} \equiv \begin{cases} \sum_{\lambda\in\Lambda^1_{i\Lambda_2+j\Lambda_1}} [v]T_{\mathbb{O}_\lambda} + T_{\mathbb{O}'_{6(i+\frac{j-1}{2})+3}}, & j \text{ is odd} \\ \sum_{\lambda\in\Lambda^1_{i\Lambda_2+j\Lambda_1}} [v]T_{\mathbb{O}_\lambda} + T_{\mathbb{O}'_{6(i+\frac{j}{2})+1}}, & j \text{ is even,} \end{cases}$$

关于 $\tilde{w}_3$ 的结果得以证明。并且，$\tilde{w} = \tilde{w}_4$ 或 $\tilde{w}_5$ 的情形可直接由 $\tilde{w}_3$的情形推出。

若 $\tilde{w} = \tilde{w}_6$，则有

$$T_{\tilde{w}} \equiv [v]T_{s_2\cdot t^{m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n\Lambda_1}s_2s_1} + T_{t^{m\Lambda_2+n\Lambda_1}s_1s_2} = [v]T_{t^{m\Lambda_2+n\Lambda_1}s_1} + T_{t^{m\Lambda_2+n\Lambda_1}s_1s_2}$$

$$\equiv [v]T_{t^{m\Lambda_2+n\Lambda_1}s_1} + T_{s_1\cdot(t^{m\Lambda_2+n\Lambda_1}s_1s_2)} = [v]T_{t^{m\Lambda_2+n\Lambda_1}s_1} + T_{t^{m\Lambda_2+n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2s_1}$$

$$\equiv [v]T_{t^{m\Lambda_2+n\Lambda_1}s_1}+[v]T_{s_0t^{m\Lambda_2+n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2s_1}+T_{s_0t^{m\Lambda_2+n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2s_1s_0}$$

$$=[v]T_{t^{m\Lambda_2+n\Lambda_1}s_1}+[v]T_{t^{(1-m)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+(n+1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2s_1s_2}+T_{t^{(1-m)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2}$$

$$\equiv [v]T_{t^{m\Lambda_2+n\Lambda_1}s_1}+[v]T_{t^{(m-1)\Lambda_2+(n+1)\Lambda_1}s_1}+T_{t^{(1-m)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2}$$

$$\equiv [v]T_{t^{m\Lambda_2+n\Lambda_1}s_1}+[v]T_{t^{(m-1)\Lambda_2+(n+1)\Lambda_1}s_1}+[v]T_{t^{(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n\Lambda_1}s_2}$$

$$+\ \ T_{t^{(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n\Lambda_1}s_2s_1}$$

$$\equiv\cdots\cdots$$

$$\equiv [v]\sum_{i=1}^{m}(T_{t^{i\Lambda_2+n\Lambda_1}s_1}+T_{t^{(i-1)\Lambda_2+(n+1)\Lambda_1}s_1}+T_{t^{(i-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n\Lambda_1}s_2})+T_{t^{n\Lambda_1}s_2s_1}.$$

注意,

$$T_{t^{i(2\Lambda_1-\Lambda_2)+j\Lambda_1}s_2}\equiv[v]T_{t^{i\Lambda_2+j\Lambda_1}}+T_{t^{i\Lambda_2+j\Lambda_1}s_2}$$

and

$$T_{t^{i\Lambda_2+j\Lambda_1}s_1}\equiv T_{t^{i\Lambda_2+j(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1}-[v]T_{t^{i\Lambda_2+j\Lambda_1}}.$$

与前述情形一样，关于 $\tilde{w}_6$ 的结果也得到了证明。而 $\tilde{w}=\tilde{w}_7$ 或 $\tilde{w}_8$ 的情形可直接由 $\tilde{w}_6$ 的情形推出。□

命题 3.18. 设 $\tilde{w}\in\{\tilde{w}_1,\ \tilde{w}_2\}\subset\mathbb{O}_1$，其中 $\ell(\tilde{w}_1)=4m-1, \ell(\tilde{w}_2)=4m-3$. 则

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}})=\begin{cases}3, & \text{if } \mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_\lambda|\ \lambda\in\Lambda^{<}_{\lambda(\tilde{w})-\Lambda_1}\}\\ 2, & \text{if } \mathbb{O}\in\mathbb{O}^{<}_{t^{\lambda(\tilde{w})}s_1s_2}\\ 1, & \text{if } \mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_2\}\cup\{\mathbb{O}_{i\Lambda_1}|\ 1\leqslant i\leqslant m-1\}\\ 0, & \text{if } \mathbb{O}=\mathbb{O}_1\\ -\infty, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

其中

$$\lambda(\tilde{w})=\begin{cases}m\Lambda_1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_1\\ (m-1)\Lambda_1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_2.\end{cases}$$

证明. 由于

$$\tau t^{(1-m)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2\tau^{-1}=t^{m\Lambda_1}s_1s_2s_1,\ \tau t^{(1-m)\Lambda_1}s_1s_2s_1\tau^{-1}=t^{m(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2,$$

只需假设 $\tilde{w}_1=t^{m(\Lambda_2-\Lambda_1)}\ s_2$, $\tilde{w}_2=t^{m\Lambda_1}s_1s_2s_1$. 因此,

$$\begin{aligned}T_{t^{m(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2}&\equiv[v]T_{t^{m\Lambda_1}s_1s_2}+T_{t^{m\Lambda_1}s_1s_2s_1}\\ &\equiv[v]T_{t^{m\Lambda_1}s_1s_2}+[v]T_{t^{(m-1)\Lambda_1}}+T_{t^{(m-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2}\\ &\equiv\cdots\cdots\\ &\equiv[v]\textstyle\sum_{i=1}^{m-1}T_{t^{i\Lambda_1}}+[v]\sum_{i=1}^{m}T_{t^{i\Lambda_1}s_1s_2}+T_{\mathbb{O}_1}.\end{aligned}$$

由 Proposition 3.17 的证明可知 $T_{t^{m(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2}\in\mathbb{O}_{m\Lambda_1+(m-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}$. □

命题 3.19。(1) 设 $\tilde{w}\in\mathbb{O}_{4k+1}$，且 $\ell(\tilde{w})=4k+2m-1$，其中 $1\leqslant m\leqslant k+1$，则

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}})=\begin{cases}1, & \text{if } \mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_{k\Lambda_1+i(\Lambda_2-\Lambda_1)}\mid 1\leqslant i\leqslant m\}\\ 0, & \text{if } \mathbb{O}=\mathbb{O}_{4k+1}\\ -\infty, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

(2) 设 $\tilde{w}\in\{\tilde{w}_1,\ \tilde{w}_2\}\subset\mathbb{O}_{4k+1}$，且 $\ell(\tilde{w}_1)=6k+4m-1$，$\ell(\tilde{w}_2)=6k+4m+1$，则

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}})=\begin{cases}3, & \text{if } \mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_\lambda\mid\lambda\in\Lambda^{\leqslant}_{k\Lambda_2+(m-1)\Lambda_1}\}\\ 2, & \text{if } \mathbb{O}\in\mathbb{O}^{<}_{t^{k\Lambda_2+m\Lambda_1}s_1s_2}\\ 1, & \text{if } \mathbb{O}\in\mathbb{O}(\tilde{w})\\ -\infty, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

其中

$$\mathbb{O}(\tilde{w})=\begin{cases}\{\mathbb{O}_2,\ \mathbb{O}_{k\Lambda_2}\}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_1\\ \{\mathbb{O}_2,\ \mathbb{O}_{k\Lambda_2},\ \mathbb{O}_{k\Lambda_2+m\Lambda_1}\}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_2.\end{cases}$$

证明。由于

$$\begin{aligned}&T_{t^{k\Lambda_1+m(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2}\equiv T_{t^{-k\Lambda_1+m(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2},\\ &T_{t^{k(\Lambda_2-\Lambda_1)+m\Lambda_1}s_1s_2s_1}\equiv T_{t^{-k(\Lambda_2-\Lambda_1)+m\Lambda_1}s_1s_2s_1},\\ &T_{t^{k(\Lambda_2-\Lambda_1)+m\Lambda_1}s_1s_2s_1}\equiv T_{t^{-k\Lambda_1+(1-m)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2},\\ &T_{t^{-k(\Lambda_2-\Lambda_1)+m\Lambda_1}s_1s_2s_1}\equiv T_{t^{k\Lambda_1+(1-m)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2},\end{aligned}$$

只需考虑 $\tilde{w}=t^{k\Lambda_1+m\ (\Lambda_2-\Lambda_1)}\ s_2$ 或$\tilde{w}=t^{k\Lambda_2+m\Lambda_1}s_1s_2s_1$。

(1) 若 $\ell(\tilde{w})=4k+2m-1$ 且 $1\leqslant m\leqslant k$，则可假设 $\tilde{w}=t^{k\Lambda_1+m\ (\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2$。若 $\ell(\tilde{w})=6k+1$，则可假设 $\tilde{w}=t^{k\Lambda_2+\Lambda_1}s_1s_2s_1$。因此，

$$T_{\tilde{w}}\equiv[v]\sum_{i=1}^{m-1}T_{t^{k\Lambda_1+i(\Lambda_2-\Lambda_1)}}+T_{\mathbb{O}_{4k+1}}.$$

(2) 若 $\ell(\tilde{w})\geqslant 6k+3$，则可取 $\tilde{w}_1=t^{k\Lambda_2+m\ (\Lambda_2-\Lambda_1)}\ s_2$, $\tilde{w}_2=t^{k\Lambda_2+\ (m+1)\ \Lambda_1}s_1s_2s_1$。因此

$$\begin{aligned}&T_{t^{k\Lambda_2+m(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2}\equiv[v]T_{t^{k\Lambda_2+m\Lambda_1}s_1s_2}+T_{t^{k\Lambda_2+m\Lambda_1}s_1s_2s_1}\\ &\equiv[v]T_{t^{k\Lambda_2+m\Lambda_1}s_1s_2}+[v]T_{t^{k\Lambda_2+(m-1)\Lambda_1}}+T_{t^{k\Lambda_2+(m-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2}\\ &\equiv[v]\textstyle\sum_{i=1}^{m}T_{t^{k\Lambda_2+i\Lambda_1}s_1s_2}+[v]\sum_{i=0}^{m-1}T_{t^{k\Lambda_2+i\Lambda_1}}+T_{t^{k\Lambda_2}s_2}.\end{aligned}$$

最后，我们利用命题3.17 完成证明。 □

命题 3.20. 设 $\tilde{w}\in\mathbb{O}'_1$，则

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}})=\begin{cases}3, & \text{if } \mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_\lambda\mid\lambda\in\Lambda^{\leqslant}_{\lambda(\tilde{w})}\}\\ 2, & \text{if } \mathbb{O}\in\mathbb{O}^{<}_{x(\tilde{w})}\\ 1, & \text{if } \ell(\tilde{w})>1,\ \mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_2\}\cup\{\mathbb{O}_{i\Lambda_2}\mid 1\leqslant i\leqslant m-1\}\\ 0, & \text{if } \mathbb{O}=\mathbb{O}'_1\\ -\infty, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

其中

$$\lambda(\tilde{w})=\begin{cases}m\Lambda_2-\Lambda_1, & \text{if } \ell(\tilde{w})=6m-1\\ (m-1)\Lambda_2, & \text{if } \ell(\tilde{w})=6m-3\\ (m-1)\Lambda_2-\Lambda_1, & \text{if } \ell(\tilde{w})=6m-5,\end{cases}$$

$$x(\tilde{w})=\begin{cases}t^{m\Lambda_2}s_2s_1, & \text{if } \ell(\tilde{w})=6m-1\\ t^{(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+\Lambda_1}s_1s_2, & \text{if } \ell(\tilde{w})=6m-3\\ t^{(m-1)\Lambda_2}s_2s_1, & \text{if } \ell(\tilde{w})=6m-5.\end{cases}$$

证明. 由于

$$\begin{aligned}&\tau t^{m\Lambda_2}s_2s_1s_2\tau^{-1}=t^{(1-m)\Lambda_2}s_2s_1s_2,\\ &\tau t^{m'(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1\tau^{-1}=t^{m'(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1,\ (m'\in\mathbb{Z}),\end{aligned}$$

只需考虑 $\tilde{w}\in\{t^{m(2\Lambda_1-\Lambda_2)s_1},\ t^{(1-m)(2\Lambda_1-\Lambda_2)s_1},\ t^{m\Lambda_2}s_2s_1s_2\mid m\in\mathbb{N}_+\}$。此外，我们有

$$T_{t^{m(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1} \equiv [v]T_{t^{m\Lambda_2}s_2s_1} + T_{t^{m\Lambda_2}s_2s_1s_2},$$

$$T_{t^{m\Lambda_2}s_2s_1s_2} \equiv [v]T_{t^{(1-m)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2s_1} + T_{t^{(1-m)(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1},$$

$$T_{t^{(1-m)(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1} \equiv [v]T_{t^{(m-1)\Lambda_2}} + T_{t^{(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1}.$$结合命题 3.17，命题得证。

□

命题 3.21. (1) 设 $\tilde{w} \in \mathbb{O}'_{6k+1}$，其中 $k \in \mathbb{N}_+$。若 $\ell(\tilde{w}) = 6k+2m-1$，$1 \leqslant m \leqslant k$，则

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}}) = \begin{cases} 1, & \text{if } \mathbb{O} \in \{\mathbb{O}_{k\Lambda_2+i(2\Lambda_1-\Lambda_2)} \mid 1 \leqslant i \leqslant m-1\} \\ 0, & \text{if } \mathbb{O} = \mathbb{O}'_{6k+1} \\ -\infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(2) 若 $\tilde{w} \in \mathbb{O}'_{6k+1}$，其中 $k \in \mathbb{N}_+$ 和 $\ell(\tilde{w}) > 8k-1$，则

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}}) = \begin{cases} 3, & \text{if } \mathbb{O} \in \{\mathbb{O}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda^{\leqslant}_{\lambda(\tilde{w})}\} \\ 2, & \text{if } \mathbb{O} \in \mathbb{O}^{<}_{x(\tilde{w})} \\ 1, & \text{if } \mathbb{O} \in \{\mathbb{O}_2,\ \mathbb{O}_{2k\Lambda_1}\} \text{ or} \\ & \quad \mathbb{O} = \mathbb{O}_{2k\Lambda_1+(m-1)\Lambda_2} \text{ and } \ell(\tilde{w}) = 8k+6m-5 \\ 0, & \text{if } \mathbb{O} = \mathbb{O}'_{6k+1} \text{ and } \ell(\tilde{w}) = 8k+1 \\ -\infty, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中

$$\lambda(\tilde{w}) = \begin{cases} m\Lambda_2 + (2k-1)\Lambda_1, & \text{if } \ell(\tilde{w}) = 8k+6m-1 \\ (m-1)\Lambda_2 + 2k\Lambda_1, & \text{if } \ell(\tilde{w}) = 8k+6m-3 \\ (m-1)\Lambda_2 + (2k-1)\Lambda_1, & \text{if } \ell(\tilde{w}) = 8k+6m-5, \end{cases}$$

$$x(\tilde{w}) = \begin{cases} t^{m\Lambda_2+2k\Lambda_1}s_2s_1, & \text{if } \ell(\tilde{w}) = 8k+6m-1 \\ t^{(1-m)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+2k(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2, & \text{if } \ell(\tilde{w}) = 8k+6m-3 \\ t^{(m-1)\Lambda_2+2k\Lambda_1}s_2s_1, & \text{if } \ell(\tilde{w}) = 8k+6m-5. \end{cases}$$

证明。根据引理 3.6的论证，只需考虑

$$\tilde{w} = t^{k\Lambda_2+i(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1,\ (1 \leqslant i \leqslant k) \text{ in } (1),$$

and

$$\tilde{w} \in \{t^{2k\Lambda_1+m(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1,\ t^{2k\Lambda_1+m\Lambda_2}s_2s_1s_2,\ t^{2k(\Lambda_2-\Lambda_1)+(1-m)(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1\} \text{ in } (2).$$

此外，

$$T_{t^{k\Lambda_2+i(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1} \equiv [v]\sum_{j=1}^{i-1} T_{\mathbb{O}_{k\Lambda_2+j(2\Lambda_1-\Lambda_2)}} + T_{\mathbb{O}'_{6k+1}},$$

$$T_{t^{2k\Lambda_1+m(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1} \equiv [v]T_{t^{2k\Lambda_1+m\Lambda_2}s_2s_1} + T_{t^{2k\Lambda_1+m\Lambda_2}s_2s_1s_2},$$

$$T_{t^{2k\Lambda_1+m\Lambda_2}s_2s_1s_2} \equiv [v]T_{t^{(1-m)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+2k(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2} + T_{t^{2k(\Lambda_2-\Lambda_1)+(1-m)(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1}$$

$$T_{t^{2k(\Lambda_2-\Lambda_1)+(1-m)(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1} \equiv [v]T_{\mathbb{O}_{2k\Lambda_1+(m-1)\Lambda_2}} + T_{t^{2k\Lambda_1+(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1}.$$

因此，该命题由命题3.17。

□

命题 3.22. (1) 设 $\tilde{w} \in \mathbb{O}'_{6k+3}$，其中 $k \in \mathbb{N}$。若 $\ell(\tilde{w}) = 6k+2m+3$，$0 \leqslant m \leqslant k$，则

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}}) = \begin{cases} 1, & \text{if } \mathbb{O} \in \{\mathbb{O}_{\Lambda_1+k\Lambda_2+i(2\Lambda_1-\Lambda_2)} \mid 0 \leqslant i \leqslant m-1\} \\ 0, & \text{if } \mathbb{O} = \mathbb{O}'_{6k+3} \\ -\infty, & \text{if otherwise.} \end{cases}$$

(2) 若 $\tilde{w}\in\mathbb{O}'_{6k+3}$, 其中 $k\in\mathbb{N}$ 和 $\ell(\tilde{w})>8k+3$, 则

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}})=\begin{cases}3, & \text{if } \mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_\lambda,\ \lambda\in\Lambda^{\leqslant}_{\lambda(\tilde{w})}\}\\ 2, & \text{if } \mathbb{O}\in\mathbb{O}^{<}_{x(\tilde{w})}\\ 1, & \text{if } \mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_2,\ \mathbb{O}_{(2k+1)\Lambda_1}\} \text{ or}\\ & \ell(\tilde{w})=8k+6m-1 \text{ and } \mathbb{O}=\mathbb{O}_{(2k+1)\Lambda_1+(m-1)\Lambda_2}\\ 0, & \text{if } \ell(\tilde{w})=8k+5 \text{ and } \mathbb{O}=\mathbb{O}'_{6k+3}\\ -\infty, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

其中

$$\lambda(\tilde{w})=\begin{cases}m\Lambda_2+2k\Lambda_1, & \text{if } \ell(\tilde{w})=8k+6m+3\\ (m-1)\Lambda_2+(2k+1)\Lambda_1, & \text{if } \ell(\tilde{w})=8k+6m+1\\ (m-1)\Lambda_2+2k\Lambda_1, & \text{if } \ell(\tilde{w})=8k+6m-1,\end{cases}$$

and

$$x(\tilde{w})=\begin{cases}t^{m\Lambda_2+(2k+1)\Lambda_1}s_2s_1, & \text{if } \ell(\tilde{w})=8k+6m+3\\ t^{(1-m)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+(2k+1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2, & \text{if } \ell(\tilde{w})=8k+6m+1\\ t^{(m-1)\Lambda_2+(2k+1)\Lambda_1}s_2s_1, & \text{if } \ell(\tilde{w})=8k+6m-1.\end{cases}$$

证明。 证明与命题 3.21的证明完全相同，此处略去。 □

命题 3.23。设 $\tilde{w}\in\mathbb{O}'_2$, 并令

$$\tilde{w}_1=t^{(2n+1)\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2,\ \tilde{w}_2=t^{\Lambda_2+(2n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1s_2,$$
$$\tilde{w}_3=t^{\Lambda_2+(2n-1)\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2,\ \tilde{w}_4=t^{(2n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1s_2,$$
$$\tilde{w}_5=t^{m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+(2n+1)\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2,\ \tilde{w}_6=t^{m\Lambda_2+(2n+1)\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2,$$
$$\tilde{w}_7=t^{\Lambda_1-m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+2n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1s_2,\ \tilde{w}_8=t^{m\Lambda_2+(2n+1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1s_2.$$

Then

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}})=\begin{cases}4, & \text{if } \mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_\lambda\mid\lambda\in\lambda(\tilde{w})\}\\ 3, & \text{if } \mathbb{O}\in\mathbb{O}^{\leqslant}_{\tilde{w}}\\ 2, & \text{if } \mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_2\}\cup\mathbb{O}_{(\tilde{w})}\\ 1, & \text{if } \mathbb{O}\in\mathbb{O}^{(\tilde{w})}\\ 0, & \text{if } \mathbb{O}=\mathbb{O}'_2\\ -\infty, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

其中

$$\lambda(\tilde{w})=\begin{cases}\Lambda^{\leqslant}_{(2n-1)\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_1,\ \tilde{w}_2\}\\ \Lambda^{\leqslant}_{(2n-3)\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_3,\ \tilde{w}_4\}\\ \Lambda^{\leqslant}_{m\Lambda_2+(2n-1)\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_5\\ \Lambda^{\leqslant}_{(m-1)\Lambda_2+(2n-1)\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_6,\ \tilde{w}_7\}\\ \Lambda^{\leqslant}_{(m-1)\Lambda_2+(2n+1)\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_8,\end{cases}$$

$\mathbb{O}^{\leqslant}_{\tilde{w}}=\{\mathbb{O}_{4i+1}|1\leqslant i\leqslant n(\tilde{w})\}\cup\{\mathbb{O}'_{6i+3}|0\leqslant i\leqslant n'(\tilde{w})\}\cup\{\mathbb{O}'_{6i+1}|1\leqslant i\leqslant n''(\tilde{w})\}$, 其中

$$n(\tilde{w})=\begin{cases}2n-1, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_1,\ \tilde{w}_2\}\\ 2n-3, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_3,\ \tilde{w}_4\}\\ m+2n-1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_5\\ m+2n-2, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_6,\ \tilde{w}_7\}\\ m+2n, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_8,\end{cases}$$

$$n'(\tilde{w})=\begin{cases}n-1, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_1,\ \tilde{w}_2\}\\ n-2, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_3,\ \tilde{w}_4\}\\ m+n-1, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_5,\ \tilde{w}_8\}\\ m+n-2, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_6,\ \tilde{w}_7\},\end{cases}$$

$$n''(\tilde{w})=\begin{cases} n-1, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_1,\ \tilde{w}_2\}\\ n-2, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_3,\ \tilde{w}_4\}\\ m+n-1, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_5,\ \tilde{w}_8\}\\ m+n-2, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_6,\ \tilde{w}_7\},\end{cases}$$

and

$$\mathbb{O}_{(\tilde{w})}=\begin{cases} \{\mathbb{O}_{(2i-1)\Lambda_1}\mid 1\leqslant i\leqslant n\}, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_1,\ \tilde{w}_2\}\\ \{\mathbb{O}_{(2i-1)\Lambda_1}\mid 1\leqslant i\leqslant n-1\}\cup\{\mathbb{O}_\lambda\mid \lambda\in\Lambda^1_{(2n-1)\Lambda_1}\}, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_3,\ \tilde{w}_4\}\\ \{\mathbb{O}_{i\Lambda_2}\mid 1\leqslant i\leqslant m\}\cup\{\mathbb{O}_{(2i-1)\Lambda_1}\mid 1\leqslant i\leqslant n\}\\ \cup\{\mathbb{O}_\lambda\mid \lambda\in\Lambda^2_{m\Lambda_2+2n\Lambda_1}\}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_5\\ \{\mathbb{O}_{i\Lambda_2}\mid 1\leqslant i\leqslant m-1\}\cup\{\mathbb{O}_{(2i-1)\Lambda_1}\mid 1\leqslant i\leqslant n\}\\ \cup\{\mathbb{O}_\lambda\mid \lambda\in\Lambda^2_{m\Lambda_2+2n\Lambda_1}\cup\Lambda^1_{m\Lambda_2+(2n-1)\Lambda_1}\}\\ \cup\{\mathbb{O}_{(m-1)\Lambda_2+2n\Lambda_1}\}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_6\\ \{\mathbb{O}_{i\Lambda_2}\mid 1\leqslant i\leqslant m-1\}\cup\{\mathbb{O}_{(2i-1)\Lambda_1}\mid 1\leqslant i\leqslant n\}\\ \cup\{\mathbb{O}_\lambda\mid \lambda\in\Lambda^2_{m\Lambda_2+(2n-1)\Lambda_1}\cup\Lambda^1_{m\Lambda_2+(2n-1)\Lambda_1}\}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_7\\ \{\mathbb{O}_{i\Lambda_2}\mid 1\leqslant i\leqslant m-1\}\cup\{\mathbb{O}_{(2i-1)\Lambda_1}\mid 1\leqslant i\leqslant n+1\}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_8,\end{cases}$$

$$\mathbb{O}^{(\tilde{w})}=\begin{cases} \{\mathbb{O}_{8n+1}\}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_1\\ \{\mathbb{O}_{4(2n-1)+1},\ \mathbb{O}_{4(2n-2)+1},\ \mathbb{O}'_{6(n-1)+3}\}, & \tilde{w}=\tilde{w}_3\\ \{\mathbb{O}_{4(2n-2)+1},\ \mathbb{O}'_{6(n-1)+3}\}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_4\\ \{\mathbb{O}_{4(m+2n)+1}\}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_5\\ \{\mathbb{O}_{4(m+2n)+1},\ \mathbb{O}_{4(m+2n-1)+1},\ \mathbb{O}'_{6(m+n-1)+3}\}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_6\\ \{\mathbb{O}_{4(m+2n-1)+1},\ \mathbb{O}'_{6(m+n-1)+3}\}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_7.\end{cases}$$

证明。显然，$T_{t^{\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2}\equiv T_{\mathbb{O}'_2}$，对于 $n\geqslant 1$，我们有

$$T_{t^{(2n+1)\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2}\equiv[v]T_{t^{\Lambda_1+2n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1}+T_{t^{\Lambda_2+(2n-1)(\Lambda_2-\Lambda_2)}s_1s_2s_1s_2},$$

$$T_{t^{\Lambda_2+(2n-1)(\Lambda_2-\Lambda_2)}s_1s_2s_1s_2}\equiv[v]T_{t^{\Lambda_2+(2n-1)\Lambda_1}s_2s_1s_2}+T_{t^{\Lambda_2+(2n-1)\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2},$$

$$T_{t^{\Lambda_2+(2n-1)\Lambda_1}s_2s_1s_2}\equiv[v]T_{t^{(2n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1}+T_{t^{(2n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1s_2}$$

和

$$T_{t^{(2n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1s_2}\equiv[v]T_{t^{(2n-1)\Lambda_1}s_2s_1s_2}+T_{t^{(2n-1)\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2}.$$

根据命题3.19 和3.22，$\tilde{w}\in\{\tilde{w}_1,\ \tilde{w}_2,\ \tilde{w}_3,\ \tilde{w}_4\}$ 的情形已得到证明。结合以下关系

$$\begin{aligned}
T_{t^{m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+(2n+1)\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2}&\equiv[v]T_{t^{m\Lambda_2+(2n+1)\Lambda_1}s_1s_2s_1}+T_{t^{m\Lambda_2+(2n+1)\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2},\\
T_{t^{m\Lambda_2+(2n+1)\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2}&\equiv[v]T_{t^{\Lambda_1-m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+2n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1}+\\
&\quad+T_{t^{\Lambda_1-m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+2n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1s_2},\\
T_{t^{\Lambda_1-m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+2n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1s_2}&\equiv[v]T_{t^{m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+2n\Lambda_1+(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2s_1s_2}+\\
&\quad+T_{t^{(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+(2n+1)\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2}\\
T_{t^{m\Lambda_2+(2n+1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1s_2}&\equiv[v]T_{t^{m\Lambda_2+(2n+1)\Lambda_1}s_2s_1s_2}+T_{t^{m\Lambda_2+(2n+1)\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2},
\end{aligned}$$

we finish the proof. □

类似地，我们有

命题 3.24. 令 $\tilde{w}\in\mathbb{O}_{s_1s_2s_1s_2}$，并设

$$\tilde{w}_1=t^{2n\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2,\ \tilde{w}_2=t^{\Lambda_2+2(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1s_2,$$

$$\tilde{w}_3=t^{\Lambda_2+2(n-1)\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2,\ \tilde{w}_4=t^{2(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1s_2,$$

$$\tilde{w}_5=t^{m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+2n\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2,\ \tilde{w}_6=t^{m\Lambda_2+2n\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2,$$

$$\tilde{w}_7=t^{(1-m)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+2n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1s_2,\ \tilde{w}_8=t^{m\Lambda_2+2n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1s_2.$$

Then

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}}) = \begin{cases} 4, & \text{if } \mathbb{O} \in \{\mathbb{O}_\lambda \mid \lambda \in \lambda(\tilde{w})\} \\ 3, & \text{if } \mathbb{O} \in \mathbb{O}_{\tilde{w}}^{<} \\ 2, & \text{if } \mathbb{O} \in \{\mathbb{O}_2\} \cup \mathbb{O}_{(\tilde{w})} \\ 1, & \text{if } \mathbb{O} \in \mathbb{O}^{(\tilde{w})} \\ 0, & \text{if } \mathbb{O} = \mathbb{O}_{s_{1212}} \\ -\infty, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中

$$\lambda(\tilde{w}) = \begin{cases} \Lambda^{\leqslant}_{(2n-2)\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_1,\ \tilde{w}_2\} \\ \Lambda^{\leqslant}_{(2n-4)\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_3,\ \tilde{w}_4\} \\ \Lambda^{\leqslant}_{m\Lambda_2+(2n-2)\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_5 \\ \Lambda^{\leqslant}_{(m-1)\Lambda_2+(2n-2)\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_6,\ \tilde{w}_7\} \\ \Lambda^{\leqslant}_{(m-1)\Lambda_2+2n\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_8, \end{cases}$$

$\mathbb{O}_{\tilde{w}}^{<} = \{\mathbb{O}_{4i+1} | 1 \leqslant i \leqslant n(\tilde{w})\} \cup \{\mathbb{O}'_{6i+3} | 0 \leqslant i \leqslant n'(\tilde{w})\} \cup \{\mathbb{O}'_{6i+1} | 1 \leqslant i \leqslant n''(\tilde{w})\}$,

$$n(\tilde{w}) = \begin{cases} 2n-2, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_1,\ \tilde{w}_2\} \\ 2n-4, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_3,\ \tilde{w}_4\} \\ m+2n-2, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_5 \\ m+2n-3, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_6,\ \tilde{w}_7\} \\ m+2n-1, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_8, \end{cases}$$

$$n'(\tilde{w}) = \begin{cases} n-2, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_1,\ \tilde{w}_2\} \\ n-3, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_3,\ \tilde{w}_4\} \\ m+n-2, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_5,\ \tilde{w}_8\} \\ m+n-3, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_6,\ \tilde{w}_7\}, \end{cases}$$

$$n''(\tilde{w}) = \begin{cases} n-1, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_1,\ \tilde{w}_2\} \\ n-2, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_3,\ \tilde{w}_4\} \\ m+n-1, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_5,\ \tilde{w}_8\} \\ m+n-2, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_6,\ \tilde{w}_7\}, \end{cases}$$

and

$$\mathbb{O}_{(\tilde{w})} = \begin{cases} \{\mathbb{O}_{2i\Lambda_1} \mid 1 \leqslant i \leqslant n-1\}, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_1,\ \tilde{w}_2\} \\ \{\mathbb{O}_{2i\Lambda_1} \mid 1 \leqslant i \leqslant n-2\} \cup \{\mathbb{O}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda^1_{(2n-2)\Lambda_1}\}, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_3,\ \tilde{w}_4\} \\ \{\mathbb{O}_{i\Lambda_2} \mid 1 \leqslant i \leqslant m\} \cup \{\mathbb{O}_{2i\Lambda_1} \mid 1 \leqslant i \leqslant n-1\} & \\ \cup\{\mathbb{O}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda^2_{(m+1)\Lambda_2+(2n-2)\Lambda_1}\}, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_5 \\ \{\mathbb{O}_{i\Lambda_2} \mid 1 \leqslant i \leqslant m-1\} \cup \{\mathbb{O}_{2i\Lambda_1} \mid 1 \leqslant i \leqslant n-1\} & \\ \cup\{\mathbb{O}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda^2_{(m-1)\Lambda_2+2n\Lambda_1} \cup \Lambda^1_{(m-1)\Lambda_2+2n\Lambda_1}\}, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_6 \\ \{\mathbb{O}_{i\Lambda_2} \mid 1 \leqslant i \leqslant m-1\} \cup \{\mathbb{O}_{2i\Lambda_1} \mid 1 \leqslant i \leqslant n-1\} & \\ \cup\{\mathbb{O}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda^2_{m\Lambda_2+(2n-2)\Lambda_1} \cup \Lambda^1_{m\Lambda_2+(2n-2)\Lambda_1}\}, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_7 \\ \{\mathbb{O}_{i\Lambda_2} \mid 1 \leqslant i \leqslant m-1\} \cup \{\mathbb{O}_{2i\Lambda_1} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_8, \end{cases}$$

$$\mathbb{O}^{(\tilde{w})} = \begin{cases} \{\mathbb{O}_{4(2n-1)+1}\}, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_1 \\ \{\mathbb{O}_{4(2n-2)+1},\ \mathbb{O}_{4(2n-3)+1},\ \mathbb{O}'_{6(n-1)+1}\}, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_3 \\ \{\mathbb{O}_{4(2n-3)+1},\ \mathbb{O}'_{6(n-1)+1}\}, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_4 \\ \{\mathbb{O}_{4(m+2n-1)+1}\}, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_5 \\ \{\mathbb{O}_{4(m+2n-1)+1},\ \mathbb{O}_{4(m+2n-2)+1},\ \mathbb{O}'_{6(m+n-1)+1}\}, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_6 \\ \{\mathbb{O}_{4(m+2n-2)+1},\ \mathbb{O}'_{6(m+n-1)+1}\}, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_7. \end{cases}$$

注 3.25. 由于 $f_{\tilde{w},\ \mathbb{O}} = f_{\tau\tilde{w}\tau^{-1},\ \mathbb{O}}$，我们得到了类多项式 $f_{\tilde{w},\ \mathbb{O}}$ 对所有 $\tilde{w} \in W_a$ 和 $\mathbb{O}$ 的次数。

3.2.2. $\tilde{w} \in W_a\tau$。

命题 3.26. 对任意 $\lambda \in Q'_+$ 和 $\tilde{w} \in \mathbb{O}_{\lambda,\ \tau}$，我们有

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}}) = \begin{cases} 0, & \text{if } \mathbb{O} = \mathbb{O}_{\lambda,\tau} \\ -\infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。 该命题由引理 3.11得出。 □

命题 3.27. 对任意 $\tilde{w} \in \mathbb{O}_{1,\ \tau}$，我们定义 $\tilde{w}$或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1} = \tilde{w}_i (1 \leqslant i \leqslant 8)$，其中

$$\tilde{w}_1 \in \{t^{n\Lambda_1}s_1s_2s_1\tau,\ t^{(n-1)\Lambda_1}s_2\tau,\ t^{(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1\tau \mid n \geqslant 2\}$$

$$\tilde{w}_2 = t^{(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2\tau,\ \tilde{w}_3 = t^{m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n\Lambda_1}s_1s_2s_1\tau,$$

$$\tilde{w}_4 \in \{t^{m\Lambda_2+(n-1)\Lambda_1}s_2\tau,\ t^{m\Lambda_2+(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1\tau\},$$

$$\tilde{w}_5 = t^{(1-m)(2\Lambda_2-\Lambda_1)+n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2\tau,$$

$$\tilde{w}_6 \in \{t^{m(2\Lambda_1-\Lambda_2)^{+n\Lambda_1}}s_2\tau,\ t^{-m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1\tau,\ t^{m\Lambda_2+(n+1)\Lambda_1}s_1s_2s_1\tau\}$$

$$\tilde{w}_7 = t^{m\Lambda_2+n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2\tau.$$

Then

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}}) = \begin{cases} 2, & \text{if } \mathbb{O} \in \{\mathbb{O}_{\lambda,\tau} \mid \lambda \in \lambda(\tilde{w})\} \\ 1, & \text{if } \mathbb{O} \in \mathbb{O}^{<}_{\tilde{w}} \\ 0, & \text{if } \mathbb{O} = \mathbb{O}_2 \\ -\infty, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中,

$$\lambda(\tilde{w}) = \begin{cases} \Lambda^{\leqslant}_{\Lambda_2+(n-1)\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_1 \\ \Lambda^{\leqslant}_{\Lambda_2+(n-2)\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_2 \\ \Lambda^{\leqslant}_{(m+1)\Lambda_2+(n-2)\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_3 \\ \Lambda^{\leqslant}_{m\Lambda_2+(n-1)\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_4 \\ \Lambda^{\leqslant}_{(m-1)\Lambda_2+n\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_5 \\ \Lambda^{\leqslant}_{(m+1)\Lambda_2+(n-1)\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_6 \\ \Lambda^{\leqslant}_{m\Lambda_2+n\Lambda_1}, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_7, \end{cases}$$

和 $\mathbb{O}^{<}_{\tilde{w}} = \{\mathbb{O}_{4i+2,\tau} | 1 \leqslant i \leqslant n(\tilde{w})\} \cup \{\mathbb{O}'_{6i,\tau} | 0 \leqslant i \leqslant n'(\tilde{w})\} \cup \{\mathbb{O}'_{6i+4,\tau} | 1 \leqslant i \leqslant n''(\tilde{w})\}$,

$$n(\tilde{w}) = \begin{cases} n-2, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_1 \text{ or } \tilde{w}_2 \\ m+n-2, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_3,\ \tilde{w}_4,\ \tilde{w}_5\} \\ m+n-1, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_6,\ \tilde{w}_7\}, \end{cases}$$

$$n'(\tilde{w}) = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_1 \\ \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_2 \\ m + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_3,\ \tilde{w}_7\} \\ m + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_4 \\ m + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_5 \\ m + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_6, \end{cases}$$

$$n''(\tilde{w}) = \begin{cases} \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_1 \\ \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_2 \\ m + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, & \text{if } \tilde{w} \in \{\tilde{w}_3,\ \tilde{w}_7\} \\ m + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_4 \\ m + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_5 \\ m + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, & \text{if } \tilde{w} = \tilde{w}_6. \end{cases}$$

证明。由以下关系可得:

$$T_{t^{n\Lambda_1}s_1s_2s_1\tau}\equiv T_{t^{(n-1)\Lambda_1}s_2\tau}\equiv[v]T_{t^{\Lambda_1+(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1s_2\tau}+T_{t^{(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2\tau}$$

$$\equiv[v]T_{t^{\Lambda_1+(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1s_2\tau}+[v]T_{t^{(n-1)\Lambda_1}s_1s_2\tau}+T_{t^{(n-1)\Lambda_1}s_1s_2s_1\tau}$$

and

$$T_{t^{\Lambda_1+i(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2s_1s_2\tau}\equiv\begin{cases}\sum_{\lambda\in\Lambda'_{\Lambda_2+(i-1)\Lambda_1}}[v]T_{\mathbb{O}_{\lambda,\tau}}+T_{\mathbb{O}'_{6\frac{i}{2},\tau}}, & i\text{ is even}\\ \sum_{\lambda\in\Lambda'_{\Lambda_2+(i-1)\Lambda_1}}[v]T_{\mathbb{O}_{\lambda,\tau}}+T_{\mathbb{O}'_{6\frac{i-1}{2}+4,\tau}}, & i\text{ is odd,}\end{cases}$$

$T_{t^{i\Lambda_1}s_1s_2\tau}\equiv T_{\mathbb{O}_{4(i-1)+2,\ \tau}}$, $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}=\tilde{w}_1$ 的情形已得到证明。

$\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}=\tilde{w}_2$ 的情形可直接由 $\tilde{w}_1$ 的情形推出。

由 $\tilde{w}_1$ 的情形以及

$$T_{t^{m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n\Lambda_1}s_1s_2s_1\tau}\equiv[v]T_{t^{m\Lambda_2+n\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2\tau}+T_{t^{m\Lambda_2+(n-1)\Lambda_1}s_2\tau}$$

$\equiv[v]T_{t^{m\Lambda_2+n\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2\tau}+[v]T_{t^{(m-1)\Lambda_2+(n+1)\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2\tau}+T_{t^{(1-m)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2\tau}\equiv[v]($

$T_{t^{m\Lambda_2+n\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2\tau}+T_{t^{(m-1)\Lambda_2+(n+1)\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2\tau}+T_{t^{(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n\Lambda_1}s_1s_2\tau}$)

$+T_{t^{(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n\Lambda_1}s_1s_2s_1\tau}$, $\tilde{w}_3$、 $\tilde{w}_4$、 $\tilde{w}_5$ 的情形已得到证明。对于 $\tilde{w}_6$、 $\tilde{w}_7$的情形，论证类似。 □

命题 3.28。(1) 若 $\tilde{w}\in\mathbb{O}_{4k+2,\tau}$ 且 $\ell(\tilde{w})=4k+2+2i$, 其中 $0\leqslant i\leqslant k$。则

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}})=\begin{cases}1, & \text{if }\mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_{(k+1)\Lambda_1+j(\Lambda_2-\Lambda_1),\tau}\mid 1\leqslant j\leqslant i\}\\ 0, & \text{if }\mathbb{O}=\mathbb{O}_{4k+2,\tau}\\ -\infty, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

(2) 设 $\tilde{w}\in\{\tilde{w}_1,\ \tilde{w}_2\}\subset\mathbb{O}_{4k+2,\tau}$, 且 $\ell(\tilde{w}_1)=6(k+1)+4m$, $\ell(\tilde{w}_2)=6(k+1)+4m-2$ $(m\in\mathbb{N})$, 则

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}})=\begin{cases}3, & \text{if }\mathbb{O}=\mathbb{O}_{\lambda,\tau},\ \lambda\in\Lambda^{\leqslant}_{\lambda(\tilde{w})}\\ 2, & \text{if }\mathbb{O}\in\mathbb{O}^{<}_{\tilde{w}}\\ 1, & \text{if }\mathbb{O}\in\mathbb{O}(\tilde{w})\\ -\infty, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

其中

$$\lambda(\tilde{w})=\begin{cases}(k+1)\Lambda_2+m\Lambda_1, & \text{if }\tilde{w}=\tilde{w}_1\\ (k+1)\Lambda_2+(m-1)\Lambda_1, & \text{if }\tilde{w}=\tilde{w}_2,\end{cases}$$

$\mathbb{O}^{<}_{\tilde{w}}=\{\mathbb{O}_{4i+2,\tau}|1\leqslant i\leqslant n(\tilde{w})\}\cup\{\mathbb{O}'_{6i,\tau}|0\leqslant i\leqslant n'(\tilde{w})\}\cup\{\mathbb{O}'_{6i+4,\tau}|1\leqslant i\leqslant n''(\tilde{w})\}$,

$$n(\tilde{w})=\begin{cases}k+m, & \text{if }\tilde{w}=\tilde{w}_1\\ k+m-1, & \text{if }\tilde{w}=\tilde{w}_2,\end{cases}$$

$$n'(\tilde{w})=\begin{cases}k+\lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor, & \text{if }\tilde{w}=\tilde{w}_1\\ k+\lfloor\frac{m}{2}\rfloor, & \text{if }\tilde{w}=\tilde{w}_2\end{cases}$$

$$n''(\tilde{w})=\begin{cases}k+\lfloor\frac{m}{2}\rfloor, & \text{if }\tilde{w}=\tilde{w}_1\\ k+\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor, & \text{if }\tilde{w}=\tilde{w}_2,\end{cases}$$

and

$$\mathbb{O}(\tilde{w})=\begin{cases}\{\mathbb{O}_{1,\tau},\ \mathbb{O}_{(k+1)\Lambda_2,\tau}\}, & \text{if }\tilde{w}=\tilde{w}_1\\ \{\mathbb{O}_{1,\tau},\ \mathbb{O}_{(k+1)\Lambda_2,\tau},\ \mathbb{O}_{(k+1)\Lambda_2+m\Lambda_1,\tau}\}, & \text{if }\tilde{w}=\tilde{w}_2.\end{cases}$$

证明. (1) 若 $\tilde{w},\ \tilde{w}' \in \mathbb{O}_{4k+2,\tau}$ 且 $\ell(\tilde{w}) = \ell(\tilde{w}') = 4k+2+2i$，其中 $0 \leqslant i \leqslant k$，则 $f_{\tilde{w},\mathbb{O}} = f_{\tilde{w}',\mathbb{O}_\circ}$ 只需考虑 $\tilde{w} = t^{(k+1)\Lambda_1+i(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2\tau_\circ$ 若 $i=0$，则 $T_{\tilde{w}} \equiv T_{\mathbb{O}_{4k+2,\tau_\circ}}$ 若 $i \geqslant 1$，则 $T_{\tilde{w}} \equiv \sum_{j=1}^{i}[v]T_{t^{(k+1)\Lambda_1+j(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2s_1s_2\tau} + T_{\mathbb{O}_{4k+2,\tau\circ}}$

(2)由引理 3.12，只需考虑 $\tilde{w}_1 = t^{(k+1)\Lambda_2+m(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2\tau$, $\tilde{w}_2 = t^{(k+1)\Lambda_2+m\Lambda_1}s_2s_1\tau_\circ$ 此外,

$$T_{t^{(k+1)\Lambda_2+m(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2\tau} \equiv [v]T_{t^{(k+1)\Lambda_2+m\Lambda_1}s_2\tau} + T_{t^{(k+1)\Lambda_2+m\Lambda_1}s_2s_1\tau}$$

and

$$T_{t^{(k+1)\Lambda_2+m\Lambda_1}s_2s_1\tau} \equiv [v]T_{t^{(k+1)\Lambda_2+m\Lambda_1}s_2s_1s_2\tau} + T_{t^{(k+1)\Lambda_2+(m-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1s_2\tau}.$$

因此，结合命题3.27，命题得证。 □

命题 3.29. 设 $\tilde{w} \in \mathbb{O}'_{0,\ \tau}$，那么

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}}) = \begin{cases} 3, & \text{if } \mathbb{O} = \mathbb{O}_{\lambda,\tau},\ \lambda \in \Lambda^{\leqslant}_{\lambda(\tilde{w})} \\ 2, & \text{if } \mathbb{O} \in \mathbb{O}^{<}_{\tilde{w}} \\ 1, & \text{if } \mathbb{O} \in \mathbb{O}(\tilde{w})\ (\ell(\tilde{w}) > 1) \\ 0, & \text{if } \mathbb{O} = \mathbb{O}'_{0,\tau} \\ -\infty, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中

$$\lambda(\tilde{w}) = \begin{cases} m\Lambda_2 - (\Lambda_2-\Lambda_1), & \text{if } \ell(\tilde{w}) = 6m \\ (m-1)\Lambda_2 - (\Lambda_2-\Lambda_1), & \text{if } \ell(\tilde{w}) = 6m-2 \text{ or } 6m-4, \end{cases}$$

$$\mathbb{O}^{<}_{\tilde{w}} = \{\mathbb{O}_{4i+2,\tau} | 1 \leqslant i \leqslant n(\tilde{w})\} \cup \{\mathbb{O}'_{6i,\tau} | 0 \leqslant i \leqslant m-1\} \cup \{\mathbb{O}'_{6i+4,\tau} | 1 \leqslant i \leqslant n''(\tilde{w})\},$$

$$n(\tilde{w}) = n''(\tilde{w}) = \begin{cases} m-1, & \text{if } \ell(\tilde{w}) = 6m \\ m-2, & \text{if } \ell(\tilde{w}) = 6m-2 \text{ or } 6m-4, \end{cases}$$

$$\mathbb{O}(\tilde{w}) = \begin{cases} \{\mathbb{O}_{1,\tau},\ \mathbb{O}_{i\Lambda_2,\tau}\ (1 \leqslant i \leqslant m)\}, & \text{if } \ell(\tilde{w}) = 6m \text{ or } 6m-2 \\ \{\mathbb{O}_{1,\tau},\ \mathbb{O}_{i\Lambda_2,\tau}\ (1 \leqslant i \leqslant m-1)\}, & \text{if } \ell(\tilde{w}) = 6m-4. \end{cases}$$

证明。由于 $\tau t^{m\Lambda_2}\tau\tau^{-1} = t^{-m\Lambda_2}\tau$，只需考虑

$$\tilde{w} = \begin{cases} t^{m\Lambda_2}\tau, & \text{if } \ell(\tilde{w}) = 6m \\ t^{-m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2\tau, & \text{if } \ell(\tilde{w}) = 6m-2 \\ t^{(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2\tau, & \text{if } \ell(\tilde{w}) = 6m-4. \end{cases}$$

此外,

$$\begin{aligned} T_{t^{m\Lambda_2}\tau} &\equiv [v]T_{t^{m\Lambda_2}s_2\tau} + T_{t^{-m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2\tau} \\ &\equiv [v]T_{t^{m\Lambda_2}s_2\tau} + [v]T_{t^{m\Lambda_2}s_2s_1s_2\tau} + T_{t^{(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+\Lambda_1}s_1s_2s_1s_2\tau} \\ &\equiv [v]T_{t^{m\Lambda_2}s_2\tau} + [v]T_{t^{m\Lambda_2}s_2s_1s_2\tau} + [v]T_{t^{\Lambda_1+(m-1)\Lambda_2}s_1s_2s_1\tau} + T_{t^{(m-1)\Lambda_2\tau}} \end{aligned}$$

因此，该命题可由命题3.27得出。 □

命题 3.30. (1) 设 $\tilde{w} \in \mathbb{O}'_{6k,\ \tau}$，其中 $k \in \mathbb{N}_{+\circ}$ 若 $\ell(\tilde{w}) = 6k+2m$，0 $6m \leqslant k$，则

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}}) = \begin{cases} 1, & \text{if } \mathbb{O} \in \{\mathbb{O}_{\Lambda_1+k\Lambda_2+i(2\Lambda_1-\Lambda_2),\tau} \mid 0 \leqslant i \leqslant m-1\} \\ 0, & \text{if } \mathbb{O} = \mathbb{O}'_{6k,\tau} \\ -\infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(2) 若 $\tilde{w} \in \mathbb{O}'_{6k,\tau}$，并令 $\tilde{w}_1,\ \tilde{w}_2,\ \tilde{w}_3$，其长度为 $\ell(\tilde{w}_1) = 8k+6m$，$\ell(\tilde{w}_2) = 8k+6m-2$，$\ell(\tilde{w}_3) = 8k+6m-4$，其中 $k,\ m \in \mathbb{N}_{+\circ}$ 则

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}}) = \begin{cases} 3, & \text{if } \mathbb{O} \in \{\mathbb{O}_{\lambda,\tau} \mid \lambda \in \Lambda^{\leqslant}_{\lambda(\tilde{w})}\} \\ 2, & \text{if } \mathbb{O} \in \mathbb{O}^{<}_{\tilde{w}} \\ 1, & \text{if } \mathbb{O} = \mathbb{O}_{1,\tau} \text{ or } \tilde{w} = \tilde{w}_2 \text{ and } \mathbb{O} = \mathbb{O}_{2k\Lambda_1+m\Lambda_2} \\ -\infty, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中

$$\lambda(\tilde{w})=\begin{cases} m\Lambda_2+2k\Lambda_1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_1\\ m\Lambda_2+(2k-1)\Lambda_1, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_2,\ \tilde{w}_3\},\end{cases}$$

$$\mathbb{O}_{\tilde{w}}^{\leqslant}=\{\mathbb{O}_{4i+2,\tau}|1\leqslant i\leqslant n(\tilde{w})\}\cup\{\mathbb{O}'_{6i,\tau}|0\leqslant i\leqslant n'(\tilde{w})\}\cup\{\mathbb{O}'_{6i+4,\tau}|1\leqslant i\leqslant n''(\tilde{w})\},$$

$$n(\tilde{w})=\begin{cases} m+2k-1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_1\\ m+2k-4, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_2,\ \tilde{w}_3\},\end{cases}$$

$$n'(\tilde{w})=\begin{cases} m+k-1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_1\\ m+k-2, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_2,\ \tilde{w}_3\},\end{cases}$$

$$n''(\tilde{w})=\begin{cases} m+k-1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_1\\ m+k-3, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_2,\ \tilde{w}_3\}.\end{cases}$$

证明。由于 $\tau(t^{\pm k(2\Lambda_1-\Lambda_2)-m\Lambda_2}\tau)\tau^{-1}=t^{\pm k(2\Lambda_1-\Lambda_2)+m\Lambda_2}\tau$,

$$s_1(t^{-k(2\Lambda_1-\Lambda_2)+m\Lambda_2}\tau)s_1=t^{k(2\Lambda_1-\Lambda_2)+m\Lambda_2}\tau,$$

$$\tau(t^{-k\Lambda_2+\Lambda_1+m(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1s_2s_1s_2\tau)\tau^{-1}=t^{k\Lambda_2+\Lambda_1+m(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1s_2s_1s_2\tau,$$

只需考虑 $t^{k(2\Lambda_1-\Lambda_2)+m\Lambda_2}\tau$以及 $t^{k\Lambda_2+\Lambda_1+m_{(2\Lambda_1-\Lambda_2)}}s_1s_2s_1s_2\tau$。

(1) 若 $\ell(\tilde{w})=6k+2m$, $0\leqslant m\leqslant k$, 则可令 $\tilde{w}=t^{k(2\Lambda_1-\Lambda_2)+m\Lambda_2}\tau$。因此,

$$T_{\tilde{w}}=[v]\sum_{i=0}^{m-1}T_{\mathbb{O}_{\Lambda_1+k\Lambda_2+i(2\Lambda_1-\Lambda_2),\tau}}+T_{\mathbb{O}'_{6k,\tau}}.$$

(2) 我们可以假设 $\tilde{w}_1=t^{2k\Lambda_1+m\Lambda_2}\tau$,

$$\tilde{w}_2=t^{(2k+1)(\Lambda_2-\Lambda_1)-(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1s_2s_1s_2\tau,$$

$$\tilde{w}_3=t^{(2k+1)\Lambda_1+(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1s_2s_1s_2\tau.$$

Then

$$T_{\tilde{w}_1}\equiv[v]T_{t^{-m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+2k(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_2\tau}+T_{\tilde{w}_2}$$

$$T_{\tilde{w}_2}\equiv[v]T_{t^{(2k+1)\Lambda_1+(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_2s_1s_2\tau}+T_{\tilde{w}_3}$$

$$T_{\tilde{w}_3}\equiv[v]T_{t^{(2k+1)\Lambda_1+(m-1)\Lambda_2}s_1s_2s_1\tau}+T_{t^{2k\Lambda_1+(m-1)\Lambda_2}\tau}.$$

结合 (1) 和命题3.27, 证明完毕。 □

命题 3.31. (1) 设 $\tilde{w}\in\mathbb{O}'_{6k+4,\ \tau}$, 其中 $k\in\mathbb{N}$。若 $\ell(\tilde{w})=6k+4+2m$, $0\ 6m\leqslant k$, 则

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}})=\begin{cases} 1, & \text{if } \mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_{(k+1)\Lambda_2+i(2\Lambda_1-\Lambda_2),\tau}\mid 1\leqslant i\leqslant m\}\\ 0, & \text{if } \mathbb{O}=\mathbb{O}'_{6k+4,\tau}\\ -\infty, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

(2) 若 $\tilde{w}\in\mathbb{O}'_{6k+4,\ \tau}$, 其中 $k\in\mathbb{N}$。并设 $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$, $\tilde{w}_3$ 的长度为 $\ell(\tilde{w}_1)=8k+6m+4$, $\ell(\tilde{w}_2)=8k+6m+2$, $\ell(\tilde{w}_3)=8k+6m$, 其中 $m\in\mathbb{N}_+$。则

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}})=\begin{cases} 3, & \text{if } \mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_{\lambda,\tau}\mid\lambda\in\Lambda^{\leqslant}_{\lambda(\tilde{w})}\}\\ 2, & \text{if } \mathbb{O}\in\mathbb{O}^{<}_{\tilde{w}}\\ 1, & \text{if } \mathbb{O}=\mathbb{O}_{1,\tau} \text{ or } \mathbb{O}=\mathbb{O}_{(2k+1)\Lambda_1+m\Lambda_2,\tau} \text{ when } \tilde{w}=\tilde{w}_2\\ -\infty, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

其中

$$\lambda(\tilde{w})=\begin{cases} m\Lambda_2+(2k+1)\Lambda_1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_1\\ m\Lambda_2+2k\Lambda_1, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_1,\ \tilde{w}_2\},\end{cases}$$

$$\mathbb{O}_{\tilde{w}}^{<}=\{\mathbb{O}_{4i+2,\tau}|1\leqslant i\leqslant n(\tilde{w})\}\cup\{\mathbb{O}'_{6i,\tau}|0\leqslant i\leqslant m+k\}\cup\{\mathbb{O}'_{6i+4,\tau}|1\leqslant i\leqslant m+k-1\},\ \text{其中}$$

$$n(\tilde{w})=\begin{cases} m+2k, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_1\\ m+2k-4, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_1,\ \tilde{w}_2\}.\end{cases}$$

证明。由于 $\tau(t^{k(2\Lambda_1-\Lambda_2)+\Lambda_1-(m+1)\Lambda_2}\tau)\tau^{-1}=t^{k(2\Lambda_1-\Lambda_2)+\Lambda_1+m\Lambda_2}\tau$,

$$s_1(t^{-k(2\Lambda_1-\Lambda_2)-\Lambda_1+m\Lambda_2}\tau)s_1=t^{(k+1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)-\Lambda_1+m\Lambda_2}\tau,$$

$$\tau(t^{-k\Lambda_2+m(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1s_2s_1s_2\tau)\tau^{-1}=t^{(k+1)\Lambda_2+m(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1s_2s_1s_2\tau,$$

只需考虑 $t^{k(2\Lambda_1-\Lambda_2)+\Lambda_1+m\Lambda_2}\tau$和 $t^{(k+1)\Lambda_2+m}{}_{(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1s_2s_1s_2\tau$。

(1) 如果 $\ell(\tilde{w})=6k+4+2m,\ 0\leqslant m\leqslant k$, 那么我们可以设 $\tilde{w}=t^{k\ (2\Lambda_1-\Lambda_2)+\Lambda_1+m\Lambda_2}\tau$。因此,

$$T_{\tilde{w}}=[v]\sum_{i=0}^{m-1}T_{\mathbb{O}_{(k+1)\Lambda_2+i(2\Lambda_1-\Lambda_2),\tau}}+T_{\mathbb{O}'_{6k+4,\tau}}.$$

(2) 我们可以假设 $\tilde{w}_1=t^{(2k+1)\Lambda_1+m\Lambda_2}\tau$,

$$\tilde{w}_2=t^{(2k+2)(\Lambda_2-\Lambda_1)-(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1s_2s_1s_2\tau,$$

$$\tilde{w}_3=t^{(2k+2)\Lambda_1+(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1s_2s_1s_2\tau.$$

Then

$$T_{\tilde{w}_1}\equiv[v]T_{t^{-2k\Lambda_1-m(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_1s_2s_1\tau}+T_{\tilde{w}_2}$$

$$T_{\tilde{w}_2}\equiv[v]T_{t^{(2k+2)\Lambda_1+(m-1)(2\Lambda_1-\Lambda_2)}s_2s_1s_2\tau}+T_{\tilde{w}_3}$$

$$T_{\tilde{w}_3}\equiv[v]T_{t^{(2k+2)\Lambda_1+(m-1)\Lambda_2}s_1s_2s_1\tau}+T_{t^{(2k+1)\Lambda_1+(m-1)\Lambda_2}\tau}.$$

结合 (1) 和命题3.27, 证明完毕。 □

命题 3.32. 设 $\tilde{w}\in\mathbb{O}'_{1,\tau}$.

(1) 如果 $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}=\tilde{w}_i$ $(i=1,\ 2)$, 其中 $\tilde{w}_1=t^{n\Lambda_1}s_1\tau$、 $\tilde{w}_2=t^{n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1\tau$ 与 $n\in\mathbb{N}$。那么

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}})=\begin{cases}2, & \text{if } \mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_{\lambda,\tau}\mid\lambda\in\Lambda^{<}_{\lambda(\tilde{w})}\}\\ 1, & \text{if } \mathbb{O}\in\mathbb{O}^{<}_{\tilde{w}}\\ 0, & \text{if } \mathbb{O}=\mathbb{O}'_{1,\tau}\\ -\infty, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

其中

$$\lambda(\tilde{w})=\begin{cases}n\Lambda_1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_1\\ (n+1)\Lambda_1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_2,\end{cases}$$

$\mathbb{O}^{<}_{\tilde{w}}=\{\mathbb{O}_{4i+2,\tau}|1\leqslant i\leqslant n-1\}\cup\{\mathbb{O}'_{6i,\tau}|0\leqslant i\leqslant n'(\tilde{w})\}\cup\{\mathbb{O}'_{6i+4,\tau}|1\leqslant i\leqslant n''(\tilde{w})\}$, 其中

$$n'(\tilde{w})=\begin{cases}\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_1\\ \lfloor\frac{n}{2}\rfloor, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_2,\end{cases}$$

$$n''(\tilde{w})=\begin{cases}\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_1\\ \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_2.\end{cases}$$

(2) 如果 $\tilde{w}$or $\tau\tilde{w}\tau^{-1}=\tilde{w}_i(i=3,4,5,6)$, 其中 $\tilde{w}_3=t^{(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n\Lambda_1}s_1\tau$, $\tilde{w}_4=t^{m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n\Lambda_1}s_1\tau$, $\tilde{w}_5=t^{(m-1)\Lambda_2+(n+1)\Lambda_1}s_1\tau$, $\tilde{w}_6=t^{(1-m)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1\tau$其中 $m,\ n\in\mathbb{N}$ 和 $m\geqslant 2$。那么

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}})=\begin{cases}4, & \text{if } \mathbb{O}=\mathbb{O}_{\lambda,\tau},\ \lambda\in\Lambda^{\leqslant}_{\lambda(\tilde{w})}\\ 3, & \text{if } \mathbb{O}\in\mathbb{O}^{<}_{\tilde{w}}\\ 2, & \text{if } \mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_{1,\tau}\}\cup\mathbb{O}^{(\tilde{w})}\\ 1, & \text{if } \mathbb{O}\in\mathbb{O}_{(\tilde{w})}\\ 0, & \text{if } \mathbb{O}=\mathbb{O}'_{1,\tau}\\ -\infty, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

其中

$$\lambda(\tilde{w})=\begin{cases}\Lambda_2+(n-1)\Lambda_1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_3\\ m\Lambda_2+(n-1)\Lambda_1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_4\\ (m-1)\Lambda_2+(n-1)\Lambda_1, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_5,\ \tilde{w}_6\},\end{cases}$$

$\mathbb{O}_{\tilde{w}}^{<}=\{\mathbb{O}_{4i+2,\tau}|1\leqslant i\leqslant n(\tilde{w})\}\cup\{\mathbb{O}'_{6i,\tau}|0\leqslant i\leqslant n'(\tilde{w})\}\cup\{\mathbb{O}'_{6i+4,\tau}|1\leqslant i\leqslant n''(\tilde{w})\}$，其中

$$n(\tilde{w})=\begin{cases}n-1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_3\\ m+n-2, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_4\\ m+n-3, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_5,\ \tilde{w}_6\},\end{cases}$$

$$n'(\tilde{w})=\begin{cases}\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_3\\ m+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_4\\ m+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-2, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_5,\ \tilde{w}_6\},\end{cases}$$

$$n''(\tilde{w})=\begin{cases}\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_3\\ m+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-1, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_4\\ m+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-2, & \text{if } \tilde{w}\in\{\tilde{w}_5,\ \tilde{w}_6\},\end{cases}$$

$$\mathbb{O}^{(\tilde{w})}=\begin{cases}\{\mathbb{O}_{\Lambda_2,\tau},\ \mathbb{O}_{\Lambda_2+n\Lambda_1,\tau}\}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_3\\ \{\mathbb{O}_{i\Lambda_2,\tau}|1\leqslant i\leqslant m\}\cup\{\mathbb{O}_{\lambda,\tau}|\lambda\in\Lambda^{2,\leqslant}_{m\Lambda_2+n\Lambda_1}\}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_4\\ \{\mathbb{O}_{i\Lambda_2,\tau}|1\leqslant i\leqslant m-1\}\cup\{\mathbb{O}_{\lambda,\tau}|\lambda\in\Lambda^{2,\leqslant}_{(m-1)\Lambda_2+n\Lambda_1}\cup\Lambda^{1,2}_{(m-1)\Lambda_2+(n+1)\Lambda_1}\}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_5\\ \{\mathbb{O}_{i\Lambda_2,\tau}|1\leqslant i\leqslant m-1\}\cup\{\mathbb{O}_{\lambda,\tau}|\lambda\in\Lambda^{2,\leqslant}_{(m-1)\Lambda_2+n\Lambda_1}\cup\Lambda^{1,<}_{(m-1)\Lambda_2+(n+1)\Lambda_1}\}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_6,\end{cases}$$

$$\mathbb{O}_{(\tilde{w})}=\begin{cases}\{\mathbb{O}_{4n+2,\tau},\ \mathbb{O}'_{6\lfloor\frac{n}{2}\rfloor,\tau}\}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_3\\ \{\mathbb{O}_{4(m+n-1)+2,\tau},\ \mathbb{O}'_{6(m+\frac{n}{2}),\tau}(n \text{ is even}),\ \mathbb{O}'_{6(m+\frac{n-1}{2})+4,\tau}(n \text{ is odd})\}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_4\\ \{\mathbb{O}_{4(m+n-2)+2,\tau}\}\cup\mathbb{O}_{(\tilde{w}_4)}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_5\\ \{\mathbb{O}_{4(m+n-2)+2,\tau},\ \mathbb{O}'_{6(m+\frac{n}{2}),\tau}(n \text{ is even}),\ \mathbb{O}'_{6(m+\frac{n-1}{2})+4,\tau}(n \text{ is odd})\}, & \text{if } \tilde{w}=\tilde{w}_6.\end{cases}$$

(3) 若 $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}=t^{m\Lambda_2+n_{(\Lambda_2-\Lambda_1)s_1\tau}}$，其中 m、 $n\in\mathbb{N}_+$，则

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}})=\begin{cases}4, & \text{if } \mathbb{O}=\mathbb{O}_{\lambda,\tau},\ \lambda\in\Lambda^{\leqslant}_{m\Lambda_2+n\Lambda_1}\\ 3, & \text{if } \mathbb{O}\in\mathbb{O}^{<}_{\tilde{w}}\\ 2 & \text{if } \mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_{1,\tau},\ \mathbb{O}_{i\Lambda_2,\tau}\mid 1\leqslant i\leqslant m\}\\ 0, & \text{if } \mathbb{O}=\mathbb{O}'_{1,\tau}\\ -\infty, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

其中 $\mathbb{O}_{\tilde{w}}^{<}=\{\mathbb{O}_{4i+2,\tau}|0\leqslant i\leqslant m+n-1\}\cup\{\mathbb{O}'_{6i,\tau}|1\leqslant i\leqslant m+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor\}\cup\{\mathbb{O}'_{6i+4,\tau}|0\leqslant i\leqslant m+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1\}$.

(4) 若 $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}=t^{m\Lambda_2}s_1\tau$，其中 $m\in\mathbb{N}_+$，则

$$\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}})=\begin{cases}4, & \text{if } \mathbb{O}=\mathbb{O}_{\lambda,\tau},\ \lambda\in\Lambda^{\leqslant}_{m\Lambda_2}\\ 3, & \text{if } \mathbb{O}\in\mathbb{O}^{<}_{\tilde{w}}\\ 2 & \text{if } \mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_{1,\tau},\ \mathbb{O}_{i\Lambda_2,\tau}\mid 1\leqslant i\leqslant m\}\cup\\ & \{\mathbb{O}_{\lambda,\tau}|\lambda\in\Lambda^{1,<}_{(m-1)\Lambda_2+2\Lambda_1}\cup\Lambda^{2,\leqslant}_{(m-1)\Lambda_2+\Lambda_1}\}\\ 1 & \text{if } \mathbb{O}=\mathbb{O}'_{6m+4,\tau}\\ 0, & \text{if } \mathbb{O}=\mathbb{O}'_{1,\tau}\\ -\infty, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

其中 $\mathbb{O}_{\tilde{w}}^{<}=\{\mathbb{O}_{4i+2,\tau}|0\leqslant i\leqslant m-1\}\cup\{\mathbb{O}'_{6i,\tau}|1\leqslant i\leqslant m-2\}\cup\{\mathbb{O}'_{6i+4,\tau}|0\leqslant i\leqslant m-1\}$

证明。由于 $\tau t^{m(2\Lambda_1-\Lambda_2)_{-n\Lambda_2}}s_1=t^{m(2\Lambda_1-\Lambda_2)^{+n\Lambda_2}}s_1\tau$且

$$\tau t^{(\Lambda_2-\Lambda_1)+m(2\Lambda_1-\Lambda_2)-(n+1)\Lambda_2}s_1=t^{(\Lambda_2-\Lambda_1)+m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n\Lambda_2}s_1\tau,$$

只需考虑 $\tilde{w}=t^{m(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1\tau$，其中 $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$。

(1) 我们有 $T_{t^{n\Lambda_1}s_1\tau}\equiv[v]T_{\mathbb{O}_{4(n-1)+2,\tau}}+[v]T_{t^{(n-1)\Lambda_1}\tau}+T_{t^{(n-1)\Lambda_1}s_1\tau}$且

$$T_{t^{n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1\tau}\equiv[v]T_{t^{n\Lambda_1}\tau}+T_{t^{n\Lambda_1}s_1\tau}.$$

根据命题3.30、3.31，此情形得证。

(2) Since $T_{t^{(2\Lambda_1-\Lambda_2)+n\Lambda_1}s_1\tau}\equiv[v]T_{t^{\Lambda_2+n\Lambda_1}s_2s_1\tau}+T_{t^{(n+1)\Lambda_1}s_1\tau}$,

$$T_{\tilde{w}_4}\equiv[v]T_{t^{m\Lambda_2+n\Lambda_1}s_2s_1\tau}+T_{\tilde{w}_5},\ T_{\tilde{w}_5}\equiv[v]T_{t^{(m-1)\Lambda_2+(n+1)\Lambda_1}s_1s_2\tau}+T_{\tilde{w}_6},$$

结合前面的情形，(2) 得证。

（3）根据前面的论证，可由命题3.28、3.30、3.31 和 $T_{t^{m\Lambda_2+n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1\tau} \equiv [v]T_{t^{m\Lambda_2+n\Lambda_1}\tau} + T_{t^{m\Lambda_2+n\Lambda_1}s_1\tau}$得出。

（4）在这种情况下，我们只需注意以下关系： $T_{t^{m\Lambda_2}s_1\tau} \equiv [v]T_{t^{m\Lambda_2}s_1s_2\tau} + T_{t^{(1-m)(2\Lambda_1-\Lambda_2)+(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1\tau}$。 □

4. Applications

4.1. 空性/非空性与维数公式。我们将沿用~此前的记号。令 $b \in G = Sp_4(L)$ 和 $\tilde{w} \in W$。根据第3 节的结果以及“维数 = 次数”定理，我们将明确描述仿射 Deligne-Lusztig 簇 $X_{\tilde{w}}(b)$的空性/非空性和维数公式。

~定理 4.1. 设 $b \in G$ 和 $\tilde{w} \in W$。若 $b = 1$，或 b 对应于 $\mathbb{O}$，其中 $\mathbb{O} \in \{\mathbb{O}_2,\ \mathbb{O}_2',\ \mathbb{O}_{s_{1212}},\ \mathbb{O}_1',\ \mathbb{O}_1,\ \mathbb{O}_0\}$ 则

$$X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset \Longleftrightarrow \tilde{w} \in \begin{cases} \mathbb{O}_0 \cup \mathbb{O}_1 \cup \mathbb{O}_1' \cup \mathbb{O}_2 \cup \mathbb{O}_2' \cup \mathbb{O}_{s_{1212}} \\ \mathbb{O}_{4k+1} \text{ and } \ell(\tilde{w}) \geqslant 6k+3 \\ \mathbb{O}_{6k+1}' \text{ and } \ell(\tilde{w}) \geqslant 8k+3 \\ \mathbb{O}_{6(k-1)+3}' \text{ and } \ell(\tilde{w}) \geqslant 8(k-1)+7, \end{cases}$$

其中 $k \in \mathbb{N}_+$。此外，若 $X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset$，则有

$$\dim X_{\tilde{w}}(b) = \begin{cases} 0, & \text{if } \tilde{w} \in \mathbb{O}_0 \\ 1, & \text{if } \tilde{w} \in \mathbb{O}_1 \cup \mathbb{O}_1' \text{ and } \ell(\tilde{w}) = 1 \\ \frac{\ell(\tilde{w})+2}{2}, & \text{if } \tilde{w} \in \mathbb{O}_2 \text{ or } \tilde{w} \in \Psi(\mathbb{O}_2', b) \cup \Psi(\mathbb{O}_{s_{1212}}, b) \\ \frac{\ell(\tilde{w})+3}{2}, & \text{if } \tilde{w} \in \mathbb{O}_1 \cup \mathbb{O}_1' \text{ and } \ell(\tilde{w}) \geqslant 3 \text{ or} \\ & \tilde{w} \in \mathbb{O}_{4k+1} \text{ and } \ell(\tilde{w}) \geqslant 6k+3 \text{ or} \\ & \tilde{w} \in \mathbb{O}_{6k+1}' \text{ and } \ell(\tilde{w}) \geqslant 8k+3 \text{ or} \\ & \tilde{w} \in \mathbb{O}_{6(k-1)+3}' \text{ and } \ell(\tilde{w}) \geqslant 8(k-1)+7 \\ \frac{\ell(\tilde{w})+4}{2}, & \text{if } \tilde{w} \in (\mathbb{O}_2' - \Psi(\mathbb{O}_2', b)) \cup (\mathbb{O}_{s_{1212}} - \Psi(\mathbb{O}_{s_{1212}}, b)) \end{cases}$$

这里，我们设 $w = s_1s_2s_1s_2$,

$$\Psi_0(\mathbb{O}_2', b) = \{t^{\Lambda_2-\Lambda_1}w,\ t^{\pm i(2\Lambda_1-\Lambda_2)+\Lambda_1}w,\ t^{i\Lambda_2+\Lambda_1}w \mid i \in \mathbb{N}\}$$

$\Psi(\mathbb{O}_2', b) = \Psi_0(\mathbb{O}_2', b) \cup \tau \cdot (\Psi_0(\mathbb{O}_2', b))$ 和

$$\Psi_0(\mathbb{O}_{s_{1212}}, b) = \{t^{2\Lambda_1}w,\ t^{\Lambda_2}w,\ t^{2(\Lambda_2-\Lambda_1)}w,\ t^{\Lambda_2+2\Lambda_1}w\}$$

$\Psi(\mathbb{O}_{s_{1212}}, b) = \Psi_0(\mathbb{O}_{s_{1212}}, b) \cup \tau \cdot (\Psi_0(\mathbb{O}_{s_{1212}}, b))$.

证明。 我们检查第 3 节中的类多项式的次数，定理便直接由“维数–次数”定理得出。 = □

在本节余下部分，我们将给出 $X_{\tilde{w}}(b)$ 的空集/非空集判定以及相应的维数公式。

(1) 若 b 对应于 $\mathbb{O}_{\lambda_0}$，其中 $\lambda_0 = m_0\Lambda_2 + n_0\Lambda_1 \in Q_{++}$ (*i.e.* $m_0,\ n_0 \in \mathbb{N}_+$)，则 $X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset$ 当且仅当:

(a) $\tilde{w} \in \mathbb{O}_{m_0\Lambda_2+n_0\Lambda_1}$; (b) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 满足命题 3.17 中的条件，即 $\lambda_0 \in \lambda(\tilde{w})$; (c) $\tilde{w}$或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$满足命题 3.18中的条件，即 $\lambda_0 \in \Lambda^{\leqslant}_{\tilde{w}-\Lambda_1}$; (d) $\tilde{w}$ 满足命题 3.19 (1)中的条件，即 $\lambda_0 \in \{k\Lambda_1 + i(\Lambda_2 - \Lambda_1) \mid 1 \leqslant i \leqslant m-1\}$; (e) $\tilde{w}$ 满足命题 3.19 (2)中的条件，即 $\lambda_0 \in \Lambda^{\leqslant}_{k\Lambda_2+(m-1)\Lambda_1}$; (f) $\tilde{w}$ 满足命题 3.20 中的条件，即 $\lambda_0 \in \Lambda^{\leqslant}_{\lambda\ (\tilde{w})}$;

(g) $\tilde{w}$ 属于命题 3.21 (1)，且满足 $\lambda_0 \in \{k\Lambda_2 + i(2\Lambda_1 - \Lambda_2) \mid 1 \leqslant i \leqslant m-1\}$；(h) $\tilde{w}$ 属于命题 3.21 (2)，且满足 $\lambda_0 \in \Lambda^{\leqslant}_{\lambda\ (\tilde{w})}$，或 $\lambda_0 = 2k\Lambda_1 + (m-1)\Lambda_2$；(i) $\tilde{w}$ 属于命题 3.22 (1)，且满足 $\lambda_0 \in \{\Lambda_1 + k\Lambda_2 + i(2\Lambda_1 - \Lambda_2) \mid 1 \leqslant i \leqslant m-1\}$；(j) $\tilde{w}$ 属于命题 3.22 (2)，且满足 $\lambda_0 \in \Lambda^{\leqslant}_{\lambda\ (\tilde{w})}$，或 $\lambda_0 = (2k+1)\Lambda_1 + (m-1)\Lambda_2$；

(k) $\tilde{w}$ 见命题 3.23、3.24，使得 $\lambda_0 \in \lambda(\tilde{w})$，或者 $\mathbb{O}_{(\tilde{w})}$.

此外，如果 $X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset$，则有

$$\dim X_{\tilde{w}}(b) = \frac{1}{2}(\ell(\tilde{w}) + \ell(\mathbb{O}_{\lambda_0}) + \deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}_{\lambda_0}})) - \langle \bar{\nu}_b,\ 2\rho\rangle.$$

(2) 如果 b 对应于 $\mathbb{O}_{\lambda_0}$，其中 $\lambda_0 = m_0\Lambda_2\ m_0 \in \mathbb{N}_+$，那么 $X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset$ 当且仅当：

(a) $\tilde{w} \in \mathbb{O}_{m_0\Lambda_2}$；(b) $\tilde{w} \in \mathbb{O}_{4m_0+1}$ 满足 $\ell(\tilde{w}) \geqslant 6m_0 + 1$；(c) $\tilde{w} \in \mathbb{O}'_1$ 满足 $\ell(\tilde{w}) \geqslant 6m - 5$ 且 $m \geqslant m_0 + 1$；(d) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 等于命题 3.23、3.24 中的 $\tilde{w}_5$ 及 $m \geqslant m_0$；(e) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 包含于命题 3.23、3.24 中的 $\{\tilde{w}_i \mid i = 6,\ 7,\ 8\}$ 及 $m \geqslant m_0 + 1$.

如果 $X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset$，那么

$$\dim X_{\tilde{w}}(b) = \frac{1}{2}(\ell(\tilde{w}) + \ell(\mathbb{O}_{\lambda_0}) + \deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}_{\lambda_0}})) - \langle \bar{\nu}_b,\ 2\rho\rangle.$$

(3) 如果 b 对应于 $\mathbb{O}_{\lambda_0}$，其中 $\lambda_0 = n_0\Lambda_1\ n_0 \in \mathbb{N}_+$，那么 $X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset$ 当且仅当：

(a) $\tilde{w} \in \mathbb{O}_{n_0\Lambda_1}$；(b) $\tilde{w} \in \mathbb{O}_1$ 和 $\ell(\tilde{w}) = 4n - 3$ 或 $4n - 1$ 且 $n \geqslant n_0 + 1$；(c) $n_0 = 2k$ 和 $\tilde{w} \in \mathbb{O}'_{6k+1}$ 且 $\ell(\tilde{w}) \geqslant 8k + 1$；(d) $n_0 = 2k + 1$ 和 $\tilde{w} \in \mathbb{O}'_{6k+3}$ 且 $\ell(\tilde{w}) \geqslant 8k + 5$；(e) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 包含于命题 3.23 中的 $\{\tilde{w}_i \mid i = 1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 7\}$，且 $n_0 = 2i - 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n$；(f) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 包含于命题 3.23 中的 $\{\tilde{w}_i \mid i = 3,\ 4\}$，且$n_0 = 2i - 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n - 1$；(g) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1} = \tilde{w}_8$ 见命题 3.23，且 $n_0 = 2i - 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n + 1$；(h) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 包含于命题 3.24 中的 $\{\tilde{w}_i \mid i = 1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 7\}$，且 $n_0 = 2i$, $1 \leqslant i \leqslant n - 1$；(i) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 包含于命题 3.24 中的 $\{\tilde{w}_i \mid i = 3,\ 4\}$，且$n_0 = 2i$, $1 \leqslant i \leqslant n - 2$；(j) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1} = \tilde{w}_8$ 见命题 3.24，且 $n_0 = 2i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

若 $X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset$，则

$$\dim X_{\tilde{w}}(b) = \frac{1}{2}(\ell(\tilde{w}) + \ell(\mathbb{O}_{\lambda_0}) + \deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}_{\lambda_0}})) - \langle \bar{\nu}_b,\ 2\rho\rangle.$$

(4) 若 b 对应于 $\mathbb{O}_{4k_0+1}$，其中 $k_0 \in \mathbb{N}_+$，则 $X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset$ 当且仅当 (a) $\tilde{w} \in \mathbb{O}_{k_0\Lambda_1}$ 或 $\mathbb{O}_{4k_0+1}$；(b) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 属于命题 3.17，且 $k_0 \leqslant n(\tilde{w})$；(c) $\tilde{w} \in \mathbb{O}_1$ 满足 $\ell(\tilde{w}) \geqslant 4k_0 + 1$；(d) $\tilde{w} \in \mathbb{O}_{4k+1}$，使得 $k \neq k_0$ 且 $m \in \mathbb{N}_+$ 满足 $\ell(\tilde{w}) \geqslant 6k + 4m - 1$和 $m + k \geqslant k_0 + 1$；(e) $\tilde{w} \in \mathbb{O}'_1$ 且 $\ell(\tilde{w}) \geqslant 6k_0 + 3$；(f) $\tilde{w} \in \mathbb{O}'_{6k+1}$，其中 $2k = k_0$ 满足 $\ell(\tilde{w}) \geqslant 4n_0 + 1$；

(g) $\tilde{w}\in\mathbb{O}'_{6k+1}$, 其中 $2k\neq k_0$ 使得 $\ell(\tilde{w})\geqslant 8k+6m-3$ 满足 $m+2k-1\geqslant k_0$; (h) $\tilde{w}\in\mathbb{O}'_{6k+3}$, 其中 $2k+1=k_0$ 满足 $\ell(\tilde{w})\geqslant 8k+5$; (i) $\tilde{w}\in\mathbb{O}'_{6k+3}$, 其中 $2k+1\neq k_0$ 使得 $\ell(\tilde{w})\geqslant 8k+6m+1$ 满足 $m+2k\geqslant k_0$; (j) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 属于命题 3.23 或命题 3.24, 且$k_0\leqslant n(\tilde{w})$ 或 $\mathbb{O}_{k_0\Lambda_1}\in\mathbb{O}_{(\tilde{w})}$, 或 $\mathbb{O}_{4k_0+1}\in\mathbb{O}^{(\tilde{w})}$.

若 $X_{\tilde{w}}(b)\neq\emptyset$, 则

$$\dim X_{\tilde{w}}(b)=\frac{1}{2}\max_{\mathbb{O}}(\ell(\tilde{w})+\ell(\mathbb{O})+\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}}))-\langle\bar{\nu}_b,\ 2\rho\rangle,$$

其中 $\mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_{4k_0+1},\ \mathbb{O}_{k_0\Lambda_1}\}$。

(5) 若 b 对应于 $\mathbb{O}'_{6k_0+1}$, 其中 $k_0\in\mathbb{N}_+$, 则 $X_{\tilde{w}}(b)\neq\emptyset$ 当且仅当满足以下条件之一: (a) $\tilde{w}\in\mathbb{O}_{k_0\Lambda_2}$ 或 $\mathbb{O}'_{6k_0+1}$; (b) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 属于命题 3.17, 使得 $k_0\leqslant n''(\tilde{w})$; (c) $\tilde{w}\in\mathbb{O}_1$ 且 $\ell(\tilde{w})=4m-1$ 满足$\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor\geqslant k_0$ 或 $\ell(\tilde{w})=4m-3$ 满足$\lfloor\frac{m-2}{2}\rfloor\geqslant k_0$; (d) $\tilde{w}\in\mathbb{O}_{4k+1}$ 且 $\ell(\tilde{w})=6k+4m-1$ 或 $6k+4m+1$满足 $k+\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor\geqslant k_0$; (e) $\tilde{w}\in\mathbb{O}'_1$ 且 $\ell(\tilde{w})\geqslant 6k_0+1$; (f) $\tilde{w}\in\mathbb{O}'_{6k+1}$ 满足 $\ell(\tilde{w})=8k+6m-1$ 或 $8k+6m-3$, 使得 $m+k-1\geqslant k_0$, 或 $\ell(\tilde{w})=8k+6m-5$, 使得 $m+k-2\geqslant k_0$; (g) $\tilde{w}\in\mathbb{O}'_{6k+3}$ 满足 $\ell(\tilde{w})=8k+6m+3$ 或 $8k+6m+1$, 使得满足$m+k\geqslant k_0$, 或 $\ell(\tilde{w})=8k+6m-1$ 满足 $m+k-1\geqslant k_0$; (h) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 属于命题 3.23 或命题 3.24, 使得$k_0\leqslant n''(\tilde{w})$或 $\mathbb{O}_{k_0\Lambda_2}\in\mathbb{O}_{(\tilde{w})}$, 或 $\mathbb{O}'_{6k_0+1}\in\mathbb{O}^{(\tilde{w})}$。

如果 $X_{\tilde{w}}(b)\neq\emptyset$, 那么

$$\dim X_{\tilde{w}}(b)=\frac{1}{2}\max_{\mathbb{O}}(\ell(\tilde{w})+\ell(\mathbb{O})+\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}}))-\langle\bar{\nu}_b,\ 2\rho\rangle,$$

其中 $\mathbb{O}\in\{\mathbb{O}'_{6k_0+1},\ \mathbb{O}_{k_0\Lambda_2}\}$。

(6) 如果 b 对应于$\mathbb{O}'_{6k_0+3}$, 其中 $k_0\in\mathbb{N}$, 那么 $X_{\tilde{w}}(b)\neq\emptyset$ 当且仅当 (a) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 属于命题 3.17, 使得 $k_0\leqslant n'(\tilde{w})$; (b) $\tilde{w}\in\mathbb{O}_1$ 和 $\ell(\tilde{w})=4m-1$ 满足 $\lfloor\frac{m-2}{2}\rfloor\geqslant k_0$ 或 $\ell(\tilde{w})=4m-3$ 满足$\lfloor\frac{m-3}{2}\rfloor\geqslant k_0$; (c) $\tilde{w}\in\mathbb{O}_{4k+1}$和 $\ell(\tilde{w})=6k+4m-1$ 或 $6k+4m+1$ 满足 $k+\lfloor\frac{m}{2}-1\rfloor\geqslant k_0$; (d) $\tilde{w}\in\mathbb{O}'_1$ 满足 $\ell(\tilde{w})=6m-1$, 使得 $m-1\geqslant k_0$ 或 $\ell(\tilde{w})=6m-3$或 $6m-5$ 满足 $m-2\geqslant k_0$; (e) $\tilde{w}\in\mathbb{O}'_{6k+1}$ 满足 $\ell(\tilde{w})=8k+6m-1$, 使得 $m+k-1\geqslant k_0$, 或$\ell(\tilde{w})=8k+6m-3$ 或 $8k+6m-5$ 满足 $m+k-2\geqslant k_0$; (f) $\tilde{w}\in\mathbb{O}'_{6k_0+3}$; (g) $\tilde{w}\in\mathbb{O}'_{6k+3}$, 其中 $k\neq k_0$满足 $\ell(\tilde{w})=8k+6m+3$或 $8k+6m\pm1$使得满足 $m+k-1\geqslant k_0$; (h) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 属于命题 3.23 或命题 3.24, 使得 $k_0\leqslant n'(\tilde{w})$ 或 $\mathbb{O}'_{6k_0+3}\in\mathbb{O}^{(\tilde{w})}$.

如果 $X_{\tilde{w}}(b)\neq\emptyset$, 那么

$$\dim X_{\tilde{w}}(b)=\frac{1}{2}(\ell(\tilde{w})+\ell(\mathbb{O}'_{6k_0+3})+\deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}'_{6k_0+3}}))-\langle\bar{\nu}_b,\ 2\rho\rangle.$$

(7) 若 b对应于 $\mathbb{O}$, 其中 $\mathbb{O}\in\{\mathbb{O}_{1,\tau},\ \mathbb{O}'_{1,\tau},\ \mathbb{O}'_{0,\tau}\}$, 则

$$X_{\tilde{w}}(b)\neq\emptyset\Longleftrightarrow\tilde{w}\in\begin{cases}\mathbb{O}_{1,\tau}\cup\mathbb{O}'_{1,\tau}\cup\mathbb{O}'_{0,\tau}\\ \mathbb{O}_{4k+2,\tau}\ (k\in\mathbb{N})\ and\ \ell(\tilde{w})\geqslant 6k+4\\ \mathbb{O}'_{6k+4,\tau}\ (k\in\mathbb{N})\ and\ \ell(\tilde{w})\geqslant 8k\\ \mathbb{O}'_{6k}\ (k\in\mathbb{N}_+)\ and\ \ell(\tilde{w})\geqslant 8k+2.\end{cases}$$

此外，若 $X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset$，则有

$$\dim X_{\tilde{w}}(b) = \begin{cases} 0, & \tilde{w} \in \mathbb{O}'_{0,\tau} \text{ and } \ell(\tilde{w}) = 0 \\ \frac{\ell(\tilde{w})+1}{2}, & \tilde{w} \in \mathbb{O}_{1,\tau} \cup \{t^{n\Lambda_1} s_1\tau,\ t^{n(\Lambda_2-\Lambda_1)} s_1\tau \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ \frac{\ell(\tilde{w})+2}{2}, & \tilde{w} \in \{\tilde{w} \in \mathbb{O}_{4k+2,\tau} | \ell(\tilde{w}) \geqslant 6k+4\} \cup \{\tilde{w} \in \mathbb{O}'_{0,\tau} | \ell(\tilde{w}) > 0\} \\ & \cup \{\tilde{w} \in \mathbb{O}'_{6k,\tau} | \ell(\tilde{w}) \geqslant 8k+2\} \cup \{\tilde{w} \in \mathbb{O}'_{6k+4,\tau} | \ell(\tilde{w}) \geqslant 8k\} \\ \frac{\ell(\tilde{w})+3}{2}, & \tilde{w} \in \mathbb{O}'_{1,\tau} \setminus \{t^{n\Lambda_1} s_1\tau,\ t^{n(\Lambda_2-\Lambda_1)} s_1\tau \mid n \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

(8) 若 b对应于 $\mathbb{O}_{\lambda,\ \tau}$，其中 $\lambda = (m'+1)\Lambda_2,\ m' \in \mathbb{N}_\circ$ 那么 $X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset$当且仅当

(a) $\tilde{w} \in \mathbb{O}_{(m'+1)\Lambda_2,\tau}$或 $\mathbb{O}'_{6m'+4,\tau}$，或 $\tilde{w} \in \mathbb{O}_{4m'+2,\tau}$使得 $\ell(\tilde{w}) \geqslant 6m'+4$; (b) $\tilde{w}$或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$属于命题 3.27，其中 $m' \leqslant n''(\tilde{w})$，或 $\tilde{w}$属于命题 3.28，且 $k \neq m'$使得 $m' \leqslant n''(\tilde{w})$; (c) $\tilde{w}$属于命题 3.29，其中 $m' \leqslant n''(\tilde{w}$或 $\mathbb{O}_{(m'+1)\Lambda_2,\tau} \in \mathbb{O}(\tilde{w})$; (d) $\tilde{w}$属于命题 3.30（任意 k）、命题 3.31（$k \neq m'$），其中 $m' \leqslant n''(\tilde{w})$; (e) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 属于命题 3.32 (1)，其中 $m' \leqslant n''(\tilde{w})$; (f) $\tilde{w}$或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$属于命题 3.32 (2)，其中 $m' \leqslant n''(\tilde{w})$，或 $\mathbb{O}_{(m'+1)\Lambda_2,\tau} \in \mathbb{O}^{(\tilde{w})}$，或 $\mathbb{O}'_{6m'+4} \in \mathbb{O}_{(\tilde{w})}$; (g) $\tilde{w}$或 $\tau\tilde{w}\tau = t^{m\Lambda_2+n}(\Lambda_2-\Lambda_1)s_1\tau$和 $m + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geqslant m'+1$; (h) $\tilde{w}$或$\tau\tilde{w}\tau = t^{m\Lambda_2} s_1\tau$和 $m \geqslant m'_\circ$ 若 $X_{\tilde{w}}{}^{(b)} \neq \emptyset$, then

$$\dim X_{\tilde{w}}(b) = \frac{1}{2} \max_{\mathbb{O}} (\ell(\tilde{w}) + \ell(\mathbb{O}) + \deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}})) - \langle \bar{\nu}_b,\ 2\rho \rangle,$$

其中$\mathbb{O} \in \{\mathbb{O}'_{6m'+4,\tau},\ \mathbb{O}_{(m'+1)\Lambda_2,\tau}\}_\circ$

(9) 若 b对应于 $\mathbb{O}_{\lambda,\tau}$，其中 $\lambda = (m'+1)\Lambda_2 + n'\Lambda_2,\quad m' \in \mathbb{N},\quad n' \in \mathbb{N}_{+\circ}$ 那么 $X_{\tilde{w}}(b)$ 当且仅当 $\neq \emptyset$

(a) $\tilde{w} \in \mathbb{O}_{\lambda,\ \tau}$；(b) $\tilde{w}$或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$属于命题 3.27，且 $\lambda \in \lambda(\tilde{w})$；(c) $\tilde{w}$属于命题 3.28（1），且 $\lambda \in \{(k+1)\Lambda_1 + j(\Lambda_2-\Lambda_1) \mid 0 \leqslant j \leqslant i\}$；(d) $\tilde{w}$属于命题 3.28（2），且 $\lambda \in \Lambda^{\leqslant}_{\lambda}(\tilde{w})$ 或 $\lambda = (k+1)\Lambda_2 + m\Lambda_1$；(e) $\tilde{w}$属于命题 3.29，且 $\lambda \in \Lambda^{\leqslant}_{\lambda}(\tilde{w})$；(f) $\tilde{w}$属于命题 3.30（1），且 $\lambda \in \{\Lambda_1 + k\Lambda_1 + i(2\Lambda_1 - \Lambda_2) \mid 0 \leqslant i \leqslant m-1\}$；(g) $\tilde{w}$属于命题 3.30（2），且 $\lambda \in \Lambda^{\leqslant}_{\lambda}(\tilde{w})$ 或 $\lambda = 2k\Lambda_1 + m\Lambda_2$；(h) $\tilde{w}$属于命题 3.31（1），且 $\lambda \in \{(k+1)\Lambda_2 + i(2\Lambda_1 - \Lambda_2) \mid 0 \leqslant i \leqslant m\}$；(i) $\tilde{w}$属于命题 3.31（2），且 $\lambda \in \Lambda^{\leqslant}_{\lambda}(\tilde{w})$ 或 $\lambda = (2k+1)\Lambda_1 + m\Lambda_2$；(j) $\tilde{w}$或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$属于命题 3.32（1），其中 $\lambda \in \Lambda^{<}_{\lambda}(\tilde{w})$；(k) $\tilde{w}$或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$属于命题 3.32（2），其中 $\lambda \in \Lambda^{\leqslant}_{\lambda}(\tilde{w}) \cup \mathbb{O}^{(\tilde{w})}$；(l) $\tilde{w}$或 $\tau\tilde{w}\tau = t^{m\Lambda_2+n}(\Lambda_2-\Lambda_1)s_1\tau$，其中 $m,\ n \in \mathbb{N}_+$ 和 $\lambda \in \Lambda^{\leqslant}_{m\Lambda_2+n\Lambda_1}$；(m) $\tilde{w}$或 $\tau\tilde{w}\tau = t^{m\Lambda_2}s_1\tau$，其中 $m \in \mathbb{N}_+$ 和 $\lambda \in \Lambda^{\leqslant}_{m\Lambda_2} \cup \Lambda^{<}$，$1(m-1)\Lambda_2+2\Lambda_1 \cup \Lambda^{\leqslant}$，$2(m-1)\Lambda_2+\Lambda_{1\circ}$ 若 $X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset$，则 $\dim X_{\tilde{w}}(b) = \frac{1}{2}(\ell(\tilde{w}) + \ell(\mathbb{O}_{\lambda,\ \tau}) + \deg(f_{\tilde{w},\ \mathbb{O}_{\lambda},\ \tau})) - \langle \bar{\nu}_b,\quad 2\rho \rangle$.

(10) 若 b 对应于 $\mathbb{O}_{\lambda,\ \tau}$，其中 $\lambda = (m'+1)\Lambda_2 + n'\Lambda_2,\ m' \in \mathbb{N},\ n' \in \mathbb{N}_{+\circ}$ 那么 $X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset$ 当且仅当

(a) $\tilde{w} \in \mathbb{O}_{\lambda,\tau}$; (b) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 属于命题 3.27，且满足 $\lambda \in \lambda(\tilde{w})$; (c) $\tilde{w}$ 属于命题 3.28 (1)，且满足 $\lambda \in \{(k+1)\Lambda_1 + j(\Lambda_2 - \Lambda_1) \mid 0 \leqslant j \leqslant i\}$; (d) $\tilde{w}$ 属于命题 3.28 (2)，且满足 $\lambda \in \Lambda^{\leqslant}_{\lambda}(\tilde{w})$ 或 $\lambda = (k+1)\Lambda_2 + m\Lambda_1$; (e) $\tilde{w}$ 属于命题 3.29，且满足 $\lambda \in \Lambda^{\leqslant}_{\lambda}(\tilde{w})$; (f) $\tilde{w}$ 属于命题 3.30 (1)，且满足 $\lambda \in \{\Lambda_1 + k\Lambda_1 + i(2\Lambda_1 - \Lambda_2) \mid 0 \leqslant i \leqslant m-1\}$; (g) $\tilde{w}$ 属于命题 3.30 (2)，且满足 $\lambda \in \Lambda^{\leqslant}_{\lambda}(\tilde{w})$ 或 $\lambda = 2k\Lambda_1 + m\Lambda_2$; (h) $\tilde{w}$ 属于命题 3.31 (1)，且满足 $\lambda \in \{(k+1)\Lambda_2 + i(2\Lambda_1 - \Lambda_2) \mid 0 \leqslant i \leqslant m\}$; (i) $\tilde{w}$ 属于命题 3.31 (2)，且满足 $\lambda \in \Lambda^{\leqslant}_{\lambda}(\tilde{w})$ 或 $\lambda = (2k+1)\Lambda_1 + m\Lambda_2$; (j) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 属于命题 3.32 (1)，且满足 $\lambda \in \Lambda^{<}_{\lambda}(\tilde{w})$; (k) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 属于命题 3.32 (2)，且满足 $\lambda \in \Lambda^{\leqslant}_{\lambda}(\tilde{w}) \cup \mathbb{O}^{(\tilde{w})}$; (l) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau = t^{m\Lambda_2+n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1\tau$，其中 m, $n \in \mathbb{N}_+$ 和 $\lambda \in \Lambda^{\leqslant}_{m\Lambda_2+n\Lambda_1}$; (m) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau = t^{m\Lambda_2}s_1\tau$，其中 $m \in \mathbb{N}_+$ 和 $\lambda \in \Lambda^{\leqslant}_{m\Lambda_2} \cup \Lambda^{<}$,1 $_{(m-1)\Lambda_2+2\Lambda_1} \cup \Lambda^{\leqslant}$,2 $_{(m-1)\Lambda_2+\Lambda_1}$。若 $X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset$，则

$$\dim X_{\tilde{w}}(b) = \frac{1}{2}(\ell(\tilde{w}) + \ell(\mathbb{O}_{\lambda,\tau}) + \deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}_{\lambda,\tau}})) - \langle \bar{\nu}_b,\ 2\rho\rangle.$$

（11）若 b 与 $\mathbb{O}_{4k_0+2,\ \tau}$ 相对应，其中 $k_0 \in \mathbb{N}_\circ$ 则 $X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset$ 当且仅当 (a) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 满足命题 3.27 中的条件 $k_0 \leqslant n(\tilde{w})$; (b) $\tilde{w} \in \mathbb{O}_{4k_0+2,\tau}$; (c) $\tilde{w}$ 满足命题 3.28 中的条件 $k \neq k_0$ 和 $k_0 \leqslant n(\tilde{w})$; (d) $\tilde{w}$ 满足命题 3.29、命题 3.30 或命题 3.31 中的条件$k_0 \leqslant n(\tilde{w})$; (e) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 满足命题 3.32 (1) 中的条件 $k_0 \leqslant n-1$; (f) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 满足命题 3.32 (2) 中的条件 $k_0 \leqslant n(\tilde{w})$ 或 $\mathbb{O}_{4k_0+2,\tau} \in \mathbb{O}_{(\tilde{w})}$; (g) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau = t^{m\Lambda_2+n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1\tau$，其中 m, $n \in \mathbb{N}_+$ 和 $k_0 \leqslant m+n-1$; (h) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau = t^{m\Lambda_2}s_1\tau$，其中 $m \in \mathbb{N}_+$ 和 $k_0 \leqslant m-1$。若 $X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset$，则

$$\dim X_{\tilde{w}}(b) = \frac{1}{2}(\ell(\tilde{w}) + \ell(\mathbb{O}_{4k_0+2,\tau}) + \deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}_{4k_0+2,\tau}})) - \langle \bar{\nu}_b,\ 2\rho\rangle.$$

(12) 若 b 对应于 $\mathbb{O}'_{6k_0,\tau}$，其中 $k_0 \in \mathbb{N}_\circ$ 则 $X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset$ 当且仅当 (a) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 属于命题 3.27 或命题 3.28，且 $k_0 \leqslant n'(\tilde{w})$; (b) $\tilde{w}$ 属于命题 3.29，且 $k_0 \leqslant m-1$; (c) $\tilde{w} \in \mathbb{O}'_{6k_0,\tau}$; (d) $\tilde{w}$ 属于命题 3.30 (2)，且 $k \neq k_0$ 与 $k_0 \leqslant n'(\tilde{w})$; (e) $\tilde{w}$ 属于命题 3.31 (2)，且 $k_0 \leqslant m+k$; (f) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 属于命题 3.32 (1)，且 $k_0 \leqslant n'(\tilde{w})$; (g) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 属于命题 3.32 (2)，且 $k_0 \leqslant n'(\tilde{w})$ 或 $\mathbb{O}'_{6k_0,\tau} \in \mathbb{O}_{(\tilde{w})}$; (h) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau = t^{m\Lambda_2+n(\Lambda_2-\Lambda_1)}s_1\tau$，其中 m, $n \in \mathbb{N}_+$ 和 $k_0 \leqslant m + \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$; (i) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau = t^{m\Lambda_2}s_1\tau$，其中 $m \in \mathbb{N}_+$ 和 $k_0 \leqslant m-2$。

若 $X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset$，则

$$\dim X_{\tilde{w}}(b) = \frac{1}{2}(\ell(\tilde{w} + \ell(\mathbb{O}'_{6k_0,\tau}) + \deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}'_{6k_0,\tau}})) - \langle \bar{\nu}_b,\ 2\rho\rangle.$$

(13) 若 b 对应于$\mathbb{O}'_{6k_0+4,\ \tau}$，其中 $k \in \mathbb{N}$。那么 $X_{\tilde{w}}(b)$当且仅当 (a) $\tilde{w} \in \mathbb{O}_{(k_0+1)\Lambda_2,\tau}$ 或$\mathbb{O}'_{6k_0+4,\tau}$; (b) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 属于命题 3.27，使得 $k_0 \leqslant n''(\tilde{w})$; (c) $\tilde{w}$ 属于命题 3.28，其中 $k_0 \neq k$ 且 $k_0 \leqslant n''(\tilde{w})$; (d) $\tilde{w} \in \mathbb{O}_{4k_0+2,\tau}$，其中 $\ell(\tilde{w}) \geqslant 6k_0 + 4$; (e) $\tilde{w}$ 属于命题 3.29，其中 $k_0 \leqslant n''(\tilde{w})$，或$\mathbb{O}_{(k_0+1)\Lambda_2,\tau} \in \mathbb{O}(\tilde{w})$; (f) $\tilde{w}$ 属于命题 3.30 (2)，其中 $k_0 \leqslant n''(\tilde{w})$; (g) $\tilde{w}$ 属于命题 3.31 (2)，其中 $k_0 \neq k$ 且 $k_0 \leqslant m + k - 1$; (h) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 属于命题 3.32 (1)，其中 $k_0 \leqslant n''(\tilde{w})$; (i) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau^{-1}$ 属于命题 3.32 (2)，其中 $k_0 \leqslant n'(\tilde{w})$ 或$\mathbb{O}'_{6k_0+4,\tau} \in \mathbb{O}_{(\tilde{w})}$，或$\mathbb{O}_{(k_0+1)\Lambda_2,\tau} \in \mathbb{O}^{(\tilde{w})}$; (j) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau = t^{m\Lambda_2+n}(\Lambda_2-\Lambda_1)s_1\tau$，其中 $m,\ n \in \mathbb{N}_+$ 且$k_0 \leqslant m + \lfloor\frac{n}{2}\rfloor - 1$; (k) $\tilde{w}$ 或 $\tau\tilde{w}\tau = t^{m\Lambda_2}s_1\tau$，其中 $m \in \mathbb{N}_+$ 且 $k_0 \leqslant m$。若 $X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset$，则$\dim X_{\tilde{w}}(b) = \frac{1}{2}\max_{\mathbb{O}}(\ell(\tilde{w}) + \ell(\mathbb{O}) + \deg(f_{\tilde{w},\mathbb{O}})) - \langle \bar{\nu}_b,\ 2\rho\rangle$，其中 $\mathbb{O} \in \{\mathbb{O}'_{6k_0+4,\tau},\ \mathbb{O}_{(k_0+1)\Lambda_2}\}$。

4.2. G¨ortz-Haines-Kottwitz-Reuman 猜想。当 $G = Sp_4(L)$ 时，我们可以验证 G¨ortz-Haines-Kottwitz-Reuman 的一个猜想成立。

设 $G(L)$ 如 § 2 中所述。对于任意 $b \in G(L)$，令 J_b 为 b 的 σ-中心化子，即 $J_b = \{g \in G(L) | gb\sigma(g)^{-1} = b\}$。$b$ 的亏 defect 记为 def(b)，它等于 G 的 F-秩减去 J_b 的 F-秩。在 [GHKR10] 中提出了如下猜想：

猜想 4.2. 设 $b \in G(L)$，且 b' 是 $G(L)$ 中满足 $\kappa(b) = \kappa(b')$ 的基本元素。则对于长度充分大的 $\tilde{w} \in W$，$X_{\tilde{w}}(b) \neq \emptyset$ 当且仅当 $X_{\tilde{w}}(b') \neq \emptyset$。在这种情况下，

$$\dim X_{\tilde{w}}(b) = \dim X_{\tilde{w}}(b') - \langle \nu_b, \rho\rangle + \frac{1}{2}(\mathrm{def}(b') - \mathrm{def}(b)).$$

定理 4.3。猜想 4.2 对群 $\mathrm{Sp}_4(L)$成立。

证明。由§ 4.1 可直接得出。 □

5. Acknowledgement

作者谨此感谢 Xuhua He 教授一直以来的鼓励和许多有益的讨论。作者的部分研究工作得到了国家自然科学基金委员会（项目编号：11701473 和 12171397）、中央高校基本科研业务费（项目编号：2682019CX52）以及四川省“千人计划”的资助。

References

[Bo02] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras*,《数学原本》第4—6章，Springer-Verlag，柏林，2002 年。[BT84] F. Bruhat 和 J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local, II: schémas en groupes, existence d'une donnée radicielle valuée* 60 1984 5 184 ，高等科学研究所出版物《数学》，（）-。[GP93] M. Geck 和 G. Pfeiffer, *On the irreducible characters of Hecke algebras*, Adv. Math. 102 (1993) 79-94。[GHKR 10] ¨ *Affine Deligne-Lusztig varieties in* U. Gortz、T. *affine flag varieties* 146 5 2010 1339 1382 Haines、R. Kottwitz 和 D. Reuman, ,《Compos. Math.》（） （）-。

[GH10] U. G¨ortz 和 X. He, *Dimensions of affine Deligne-Lusztig varieties in affine flag varieties*, Doc. Math. 15 (2010) 1009-1028。[GHN15] U. G¨ortz、X. He 和 S. Nie
P-alcoves and nonemptiness of affine Deligne-Lusztig vari-eties, Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er. (4) 48 (2015) 647-665。[08] *On parahoric subgroups* [08] [10] *Minimal length elements of extended affine Weyl group* 1004 HR T. Haines 和 M. Rapoport, , PR 的附录 He X. He, , arXiv: .4040。[He14] X. He,
Geometric and homological properties of affine Deligne-Lusztig varieties, Ann. of Math. 179 (2014) 367-404。[He21] X. He, *Cordial elements and dimensions of affine Deligne-Lusztig varieties*, Forum of Mathematics, Pi, 第9卷（2021）e9 1-15。[HN14] X. He 和 S. Nie,
Minimal length elements of extended affine Weyl group, Compos. Math. 150 (11) (2014) 1903-1927。[HR17] X. He 和 M. Rapoport, *Stratifications in the reduction of Shimura varieties*, Manuscripta Math. 152 (2017), 第3-4期, 317–343。[Ko97] R. Kottwitz, *Isocrystals with additional structure II*, Compos. Math. 109 (3) (1997) 255-339。[MST 19] ´ ´ *Dimensions of affine Deligne-Lusztig varieties: E. a new approach via labeled folded alcove walks and root operators* Milicevic、P. Schwer 和 A. Thomas, , Mem. Amer. Math. Soc. 261 (2019), 第1260号。[PR08] G. Pappas 和 M. Rapoport, *Twisted loop groups and their affine flag varieties*, Adv. Math. 219 (2008) 118-198。[Ra05] M. Rapoport, *A guide to the reduction modulo p of Shimura varieties*, Ast´erisque 298 (2005) 271-381。[R02] D. Reuman,
Determining whether certain affine Deligne-Lusztig sets are nonempty, 芝加哥学位论文, 2002年, arXiv: math/0211434。[R04] D. Reuman,
Formulas for the dimensions of some affine Deligne-Lusztig varieties, Michigan Math. J. 52 (2004), 第2期, 435-451。[Y16] Z. Yang, *Class polynomials for some affine Hecke algebras*, J. Algebra 452 (2016) 502-548。

Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan, China
Email address: merciyang@home.swjtu.edu.cn