arXiv:2304.02105v1 [math.DG] 4 Apr 2023

有理齐性簇上的变形 Hermitian–Yang–Mills 方程

EDER M. CORREA

Abstract. 本文证明，在任意不变 K¨ahler 度量下，有理齐性簇上的变形 Hermitian–Yang–Mills（DHYM）方程总有解。特别地，我们用李理论描述了任意不变 K¨ahler 度量下每个闭不变 (1,1)-形式的拉格朗日相位。基于这一结果，我们利用相应复单李代数的 Cartan 矩阵，刻画了 DHYM 方程的所有超临界和超临界齐性解。此外，我们用李理论给出了有理齐性簇上全纯向量丛斜率的显式公式。利用该公式，我们通过将全纯向量丛限制到相应曲线锥的生成元上，得到了斜率半稳定性的新判据。我们还根据有理曲线定义的中心荷，给出了有理齐性簇上全纯向量丛斜率（半）稳定性的新刻画。作为主要结果的应用，我们描述了由 Wallach 旗流形 $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$定义的 Fano 三维簇上 DHYM 方程的所有超临界和超临界齐性解。此外，我们介绍了一种构造性方法，通过求解线性丢番图方程，在某些全纯向量丛上构造非平凡的 Hermitian-Einstein 度量$\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$。对于后一情形，我们明确描述了所有相关的 Hermitian–Yang–Mills 瞬子。我们还提出了一些关于交理论与数论之间相互作用的新见解。

1. Introduction

设 (X,ω) 是一个紧致连通的 K¨ahler 流形，满足 $\dim_{\mathbb{C}}(X) = n$，且$[\psi] \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$。受镜像对称启发， [JY17] 提出了以下问题:

问题 1.1。 是否存在一个光滑的 (1,1)-形式 $\chi \in [\psi]$，使得

$$\mathrm{Im}\big(\omega + \sqrt{-1}\chi\big)^n = \tan(\hat{\Theta})\mathrm{Re}\big(\omega + \sqrt{-1}\chi\big)^n, \tag{1.1}$$

其中 $\hat{\Theta}$ 是一个 S^1 值拓扑常数（“相位角”），依赖于 $[\omega], [\psi]$?

上述方程（方程 (1.1)）称为 变形 *Hermitian-Yang-Mills*（*dHYM*）方程。据 [Lin 22], 所述，该方程大约在同一时期由[MMMS00] 和 [LYZ00] 从不同角度发现。关于 dHYM 方程的物理起源及其与弦理论和镜像对称的关系，详见 [CXY18]。可以证明，方程 (1.1) 还可以用拉格朗日相位 [CJY20], 作等价表述；更准确地说，方程 (1.1) 等价于以下完全非线性椭圆方程

$$\Theta_\omega(\chi) := \sum_{j=1}^{n} \arctan(\lambda_j) = \hat{\Theta} \mod 2\pi, \tag{1.2}$$

其中 λ_1、……、λ_n 是 $\omega^{-1} \circ \chi$ 的特征值。在最后这个方程中， $\Theta_\omega(\chi)$ 称为 χ 关于 ω 的拉格朗日相位。拓扑常数 Θ 可通过对方程 (1.1) 积分得到，即它是复数

$$Z_{[\omega]} := \int_X \frac{(\omega + \sqrt{-1}\psi)^n}{n!}, \tag{1.3}$$

的辐角主值，该复数仅取决于类 $[\omega]$、$[\psi]$。因此，存在解的一个必要条件是 $Z_{[\omega]} \neq 0$。在 [JY17], 中，研究表明 DHYM 方程的解在相差一个常数的意义下唯一。根据方程 (1.2) 的表述，由于 $\Theta_\omega(\chi)$ 为实值，而 Θ 的取值属于 S^1，我们需要将 Θ 提升到实数域 R，以研究方程 (1.2)。此外，在超临界条件假设下，即提升后的角度 Θ 满足 $\Theta > (n-2)\frac{\pi}{2}$ 时，Collins–Jacob–Yau [Che21] 证明了若存在超临界 C-次解，则 DHYM 方程有解。此外，在 [Pin19], 中，针对若干相位角取值范围，在假设存在次解的条件下，也得到了 DHYM 方程的一些存在性结果。

正如 [CJY20、CY21、CS20], 所示，可以利用代数几何研究与 dHYM 方程解的存在性相关的问题。更准确地说，在问题 1.1 的设定下，给定一个维数为 $Y \subseteq X$ 的解析子簇 p，可以定义其中心荷

$$Z_Y([\psi]) := -\int_Y \mathrm{e}^{-\sqrt{-1}(\omega+\sqrt{-1}\psi)} = -\frac{(-\sqrt{-1})^p}{p!}\int_Y (\omega+\sqrt{-1}\psi)^p. \tag{1.4}$$

如果 $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 2$，那么已证明，在 [CJY20 中，命题 8.5] 表明，当且仅当对每条曲线 $C \subset X$，方程在 $[\psi] \in H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 中存在 dHYM 方程的解

$$\mathrm{Im}\left(\frac{Z_C([\psi])}{Z_X([\psi])}\right) > 0. \tag{1.5}$$

更一般地，我们有如下猜想。

猜想 1.2 (Collins-Jacob-Yau [CJY20])。在类 $[\psi]$ 中存在一个相位角为 $\hat{\Theta} \in \left((n-2)\frac{\pi}{2}, n\frac{\pi}{2}\right)$ 当且仅当

$$\mathrm{Im}\left(\frac{Z_Y([\psi])}{Z_X([\psi])}\right) > 0. \tag{1.6}$$

对于所有不可约解析子簇 $Y \subsetneq X_P$。

如 [CJY20], 所述，复数 $Z_Y(-)$与若干物理和数学理论中的稳定性条件所涉及的各种中心荷概念相似，例如 [Dou01b, Dou01a, Dou02] 以及 [Tho06]。特别地，当 $[\psi] = c_1(L)$ 且对某个 $L \in \mathrm{Pic}(X)$成立时，猜想 [CS20] 认为，在类 $[\psi]$ 中存在 dHYM 方程的解，应等价于线丛 L的 Bridgeland 稳定性 [Bri07]；关于 Bridgeland 稳定性的介绍，可参见 [MS17]。本文研究由有理齐性簇定义的射影流形上的 dHYM 方程。在这一情形下，我们证明，配备任意不变 K¨ahler 度量的有理齐性簇上的 dHYM 方程总有解。特别地，我们用李理论描述相对于任意不变 K¨ahler 度量的每个闭不变 (1,1)-形式的拉格朗日相位。基于这一描述，我们利用底层复单李代数对应的 Cartan 矩阵，刻画 dHYM 方程的所有超临界和超临界齐性解。此外，我们给出一个基于李理论的显式公式，用以计算有理齐性簇上全纯向量丛的斜率。利用该公式，我们通过将全纯向量丛限制到相应曲线锥的生成元上，导出斜率半稳定性的新判据。此外，我们还根据由有理曲线定义的中心荷，给出有理齐性簇上全纯向量丛斜率（半）稳定性的新刻画。作为主要结果的应用，我们描述由 Wallach 旗流形$\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$定义的 Fano 三维簇上 dHYM 方程的所有超临界和超临界齐性解。此外，我们介绍一种构造性方法，可利用线性丢番图方程的解，在$\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$上的全纯向量丛上构造非平凡的 Hermitian-Einstein 度量。

在最后这一情形下，我们明确描述所有相关的 Hermitian–Yang–Mills 瞬子。我们还提出了一些新见解，探讨交理论与数论之间的相互作用。

1.1. 主要结果。有理齐性簇可以表示为商 $X_P = G^{\mathbb{C}}/P$，其中 $G^{\mathbb{C}}$ 是一个李代数为 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathrm{Lie}(G^{\mathbb{C}})$ 的半单复代数群，而 P 是一个抛物李子群（Borel-Remmert [BR62]）。将 $G^{\mathbb{C}}$ 视为复解析空间，不失一般性，我们可以假设 $G^{\mathbb{C}}$ 是一个连通单连通复单李群。固定一个紧实形式 $G \subset G^{\mathbb{C}}$，并将$X_P = G/G \cap P$视为一个 G-空间，我们关注方程 (1.1) 的 G-不变解。固定一个 Cartan 子代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 和一个简单根系 $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$，在共轭意义下，$P \subset G^{\mathbb{C}}$ 完全由某些 $I \subset \Delta$确定，例如 [Akh95, §3.1]。此外，考虑相应的基本权 $\varpi_\alpha \in \mathfrak{h}^*, \alpha \in \Delta$，可得

$$\mathrm{Pic}(X_P) \cong H^{1,1}(X_P, \mathbb{Z}) \cong \Lambda_P := \bigoplus_{\alpha \in \Delta \setminus I} \mathbb{Z}\varpi_\alpha, \tag{1.7}$$

例如参见 [Sno89，定理 6。4]（或备注 2.19）。由上述同构，我们得到一个映射

$$[\omega] \in H^{1,1}(X_P, \mathbb{Z}) \mapsto \lambda([\omega]) \in \Lambda_P. \tag{1.8}$$

记 $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$ 为与 $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$相关联的根系，并考虑$\Phi_I^\pm := \Phi^\pm \backslash \langle I \rangle^\pm$，我们有以下结果。

定理 A。给定一个 K¨ahler 类 $[\omega] \in \mathcal{K}(X_P)$，则对每个 $[\psi] \in H^{1,1}(X_P, \mathbb{R})$，我们有

$$\hat{\Theta} := \mathrm{Arg} \int_{X_P} \frac{(\omega + \sqrt{-1}\psi)^n}{n!} = \sum_{\beta \in \Phi_I^+} \arctan\left(\frac{\langle \lambda([\psi]), \beta^\vee \rangle}{\langle \lambda([\omega]), \beta^\vee \rangle}\right) \mod 2\pi, \tag{1.9}$$

使得 $\lambda([\psi]) \ \lambda([\omega]) \in \Lambda_P \otimes \mathbb{R}$。特别地，固定唯一的 G-不变代表元 $\underline{\omega_0} \in [\omega]$ 后，存在 $\phi \in C^\infty(X_P)$，使得 $\chi_\phi := \psi + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi$ 满足变形的 Hermitian Yang-Mills 方程

$$\mathrm{Im}\big(\omega_0 + \sqrt{-1}\chi_\phi\big)^n = \tan(\hat{\Theta})\mathrm{Re}\big(\omega_0 + \sqrt{-1}\chi_\phi\big)^n. \tag{1.10}$$

我们注意到，公式 (1.9) 右端的和在具体情形下，可以通过 $\lambda([\psi]) \ \lambda([\omega]) \in \Lambda_P \otimes \mathbb{R}$ 关于基 $\{\varpi_\alpha \mid \alpha \in \Delta \backslash I\}$ 以及 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的 Cartan 矩阵的系数显式描述（例如 [Hum72]）。作为上述定理的推论，我们得到以下推论。

推论 A. 在前一定理的设定下，给定 $[\psi] \in H^{1,1}(X_P, \mathbb{R})$，考虑$\eta_\phi = \psi + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi$，对于每个 $\phi \in C^\infty(X_P)$，几乎校准的 $(1,1)$-形式空间

$$\mathcal{H} := \big\{\phi \in C^\infty(X_P) \ \big| \ \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\hat{\Theta}}(\omega_0 + \sqrt{-1}\eta_\phi)^n\big) > 0\big\}, \tag{1.11}$$

非空（$\mathcal{H} \neq \emptyset$）。特别地，我们有 $\hat{\Theta}([\psi]) \in (-n\frac{\pi}{2}, n\frac{\pi}{2})$ 对 $\hat{\Theta}$ 的唯一提升，其表达式为

$$\hat{\Theta}([\psi]) := \sum_{\beta \in \Phi_I^+} \arctan\left(\frac{\langle \lambda([\psi]), \beta^\vee \rangle}{\langle \lambda([\omega]), \beta^\vee \rangle}\right), \tag{1.12}$$

使得 $\lambda([\psi]) \ \lambda([\omega]) \in \Lambda_P \otimes \mathbb{R}$。

在上述设定中，给定 $[\psi] \in H^{1,1}(X_P, \mathbb{R})$，为简便起见，我们将相关的相位角 Θ 与其在式 (1.12) 中所述的唯一提升 $\Theta([\psi])$视为相同。式 (1.11) 中描述的空间 $\mathcal{H}$ 在镜像对称研究中发挥着重要作用[CY21]，它通过镜像对称与 Solomon 研究的正拉格朗日子流形（或几乎校准的拉格朗日子流形）空间相关 [Sol13，Sol14]。在 [CCL21]，中，研究表明 $\mathcal{H}$ 是一个

无限维黎曼流形，具有非正截面曲率；并且在超临界相位下（即 Θ 满足 $\Theta > (n-1)\frac{\pi}{2}$），它具有良定义的度量结构，其完备化是一个 CAT(0)测地度量空间。我们注意到，由于$\lambda([\psi])\ \lambda([\omega]) \in \Lambda_P \otimes \mathbb{R}$ 仅取决于所涉及的上同调类，因此，唯一提升的角度 $\Theta([\psi]) \in (-n\frac{\pi}{2}, n\frac{\pi}{2})$ 与类 $[\psi]$中唯一的 G-不变代表元的拉格朗日相位一致。受猜想 1.2 启发，我们证明如下结果。

定理 B. 对于每个不可约解析子簇 $Y \subset X_P$，定义

$$\Theta_Y := \operatorname{Arg} \int_Y (\omega + \sqrt{-1}\psi)^{\dim(Y)}, \tag{1.13}$$

使得 $[\omega] \in \mathcal{K}(X_P)$ 且 $[\psi] \in H^{1,1}(X_P, \mathbb{R})$。若

$$\sum_{\beta \in \Phi_I^+} \operatorname{arccot}\left(\frac{\langle \lambda([\psi]), \beta^\vee \rangle}{\langle \lambda([\omega]), \beta^\vee \rangle}\right) < \pi, \tag{1.14}$$

那么，对于每个真不可约解析子簇 $Y \subset X_P$，以下结论成立

$$\Theta_Y > \Theta_{X_P} - \big(n - \dim(Y)\big)\frac{\pi}{2}. \tag{1.15}$$

显然，式 (1.14) 等价于超临界条件，因此，式 (1.15) 给出的不等式是方程 (1.1) 在 X_P 上存在超临界解的必要条件。我们对定理 B 的证明针对齐性情形作了调整，并基于 [CJY20，引理 82]中的思想。由此，我们得到以下关于式 (1.12) 给出的唯一提升角的中心荷刻画。

推论 B. 在前一定理的条件下，$[\psi] \in H^{1,1}(X_P, \mathbb{R})$ 的唯一提升角 $\Theta \in (-n\frac{\pi}{2}, n\frac{\pi}{2})$ 由下式给出

$$\hat{\Theta} = \sum_{\beta \in \Phi_I^+} \Theta_{\mathbb{P}^1_\beta}, \tag{1.16}$$

使得 $\mathbb{P}^1_\beta = \exp(\mathfrak{g}_{-\beta})P \subset X_P$, $\forall \beta \in \Phi_I^+$。

上面的推论表明，与某个 $[\psi] \in H^{1,1}(X_P, \mathbb{R})$ 相关联的唯一提升角，可以完全用中心荷 $Z_{\mathbb{P}^1_\beta}([\psi])$, $\beta \in \Phi_I^+$ 来描述。请注意，

$$\Theta_{\mathbb{P}^1_\beta} = \operatorname{Arg}\big(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} Z_{\mathbb{P}^1_\beta}([\psi])\big) \mod 2\pi, \quad \forall \beta \in \Phi_I^+, \tag{1.17}$$

参见式 (1.4) 和式 (1.13)。在问题 1.1 的设定中，我们将注意力限制在 $[\psi] = c_1(\mathbf{E})$ 的情形。对于某个全纯向量丛 $\mathbf{E} \to X_P$，我们研究斜率（半）稳定性与由某些有理曲线定义的中心荷之间的关系。回顾一下，固定一个 K¨ahler 类 $\xi \in \mathcal{K}(X_P)$ 后，全纯向量丛 $\mathbf{E}$) 的斜率 $\mu_\xi(\mathbf{E})$，相对于 ξ 定义为

$$\mu_\xi(\mathbf{E}) := \frac{\int_{X_P} c_1(\mathbf{E}) \wedge \xi^{n-1}}{\operatorname{rank}(\mathbf{E})}. \tag{1.18}$$

根据上述内容，全纯向量丛 $\mathbf{E} \to X_P$ 若满足以下条件，则称其为 ξ-（半）稳定的（按 Mumford-Takemoto 的意义）：

$$\mu_\xi(\mathbf{E}) \gtrless \mu_\xi(\mathcal{F}), \tag{1.19}$$

对于每个子丛 $0 \neq \mathcal{F} \subsetneq \mathbf{E}$。为了用中心荷给出（半）稳定性的判据，我们首先证明以下结果。

定理 C. 设 $\mathbf{E} \to X_P$ 是一个秩为 $\mathrm{rank}(\mathbf{E}) = r$ 的全纯向量丛。那么，$\mathbf{E}$ 关于 K¨ahler 类 $\xi \in \mathcal{K}(X_P)$ 的斜率为

$$\mu_\xi(\mathbf{E}) = \frac{(n-1)!}{r}\left[\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\langle\lambda(\mathbf{E}),\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda(\xi),\beta^\vee\rangle}\right]\left[\prod_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\langle\lambda(\xi),\beta^\vee\rangle}{\langle\varrho^+,\beta^\vee\rangle}\right], \tag{1.20}$$

使得 $\lambda(\mathbf{E}) \in \Lambda_P$，且 $\lambda(\xi) \in \Lambda_P \otimes \mathbb{R}$。此外，若将 $\mathbf{E}$ 限制到曲线锥 $\mathrm{NE}(X_P)$ 的每个生成元 $[\mathbb{P}^1_\alpha]$, $\alpha \in \Delta\backslash I$ 上均为半稳定，则对于任意 K¨ahler 类 $\xi \in \mathcal{K}(X_P)$，$\mathbf{E}$ 均为 ξ-半稳定。

注意，$\lambda(\mathbf{E}) := \lambda(c_1(\mathbf{E})) \in \Lambda_P$，见方程 (1.8)，且$\varrho^+ = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\alpha$。所谓的斜率（半）稳定性限制定理在层的模空间理论中发挥着重要作用，例如参见 [MR82、MR 84], [Fle84], 和 [Lan04]。事实上，这类定理是将层的研究降至更低维度的有用工具，例如[HL10，定理 7.3。1]。除了给出有理齐性簇上全纯向量丛斜率的显式公式（用李理论表述）之外，上述结果还提供了一种新的斜率半稳定性判据：通过将全纯向量丛限制到其底层曲线锥的生成元上来判定。值得指出的是，方程 (1.20) 给出的表达式仅取决于某些交数，即：

$$\langle\lambda(\mathbf{E}),\beta^\vee\rangle = \langle c_1(\mathbf{E}),[\mathbb{P}^1_\beta]\rangle \quad\text{and}\quad \langle\lambda(\xi),\beta^\vee\rangle = \langle\xi,[\mathbb{P}^1_\beta]\rangle, \tag{1.21}$$

使得 $\mathbb{P}^1_\beta = \overline{\exp(\mathfrak{g}_{-\beta})P} \subset X_P, \forall\beta \in \Phi_I$。这一事实促使我们研究某些中心荷定义背后的交理论的若干方面。在此背景下，我们得到以下结果。

定理 D. </style>固定一个 -不变的 Kähler 度量 于 上，对于每个全纯向量丛 $\mathbf{E} \to X_P$ 以及每个不可约解析子簇 $Y \subset X_P$，定义

$$Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E},Y) := -\int_Y \mathrm{e}^{-\sqrt{-1}[\omega_0]}\mathrm{ch}(\mathbf{E}). \tag{1.22}$$

那么，以下结论成立：

(1) 在特殊情形下，若 $\mathbf{E} \in$ 属于皮卡群(X_P)且 $Y \in$ 属于$\mathrm{Div}(X_P)$，则有

$$Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E},Y) = -\sum_{\alpha\in\Phi_I^+}\left[\prod_{\beta\in\Phi_I^+\backslash\{\alpha\}}\left(\frac{\langle\lambda(\mathbf{E}),\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega_0]),\beta^\vee\rangle}\frac{\langle\lambda_Y,\alpha^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega_0]),\alpha^\vee\rangle} - \sqrt{-1}\frac{\langle\lambda_Y,\alpha^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega_0]),\alpha^\vee\rangle}\right)\right]V_0, \tag{1.23}$$

使得 $V_0 = \mathrm{Vol}(X_P,\omega_0)$，$\lambda(\mathbf{E})$ $\lambda_Y \in \Lambda_P$，且 $\lambda([\omega_0]) \in \Lambda_P \otimes \mathbb{R}$；

(2) 对于每个 $\mathbf{E} \in$ 属于皮卡群(X_P)，若 $c_1(\mathbf{E}) \neq 0$，则有

$$\frac{|Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E},X_P)|}{||\mathrm{ch}(\mathbf{E})||} > 0, \tag{1.24}$$

其中 $||\cdot||$ 是有限维向量空间 $H^{\mathrm{even}}(X_P, \mathbb{R})$ 上的任意范数；

(3) 对于每个全纯向量丛 $\mathbf{E} \to X_P$，定义

$$\hat{\mu}_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) := \sum_{\beta\in\Phi_I^+}\tan\left(\Theta_{\omega_0}(\mathbf{E},\mathbb{P}^1_\beta)\right), \tag{1.25}$$

使得

$$\Theta_{\omega_0}(\mathbf{E},\mathbb{P}^1_\beta) := \mathrm{Arg}\left(Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E},\mathbb{P}^1_\beta)\right) - \frac{\pi}{2}, \tag{1.26}$$

其中 $\mathbb{P}^1_\beta = \overline{\exp(\mathfrak{g}_{-\beta})P} \subset X_P, \forall\beta \in \Phi_I^+$。那么，$\mathbf{E}$ 是 $[\omega_0]$-(半)稳定的，当且仅当，

$$\hat{\mu}_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) \gtrless \hat{\mu}_{[\omega_0]}(\mathcal{F}), \tag{1.27}$$

对于每个子丛 $0 \neq \mathcal{F} \subsetneq \mathbf{E}$；

（4）给定 $\mathbf{E} \in$ 皮卡群(X_P)，如果

$$\frac{\pi(n-2)}{2} < \Theta_{\omega_0}(\mathbf{E}) := \sum_{\beta\in\Phi_I^+} \Theta_{\omega_0}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta) < \frac{n\pi}{2}, \tag{1.28}$$

使得 $\lambda(\mathbf{E}) \in \Lambda_P$ 且 $\lambda([\omega_0]) \in \Lambda_P \otimes \mathbb{R}$，那么

$$\mathrm{Im}\left(\frac{Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, Y)}{Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, X_P)}\right) > 0, \tag{1.29}$$

对于每个不可约解析子簇 $Y \subsetneq X_P$；

(5) 给定一个全纯向量丛 $\mathbf{E} \to X_P$，如果

$$\mathrm{Arg}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta)\big) \geq \mathrm{Arg}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathcal{F}, \mathbb{P}^1_\beta)\big), \tag{1.30}$$

对于每个子丛 $0 \neq \mathcal{F} \subsetneq \mathbf{E}$ 以及每个 $\beta \in \Phi_I^+$，那么$\mathbf{E}$ 是 $[\omega_0]$-(半)稳定的。

由上述定理的第 (1) 项，我们得到由以下配对定义的中心荷的一般公式：Y，$\mathbf{E}$），其中 $Y \in \mathrm{Div}(X_P)$，且 $\mathbf{E} \in \mathrm{Pic}(X_P$，用李理论表示。鉴于 [Dua03], 中给出的结果，似乎可以为由舒伯特簇和线丛定义的所有中心荷得到显式公式。第 (2) 项给出的结果直接由定理 A 得出。特别是，它表明对于每个 $\mathbf{E} \in \mathrm{Pic}(X_P$，的$(\mathbf{E})$ 齐性代表元使泛函达到最小值

$$\chi \in c_1(\mathbf{E}) \mapsto \int_{X_P} r_{\omega_0}(\chi)\frac{\omega_0^n}{n!}, \tag{1.31}$$

其中 $r_{\omega_0}(\chi) = |\det\left(\mathbb{1} + \sqrt{-1}(\omega_0^{-1} \circ \chi)\right)|, \forall \chi \in c_1(\mathbf{E})$，例如参见 [JY17]。值得一提的是，式 (1.24) 正是 Bridgeland 稳定性条件定义中所要求的支撑性质，参见 [BMT11, §2.2], [MS17, §5.2]。由上述定理的第 (3) 项，我们通过某些由有理曲线定义的中心荷的论证，得到有理齐性簇上全纯向量丛（半）稳定性的一种新刻画。为证明第 (3) 项，我们证明

$$\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = -(n-1)!\left[\sum_{\beta\in\Phi_I^+} \tan\left(\Theta_{\omega_0}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta)\right)\right]\mathrm{Vol}(X_P, \omega_0). \tag{1.32}$$

由上述表达式可知，有理齐性簇上全纯向量丛的 $[\omega_0]$-斜率可以通过复平面中直线斜率（倾角）的标准概念得到。式 (1.25) 右端的表达式也可以写成如下形式

$$\hat{\mu}_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = -\sum_{\beta\in\Phi_I^+} \frac{\mathrm{Re}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta)\big)}{\mathrm{Im}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta)\big)}. \tag{1.33}$$

我们注意到，上面对 $\hat{\mu}_{[\omega_0]}(\mathbf{E})$ 的描述类似于 Z-斜率（或广义斜率）的概念，该概念用于定义阿贝尔范畴上的稳定性条件，参见 [MS17，§4]。事实上，考虑相干层的格罗滕迪克群 $K_0(X_P)$，我们有

$$Z_{[\omega_0]}(-, \mathbb{P}^1_\beta)\colon K_0(X_P) \to \mathbb{C}, \tag{1.34}$$

定义了一个加性同态，对于每个 $\beta \in \Phi_I^+$，见注 3.8。第 (4) 项给出的结果是由式 (1.15) 中得到的不等式推得的，参见猜想 1.2。值得指出的是，式 (1.28) 等价于 $c_1(\mathbf{E})$ 中 dHYM 方程唯一解所满足的超临界条件。因此，式 (1.29) 中所述的不等式是 $c_1(\mathbf{E})$ 中方程 (1.1) 的解为超临界解的必要条件。第 (5) 项的证明直接由第 (3) 项得出。通过式 (1.30) 中给出的不等式得到的 $[\omega_0]$-（半）稳定性判据，类似于稳定性这一概念

在 Bridgeland 稳定性的框架下，针对给定稳定性函数 [Bri07], [MS17，§4]根据 Kobayashi-Hitchin 对应 [Don85，Don87],[UY86], 我们得到上述定理第 (5) 项的如下微分几何对应物。

推论 C。给定 G-不变的 K¨ahler 度量 ω_0 on X_P 和一个简单全纯向量丛 $\mathbf{E} \to X_P$，如果

$$\operatorname{Arg}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta)\big) > \operatorname{Arg}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathcal{F}, \mathbb{P}^1_\beta)\big), \tag{1.35}$$

对于每个子丛 $0 \neq \mathcal{F} \subsetneq \mathbf{E}$ 以及每个 $\beta \in \Phi_I^+$，那么 $\mathbf{E}$ 存在一个 Hermitian 度量 H，使其满足 Hermitian-Yang-Mills 方程

$$\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_0} F(H) = c\mathbb{1}_{\mathbf{E}}. \tag{1.36}$$

此外，结合 [Kob14，命题 7。11] 与前一定理的第 (5) 项，我们得到以下结果。

推论 D。设$\mathbf{E}$ 和$\mathbf{F}$ 是 $[\omega_0]$-半稳定全纯向量丛，定义在 X_P 上，其中 X_P 配备某个 G-不变的 K¨ahler 度量 ω_0 。如果

$$\operatorname{Arg}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta)\big) > \operatorname{Arg}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathbf{F}, \mathbb{P}^1_\beta)\big), \tag{1.37}$$

对于每个 $\beta \in \Phi_I^+$，则 $\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F}) = 0$。

上述结果类似于三角范畴上的稳定性条件定义中所要求的 Schur 性质，参见 [Bri07，定义 1.1，第 (c) 项]。作为主要结果的应用，除其他明确计算外，我们还分类了 $(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})\ \omega_0)$ 上 DHYM 方程的所有超临界解和超临界解，使得$\omega_0 \in c_1(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}))$。特别地，我们给出了一个新例子，说明 Collins–Jacob–Yau 猜想（猜想 1.2）中“较容易”的方向仅在超临界情形下成立（参见 [Che21，注 1.10]）。此外，我们提供了一种构造性方法，可由线性丢番图方程的解，得到定义在$\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$ 上某些全纯向量丛的非平凡 Hermitian-Einstein 度量。附录 A 证明了这一结果背后的一般思路。此外，在附录 A 中，我们还提出了一些新见解，探讨交理论与数论之间的相互作用。作为其他结果之一，我们完整描述了霍奇-黎曼双线性形式

$$\mathcal{Q}_{\omega_0} \colon H^2(X_P, \mathbb{Z}) \times H^2(X_P, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}, \quad \mathcal{Q}_{\omega_0}(a, b) := \int_{X_P} a \wedge b \wedge [\omega_0]^{n-2}, \tag{1.38}$$

由一个积分 K¨ahler 类 $[\omega_0] \in \mathcal{K}(X_P)$（例如 [Voi07], [PS08]），用与其所依托的复单李代数相关联的 Cartan 矩阵来表示。从这一描述出发，固定一个积分 K¨ahler 类 $[\omega_0] \in \mathcal{K}(X_P)$，并考虑

$$\mathcal{A}_{[\omega_0]}(n) := \left\{ m \in \mathbb{Z}_{>0} \;\middle|\; \begin{array}{c} 1 \le m \le n, \\ \exists\ \mathbf{E} \in \mathrm{Pic}(X_P),\ \text{s.t. } \mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = m. \end{array} \right\}, \tag{1.39}$$

对于每个 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们得到如下结果。

定理 E. 对于每个积分 K¨ahler 类 $[\omega_0] \in \mathcal{K}(X_P)$，我们有

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\big|\mathcal{A}_{[\omega_0]}(n)\big|}{n} = \frac{1}{\tau([\omega_0])}, \tag{1.40}$$

使得 $\tau([\omega_0]) := \gcd\big\{ \deg_{\omega_0}(\mathscr{O}_\alpha(1)) \;\big|\; \alpha \in \Delta \backslash I \big\}$，其中 $\mathscr{O}_\alpha(1)$、$\alpha \in \Delta\backslash I$ 是皮卡群 $\mathrm{Pic}(X_P)$ 的生成元。

上述结果表明，该子集

$$\mathcal{A}_{[\omega_0]} = \big\{ m \in \mathbb{Z}_{>0} \;\big|\; \mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = m,\ \text{for some } \mathbf{E} \in \mathrm{Pic}(X_P) \big\}, \tag{1.41}$$

具有渐近密度（亦称自然密度）

$$d(\mathcal{A}_{[\omega_0]}) := \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\mathcal{A}_{[\omega_0]} \cap [1,n]\right|}{n} = \frac{1}{\tau([\omega_0])}. \tag{1.42}$$

在某种适当的意义下， $d(\mathcal{A}_{[\omega_0]})$ 衡量属于$\mathcal{A}_{[\omega_0]}$的自然数所占的比例，也就是说，衡量可实现为 $[\omega_0]$-斜率的自然数所占的比例，其中该斜率来自 X_P上的某个全纯线丛¨的某个积分凯勒类 $[\omega_0] \in \mathcal{K}(X_P)$。关于自然密度的更多细节，我们建议参阅 [Nat08]及其中的参考文献。此外，作为附录 A 中给出的 $\mathcal{Q}_{\omega_0}$ 描述的一个应用，我们证明以下定理。

定理 F. 给定一个积分凯勒类 ¨ahler class $[\omega_0] \in \mathcal{K}(X_P)$，则有

$$K_0(X_P) \cong SK_0(X_P) \oplus \mathrm{Pic}^0_{\omega_0}(X_P) \oplus \tau([\omega_0])\mathbb{Z}, \tag{1.43}$$

使得

(1) $SK_0(X_P) := \ker\left(\det\colon K_0(X_P) \to \text{皮卡群}(X_P)\right)$,
(2) $\text{皮卡群}^0_{\omega_0}(X_P) := \{\mathbf{E} \in \text{皮卡群}(X_P) \mid \deg_{\omega_0}(\mathbf{E}) = 0\}$,
(3) $\tau([\omega_0]) := \gcd\{\deg_{\omega_0}(\mathscr{O}_\alpha(1)) \mid \alpha \in \Delta\backslash I\}$,

其中， $\mathscr{O}_\alpha(1)$、 $\alpha \in \Delta\backslash I$是 $\mathrm{Pic}(X_P)$ 的生成元。此外， $\mathrm{Pic}^0_{\omega_0}(X_P)$ 的生成元由霍奇-黎曼双线性形式 $\mathcal{Q}_{\omega_0}$ 完全确定。

上述结果表明，每个整 K¨ahler 类 $[\omega_0] \in \mathcal{K}(X_P)$ 都会在格罗滕迪克群 $K_0(X_P)$ 上诱导一个分解。考虑 $X_P = \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$，我们通过显式计算来说明定理 E 和定理 F 中给出的结果。

致谢。E. M. Correa 得到了 FAEPEX/坎皮纳斯州立大学资助（项目编号 2528/22）以及圣保罗研究基金会（FAPESP）资助（项目编号 2022/10429-3）的部分支持。

2. Generalities on flag varieties

本节回顾旗簇的一些基本事实。关于本节所述主题的更多细节，建议参阅 [Akh95], [LB 18], [Hum75], [BR62]。

2.1. 旗簇的皮卡群。 设 $G^{\mathbb{C}}$ 是一个连通、单连通的复李群，其李代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$是单李代数。固定 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 和简单根系 $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$后，我们有 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的如下分解：

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+,$$

其中 $\mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha\in\Phi^-} \mathfrak{g}_\alpha$ 和 $\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$，这里我们用 $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$ 表示与简单根系 $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$相对应的根系。记 κ 为 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$的 Cartan-Killing 型。由此，对于每个 $\alpha \in \Phi^+$，我们都有 $h_\alpha \in \mathfrak{h}$，使得 $\alpha = \kappa(\cdot, h_\alpha)$，并且可以选取 $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ 和 $y_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$，使得 $[x_\alpha, y_{-\alpha}] = h_\alpha$。根据这些数据，我们可以通过设定 $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$来定义一个波莱尔子代数[1] 。

Remark 2.1. 在上述设定中， $\forall \phi \in \mathfrak{h}^*$，我们也将 $\langle \phi, \alpha\rangle = \phi(h_\alpha)$ 记为 $\forall \alpha \in \Phi^+$。

现在我们考虑以下结果（例如参见 [LB18], [Hum75]）：

定理 2.2. 任意两个博雷尔子群都是共轭的。

根据上述结果，对于给定的博雷尔子群 $B \subset G^{\mathbb{C}}$，在共轭意义下，我们总可以假设 $B = \exp(\mathfrak{b})$。在这种情况下，对于给定的抛物李子群[2] $P \subset G^{\mathbb{C}}$，不失一般性，我们可以假设 that

$$P = P_I, \text{ for some } I \subset \Delta,$$

其中 $P_I \subset G^{\mathbb{C}}$ 是积分李子代数的抛物子群

[1] $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$的一个极大可解子代数。[2]即包含某个博雷尔子群的李子群。

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}(I)^-, \text{ with } \mathfrak{n}(I)^- = \sum_{\alpha \in \langle I \rangle^-} \mathfrak{g}_\alpha.$$

根据定义，容易证明 $P_I = N_{G^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{p}_I)$，其中 $N_{G^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{p}_I)$ 是 $G^{\mathbb{C}}$ 中 $\mathfrak{p}_I \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$的正规化子，参见例如 [Akh95，§3。1]在下文中，我们将考虑以下李子群的基本链，这将对我们有所帮助

$$T^{\mathbb{C}} \subset B \subset P \subset G^{\mathbb{C}}.$$

For 上述李子群链中的每个元素都有如下 свойства。 g

char表征：

- $T^{\mathbb{C}} = \exp(\mathfrak{h})$;（复环面）
- $B = N^+ T^{\mathbb{C}}$，其中 $N^+ = \exp(\mathfrak{n}^+)$; （博雷尔子群）
- $P = P_I = N_{G^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{p}_I)$，其中某个 $I \subset \Delta \subset \mathfrak{h}^*$。（抛物子群）

现在回顾一下 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 表示论的一些基本事实。关于这一主题的详细阐述可见 [Hum72]。对于每个 $\alpha \in \Phi$，我们定义

$$\alpha^\vee := \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha.$$

$(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h})$ 的基本权 $\{\varpi_\alpha \mid \alpha \in \Delta\} \subset \mathfrak{h}^*$ 定义为满足以下条件：$\langle \varpi_\alpha, \beta^\vee \rangle = \delta_{\alpha\beta}$, $\forall \alpha, \beta \in \Delta$。记

$$\Lambda^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z}_{\geq 0} \varpi_\alpha,$$

$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的整主权集合。设 V 是一个任意的有限维 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-模。考虑其权空间分解

$$V = \bigoplus_{\mu \in \Phi(V)} V_\mu,$$

使得 $V_\mu = \{v \in V \mid h \cdot v = \mu(h)v, \ \forall h \in \mathfrak{h}\} \neq \{0\}$, $\forall \mu \in \Phi(V) \subset \mathfrak{h}^*$，由此得到以下定义。

定义 2.3。 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-模 V 中的最高权向量（权为 λ）是一个非零向量 $v_\lambda^+ \in V_\lambda$，满足

$$x \cdot v_\lambda^+ = 0, \qquad (\forall x \in \mathfrak{n}^+).$$

与最高权向量相关联的权 $\lambda \in \Phi(V)$ 称为 V 的最高权。

由上述内容，我们考虑以下标准结果。

定理 2.4. 每个有限维不可约 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-模 V 都含有一个最高权向量 v_λ^+。此外，除非相差一个非零标量，v_λ^+ 是 V唯一的最高权向量。

定理 2.5. 设 V 和 W 是具有最高权 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 的有限维不可约 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-模。那么，$V$ 和 W 同构。

备注 2.6。 我们用 $V(\lambda)$ 表示一个具有最高权 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 的有限维不可约 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-模。

定理 2.7. 在上述设定下，以下结论成立：

(1) 若 V 是一个最高权为 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 的有限维不可约 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-模，则 $\lambda \in \Lambda^+$。*(2)* 若 $\lambda \in \Lambda^+$，则存在一个有限维不可约 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-模 V，使得 $V = V(\lambda)$。

由上述定理可知，映射 $\lambda \mapsto V(\lambda)$ 在 Λ^+ 与有限维不可约 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-模的同构类之间诱导出一一对应。

备注 2.8。 在下文中，以下事实也将很有用：

(i) 对所有 $\lambda \in \Lambda^+$，我们有 $V(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})\cdot v_\lambda^+$，其中 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ 是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的包络代数；(ii) 基本表示由 $V(\varpi_\alpha)$、$\alpha \in \Delta$ 定义；(iii) 对所有 $\lambda \in \Lambda^+$，有以下关于诱导不可约表示的等价关系

$$\varrho\colon G^{\mathbb{C}} \to \mathrm{GL}(V(\lambda)) \iff \varrho_*\colon \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{gl}(V(\lambda)),$$

使得 $\varrho(\exp(x)) = \exp(\varrho_* x)$，$\forall x \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$，注意 $G^{\mathbb{C}} = \langle \exp(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})\rangle$。

给定一个表示 $\varrho\colon G^{\mathbb{C}} \to \mathrm{GL}(V(\lambda))$，为简便起见，我们将 $\varrho(g)v = gv$ 记作，对于所有 $g \in G^{\mathbb{C}}$ 以及所有 $v \in V(\lambda)$。设 $G \subset G^{\mathbb{C}}$ 是 $G^{\mathbb{C}}$ 的一个紧实形式。给定一个复旗簇 $X_P = G^{\mathbb{C}}/P$，将 X_P 视为齐性 G-空间，即 $X_P = G/G\cap P$，以下定理使我们能够通过表示论中的元素描述 X_P 上所有 G-不变的 K¨ahler 结构。

定理 2.9 (Azad-Biswas, [AB03])。 设 $\omega \in \Omega^{1,1}(X_P)^G$ 是一个闭的不变实$(1,1)$-形式，则有

$$\pi^*\omega = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi,$$

其中 $\pi\colon G^{\mathbb{C}} \to X_P$是自然投影，而 $\varphi\colon G^{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ 由下式给出

$$\varphi(g) = \sum_{\alpha\in\Delta\setminus I} c_\alpha \log\left(||gv_{\varpi_\alpha}^+||\right), \qquad (\forall g \in G^{\mathbb{C}})$$

其中 $c_\alpha \in \mathbb{R}$，$\forall \alpha \in \Delta\setminus I$。反过来，每个上述函数 φ 都定义了一个闭的不变实 $(1,1)$-形式 $\omega_\varphi \in \Omega^{1,1}(X_P)^G$。此外，当且仅当 $c_\alpha > 0$、$\forall \alpha \in \Delta\setminus I$时，$\omega_\varphi$ 定义了 G-不变的 ***K¨ahler*** 形式 X_P。

注 2.10。 值得指出的是，上述定理中考虑的范数 $||\cdot||$是由 $V(\varpi_\alpha)$ 上某个固定的 G-不变内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha$ 诱导的。

注记 2.11. 定理 2.9 的一个重要推论是，它使我们能够以相当具体的方式描述任意齐性 K¨ahler 势函数（对于任意齐性 K¨ahler 度量）。关于显式计算的若干例子，我们建议参阅 [CG19], [Cor19].

借助上述定理，我们可以描述 $H^2(X_P,\mathbb{Z})$ 中每个整类的唯一 G-不变代表元。事实上，考虑相应的 P-主丛$P \hookrightarrow G^{\mathbb{C}} \to X_P$。通过选取一个平凡化开覆盖 $X_P = \bigcup_{i\in J} U_i$，我们可以用 ˇ$C$ech 上同调表示为

$$G^{\mathbb{C}} = \left\{(U_i)_{i\in J}, \psi_{ij}\colon U_i\cap U_j \to P\right\}.$$

给定 $\varpi_\alpha \in \Lambda^+$，我们考虑诱导特征 $\vartheta_{\varpi_\alpha} \in \mathrm{Hom}(T^{\mathbb{C}},\mathbb{C}^\times)$，使得 $(\mathrm{d}\vartheta_{\varpi_\alpha})_e = \varpi_\alpha$。由同态 $\vartheta_{\varpi_\alpha}\colon P \to \mathbb{C}^\times$ 可赋予 $\mathbb{C}$ 一个 P-空间结构，使得 $pz = \vartheta_{\varpi_\alpha}(p)^{-1}z$, $\forall p \in P$，且 $\forall z \in \mathbb{C}$。将该 P-空间记作 $\mathbb{C}_{-\varpi_\alpha}$，我们可以构造相应的全纯线丛 $\mathscr{O}_\alpha(1) = G^{\mathbb{C}} \times_P \mathbb{C}_{-\varpi_\alpha}$，它可用 ˇ Cech 上同调表示为

$$\mathscr{O}_\alpha(1) = \left\{(U_i)_{i\in J}, \vartheta_{\varpi_\alpha}^{-1}\circ\psi_{ij}\colon U_i\cap U_j \to \mathbb{C}^\times\right\}, \tag{2.1}$$

也就是说，$\mathscr{O}_\alpha(1) = \{g_{ij}\} \in \check{H}^1(X_P,\mathcal{O}_{X_P}^*)$，使得 $g_{ij} = \vartheta_{\varpi_\alpha}^{-1}\circ\psi_{ij}$, $\forall i,j \in J$。

注记 2.12。 我们注意到，如果存在一个抛物李子群 $P \subset G^{\mathbb{C}}$，使得$P = P_I$，对某个 $I \subset \Delta$，则分解

$$P_I = [P_I, P_I]T(\Delta\setminus I)^{\mathbb{C}}, \quad \text{such that} \quad T(\Delta\setminus I)^{\mathbb{C}} = \exp\Big\{\sum_{\alpha\in\Delta\setminus I} a_\alpha h_\alpha \;\Big|\; a_\alpha \in \mathbb{C}\Big\}, \tag{2.2}$$

例如 [Akh95, 命题 8], 表明 $\mathrm{Hom}(P, \mathbb{C}^\times) = \mathrm{Hom}(T(\Delta\backslash I)^{\mathbb{C}}, \mathbb{C}^\times)$。因此，若取 $\varpi_\alpha \in \Lambda^+$，使得 $\alpha \in I$，则可得 $\mathscr{O}_\alpha(1) = X_P \times \mathbb{C}$，即，相应的全纯线丛 $\mathscr{O}_\alpha(1)$ 是平凡的。

注记 2.13。本文中我们将使用以下记号

$$\mathscr{O}_\alpha(k) := \mathscr{O}_\alpha(1)^{\otimes k}, \tag{2.3}$$

对每个 $k \in \mathbb{Z}$ 以及每个 $\alpha \in \Delta\backslash I$。

给定 $\mathscr{O}_\alpha(1) \in \mathrm{Pic}(X_P)$，使得 $\alpha \in \Delta\backslash I$，如上所述，若考虑一个同时将 $P \hookrightarrow G^{\mathbb{C}} \to X_P$ 和 $\mathscr{O}_\alpha(1) \to X_P$ 平凡化的开覆盖 $X_P = \bigcup_{i\in J} U_i$，并取一组局部截面 $(s_i)_{i\in J}$，使得 $s_i \colon U_i \to G^{\mathbb{C}}$，则可定义 $q_i \colon U_i \to \mathbb{R}^+$，使得

$$q_i := \mathrm{e}^{-2\pi(\varphi_{\varpi_\alpha}\circ s_i)} = \frac{1}{||s_i v^+_{\varpi_\alpha}||^2}, \tag{2.4}$$

对每个 $i \in J$。由于 $s_j = s_i\psi_{ij}$ 在 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ 上，且对每个 $p \in P$ 和每个 $\alpha \in \Delta\backslash I$，有 $pv^+_{\varpi_\alpha} = \vartheta_{\varpi_\alpha}(p)v^+_{\varpi_\alpha}$，函数族 $(q_i)_{i\in J}$ 在 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ 上满足 $q_j = |\vartheta^{-1}_{\varpi_\alpha} \circ \psi_{ij}|^2 q_i$。因此，我们得到函数族 $(q_i)_{i\in J}$，它在交叠处 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ 满足以下关系

$$q_j = |g_{ij}|^2 q_i, \tag{2.5}$$

使得 $g_{ij} = \vartheta^{-1}_{\varpi_\alpha} \circ \psi_{ij}, \forall i, \ j \in J$。由此，我们可以在 $\mathscr{O}_\alpha(1)$ 上定义一个 Hermitian 结构 $\mathbf{h}$：在每个平凡化 f_i 上取 $\mathscr{O}_\alpha(1) \to U_i \times \mathbb{C}$ 由下式定义的度量

$$\mathbf{h}(f_i^{-1}(x, v), f_i^{-1}(x, w)) = q_i(x)v\overline{w}, \tag{2.6}$$

对于每个 $(x, \ v)$，$(x, \ w) \in U_i \times \mathbb{C}$。上述 Hermitian 度量诱导出一个 Chern 联络 $\nabla_{\mathrm{loc}} = \mathrm{d} + \partial\log\mathbf{h}$，其曲率 F_∇ 满足（局部地）

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_\nabla \overset{\mathrm{loc}}{=} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\left(\left|\left|s_i v^+_{\varpi_\alpha}\right|\right|^2\right). \tag{2.7}$$

因此，考虑闭的 G-不变 $(1, \ 1)$-形式 $\mathbf{\Omega}_\alpha \in \Omega^{1,1}(X_P)^G$，它满足 $\pi^*\mathbf{\Omega}_\alpha = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi_{\varpi_\alpha}$，其中 $\pi \colon G^{\mathbb{C}} \to G^{\mathbb{C}}/\overline{P} = X_P$，且 $\varphi_{\varpi_\alpha}(g) = \frac{1}{2\pi}\log||gv^+_{\varpi_\alpha}||^2, \forall g \in G^{\mathbb{C}}$，我们有

$$\mathbf{\Omega}_\alpha|_{U_i} = (\pi \circ s_i)^*\mathbf{\Omega}_\alpha = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_\nabla\Big|_{U_i}, \tag{2.8}$$

即，$c_1(\mathscr{O}_\alpha(1)) = [\mathbf{\Omega}_\alpha], \forall\alpha \in \Delta\backslash I$。

注记 2.14. 下文中，给定 $I \subset \Delta$，我们记作 $\Phi^\pm_I := \Phi^\pm\backslash\langle I\rangle^\pm$。

注记 2.15. 为了进行一些局部计算，我们考虑开集 $U^-(P) \subset X_P$，它由 X_P 中的“对偶”大胞腔定义。该开集是 $x_0 = eP \in X_P$ 的一个特殊坐标邻域 $U^-(P) \subset X_P$，定义如下

$$U^-(P) = B^-x_0 = R_u(P_I)^-x_0 \subset X_P, \tag{2.9}$$

其中 $B^- = \exp(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-)$，并且

$$R_u(P_I)^- = \prod_{\alpha\in\Phi^+_I} N^-_\alpha, \quad \text{(opposite unipotent radical)}$$

其中 $N^-_\alpha = \exp(\mathfrak{g}_{-\alpha}), \ \forall\alpha \in \Phi^+_I$，例如 [LR08, §3],[Akh95, §3.1]。值得一提的是，对偶大胞腔在 X_P 中定义了一个可缩开稠密子集，因此，任何向量丛（主丛）在该开集上的限制都是平凡的。

下面的引理是本文后续论述中将要发展的思想的基础。

引理 2.16. 考虑 $\mathbb{P}^1_\beta = \exp(\mathfrak{g}_{-\beta})\overline{x_0 \subset X_P}$，使得 $\beta \in \Phi_I^+$。那么，

$$\int_{\mathbb{P}^1_\beta} \mathbf{\Omega}_\alpha = \langle \varpi_\alpha, \beta^\vee \rangle, \ \forall \alpha \in \Delta \backslash I. \tag{2.10}$$

证明。根据定义，我们有 $\mathbb{P}^1_\beta = N^-_\beta \overline{x_0}, \forall \beta \in \Phi_I^+$，因此

$$\int_{\mathbb{P}^1_\beta} \mathbf{\Omega}_\alpha = \int_{N^-_\beta x_0} \mathbf{\Omega}_\alpha.$$

考虑局部截面 $s_U \colon U^-(P) \to G^{\mathbb{C}}$，使得 $s_U(gP) = g, \forall gP \in U^-(P)$，以及参数化 $u_\beta \colon \mathbb{C} \to N^-_\beta x_0$，使得

$$u_{-\beta}(z) = \phi_\beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \tag{2.11}$$

其中 ϕ_β 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 与对应于李子代数 $\mathfrak{g}_\beta \oplus [\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_{-\beta}] \oplus \mathfrak{g}_{-\beta}$ 的李子群之间的自然李群同构，即

$$\phi_{\beta *} \colon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto e_\beta, \quad \phi_{\beta *} \colon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto f_{-\beta}, \quad \phi_{\beta *} \colon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \frac{2}{\langle \beta, \beta \rangle} h_\beta, \tag{2.12}$$

使得 $e_\beta \in \mathfrak{g}_\beta, f_{-\beta} \in \mathfrak{g}_{-\beta}$ 和 $[e_\beta, f_{-\beta}] = \frac{2}{\langle \beta, \beta \rangle} h_\beta$。由上可知，由于 $N^-_\beta x_0 \subset U^-(P)$，我们有

$$\int_{N^-_\beta x_0} \mathbf{\Omega}_\alpha = \int_{\mathbb{C}} u^*_{-\beta}(\mathbf{\Omega}_\alpha|_{U^-(P)}) = \int_{\mathbb{C}} u^*_{-\beta} \circ (\pi \circ s_U)^* \mathbf{\Omega}_\alpha = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial\overline{\partial} \log ||u_{-\beta}(z) v^+_{\varpi_\alpha}||^2. \tag{2.13}$$

由 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的岩泽分解，我们有

$$u_{-\beta}(z) = \phi_\beta(k) \phi_\beta \begin{pmatrix} (1+|z|^2)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (1+|z|^2)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \phi_\beta \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

使得 $k \in \mathrm{SU}(2)$，因此 $\phi_\beta(k) \in G$。由于 $||\cdot||$ 是由 $V(\varpi_\alpha)$ 上某个 G-不变内积导出的，并且 $\mathfrak{n}^+ \cdot v^+_{\varpi_\alpha} = \{0\}$，我们有

$$\int_{\mathbb{P}^1_\beta} \mathbf{\Omega}_\alpha = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial\overline{\partial} \log \left|\left| (\vartheta_{\varpi_\alpha} \circ \phi_\beta) \begin{pmatrix} (1+|z|^2)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (1+|z|^2)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \right|\right|^2. \tag{2.15}$$

注意到 $(\vartheta_{\varpi_\alpha} \circ \phi_\beta)|_{T^1_{\mathbb{C}}}$ 是复环面 $T^1_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的一个特征，使得

$$T^1_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \ \middle| \ a \in \mathbb{C}^\times \right\}, \tag{2.16}$$

由此可得。

$$(\vartheta_{\varpi_\alpha} \circ \phi_\beta) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = a^{(\mathrm{d}\vartheta_{\varpi_\alpha})_e(\phi_{\beta *} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right))} = a^{\langle \varpi_\alpha, \beta^\vee \rangle}, \quad \forall a \in \mathbb{C}^\times. \tag{2.17}$$

因此，我们有

$$\int_{\mathbb{P}^1_\beta} \mathbf{\Omega}_\alpha = \frac{\sqrt{-1}\langle \varpi_\alpha, \beta^\vee \rangle}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial\overline{\partial} \log(1+|z|^2) = \frac{\sqrt{-1}\langle \varpi_\alpha, \beta^\vee \rangle}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}}{(1+|z|^2)^2}. \tag{2.18}$$

考虑 $\mathbb{C}$ 上的极坐标（r, θ），我们得出

$$\int_{\mathbb{P}^1_\beta} \mathbf{\Omega}_\alpha = \frac{\langle \varpi_\alpha, \beta^\vee \rangle}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta}{(1+r^2)^2} = \langle \varpi_\alpha, \beta^\vee \rangle \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \langle \varpi_\alpha, \beta^\vee \rangle. \tag{2.19}$$

□

由上述思路可得以下结果。

命题 2.17. 设 X_P 是与某个抛物李子群 $P = P_I$相关联的复旗簇。那么，我们有

$$\mathrm{Pic}(X_P) = H^{1,1}(X_P, \mathbb{Z}) = H^2(X_P, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{\alpha\in\Delta\setminus I} \mathbb{Z}[\mathbf{\Omega}_\alpha]. \tag{2.20}$$

证明. 为了介绍一些想法和记号，我们简述证明。式 (2.20) 右端的最后一个等式由以下事实得出:

(i) $\pi_2(X_P) \cong \pi_1(T(\Delta\setminus I)^{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}^{|\Delta\setminus I|}$，其中 $T(\Delta\setminus I)^{\mathbb{C}}$ 如注 2.12 所述；(ii) 由于 X_P是单连通的，因此可得 $H_2(X_P, \mathbb{Z}) \cong \pi_2(X_P)$（赫urewicz 定理）；(iii) 取（舒伯特）曲线 $\mathbb{P}^1_\beta \hookrightarrow X_P$，使得

$$\mathbb{P}^1_\alpha = \overline{\exp(\mathfrak{g}_{-\beta})x_0} \subset X_P, \tag{2.21}$$

对所有 $\beta \in \Delta\setminus I$，其中 $x_0 = eP \in X_P$，由引理 2.16 可得

$$\left\langle c_1(\mathscr{O}_\alpha(1)), [\mathbb{P}^1_\beta]\right\rangle = \int_{\mathbb{P}^1_\beta} \mathbf{\Omega}_\alpha = \langle \varpi_\alpha, \beta^\vee\rangle = \delta_{\alpha\beta}, \tag{2.22}$$

对每个 α，$\beta \in \Delta\setminus I$。因此，我们得到

$$\pi_2(X_P) = \bigoplus_{\alpha\in\Delta\setminus I} \mathbb{Z}[\mathbb{P}^1_\alpha], \quad \text{and} \quad H^2(X_P, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{\alpha\in\Delta\setminus I} \mathbb{Z}c_1(\mathscr{O}_\alpha(1)).$$

由于 $c_1(\mathscr{O}_\alpha(1)) \in H^{1,1}(X_P, \mathbb{Z})\ \forall \alpha \in \Delta\setminus I$，可知 $H^{1,1}(X_P, \mathbb{Z}) = H^2(X_P, \mathbb{Z})$。为了完成证明，由 Lefschetz (1,1) 类定理 [Huy05], 以及 $\mathrm{rk}(\mathrm{Pic}^0(X_P)) = 0$这一事实，我们得到 $\mathrm{Pic}(X_P) = H^{1,1}(X_P, \mathbb{Z})$。□

R备注 2.18。 结合上述结果与引理 2.16，我们得到如下

$$[\mathbb{P}^1_\beta] = \sum_{\alpha\in\Delta\setminus I} \langle \varpi_\alpha, \beta^\vee\rangle [\mathbb{P}^1_\alpha] \quad (\forall \beta \in \Phi^+_I). \tag{2.23}$$

备注 2.19。 在上述设定中，我们将 $P = P_I$ 的权视为

$$\Lambda_P := \bigoplus_{\alpha\in\Delta\setminus I} \mathbb{Z}\varpi_\alpha.$$

由此，前面的结果给出 $\Lambda_P \cong \mathrm{Hom}(P, \mathbb{C}^\times) \cong \mathrm{Pic}(X_P)$，使得

(1) $\lambda = \sum_{\alpha\in\Delta\setminus I} k_\alpha\varpi_\alpha \mapsto \prod_{\alpha\in\Delta\setminus I} \vartheta_{\varpi_\alpha}^{k_\alpha} \mapsto \bigotimes_{\alpha\in\Delta\setminus I} \mathscr{O}_\alpha(k_\alpha)$;

(2) $\mathbf{E} \mapsto \vartheta_{\mathbf{E}} := \prod_{\alpha\in\Delta\setminus I} \vartheta_{\varpi_\alpha}^{\langle c_1(\mathbf{L}), [\mathbb{P}^1_\alpha]\rangle} \mapsto \lambda(\mathbf{E}) := \sum_{\alpha\in\Delta\setminus I} \langle c_1(\mathbf{E}), [\mathbb{P}^1_\alpha]\rangle \varpi_\alpha$.

因此，$\forall \mathbf{E} \in \mathrm{Pic}(X_P)$，我们有 $\lambda(\mathbf{E}) \in \Lambda_P$。更一般地，对于 $\forall \xi \in H^{1,1}(X_P, \mathbb{R})$，我们有$\lambda(\xi) \in \Lambda_P \otimes \mathbb{R}$，使得

$$\lambda(\xi) := \sum_{\alpha\in\Delta\setminus I} \langle \xi, [\mathbb{P}^1_\alpha]\rangle \varpi_\alpha. \tag{2.24}$$

由上可知，对于每个全纯向量丛 $\mathbf{E} \to X_P$，我们定义 $\lambda(\mathbf{E}) \in \Lambda_P$，使得

$$\lambda(\mathbf{E}) := \sum_{\alpha\in\Delta\setminus I} \langle c_1(\mathbf{E}), [\mathbb{P}^1_\alpha]\rangle \varpi_\alpha, \tag{2.25}$$

其中 $c_1(\mathbf{E}) = c_1(\bigwedge^r \mathbf{E})$，使得 $r = \text{秩}(\mathbf{E})$。

注 2.20（关于 X_P 上的调和 2-形式）。给定任意 G-不变黎曼度量 g 于X_P上，记 $\mathscr{H}^2(X_P, g)$ 为关于 X_P的实调和 2-形式空间g，并记 $\mathscr{I}^{1,1}_G(X_P)$ 为闭的不变实 $(1,1)$-形式空间。结合命题 2.17 的结果与 [Tak78，引理 3.1]，，我们得到

$$\mathscr{I}^{1,1}_G(X_P) = \mathscr{H}^2(X_P, g). \tag{2.26}$$

因此，定理 2.9 中描述的闭合 G-不变实 $(1,1)$-形式，相对于 X_P 上任意 G-不变黎曼度量都是调和的。

注 2.21（ X_P 的 K¨ahler 锥）。由式 (2.20) 和定理 2.9 可知，复旗簇 X_P 的 K¨ahler 锥可明确表示为

$$\mathcal{K}(X_P) = \bigoplus_{\alpha\in\Delta\setminus I} \mathbb{R}^+[\mathbf{\Omega}_\alpha]. \tag{2.27}$$

注 2.22（ X_P 的曲线锥）。值得注意的是，旗簇 X_P 的曲线锥 NE(X_P) 由有理曲线 $[\mathbb{P}^1_\alpha] \in \pi_2(X_P)$ $\alpha \in \Delta\setminus I$生成，参见例如 [Tim11，§18。3]及其中的参考文献。

命题 2.23。设 X_P 是一个旗簇， X_P 上有一个 G-不变的 K¨ahler 度量。那么，对于每个闭合的 G-不变实 $(1,1)$-形式 ψ，自同态 $\omega_0^{-1}\circ\psi$ 的特征值为

$$\mathbf{q}_\beta(\omega_0^{-1}\circ\psi) = \frac{\langle\lambda([\psi]), \beta^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega_0]), \beta^\vee\rangle}, \quad \beta \in \Phi_I^+. \tag{2.28}$$

证明。 给定一个闭的 G-不变实 $(1,1)$-形式 $\omega \in \Omega^{1,1}(X_P)^G$，由定理 2.9 可知，存在 $\omega = \omega_\varphi$，使得

$$\varphi(g) = \sum_{\alpha\in\Delta\setminus I} c_\alpha \log\big(||g v^+_{\varpi_\alpha}||\big), \qquad (\forall g \in G^{\mathbb{C}})$$

其中 $c_\alpha \in \mathbb{R}$， $\forall \alpha \in \Delta\setminus I$。令 $\mathcal{H}_\varphi$ 为由 ω_φ 在全纯切丛 $T^{1,0}X_P$上诱导的 Hermitian 形式，即

$$\mathcal{H}_\varphi(Y, Y) := -\sqrt{-1}\omega_\varphi(Y, \overline{Y}),$$

对所有 $Y \in T^{1,0}X_P$。考虑 X_P 上的底层典范复结构 J_0，直接计算可得

$$\omega_\varphi(v, J_0 v) = \mathcal{H}_\varphi\big(\tfrac{1}{2}(v - \sqrt{-1}J_0 v), \tfrac{1}{2}(v - \sqrt{-1}J_0 v)\big),$$

对所有 $\forall v \in TX_P$。考虑由对偶大胞腔定义的 $x_0 \in X_P$ 的坐标邻域 $U^-(P) \subset X_P$（见式 (2.9)），我们得到 $T^{1,0}_{x_0}X_P$ 的一个适当的基，即 $Y^*_\beta = \frac{\partial}{\partial z}|_{z=0}\exp(zy-\beta)x_0$, $\beta \in \Phi_I^+$。向量 Y^*_β, $\beta \in \Phi_I^+$ 相对于任意 $(T^{\mathbb{C}} \cap G)$-不变 Hermitian 形式都是正交的。此外，我们有

$$\mathcal{H}_\varphi(Y^*_\beta, Y^*_\beta) = \sum_{\alpha\in\Delta\setminus I} \frac{c_\alpha}{2}\langle\varpi_\alpha, \beta^\vee\rangle, \tag{2.29}$$

对任意 $\beta \in \Phi_I^+$，例如参见 [AB03]。由此，考虑相应的对偶基θ_β， $\beta \in \Phi_I^+$ 在 $x_0 \in X_P$ 处，我们有

$$\omega_\varphi = \sum_{\beta\in\Phi_I^+} \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\sum_{\alpha\in\Delta\setminus I} \frac{c_\alpha}{2}\langle\varpi_\alpha, \beta^\vee\rangle\right)\theta_\beta \wedge \overline{\theta_\beta}. \tag{2.30}$$

另一方面，由命题 2.20 可直接计算得

$$\omega_\varphi = \sum_{\alpha\in\Delta\setminus I} \pi c_\alpha \mathbf{\Omega}_\alpha, \tag{2.31}$$

使得 $c_\alpha = \frac{\langle [\omega_\varphi], [\mathbb{P}^1_\alpha]\rangle}{\pi}, \forall \alpha \in \Delta\backslash I$。结合上述描述，我们得出，与 ω_φ 在 $x_0 \in X_P$ 处相关联的自同态的特征值为

$$\mathbf{q}_\beta(\omega_\varphi) = -\sum_{\alpha\in\Delta\backslash I} \frac{\langle [\omega_\varphi], [\mathbb{P}^1_\alpha]\rangle}{4\pi\sqrt{-1}} \langle \varpi_\alpha, \beta^\vee\rangle = -\frac{\langle \lambda([\omega_\varphi]), \beta^\vee\rangle}{4\pi\sqrt{-1}}, \tag{2.32}$$

对每个 $\beta \in \Phi_I^+$，使得 $\lambda([\omega_\varphi]) \in \Lambda_P \otimes \mathbb{R}$（见方程 (2.24)）。由于 ω_φ 是 G-不变的，因此自同态 $\omega_\varphi\colon T^{1,0}X_P \to T^{1,0}X_P$ 的特征值为常数。因此，给定一个 G-不变的 Kähler 度量 ω_0，对于每个闭的 G-不变实 (1,1)-形式 ψ，自同态 $\omega_0^{-1}\circ\psi\colon T^{1,0}X_P \to T^{1,0}X_P$ 的特征值为

$$\mathbf{q}_\beta(\omega_0^{-1}\circ\psi) = \frac{\mathbf{q}_\beta(\psi)}{\mathbf{q}_\beta(\omega_0)} = \frac{\langle \lambda([\psi]), \beta^\vee\rangle}{\langle \lambda([\omega_0]), \beta^\vee\rangle}, \tag{2.33}$$

对每个 $\beta \in \Phi_I^+$，由此得证。 □

注 2.24。 在上一命题的情形下，由于 $n\psi \wedge \omega_0^{n-1} = \Lambda_{\omega_0}(\psi)\omega_0^n$，使得 $n = \dim_{\mathbb{C}}(X_P)$，且 $\Lambda_{\omega_0}(\psi) = \mathrm{tr}(\omega_0^{-1}\circ\psi)$，因此

$$\Lambda_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}_\alpha) = \sum_{\beta\in\Phi_I^+} \frac{\langle \varpi_\alpha, \beta^\vee\rangle}{\langle \lambda([\omega_0]), \beta^\vee\rangle}, \tag{2.34}$$

对于每个 $\alpha \in \Delta\backslash I$。特别地，对于每个 $\mathbf{E} \in$ 皮卡群(X_P)，我们都有一个 Hermitian 结构$\mathbf{h}$，使得 Chern 联络 $\nabla \overset{\mathrm{loc}}{=} \mathrm{d} + \partial\log(\mathbf{h})$ 的曲率 F_∇ 满足

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Lambda_{\omega_0}(F_\nabla) = \sum_{\beta\in\Phi_I^+} \frac{\langle \lambda(\mathbf{E}), \beta^\vee\rangle}{\langle \lambda([\omega_0]), \beta^\vee\rangle}. \tag{2.35}$$

由此可知，∇ 是一个 Hermitian-Yang-Mills（HYM）联络。注意到

$$c_1(\mathbf{E}) = \sum_{\alpha\in\Delta\backslash I} \langle \lambda(\mathbf{E}), \alpha^\vee\rangle [\mathbf{\Omega}_\alpha], \tag{2.36}$$

对于每个 $\mathbf{E} \in$ 皮卡群(X_P)

注记 2.25。 在命题 2.23 的证明所处的情形下，若我们考虑

$$\zeta_\beta := \sqrt{\frac{\langle \lambda([\omega_0]), \beta^\vee\rangle}{2\pi}}\theta_\beta, \quad \beta \in \Phi_I^+, \tag{2.37}$$

由先前的结果，我们得到如下描述

$$\omega_0 = \sum_{\beta\in\Phi_I^+} \frac{\sqrt{-1}}{2}\zeta_\beta \wedge \overline{\zeta_\beta} \quad \text{and} \quad \psi = \sum_{\beta\in\Phi_I^+} \frac{\sqrt{-1}}{2}\mathbf{q}_\beta(\omega_0^{-1}\circ\psi)\zeta_\beta \wedge \overline{\zeta_\beta}, \tag{2.38}$$

对于每个闭的 G-不变实 (1，1)-形式 $\psi \in \Omega^{1,1}(X_P)$。

2.2. 旗簇的第一陈类。本小节将回顾一些关于旗簇上 G-不变 Kähler 度量的 Ricci 形式的基本事实。设X_P是与某个抛物李子群 $P = P_I \subset G^{\mathbb{C}}$ 相关联的复旗簇。考虑如下恒等对应 $T^{1,0}_{x_0}X_P \cong \mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$，使得

$$\mathfrak{m} = \sum_{\alpha\in\Phi_I^-} \mathfrak{g}_\alpha,$$

我们可以将 $T^{1,0}X_P$实现为一个全纯向量丛，它与 P- 主丛 $P \hookrightarrow G^{\mathbb{C}} \to X_P$相关联，由下式给出

$$T^{1,0}X_P = \Big\{(U_i)_{i\in J}, \underline{\mathrm{Ad}}\circ\psi_{ij}\colon U_i\cap U_j \to \mathrm{GL}(\mathfrak{m})\Big\},$$

其中 $\mathrm{Ad}\colon P \to \mathrm{GL}(\mathfrak{m})$ 是各向同性表示。由此，我们得到

$$\mathbf{K}_{X_P}^{-1} = \det\left(T^{1,0}X_P\right) = \left\{(U_i)_{i\in J}, \det(\mathrm{Ad}\circ\psi_{ij})\colon U_i\cap U_j \to \mathbb{C}^\times\right\}. \tag{2.39}$$

由于 $P = [P,P]T(\Delta\backslash I)^{\mathbb{C}}$，关于 $\det\circ\mathrm{Ad} \in \mathrm{Hom}(T(\Delta\backslash I)^{\mathbb{C}}, \mathbb{C}^\times)$，我们有

$$\det \mathrm{Ad}(\exp(\mathbf{t})) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(\mathbf{t})|_{\mathfrak{m}})} = \mathrm{e}^{-\langle\delta_P,\mathbf{t}\rangle}, \tag{2.40}$$

$\forall \mathbf{t} \in$ 李代数$(T(\Delta\backslash I)^{\mathbb{C}})$，使得 $\delta_P = \sum_{\alpha\in\Phi_I^+}\alpha$。记 $\vartheta_{\delta_P}^{-1} = \det\circ\mathrm{Ad}$，可得

$$\vartheta_{\delta_P} = \prod_{\alpha\in\Delta\backslash I} \vartheta_{\varpi_\alpha}^{\langle\delta_P,\alpha^\vee\rangle} \Longrightarrow \mathbf{K}_{X_P}^{-1} = \bigotimes_{\alpha\in\Delta\backslash I} \mathscr{O}_\alpha(\ell_\alpha), \tag{2.41}$$

使得 $\ell_\alpha = \langle\delta_P,\alpha^\vee\rangle, \forall\alpha \in \Delta\backslash I$。注意，$\lambda(\mathbf{K}_{X_P}^{-1}) = \delta_P$，参见公式 (2.25)。如果我们考虑由 $\rho_0 \in \Omega^{1,1}(X_P)^G$ 描述的不变 Kähler 度量 ¨，则

$$\rho_0 = \sum_{\alpha\in\Delta\backslash I} 2\pi\langle\delta_P,\alpha^\vee\rangle\mathbf{\Omega}_\alpha, \tag{2.42}$$

由此可得。

$$c_1(X_P) = \left[\frac{\rho_0}{2\pi}\right]. \tag{2.43}$$

由 G-不变代表元的唯一性，对于 $c_1(X_P)$，我们有

$$\mathrm{Ric}(\rho_0) = \rho_0,$$

也就是说，$\rho_0 \in \Omega^{1,1}(X_P)^G$ 定义了一个 G-ivariant K¨ahler-Einstein 度量于 X_P（参见 [Mat72]）。

注记2.26。给定 G不变的 K¨ahler 度量 ω 于 X_P，我们有 $\mathrm{Ric}(\omega) = \rho_0$。因此，光滑函数 $\frac{\det(\omega)}{\det(\rho_0)}$ 为常数。由此得到

$$\mathrm{Vol}(X_P,\omega) = \frac{1}{n!}\int_{X_P}\omega^n = \frac{\det(\rho_0^{-1}\circ\omega)}{n!}\int_{X_P}\rho_0^n. \tag{2.44}$$

由于 $\det(\rho_0^{-1}\circ\omega) = \frac{1}{(2\pi)^n}\prod_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\langle\lambda([\omega]\ \beta^\vee\rangle)}{\langle\delta_P,\beta^\vee\rangle}$ 且 $\frac{1}{n!}\int_{X_P}c_1(X_P)^n = \prod_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\langle\delta_P,\beta^\vee\rangle}{\langle\varrho^+,\beta^\vee\rangle}$，我们得出[3]

$$\mathrm{Vol}(X_P,\omega) = \prod_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\langle\lambda([\omega]),\beta^\vee\rangle}{\langle\varrho^+,\beta^\vee\rangle}, \tag{2.45}$$

其中 $\varrho^+ = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\alpha$。结合上述公式与注 2.24 中提出的思路，我们得到全纯向量丛 $\mathbf{E} \to X_P$ 关于 X_P 上某个 G-不变 K¨ahler 度量 ω 的次数的如下表达式：

$$\deg_\omega(\mathbf{E}) = \int_{X_P} c_1(\mathbf{E})\wedge[\omega]^{n-1} = (n-1)!\left[\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\langle\lambda(\mathbf{E}),\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega]),\beta^\vee\rangle}\right]\left[\prod_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\langle\lambda([\omega]),\beta^\vee\rangle}{\langle\varrho^+,\beta^\vee\rangle}\right], \tag{2.46}$$

使得 $\lambda(\mathbf{E}) \in \Lambda_P$，且 $\lambda([\omega]) \in \Lambda_P\otimes\mathbb{R}$。值得指出的是，据作者所知，上文给出的复旗簇上全纯向量丛次数的显式公式在文献中尚属首次。更多细节及进一步结果，请参见定理 3.6 的证明。

[3]参见 [AB03]。

2.3. **舒伯特循环与因子。** 本小节旨在回顾一些关于舒伯特循环及其与因子和线丛之间关系的众所周知的一般事实。本小节所述事实的详细内容可参见 [BGG73], [FW01], [Bri 05], [Pop74] 另见 [Tim11,§17 和 §18]。

沿用前几节的记号，对于每个 $\alpha \in \Phi^+$，考虑根反射 $r_\alpha\colon\ \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$，其定义为

$$r_\alpha(\phi) = \phi - \langle \phi, h_\alpha^\vee \rangle \alpha, \qquad \forall \phi \in \mathfrak{h}^*. \tag{2.47}$$

由上文可知，与根系 Φ 相关联的魏尔群定义为

$$\mathscr{W} = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle.$$

在 $\mathscr{W} \cong N_{G^{\mathbb{C}}}(T^{\mathbb{C}})/T^{\mathbb{C}}$ 的对应下，略去记号上的区别，对于任意 $w \in \mathscr{W}$，我们仍用 $w \in G^{\mathbb{C}}$ 表示其在 $G^{\mathbb{C}}$ 中的一个代表元。给定一个抛物子群 $P = P_I \subset G^{\mathbb{C}}$，我们用 $\mathscr{W}_P$ 表示由反射 r_α、$\alpha \in I$ 生成的 $\mathscr{W}$ 的子群，并用 $\mathscr{W}^P$ 表示商群 $\mathscr{W}/\mathscr{W}_P$。此外，我们将 $\mathscr{W}^P$ 与 $\mathscr{W}$ 中最短长度代表元的集合等同。考虑 B-轨道 $Bwx_0 \subset X_P$（布鲁哈特胞腔），对于每个 $w \in \mathscr{W}^P$，我们有 X_P 的胞腔分解：

$$X_P = \coprod_{w \in \mathscr{W}^P} Bwx_0, \quad \text{(Bruhat decomposition)} \tag{2.48}$$

在上述分解中，对于每个 $w \in \mathscr{W}^P$，都有 $Bwx_0 \cong \mathbb{C}^{\ell(w)}$，其中 $\ell(w)$ 是 $w \in \mathscr{W}^P$ 的长度[4]。舒伯特簇由上述胞腔的闭包定义；我们将其记为 $X_P(w) = \overline{Bwx_0}, \forall w \in \mathscr{W}^P$。注意，$\mathbb{P}^1_\alpha = X_P(r_\alpha)$，$\forall \alpha \in \Delta \backslash I$（参见公式 (2.21)）。类似地，我们令 $Y_P(w) = B^- wx_0$ 表示与 $w \in \mathscr{W}^P$ 相关的对偶舒伯特簇；它是一个余维为 $\ell(w)$ 的簇，并记 $w_0 \in \mathscr{W}$ 为长度最大的元素，则对于所有 $w \in \mathscr{W}^P$，有 $Y_P(w) = w_0 X_P(w_0 w)$。为简便起见，对于所有 $w \in \mathscr{W}^P$，我们记 $w^\vee := w_0 w$。X_P 的不可约 B-稳定因子是余维为 1 的舒伯特簇（舒伯特除子）。我们将其记为

$$D_\alpha := X_P(r_\alpha^\vee) = w_0 Y_P(r_\alpha), \qquad \forall \alpha \in \Delta \backslash I. \tag{2.49}$$

考虑分别由舒伯特簇和反舒伯特簇所诱导的同调循环，可得】【。

$$[X_P(w)] \in H_{2\ell(w)}(X_P, \mathbb{Z}) \qquad \text{and} \qquad [Y_P(w)] = [X_P(w^\vee)] \in H_{2n-2\ell(w)}(X_P, \mathbb{Z}),$$

$\forall w \in \mathscr{W}^P$。由上述内容，我们得到以下众所周知的事实：

(i) $H_\bullet(X_P, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{w \in \mathscr{W}^P} \mathbb{Z}[X_P(w)]$; (ii) 如果 $w,\ u \in \mathscr{W}^P$，使得 $\ell(w) = \ell(u)$，那么 $[Y_P(w)] \cdot [X_P(u)] = \delta_{wu}$; (iii) 考虑 $[Y_P(w)] \in \mathrm{Hom}(H_{2\ell(w)}(X_P, \mathbb{Z}); \mathbb{Z})$，$\forall w \in \mathscr{W}^P$，我们有

$$H^\bullet(X_P, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{w \in \mathscr{W}^P} \mathbb{Z}[Y_P(w)]; \tag{2.50}$$

(iv) 因子群 $\mathrm{Div}(X_P) = H^0(X_P, \mathcal{M}^*_{X_P}/\mathcal{O}^*_{X_P})$ 由舒伯特因子自由生成；(v) 在映射 $\mathcal{O}$: $\mathrm{Div}(X_P) \to \mathrm{Pic}(X_P)$，$D \mapsto \mathcal{O}(D)$ 下，我们有 $\mathcal{O}(D_\alpha) = \mathscr{O}_\alpha(1), \forall \alpha \in \Delta \backslash I$；

[4] $\ell(w)$ 表示 w 作为若干简单反射的乘积的一个约化（即最短）分解的长度，例如 [Hum72]。

(vi) 考虑因子类群[5] $\mathrm{Cl}(X_P) = \mathrm{Div}(X_P)/\sim$，可得

$$\mathrm{Cl}(X_P) = \bigoplus_{\alpha\in\Delta\setminus I} \mathbb{Z}[D_\alpha]. \tag{2.51}$$

注记 2.27。由上可知，给定 $[D]\in\mathrm{Cl}(X_P)$，我们有 $D\sim\sum_{\alpha\in\Delta\setminus I}(D\cdot\mathbb{P}^1_\alpha)D_\alpha$，其中 $(D\cdot\mathbb{P}^1_\alpha) := [D]\cdot[\mathbb{P}^1_\alpha], \forall\alpha\in\Delta\setminus I$。因此，我们得到一个群同构 $\mathrm{Hom}(P,\mathbb{C}^\times)\cong\mathrm{Cl}(X_P)$，使得

$$\vartheta\mapsto[D_\vartheta] := \sum_{\alpha\in\Delta\setminus I}\langle\vartheta,\alpha^\vee\rangle[D_\alpha], \qquad [D]\mapsto\vartheta_D := \prod_{\alpha\in\Delta\setminus I}\vartheta_{\varpi_\alpha}^{(D\cdot\mathbb{P}^1_\alpha)}, \tag{2.52}$$

for 所有 $\vartheta\in\mathrm{Hom}(P,\mathbb{C}^\times)$，以及对所有 $[D]\in\mathrm{Cl}(X_P)$，其中 $\langle\vartheta,\alpha^\vee\rangle := \langle(\mathrm{d}\vartheta)_e,\alpha^\vee\rangle, \forall\alpha\in\Delta\setminus I$.

注记 2.28。与全纯线丛的情形类似，可以为每个除子类 $[D]\in\mathrm{Cl}(X_P)$ 赋予一个权 $\lambda_D := \lambda(\mathcal{O}(D))\in\Lambda_P$。由此，我们得到关于某个 G-不变 K¨ahler 度量 ω 在 X_P上的除子 $D\in\mathrm{Div}(X_P)$ 的次数的如下表达式：

$$\deg_\omega(D) = \int_D\omega^{n-1} = (n-1)!\left[\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\langle\lambda_D,\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega]),\beta^\vee\rangle}\right]\left[\prod_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\langle\lambda([\omega]),\beta^\vee\rangle}{\langle\varrho^+,\beta^\vee\rangle}\right], \tag{2.53}$$

使得 $\lambda([\omega])\in\Lambda_P\otimes\mathbb{R}$。注意，在 $D\in\mathrm{Div}(X_P)$ 非常充足这一特殊情形下，可以选择 $[\omega] = c_1(\mathcal{O}(D))$，使得 $\lambda_D = \lambda([\omega])$。因此，在这一情形下，我们得到诱导射影嵌入 $X_P\hookrightarrow\mathbb{P}(V(\lambda_D))$ 的次数的著名公式，例如 [Tim11, Example 18.13]。值得一提的是，据作者所知，关于上述旗簇上任意 G-不变 K¨ahler 度量下任意因子的次数的显式公式，在文献中尚属新见，参见 [BH59], [Tim11, Example 18.13]。

3. Proof of main results

本节将重新陈述并证明引言中给出的主要结果。我们先证明定理 A。

定理 3.1. 给定一个 *K¨ahler* 类 $[\omega]\in\mathcal{K}(X_P)$，则对于每个 $[\psi]\in H^{1,1}(X_P,\mathbb{R})$，我们有

$$\hat{\Theta} := \mathrm{Arg}\int_{X_P}\frac{(\omega+\sqrt{-1}\psi)^n}{n!} = \sum_{\beta\in\Phi_I^+}\arctan\left(\frac{\langle\lambda([\psi]),\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega]),\beta^\vee\rangle}\right) \mod 2\pi, \tag{3.1}$$

使得 $\lambda([\psi])\ \lambda([\omega_0])\in\Lambda_P\otimes\mathbb{R}$。特别地，固定唯一的 G-不变代表元 $\omega_0\in[\omega]$，存在 $\phi\in C^\infty(X_P)$，使得 $\chi_\phi := \psi+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\phi$ 满足变形 *Hermitian–Yang–Mills* 方程。

$$\mathrm{Im}\big(\omega_0+\sqrt{-1}\chi_\phi\big)^n = \tan(\hat{\Theta})\mathrm{Re}\big(\omega_0+\sqrt{-1}\chi_\phi\big)^n. \tag{3.2}$$

ˆ证明。由于 Θ 仅取决于上同调类 $[\omega]$ 和 $[\psi]$，我们可以考虑 G-不变代表元 $\omega_0\in[\omega]$ 和 $\chi\in[\psi]$。由此，在 $x_0 = eP\in X_P$处，我们有

$$\omega_0 = \sum_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\sqrt{-1}}{2}\zeta_\beta\wedge\overline{\zeta_\beta} \quad\text{and}\quad \chi = \sum_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\sqrt{-1}}{2}\mathbf{q}_\beta(\omega_0^{-1}\circ\chi)\zeta_\beta\wedge\overline{\zeta_\beta}, \tag{3.3}$$

[5]符号“∼”表示线性等价。注意，由于 $H^2(X_P,\mathbb{Z})$ 是无挠的，根据关于 (1，1)-类的 Lefschetz 定理，我们有数值等价的除子实际上是线性等价的，参见例如 [Laz17]。

参见注记 2.25。因此，我们得到

$$(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^n=\prod_{\beta\in\Phi_I^+}\Big(1+\sqrt{-1}\mathbf{q}_\beta(\omega_0^{-1}\circ\chi)\Big)\omega_0^n=r_{\omega_0}(\chi)\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\Theta_{\omega_0}(\chi)}\omega_0^n, \tag{3.4}$$

使得

$$\text{(a) } r_{\omega_0}(\chi)=\prod_{\beta\in\Phi_I^+}\sqrt{\Big(1+\mathbf{q}_\beta(\omega_0^{-1}\circ\chi)^2\Big)};$$

$$\text{(b) } \Theta_{\omega_0}(\chi)=\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\arctan\Big(\mathbf{q}_\beta(\omega_0^{-1}\circ\chi)\Big)\mod 2\pi.$$

由于特征值 $\mathbf{q}_\beta(\chi)$ 和 $\mathbf{q}_\beta(\omega_0)$ 是常数，$\forall\beta\in\Phi_I^+$，我们得出

$$\int_{X_P}\frac{(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^n}{n!}=r_{\omega_0}(\chi)\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\Theta_{\omega_0}(\chi)}\mathrm{Vol}(X_P,\omega_0)\neq 0. \tag{3.5}$$

因此，我们有

$$\mathrm{Arg}\int_{X_P}\frac{(\omega+\sqrt{-1}\psi)^n}{n!}=\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\arctan\left(\frac{\langle\lambda([\chi]),\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega_0]),\beta^\vee\rangle}\right)\mod 2\pi. \tag{3.6}$$

由于 $\lambda([\chi])=\lambda([\psi])$ 且 $\lambda([\omega_0])=\lambda([\omega])$，我们得到所需的等式。对于第二部分，我们只需注意到，对于某个 $\phi\in C^\infty(X_P)$，$\chi=\psi+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\phi$。由于式 (3.2) 等价于 $\Theta_{\omega_0}(\chi)=\Theta \bmod 2\pi$，我们得以完成证明。□

沿用上述结果中的记号，可得

$$\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\hat\Theta}(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^n\big)=\left(\prod_{\beta\in\Phi_I^+}\sqrt{\Big(1+\mathbf{q}_\beta(\omega_0^{-1}\circ\chi)^2\Big)}\right)\omega_0^n>0, \tag{3.7}$$

其中 $\chi\in[\psi]$ 是唯一的 G-不变代表元。因此，依据 [CXY18, CS20],我们得到以下推论。

推论 3.2。 在前一定理的设定下，给定 $[\psi]\in H^{1,1}(X_P,\mathbb{R})$，考虑 $\eta_\phi=\psi+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\phi$，对于每个 $\phi\in C^\infty(X_P)$，几乎校准的 $(1,1)$-形式空间

$$\mathcal{H}:=\big\{\phi\in C^\infty(X_P)\;\big|\;\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\hat\Theta}(\omega_0+\sqrt{-1}\eta_\phi)^n\big)>0\big\}, \tag{3.8}$$

非空（$\mathcal{H}\neq\emptyset$）。特别地，我们有 $\hat\Theta([\psi])\in(-n\frac{\pi}{2},\,n\frac{\pi}{2})$ 的唯一提升 $\hat\Theta$，由下式给出

$$\hat\Theta([\psi]):=\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\arctan\left(\frac{\langle\lambda([\psi]),\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega]),\beta^\vee\rangle}\right), \tag{3.9}$$

使得 $\lambda([\psi])\;\lambda([\omega])\in\Lambda_P\otimes\mathbb{R}$。

注记 3.3。 在下文中，为简便起见，我们将记 $\Theta=\Theta([\psi])$，$[\psi]\in H^{1,1}(X_P,\mathbb{R})$，当对上同调类的依赖无关紧要时。

接下来要证明的结果是定理 B。

定理 3.4。 对于每个不可约解析子簇 $Y\subset X_P$，定义

$$\Theta_Y:=\mathrm{Arg}\int_Y(\omega+\sqrt{-1}\psi)^{\dim(Y)}, \tag{3.10}$$

使得 $[\omega]\in\mathcal{K}(X_P)$ 且 $[\psi]\in H^{1,1}(X_P,\mathbb{R})$。若

$$\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\operatorname{arccot}\left(\frac{\langle\lambda([\psi]),\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega]),\beta^\vee\rangle}\right)<\pi, \tag{3.11}$$

于是，对于每个真不可约解析子簇 $Y\subset X_P$，以下结论成立

$$\Theta_Y>\Theta_{X_P}-\big(n-\dim(Y)\big)\frac{\pi}{2}. \tag{3.12}$$

证明。首先，给定 $[\omega]\in\mathcal{K}(X_P)$ 和 $[\psi]\in H^{1,1}(X_P,\mathbb{R})$，我们有

$$\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\operatorname{arccot}\left(\frac{\langle\lambda([\psi]),\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega]),\beta^\vee\rangle}\right)<\pi\iff\underbrace{n\frac{\pi}{2}-\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\arctan\left(\frac{\langle\lambda([\psi]),\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega]),\beta^\vee\rangle}\right)}_{=n\frac{\pi}{2}-\hat{\Theta}}<\pi. \tag{3.13}$$

给定一个真不可约解析子簇 $Y\subset X_P$，其维数为 $=p$，考虑与基本类 $[Y]\in H^{n-p,n-p}(X_P,\mathbb{Z})$ 对应的正流，可得[6]

$$\int_Y(\omega+\sqrt{-1}\psi)^p:=\int_{Y_{\mathrm{reg}}}(\omega+\sqrt{-1}\psi)^p=\int_{X_P}[Y_{\mathrm{reg}}]\wedge(\omega+\sqrt{-1}\psi)^p.$$

由于上述积分仅取决于其中涉及的上同调类，我们可以考虑G-不变代表元 $\omega_0\in[\omega]$、$\chi\in[\psi]$ 和 $T_Y\in[Y_{\mathrm{reg}}]$。设 $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ 是相对于 ω_0 的 $T^*_{x_0}X_P$ 的标准正交标架，其中 $x_0=eP$，使得

$$\omega_0=\sum_{j=1}^n\frac{\sqrt{-1}}{2}\zeta_j\wedge\overline{\zeta_j}\quad\text{and}\quad\chi=\sum_{j=1}^n\frac{\sqrt{-1}}{2}\mathbf{q}_j\zeta_j\wedge\overline{\zeta_j},$$

其中 $\mathbf{q}_j=\frac{\langle\lambda(\quad[\chi]\quad\beta_j^\vee\rangle)()}{\langle\lambda\,[\omega_0]\quad\beta_j^\vee\rangle}$、$\forall j=1,\ldots,n$ 是 $\omega_0^{-1}\circ\chi$ 在 x_0 处的特征值，参见例如注记 2.25。由此，我们可以将 T_Y 在 $x_0=eP$ 处表示为

$$T_Y=\frac{(\sqrt{-1})^{(n-p)^2}}{2^{(n-p)}}\sum_{|A|=|B|=n-p}T_{A,B}(x_0)\zeta_A\wedge\overline{\zeta_B},$$

其中 $\zeta_A=\zeta_{a_1}\wedge\cdots\wedge\zeta_{a_{n-p}}$, $\forall A=\{a_1<\cdots<a_{n-p}\}$. 由上可得 x_0 以下

$$T_Y\wedge(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^p=\frac{(\sqrt{-1})^{p^2}}{2^p}\sum_{|J|=p}p!\prod_{j\in J}(1+\sqrt{-1}\mathbf{q}_j)T_Y\wedge\zeta_J\wedge\overline{\zeta_J}, \tag{3.14}$$

例如参见 [Dem97，第三章]。由于

$$\frac{(\sqrt{-1})^{p^2}}{2^p}T_Y\wedge\zeta_J\wedge\overline{\zeta_J}=T_{J^c,J^c}(x_0)\frac{(\sqrt{-1})^n}{2^n}\zeta_1\wedge\overline{\zeta_1}\wedge\cdots\wedge\zeta_n\wedge\overline{\zeta_n}=\frac{1}{n!}T_{J^c,J^c}(x_0)\omega_0^n, \tag{3.15}$$

where $J^c\subset\{1,\ldots,n\}$ is the ordered complementary multi-indices of J, we conclude that

$$T_Y\wedge(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^p=\sum_{|J|=p}p!\prod_{j\in J}(1+\sqrt{-1}\mathbf{q}_j)\frac{T_{J^c,J^c}(x_0)}{n!}\omega_0^n, \tag{3.16}$$

在 $x_0=eP$ 处。考虑[7]

$$\Theta_J:=\operatorname{Arg}\prod_{j\in J}(1+\sqrt{-1}\mathbf{q}_j)\quad\text{and}\quad r_J:=\Big|\prod_{j\in J}(1+\sqrt{-1}\mathbf{q}_j)\Big|, \tag{3.17}$$

[6]更多详情请参见 [GH14，第 4], [Dem97，第三章], 和 [Chi12，第 3 章，§14]。[7]注意，我们可以将 Θ_J 与其提升 $\sum_{j\in J}\arctan(\mathbf{q}_j)$ 识别为 $J=\{j_1<\cdots<j_p\}$。

$\forall J=\{j_1<\cdots<j_p\}$，我们得到

$$T_Y\wedge(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^p=\sum_{|J|=p}p!r_J\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\Theta_J}\frac{T_{J^c,J^c}(x_0)}{n!}\omega_0^n, \tag{3.18}$$

在 $x_0=eP$ 处。由 G-不变性可知，$T_Y\wedge(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^p$，结合公式（3.18），我们得到

$$\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{-1}(n-p)\frac{\pi}{2}}\int_{X_P}T_Y\wedge(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^p}{\int_{X_P}(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^n}=\sum_{|J|=p}T_{J^c,J^c}(x_0)R_J\mathrm{e}^{\sqrt{-1}(\Theta_J-\hat{\Theta}+(n-p)\frac{\pi}{2})}, \tag{3.19}$$

使得

$$R_J:=\frac{p!r_J}{n!r_{\omega_0}(\chi)}, \tag{3.20}$$

$\forall J=\{j_1<\cdots<j_p\}$，见公式（3.4）。注意，由于 $[Y_{\mathrm{reg}}]$ 是正流，我们有 $T_{J^c,\ J^c}(x_0)\geq 0$，对所有有序集合 J 均成立。此外，我们可以假设，至少存在一个 $T_{J^c,\ J^c}(x_0)$ 对某个 J 严格为正。事实上，由 Wirtinger 定理和 Poincar´e 对偶可知[9]

$$\mathrm{Vol}(Y)=\frac{1}{p!}\int_{X_P}[Y_{\mathrm{reg}}]\wedge[\omega_0]^p=\frac{1}{p!}\int_{X_P}T_Y\wedge\omega_0^p=\int_{X_P}\Big(\sum_{|J|=p}T_{J^c,J^c}(x_0)\Big)\frac{\omega_0^n}{n!},$$

例如，参见 [Chi12，第 3 章，§13] 以及 [GH14，第 4], 换言之，我们有

$$0\neq\mathrm{Vol}(Y)=\Big(\sum_{|J|=p}T_{J^c,J^c}(x_0)\Big)\mathrm{Vol}(X_P,\omega_0). \tag{3.21}$$

此外，由于 $\Theta_J=\sum_{i\in J}\arctan(\mathbf{q}_i)<\frac{p\pi}{2}$，可得

$$\hat{\Theta}=\Theta_J+\sum_{i\notin J}\arctan(\mathbf{q}_i)<\Theta_J+(n-p)\frac{\pi}{2}\iff\hat{\Theta}-(n-p)\frac{\pi}{2}<\Theta_J<\frac{p\pi}{2} \tag{3.22}$$

$\forall J=\{j_1<\cdots<j_p\}$。因此，若等式 (3.11) 成立，则由等式 (3.13) 可得

$$0<\Theta_J-\hat{\Theta}+(n-p)\frac{\pi}{2}<n\frac{\pi}{2}-\hat{\Theta}<\pi. \tag{3.23}$$

结合上述事实以及公式 (3.19) 和公式 (3.22)，我们得出：

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{-1}(n-p)\frac{\pi}{2}}\int_Y(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^p}{\int_{X_P}(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^n}\right)>0. \tag{3.24}$$

由此，我们得到

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{-1}(n-p)\frac{\pi}{2}}\int_Y(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^p}{\int_{X_P}(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^n}\right)>0, \tag{3.25}$$

ˆ因此 $\Theta_Y>\Theta-(n-p)\frac{\pi}{2}$。 □

考虑 $\mathbb{P}^1_\beta=\exp(\mathfrak{g}_{-\beta})P\subset X_P$, $\beta\in\Phi_I^+$，我们有

$$[\mathbb{P}^1_\beta]=\sum_{\alpha\in\Delta\setminus I}\langle\varpi_\alpha,\beta^\vee\rangle[\mathbb{P}^1_\alpha]\quad(\forall\beta\in\Phi_I^+), \tag{3.26}$$

[8] $(T_Y\wedge(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^p)_{gx_0}=(g^{-1})^*\big((T_Y\wedge(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^p)_{x_0}\big),\forall g\in G.$

[9] Notice that $T_Y\wedge\omega_0^p=p!\Big(\sum_{|J|=p}T_{J^c,J^c}(x_0)\Big)\frac{\omega_0^n}{n!}$, e.g. [Dem97, Chapter III].

参见注 2.18。因此，我们得到

$$\int_{\mathbb{P}^1_\beta}(\omega+\sqrt{-1}\psi)=\sum_{\alpha\in\Delta\setminus I}\langle\varpi_\alpha,\beta^\vee\rangle\int_{\mathbb{P}^1_\alpha}(\omega+\sqrt{-1}\psi)=\langle\lambda([\omega]),\beta^\vee\rangle+\sqrt{-1}\langle\lambda([\psi]),\beta^\vee\rangle, \tag{3.27}$$

so

$$\Theta_{\mathbb{P}^1_\beta}=\operatorname{Arg}\int_{\mathbb{P}^1_\beta}(\omega+\sqrt{-1}\psi)=\arctan\left(\frac{\langle\lambda([\psi]),\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega]),\beta^\vee\rangle}\right), \tag{3.28}$$

对每个 $\beta\in\Phi_I^+$ 均成立。因此，我们有如下推论。

ˆ推论 3.5. 在前一定理的设定下， $[\psi]\in H^{1,1}(X_P,\mathbb{R})$ 的唯一提升角 $\Theta\in(-n\frac{\pi}{2},n\frac{\pi}{2})$ 为 − −

$$\hat{\Theta}=\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\Theta_{\mathbb{P}^1_\beta}, \tag{3.29}$$

使得 $\mathbb{P}^1_\beta=\exp(\overline{\mathfrak{g}_{-\beta})P}\subset X_P$, $\forall\beta\in\Phi_I^+$ 。

现在我们重新陈述并证明定理 C。

定理 3.6. 设 $\mathbf{E}\to X_P$ 是一个秩为 $\operatorname{rank}(\mathbf{E})=r$ 的全纯向量丛。那么，$\mathbf{E}$ 关于 *Kähler* 类 $\xi\in\mathcal{K}(X_P)$ 的斜率为

$$\mu_\xi(\mathbf{E})=\frac{(n-1)!}{r}\left[\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\langle\lambda(\mathbf{E}),\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda(\xi),\beta^\vee\rangle}\right]\left[\prod_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\langle\lambda(\xi),\beta^\vee\rangle}{\langle\varrho^+,\beta^\vee\rangle}\right], \tag{3.30}$$

使得 $\lambda(\mathbf{E})\in\Lambda_P$，且 $\lambda(\xi)\in\Lambda_P\otimes\mathbb{R}$。此外，如果 $\mathbf{E}$ 在曲线锥 $\mathrm{NE}(X_P)$ 的每个生成元 $[\mathbb{P}^1_\alpha]$, $\alpha\in\Delta\setminus I$ 上的限制都是半稳定的，那么对于任意 *K¨ahler* 类 $\xi\in\mathcal{K}(X_P)$，$\mathbf{E}$ 都是 ξ-半稳定的。

证明。 根据定义，给定一个 K¨ahler 类 $\xi=[\omega]$，我们有

$$\mu_{[\omega]}(\mathbf{E})=\frac{\int_{X_P}c_1(\mathbf{E})\wedge[\omega]^{n-1}}{r}=\frac{\deg_\omega(\mathbf{E})}{r}. \tag{3.31}$$

由于 $c_1(\mathbf{E})=\sum_{\alpha\in\Delta\setminus I}\langle c_1(\mathbf{E}),[\mathbb{P}^1_\alpha]\rangle[\mathbf{\Omega}_\alpha]$，我们得到如下

$$\mu_{[\omega]}(\mathbf{E})=\sum_{\alpha\in\Delta\setminus I}\frac{\langle c_1(\mathbf{E}),[\mathbb{P}^1_\alpha]\rangle}{r}\int_{X_P}\mathbf{\Omega}_\alpha\wedge\omega^{n-1}=\sum_{\alpha\in\Delta\setminus I}\frac{\langle c_1(\mathbf{E}),[\mathbb{P}^1_\alpha]\rangle}{nr}\Lambda_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}_\alpha)\int_{X_P}\omega^n.$$

由式（2.34）和式（2.45），我们有

$$\mu_{[\omega]}(\mathbf{E})=\sum_{\alpha\in\Delta\setminus I}\frac{\langle c_1(\mathbf{E}),[\mathbb{P}^1_\alpha]\rangle}{nr}\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\langle\varpi_\alpha,\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega]),\beta^\vee\rangle}n!\left[\prod_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\langle\lambda([\omega]),\beta^\vee\rangle}{\langle\varrho^+,\beta^\vee\rangle}\right]. \tag{3.32}$$

注意到 $\lambda(\mathbf{E})=\sum_{\alpha\in\Delta\setminus I}\langle c_1(\mathbf{E}),[\mathbb{P}^1_\alpha]\rangle\varpi_\alpha$，重新整理上式，得

$$\mu_{[\omega]}(\mathbf{E})=\frac{(n-1)!}{r}\left[\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\langle\lambda(\mathbf{E}),\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega]),\beta^\vee\rangle}\right]\left[\prod_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\langle\lambda([\omega]),\beta^\vee\rangle}{\langle\varrho^+,\beta^\vee\rangle}\right]. \tag{3.33}$$

现在假设 $\mathbf{E}$ 在曲线锥 $\mathrm{NE}(X_P)$ 的每个生成元 $[\mathbb{P}^1_\alpha]$, $\alpha\in\Delta\setminus I$ 上的限制都是半稳定的。考虑包含映射 $\iota_\alpha\colon\mathbb{P}^1_\alpha\hookrightarrow X_P$, $\alpha\in\Delta\setminus I$，对于每个子丛 $0\neq\mathcal{F}\subsetneq\mathbf{E}$，秩$(\mathcal{F})=s<r$，我们有

$$\frac{c_1(\iota_\alpha^*\mathbf{E})}{r}\geq\frac{c_1(\iota_\alpha^*\mathcal{F})}{s}\Rightarrow\frac{1}{r}\int_{\mathbb{P}^1_\alpha}c_1(\mathbf{E})\geq\frac{1}{s}\int_{\mathbb{P}^1_\alpha}c_1(\mathcal{F})\Rightarrow\frac{\langle c_1(\mathbf{E}),[\mathbb{P}^1_\alpha]\rangle}{r}\geq\frac{\langle c_1(\mathcal{F}),[\mathbb{P}^1_\alpha]\rangle}{s},$$

对于每个 $\alpha\in\Delta\backslash I$。由于 $\langle\varpi_\alpha,\beta^\vee\rangle\geq 0$、 $\forall\alpha\in\Delta\backslash I$ 和 $\forall\beta\in\Phi_I^+$，因此可得。

$$\frac{\langle\lambda(\mathbf{E}),\beta^\vee\rangle}{r}-\frac{\langle\lambda(\mathcal{F}),\beta^\vee\rangle}{s}=\sum_{\alpha\in\Delta\backslash I}\left(\frac{\langle c_1(\mathbf{E}),[\mathbb{P}^1_\alpha]\rangle}{r}-\frac{\langle c_1(\mathcal{F}),[\mathbb{P}^1_\alpha]\rangle}{s}\right)\langle\varpi_\alpha,\beta^\vee\rangle\geq 0.$$

由上可知，给定任意 G-不变的 K¨ahler 度量 ω on X_P，由于 $\langle\lambda([\omega])\ \beta^\vee\rangle>0,\forall\beta\in\Phi_I^+$，我们得出

$$\frac{1}{s}\left[\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\langle\lambda(\mathcal{F}),\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega]),\beta^\vee\rangle}\right]\leq\frac{1}{r}\left[\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\langle\lambda(\mathbf{E}),\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega]),\beta^\vee\rangle}\right]\Rightarrow\mu_{[\omega]}(\mathcal{F})\leq\mu_{[\omega]}(\mathbf{E}).\tag{3.34}$$

因此，$\mathbf{E}$ 是 $[\omega]$-半稳定的。由于每个 K¨ahler 类都存在一个 G-不变的代表元，我们便得到所需的结果。□

现在我们可以证明定理 D。

定理 3.7。 固定 X_P 上的一个 G-不变 *K¨ahler* 度量 ω_0 *on*，对于每个全纯向量丛 $\mathbf{E}\to X_P$ 以及每个不可约解析子簇 $Y\subset X_P$，定义

$$Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E},Y):=-\int_Y\mathrm{e}^{-\sqrt{-1}[\omega_0]}\mathrm{ch}(\mathbf{E}).\tag{3.35}$$

那么，以下结论成立：

(1) 在特殊情况下，当 $\mathbf{E}\in$ 皮卡群(X_P) 且 $Y\in\mathrm{Div}(X_P)$ 时，我们有

$$Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E},Y)=-\sum_{\alpha\in\Phi_I^+}\left[\prod_{\beta\in\Phi_I^+\backslash\{\alpha\}}\left(\frac{\langle\lambda(\mathbf{E}),\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega_0]),\beta^\vee\rangle}\frac{\langle\lambda_Y,\alpha^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega_0]),\alpha^\vee\rangle}-\sqrt{-1}\frac{\langle\lambda_Y,\alpha^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega_0]),\alpha^\vee\rangle}\right)\right]V_0,\tag{3.36}$$

使得 $V_0=\mathrm{Vol}(X_P,\omega_0)$，$\lambda(\mathbf{E})\ \lambda_Y\in\Lambda_P$，且 $\lambda([\omega_0])\in\Lambda_P\otimes\mathbb{R}$；

(2) 对于每个 $\mathbf{E}\in$ 皮卡群(X_P)，使得 $c_1(\mathbf{E})\neq 0$，我们有

$$\frac{|Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E},X_P)|}{||\mathrm{ch}(\mathbf{E})||}>0,\tag{3.37}$$

其中，$||\cdot||$ 是有限维向量空间 H^{even}（X_P、$\mathbb{R}$）上的任意范数；

(3) 对于每个全纯向量丛 $\mathbf{E}\to X_P$，定义

$$\hat{\mu}_{[\omega_0]}(\mathbf{E}):=\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\tan\big(\Theta_{\omega_0}(\mathbf{E},\mathbb{P}^1_\beta)\big),\tag{3.38}$$

使得

$$\Theta_{\omega_0}(\mathbf{E},\mathbb{P}^1_\beta):=\mathrm{Arg}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E},\mathbb{P}^1_\beta)\big)-\frac{\pi}{2},\tag{3.39}$$

其中 $\mathbb{P}^1_\beta=\overline{\exp(\mathfrak{g}_{-\beta})P}\subset X_P,\forall\beta\in\Phi_I^+$。那么，$\mathbf{E}$ 是 $[\omega_0]$-(半)稳定的，当且仅当，

$$\hat{\mu}_{[\omega_0]}(\mathbf{E})\gtrless\hat{\mu}_{[\omega_0]}(\mathcal{F}),\tag{3.40}$$

对于每个子丛 $0\neq\mathcal{F}\subsetneq\mathbf{E}$；

(4) 给定 $\mathbf{E}\in\mathrm{Pic}(X_P)$，如果

$$\frac{\pi(n-2)}{2}<\Theta_{\omega_0}(\mathbf{E}):=\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\Theta_{\omega_0}(\mathbf{E},\mathbb{P}^1_\beta)<\frac{n\pi}{2},\tag{3.41}$$

then

$$\mathrm{Im}\left(\frac{Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E},Y)}{Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E},X_P)}\right)>0,\tag{3.42}$$

对于每个不可约解析子簇 $Y\subsetneq X_P$；

(5) 给定一个全纯向量丛 $\mathbf{E}\to X_P$，如果

$$\mathrm{Arg}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E},\mathbb{P}^1_\beta)\big)\ (\geq)\ \mathrm{Arg}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathcal{F},\mathbb{P}^1_\beta)\big),\tag{3.43}$$

对于每个子丛 $0\neq\mathcal{F}\subsetneq\mathbf{E}$ 以及每个 $\beta\in\Phi_I^+$，则 $\mathbf{E}$ 是 $[\omega_0]$-(半)稳定的。

证明。 为证明第 (1) 项，我们先回顾一些基本事实。给定 $\mathbf{E}\in$ 皮卡群(X_P)，我们有

$$\mathrm{ch}(\mathbf{E})=\mathrm{e}^{c_1(\mathbf{E})}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_1(\mathbf{E})^k}{k!}.\tag{3.44}$$

因此，固定 G-不变的 K¨ahler 度量 ω_0 于 X_P上，给定 $Y\in\mathrm{Div}(X_P)$ 和 $\chi\in c_1(\mathbf{E})$，我们有

$$Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E},Y)=-\int_Y\mathrm{e}^{-\sqrt{-1}\left([\omega_0]+\sqrt{-1}c_1(\mathbf{E})\right)}=-\frac{(-\sqrt{-1})^{n-1}}{(n-1)!}\int_Y(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^{n-1}.\tag{3.45}$$

由于右侧上述积分仅取决于其中涉及的上同调类，我们可以假设 $\chi\in c_1(\mathbf{L})$ 也具有 G-不变性。此外，考虑唯一的G-不变代表元 $\omega_Y\in c_1(\mathcal{O}(D))$。令 $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$为相对于 ω_0的 $T^*_{x_0}X_P$的标准正交标架，其中 $x_0=eP$，使得

$$\omega_0=\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\sqrt{-1}}{2}\zeta_\beta\wedge\overline{\zeta_\beta},\quad\chi=\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\sqrt{-1}}{2}\mathbf{a}_\beta\zeta_\beta\wedge\overline{\zeta_\beta},\quad\omega_Y=\sum_{\beta\in\Phi_I^+}\frac{\sqrt{-1}}{2}\mathbf{b}_\beta\zeta_\beta\wedge\overline{\zeta_\beta},\tag{3.46}$$

其中 $\mathbf{a}_\beta=\frac{\langle\lambda([\chi]),\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega_0]),\beta^\vee\rangle}$、$\mathbf{b}_\beta=\frac{\langle\lambda([\omega_Y]),\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega_0]),\beta^\vee\rangle}$、$\beta\in\Phi_I^+$ 分别是 x_0 处 $\omega_0^{-1}\circ\chi$ 和 $\omega_0^{-1}\circ\omega_Y$ 的特征值（见注记 2.25）。由这些数据，我们在 $x_0=eP$ 处得到如下

$$\omega_Y\wedge(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^{n-1}=\sum_{\alpha\in\Phi_I^+}(n-1)!\prod_{\beta\in\Phi_I^+\setminus\{\alpha\}}(1+\sqrt{-1}\mathbf{a}_\beta)\mathbf{b}_\alpha\frac{\omega_0^n}{n!}.\tag{3.47}$$

由上可知

$$-(-\sqrt{-1})^{n-1}\int_{X_P}\frac{\omega_Y\wedge(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^{n-1}}{(n-1)!}=-\sum_{\alpha\in\Phi_I^+}\prod_{\beta\in\Phi_I^+\setminus\{\alpha\}}(\mathbf{a}_\beta\mathbf{b}_\alpha-\sqrt{-1}\mathbf{b}_\alpha)V_0,\tag{3.48}$$

s使得 $V_0:=\mathrm{Vol}(X_P,\omega_0)$。由于 $\lambda([\chi])=\lambda(\mathbf{E})$ 且 $\lambda([\omega_Y])=\lambda_Y$，我们得出 t

$$Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E},Y)=-\sum_{\alpha\in\Phi_I^+}\left[\prod_{\beta\in\Phi_I^+\setminus\{\alpha\}}\left(\frac{\langle\lambda(\mathbf{E}),\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega_0]),\beta^\vee\rangle}\frac{\langle\lambda_Y,\alpha^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega_0]),\alpha^\vee\rangle}-\sqrt{-1}\frac{\langle\lambda_Y,\alpha^\vee\rangle}{\langle\lambda([\omega_0]),\alpha^\vee\rangle}\right)\right]V_0.\tag{3.49}$$

第 (2) 项的证明如下。给定 $\mathbf{E}\in\mathrm{Pic}(X_P)$，并考虑唯一的 G-不变代表元 $\chi\in c_1(\mathbf{E})$，可知

$$Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E},X_P)=-\frac{(-\sqrt{-1})^n}{n!}\int_{X_P}(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^n=-(-\sqrt{-1})^n r_{\omega_0}(\chi)\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\Theta_{\omega_0}(\chi)}\mathrm{Vol}(X_P,\omega_0),\tag{3.50}$$

例如，参见公式（3.4）。因此，由于

$$r_{\omega_0}(\chi)=\prod_{\beta\in\Phi_I^+}\sqrt{\left(1+\mathbf{q}_\beta(\omega_0^{-1}\circ\chi)^2\right)},\tag{3.51}$$

例如，参见方程 (2.28)，我们有

$$|Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E},X_P)|=r_{\omega_0}(\chi)\mathrm{Vol}(X_P,\omega_0)>0.\tag{3.52}$$

对于第 (3) 项，由于

$$\mathrm{ch}(\mathbf{E}) = r + c_1(\mathbf{E}) + \frac{1}{2}\big(c_1(\mathbf{E})^2 - 2c_2(\mathbf{E})\big) + \cdots \tag{3.53}$$

对于每个全纯向量丛 $\mathbf{E} \to X_P$，其秩为 $(\mathbf{E}) = r$，例如 [Kob14], ，可得

$$Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta) = -\int_{\mathbb{P}^1_\beta} \big(c_1(\mathbf{E}) - r\sqrt{-1}[\omega_0]\big) = \int_{\mathbb{P}^1_\beta} \big(-c_1(\mathbf{E}) + r\sqrt{-1}[\omega_0]\big), \tag{3.54}$$

对于每个 $\mathbb{P}^1_\beta = \overline{\exp(\mathfrak{g}_{-\beta})P} \subset X_P$, $\beta \in \Phi_I^+$。由于

$$[\mathbb{P}^1_\beta] = \sum_{\alpha \in \Delta \setminus I} \langle \varpi_\alpha, \beta^\vee \rangle [\mathbb{P}^1_\alpha] \quad (\forall \beta \in \Phi_I^+), \tag{3.55}$$

参见注 2.18，可得

$$Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta) = \sum_{\alpha \in \Delta \setminus I} \langle \varpi_\alpha, \beta^\vee \rangle \int_{\mathbb{P}^1_\alpha} \big(-c_1(\mathbf{E}) + r\sqrt{-1}[\omega_0]\big) = -\langle \lambda(\mathbf{E}), \beta^\vee \rangle + r\sqrt{-1}\langle \lambda([\omega_0]), \beta^\vee \rangle, \tag{3.56}$$

对于每个 $\mathbb{P}^1_\beta = \overline{\exp(\mathfrak{g}_{-\beta})P} \subset X_P$, $\beta \in \Phi_I^+$。因此，我们有

$$\mathrm{Arg}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta)\big) = \underbrace{\arctan\left(\frac{\langle \lambda(\mathbf{E}), \beta^\vee \rangle}{r\langle \lambda([\omega_0]), \beta^\vee \rangle}\right)}_{\Theta_{\omega_0}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta)} + \frac{\pi}{2}, \tag{3.57}$$

对于每个 $\mathbb{P}^1_\beta = \overline{\exp(\mathfrak{g}_{-\beta})P} \subset X_P$, $\beta \in \Phi_I^+$。由于

$$-\frac{\langle \lambda(\mathbf{E}), \beta^\vee \rangle}{r\langle \lambda([\omega_0]), \beta^\vee \rangle} = \frac{\mathrm{Re}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta)\big)}{\mathrm{Im}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta)\big)} = \cot\left(\Theta_{\omega_0}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta) + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan\big(\Theta_{\omega_0}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta)\big), \tag{3.58}$$

对于每个 $\beta \in \Phi_I^+$，由定理 3.6 可知，

$$\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = -(n-1)!\left[\sum_{\beta \in \Phi_I^+} \tan\big(\Theta_{\omega_0}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta)\big)\right] V_0 = (n-1)!\hat{\mu}_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) V_0, \tag{3.59}$$

使得 $V_0 = \mathrm{Vol}(X_P, \omega_0)$。由上述表达式，我们得出第 (3) 项的证明。为了证明第 (4) 项，我们观察如下事实。给定 $\mathbf{E} \in$ 皮卡群(X_P)，假设等式 (3.41) 成立。在这一最后假设下，考虑 $[\psi] = c_1(\mathbf{E})$，由等式 (3.57)，我们有

$$\frac{\pi(n-2)}{2} < \Theta_{\omega_0}(\mathbf{E}) = \sum_{\beta \in \Phi_I^+} \arctan\left(\frac{\langle \lambda([\psi]), \beta^\vee \rangle}{\langle \lambda([\omega_0]), \beta^\vee \rangle}\right) < \frac{n\pi}{2}. \tag{3.60}$$

因此，由定理 3.4 可知

$$\underbrace{\mathrm{Arg}\big(\mathrm{e}^{-\sqrt{-1}(\pi - \dim(Y)\frac{\pi}{2})} Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, Y)\big)}_{\mathrm{Arg}\int_Y (\omega_0 + \sqrt{-1}\psi)^{\dim(Y)}} > \underbrace{\mathrm{Arg}\big(\mathrm{e}^{-\sqrt{-1}(\pi - n\frac{\pi}{2})} Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, X_P)\big)}_{\mathrm{Arg}\int_{X_P} (\omega_0 + \sqrt{-1}\psi)^n} - \big(n - \dim(Y)\big)\frac{\pi}{2}, \tag{3.61}$$

对每个不可约解析子簇 $Y \subsetneq X_P$。重新整理上述表达式，我们得出式 (3.41) 蕴含以下（等价的）不等式

$$\mathrm{Arg}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, Y)\big) > \mathrm{Arg}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, X_P)\big) \iff \mathrm{Im}\left(\frac{Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, Y)}{Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, X_P)}\right) > 0, \tag{3.62}$$

对每个不可约解析子簇 $Y \subsetneq X_P$。为了证明第 (5) 项，我们按如下方式进行。给定一个全纯向量丛 $\mathbf{E} \to (X_P, \omega_0)$，满足 $r = \text{秩}(\mathbf{E})$，假设

$$\operatorname{Arg}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta)\big) \geq \operatorname{Arg}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathcal{F}, \mathbb{P}^1_\beta)\big), \tag{3.63}$$

对于每个子丛 $0 \neq \mathcal{F} \subsetneq \mathbf{E}$ 以及每个 $\beta \in \Phi^+_I$。由式 (3.57)，可得

$$\Theta_{\omega_0}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta) \geq \Theta_{\omega_0}(\mathcal{F}, \mathbb{P}^1_\beta), \tag{3.64}$$

对于每个子丛 $0 \neq \mathcal{F} \subsetneq \mathbf{E}$ 以及每个 $\beta \in \Phi^+_I$。由于 $\tan(-)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上严格递增，因此可得 –

$$\hat{\mu}_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = \sum_{\beta \in \Phi^+_I} \tan\left(\Theta_{\omega_0}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta)\right) \geq \sum_{\beta \in \Phi^+_I} \tan\left(\Theta_{\omega_0}(\mathcal{F}, \mathbb{P}^1_\beta)\right) = \hat{\mu}_{[\omega_0]}(\mathcal{F}), \tag{3.65}$$

对于每个子丛 $0 \neq \mathcal{F} \subsetneq \mathbf{E}$。因此，由第 (2) 项可知，$\mathbf{E}$ 是 $[\omega_0]$-(半)稳定的。

□

注记 3.8. 在式 (3.57) 的设定下，由于 $-\frac{\pi}{2} < \Theta_{\omega_0}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta) < \frac{\pi}{2}, \forall \beta \in \Phi^+_I$，可得

$$0 < \operatorname{Arg}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta)\big) < \pi, \quad (\forall \beta \in \Phi^+_I). \tag{3.66}$$

另见式 (3.56)。因此，对于每个 $\beta \in \Phi^+_I$，以及每个全纯向量丛 $\mathbf{E} \to X_P$，只要 $\text{rank}(\mathbf{E}) > 0$，就有 $Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta)$ 位于 $\mathbb{C}$ 的严格上半平面内。考虑相应的相干层的格罗滕迪克群 $K_0(X_P)$，可得

$$Z_{[\omega_0]}(-, \mathbb{P}^1_\beta) \colon K_0(X_P) \to \mathbb{C}$$

明确给出一个加性同态

$$Z_{[\omega_0]}([\mathcal{E}], \mathbb{P}^1_\beta) = -\int_{\mathbb{P}^1_\beta} \big(c_1(\det(\mathcal{E})) - \operatorname{rank}(\mathcal{E})\sqrt{-1}[\omega_0]\big), \tag{3.67}$$

对每个 $[\mathcal{E}] \in K_0(X_P)$ 以及每个 $\beta \in \Phi^+_I$。

根据 Kobayashi-Hitchin 对应 [Don85，Don87],[UY86]，以及上一定理的第 (5) 项，可得如下结论。

推论 3.9. 设 G-不变的 K¨ahler 度量 ω_0 定义在 X_P 上，且有一个简单全纯向量丛 $\mathbf{E} \to X_P$，若

$$\operatorname{Arg}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta)\big) > \operatorname{Arg}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathcal{F}, \mathbb{P}^1_\beta)\big), \tag{3.68}$$

对每个子丛 $0 \neq \mathcal{F} \subsetneq \mathbf{E}$ 以及每个 $\beta \in \Phi^+_I$，则 $\mathbf{E}$ 存在一个满足 Hermitian-Yang-Mills 方程的 Hermitian 度量 H

$$\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_0} F(H) = c\mathbb{1}_{\mathbf{E}}. \tag{3.69}$$

结合 [Kob14，命题 7。11] 以及上一定理的第 (4) 项，可得如下结论。

推论 3.10。 设 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{F}$ 是 $[\omega_0]$-半稳定全纯向量丛，定义在 X_P 上，且相对于某个 G-不变的 K¨ahler 度量 ω_0。若

$$\operatorname{Arg}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathbf{E}, \mathbb{P}^1_\beta)\big) > \operatorname{Arg}\big(Z_{[\omega_0]}(\mathbf{F}, \mathbb{P}^1_\beta)\big), \tag{3.70}$$

对每个 $\beta \in \Phi^+_I$，则 $\text{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = 0$。

4. Applications and final comments

接下来，为了阐明我们的主要结果，我们通过一个详细且具有构造性的例子给出一些明确的计算。

例 4.1. 考虑复李群 $G^{\mathbb{C}}=\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$。在这种情况下，其关联李代数 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ 的结构可通过其 Dynkin 图完全确定



取由对角矩阵构成的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$，其关联的简单根系为 $\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2\}$，使得

$$\alpha_j(\mathrm{diag}(d_1,d_2,d_3))=d_j-d_{j+1},\ j=1,2.$$

$\forall\mathrm{diag}(d_1,d_2,d_3)\in\mathfrak{h}$。此时正根集合为

$$\Phi^+=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2\}.$$

考虑 Cartan-Killing 型[10] $\kappa(X,Y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y))\ \forall X,Y\in\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$，可得 $\alpha_j=\kappa(\cdot,h_{\alpha_j})$，$j=1,2,3$，使得[11]

$$h_{\alpha_1}=\frac{1}{6}(E_{11}-E_{22}),\quad h_{\alpha_2}=\frac{1}{6}(E_{22}-E_{33}),\quad h_{\alpha_3}=\frac{1}{6}(E_{11}-E_{33}),\tag{4.1}$$

这里我们将矩阵 E_{ij} 视为 $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$ 标准基中的元素。此外，单根与基本权之间满足以下关系（图 1）：

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\ -1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varpi_{\alpha_1}\\ \varpi_{\alpha_2}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\varpi_{\alpha_1}\\ \varpi_{\alpha_2}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\ 1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix},$$

这里我们考虑 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ 的 Cartan 矩阵 $C=(C_{ij})$，其形式如下：

$$C=\begin{pmatrix}2&-1\\ -1&2\end{pmatrix},\quad C_{ij}=\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle},\tag{4.2}$$

有关上述主题的更多详情，例如请参见 [Hum72]。

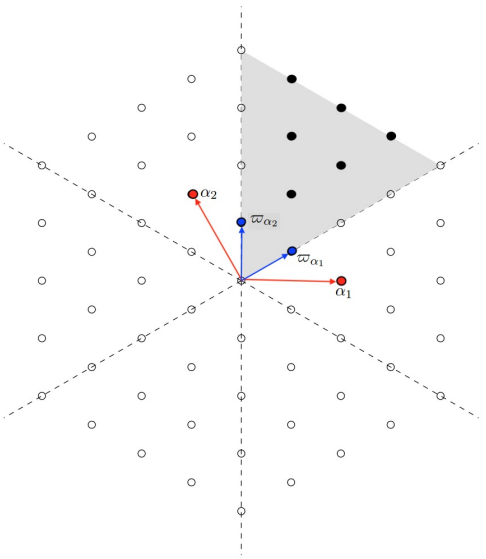


Figure 1. $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ 的单根、支配整元和基本权。

[10]在这种情况下，我们有 $\kappa(X,Y)=6\mathrm{tr}(XY)\ \forall X,Y\in\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$，例如参见 Pro07，第 10 章，§4]。[11] 注意，$\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle=\alpha_j(h_{\alpha_j})=\frac{1}{3},\ \forall j=1,2,3$。

固定标准博雷尔子群 $B \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$，即，

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \right\},$$

我们考虑由 $I = \emptyset$ 得到的旗簇，即由 Wallach 空间 $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}) = \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})/B$ 给出的齐性法诺三维簇。在这一特定情形下，我们有如下结果：

(i) $H^2(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}), \mathbb{R}) = H^{1,1}(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}), \mathbb{R}) = \mathbb{R}[\mathbf{\Omega}_{\alpha_1}] \oplus \mathbb{R}[\mathbf{\Omega}_{\alpha_2}]$;
(ii) $H_2(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}), \mathbb{Z}) = \pi_2(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})) = \mathbb{Z}[\mathbb{P}^1_{\alpha_1}] \oplus \mathbb{Z}[\mathbb{P}^1_{\alpha_2}]$。

设 ω_0 为 $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$ 上唯一的 SU(3)-不变 K¨ahler 度量，使得 $[\omega_0] = c_1(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}))$[12]。由于 $\lambda(\mathbf{K}^{-1}_{\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})}) = \delta_B = 2(\varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\alpha_2})$，由公式 (2.43) 可得

$$\omega_0 = \langle \delta_B, \alpha_1^\vee \rangle \mathbf{\Omega}_{\alpha_1} + \langle \delta_B, \alpha_2^\vee \rangle \mathbf{\Omega}_{\alpha_2} = 2\big(\mathbf{\Omega}_{\alpha_1} + \mathbf{\Omega}_{\alpha_2}\big), \tag{4.3}$$

特别地，注意到 $\lambda([\omega_0]) = \delta_B$。给定任意 $[\psi] \in H^{1,1}(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}), \mathbb{R})$，由定理 3.1 可得

$$\hat{\Theta} = \mathrm{Arg} \int_{\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})} (\omega_0 + \sqrt{-1}\psi)^3 = \sum_{j=1}^{3} \arctan\left(\frac{\langle \lambda([\psi]), \alpha_j^\vee \rangle}{\langle \delta_B, \alpha_j^\vee \rangle} \right) \mod 2\pi, \tag{4.4}$$

注意到，在这个特例中，$I = \emptyset$，因此 $\Phi_I^+ = \Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2\}$。因此，若假设对于某个 s_1, $s_2 \in \mathbb{R}$，有 $[\psi] = s_1[\mathbf{\Omega}_{\alpha_1}] + s_2[\mathbf{\Omega}_{\alpha_2}]$，通过考虑 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ 的 Cartan 矩阵 $C = (C_{ij})$（参见公式（4.2）），可得：

(1) $\langle \delta_B, \alpha_1^\vee \rangle = \langle \delta_B, \alpha_2^\vee \rangle = 2$ and $\langle \delta_B, \alpha_3^\vee \rangle = 4$;
(2) $\langle \lambda([\psi]), \alpha_1^\vee \rangle = s_1$, $\langle \lambda([\psi]), \alpha_2^\vee \rangle = s_2$, $\langle \lambda([\psi]), \alpha_3^\vee \rangle = s_1 + s_2$.

由上文可知，$\hat{\Theta}([\psi]) \in (-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 由下式给出

$$\hat{\Theta}([\psi]) = \arctan\left(\frac{s_1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{s_2}{2}\right) + \arctan\left(\frac{s_1 + s_2}{4}\right). \tag{4.5}$$

由公式（3.4），对于任意 SU(3)-不变的 (1，1)-形式 $\chi = s_1\mathbf{\Omega}_{\alpha_1} + s_2\mathbf{\Omega}_{\alpha_2}$，其关于 ω_0 的拉格朗日相位可具体表示为：

$$\Theta_{\omega_0}(\chi) = \arctan\left(\frac{s_1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{s_2}{2}\right) + \arctan\left(\frac{s_1 + s_2}{4}\right). \tag{4.6}$$

满足该不等式的 (1，1)-类 $[\psi] = s_1[\mathbf{\Omega}_{\alpha_1}] + s_2[\mathbf{\Omega}_{\alpha_2}]$

$$\pi < \arctan\left(\frac{s_1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{s_2}{2}\right) + \arctan\left(\frac{s_1 + s_2}{4}\right) < \frac{3\pi}{2}, \tag{4.7}$$

定义了 $(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}), \omega_0)$ 上 DHYM 方程的超临界解。例如，若考虑 $[\psi] = 4\big([\mathbf{\Omega}_{\alpha_1}] + [\mathbf{\Omega}_{\alpha_2}]\big)$，由于

$$\pi < 3\arctan(2) < \frac{3\pi}{2}, \tag{4.8}$$

我们有 $\chi = 4(\mathbf{\Omega}_{\alpha_1} + \mathbf{\Omega}_{\alpha_2}) \in [\psi]$ 定义了黎曼流形 $(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}), \omega_0)$ 上 dHYM 方程的一个超临界解。在这一特定情形下，根据 [CCL21], ，我们有由校准 (1,1) 形式空间所定义的具有非正截面曲率的黎曼流形

$$\mathcal{H} = \Big\{ \Upsilon \in [\psi] \;\Big|\; \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\hat{\Theta}([\psi])}(\omega_0 + \sqrt{-1}\Upsilon)^n\big) > 0 \Big\}, \tag{4.9}$$

[12]值得指出的是，这一选择并无特别之处。事实上，本例中的所有计算对于 $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$ 上任意选取的 SU(3)-不变（整）K¨ahler 类都成立。

具有良好定义的度量结构，其完备化是一个 CAT(0)测地度量空间。满足不等式的 (1,1)-类 $[\psi]=s_1[\mathbf{\Omega}_{\alpha_1}]+s_2[\mathbf{\Omega}_{\alpha_2}]$

$$\frac{\pi}{2}<\arctan\left(\frac{s_1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{s_2}{2}\right)+\arctan\left(\frac{s_1+s_2}{4}\right)<\frac{3\pi}{2}, \tag{4.10}$$

定义 $(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})\ \omega_0)$ 上 dHYM 方程的超临界解。根据上述条件，很容易构造出不满足超临界条件的 dHYM 方程解。例如，我们可以取类 $-([\mathbf{\Omega}_{\alpha_1}]+[\mathbf{\Omega}_{\alpha_2}])$ 中 dHYM 方程的唯一解 χ。在后一种情况下，我们得到

$$-\frac{3\pi}{2}<\Theta_{\omega_0}(\chi)=3\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)<\frac{\pi}{2}. \tag{4.11}$$

现在考虑与上述解 χ相关的以下中心荷：

(a) $Z_{\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})}([\chi])=-\int_{\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})}\mathrm{e}^{-\sqrt{-1}(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)}=-\frac{(-\sqrt{-1})^3}{3!}\int_{\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})}(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)^3$;

(b) $Z_{\mathbb{P}^1_{\alpha_1}}([\chi])=-\int_{\mathbb{P}^1_{\alpha_1}}\mathrm{e}^{-\sqrt{-1}(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)}=\sqrt{-1}\int_{\mathbb{P}^1_{\alpha_1}}(\omega_0+\sqrt{-1}\chi)$.

计算上述积分，得到

(c) $\mathrm{Arg}(Z_{\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})}([\chi]))=\frac{3\pi}{2}+3\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)$;

(d) $\mathrm{Arg}(Z_{\mathbb{P}^1_{\alpha_1}}([\chi]))=\frac{\pi}{2}+\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)$.

因此可得 $\mathrm{Arg}(Z_{\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})}([\chi]))>\mathrm{Arg}(Z_{\mathbb{P}^1_{\alpha_1}}([\chi]))$，换言之，我们有

$$\mathrm{Im}\left(\frac{Z_{\mathbb{P}^1_{\alpha_1}}([\chi])}{Z_{\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})}([\chi])}\right)=\left|\frac{Z_{\mathbb{P}^1_{\alpha_1}}([\chi])}{Z_{\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})}([\chi])}\right|\sin\left(-\pi-2\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)\right)<0. \tag{4.12}$$

如 [Che21，注 1。10]，上述例子表明，Collins–Jacob–Yau 猜想（猜想 1.2）中“较容易”的方向仅在超临界情形下成立。

沿用前面的记号，设 $\mathbf{E}\in\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}))$ 是某个全纯线丛。由于 $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}))$ 由 $\mathscr{O}_{\alpha_1}(1)$ 和 $\mathscr{O}_{\alpha_2}(1)$ 生成，不失一般性，我们可以假设

$$\mathbf{E}=\mathscr{O}_{\alpha_1}(a)\otimes\mathscr{O}_{\alpha_2}(b), \tag{4.13}$$

对于某个 $a,b\in\mathbb{Z}$。由上可得 $\lambda(\mathbf{E})=a\varpi_{\alpha_1}+b\varpi_{\alpha_2}$。与之前一样，考虑 $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$ 上唯一的 SU(3)-不变 K¨ahler 度量 ω_0，使得 $[\omega_0]=c_1(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}))$，我们有

$$Z_{\mathbb{P}^1_{\alpha_j}}(\mathbf{E})=-\int_{\mathbb{P}^1_{\alpha_j}}\mathrm{e}^{-\sqrt{-1}[\omega_0]}\mathrm{ch}(\mathbf{E})=-\langle\lambda(\mathbf{E}),\alpha_j\rangle+\sqrt{-1}\langle\delta_B,\alpha_j\rangle, \tag{4.14}$$

$\forall j=1,2,3$，回忆一下 $\lambda([\omega_0])=\delta_B$。分别由定理 3.6 和定理 3.7 的第 (2) 项可得

(1) $\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E})=2!\left[\sum_{j=1}^3\frac{\langle\lambda(\mathbf{E}),\alpha_j^\vee\rangle}{\langle\delta_B,\alpha_j^\vee\rangle}\right]\left[\prod_{j=1}^3\frac{\langle\delta_B,\alpha_j^\vee\rangle}{\langle\varrho^+,\alpha_j^\vee\rangle}\right]=12(a+b)$;

(2) $\hat{\mu}(\mathbf{E})=-\left[\sum_{j=1}^3\frac{\mathrm{Re}\big(Z_{\mathbb{P}^1_{\alpha_j}}(\mathbf{E})\big)}{\mathrm{Im}\big(Z_{\mathbb{P}^1_{\alpha_j}}(\mathbf{E})\big)}\right]=\sum_{j=1}^3\frac{\langle\lambda(\mathbf{E}),\alpha_j^\vee\rangle}{\langle\delta_B,\alpha_j^\vee\rangle}=\frac{3}{4}(a+b)$.

在上述计算中，对于第 (1) 项，我们用到了 $\delta_B=2\varrho^+$，注意到

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}),\omega_0)=\prod_{j=1}^3\frac{\langle\delta_B,\alpha_j^\vee\rangle}{\langle\varrho^+,\alpha_j^\vee\rangle}=8, \tag{4.15}$$

参见公式 (2.45)。上述计算表明，一般而言，计算 $\hat{\mu}(\mathbf{E})$ 比计算 $\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E})$ 更为简单。接下来，我们将介绍一种构造性方法，以获得某些全纯向量上的非平凡 Hermitian–Yang–Mills结构。

在 $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$ 上的丛。固定一个整数 $m \in \mathbb{Z}$，可以寻求线性丢番图方程的解。

$$\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = 12(a+b) = m,\ \mathbf{E} \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})), \tag{4.16}$$

为了通过 Whitney 和构造全纯向量丛的多项式稳定示例。上面的丢番图方程当且仅当 $12|m$ （例如 [Mor69，第 5] 章）时才可解，因此设 $m = 12k$，其中 $k \in \mathbb{Z}$。由此，上一个方程变为

$$a + b = k. \tag{4.17}$$

因此，给定上一个方程的一个特解 a_0， $b_0 \in \mathbb{Z}$，我们可以得到由下式明确给出的无穷多个解： $a(s) := a_0 + s$ 以及 $b(s) := b_0 - s$, $s \in \mathbb{Z}$。对于每个 $s \in \mathbb{Z}$，定义 $\mathbf{E}(s) := \mathscr{O}_{\alpha_1}(a(s)) \otimes \mathscr{O}_{\alpha_2}(b(s))$，使得 $a(s) := a_0 + s$ 且 $b(s) := b_0 - s$。根据构造，我们有

$$\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}(s)) = 12(a(s) + b(s)) = 12k = m. \tag{4.18}$$

给定 s_1，……， $s_r \in \mathbb{Z}$、 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们可以定义

$$\mathbf{E}(s_1, \ldots, s_r) := \bigoplus_{j=1}^{r} \mathbf{E}(s_j). \tag{4.19}$$

若 $r = 2$，由于 $\mathbf{E}(s)$ 对每个 $[\omega_0]$-稳定 $s \in \mathbb{Z}$，且 $\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}(s_1)) = \mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}(s_2))$，可得 $\mathbf{E}(s_1, s_2)$ 是 $[\omega_0]$-半稳定的，参见例如 [Kob14]。注意到

$$\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}(s_1, \ldots, s_r)) = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}(s_j)) = m, \tag{4.20}$$

对每个 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$，通过归纳论证可得，$\mathbf{E}(s_1, \ldots, s_r)$ 是若干斜率相同的稳定向量丛的直和；也就是说，对于所有 $s_1, \ldots, s_r \in \mathbb{Z}$ 以及所有 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$，$\mathbf{E}(s_1, \ldots, s_r)$ 都是 $[\omega_0]$-多半稳定的。由 Kobayashi-Hitchin 对应 [Don85, Don87],[UY86],，我们得出，对于所有 $s_1, \ldots, s_r \in \mathbb{Z}$ 以及所有 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$，$\mathbf{E}(s_1, \ldots, s_r)$ 是 Hermite-Einstein 的。此外，在这种情况下，我们可以如下描述相应的 Hermite-Einstein 结构。首先，注意到对于给定的 $s \in \mathbb{Z}$，我们有 $c_1(\mathbf{E}(s)) = [\Omega(s)]$,，使得

$$\mathbf{\Omega}(s) = a(s)\mathbf{\Omega}_{\alpha_1} + b(s)\mathbf{\Omega}_{\alpha_2}. \tag{4.21}$$

因此，根据构造，我们得到

$$m = \mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}(s)) = \int_{\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})} \mathbf{\Omega}(s) \wedge \omega_0^2 = \frac{1}{3}\Lambda_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}(s))\mathrm{Vol}(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}), \omega_0)3!. \tag{4.22}$$

由于 $\mathrm{Vol}(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}), \omega_0) = 8$，我们有

$$\Lambda_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}(s)) = \frac{m}{16}. \tag{4.23}$$

因此，给定 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(s_1, \ldots, s_r)$，与之前一样，我们可以在 $\mathbf{E}$ 上取一个 Hermitian 结构 H，使得相应的 Chern 联络 $\nabla^H \overset{\text{loc}}{=} \mathrm{d} + H^{-1}\partial H$ 的曲率 $F(H)$ 满足

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F(H) = \mathrm{diag}\Big\{\mathbf{\Omega}(s_1), \ldots, \mathbf{\Omega}(s_r)\Big\}. \tag{4.24}$$

由此，我们得到

$$\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_0}(F(H)) = 2\pi\mathrm{diag}\Big\{\Lambda_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}(s_1)), \ldots, \Lambda_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}(s_r))\Big\} = \frac{m\pi}{8}\mathbb{1}_{\mathbf{E}}. \tag{4.25}$$

因此，我们得出结论： $\nabla^H \overset{\text{局部}}{=} \mathrm{d} + H^{-1}\partial H$ 是一个厄米杨–米尔斯联络。我们还可以更进一步，以相当明确的方式描述厄米杨–米尔斯瞬子 ∇^H。事实上，给定一个开集 $U \subset \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$，它同时平凡化了 $\mathbf{E} \to \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$

以及 $B \hookrightarrow \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$，并考虑 $\mathbf{E}|_U$ 中的纤维坐标（w_1，…，w_r），我们可以通过拼接局部的厄米结构来构造 H

$$H_U = \sum_{j=1}^{r} \frac{w_j \overline{w_j}}{||s_U v^+_{\varpi_{\alpha_1}}||^{2a(s_j)} ||s_U v^+_{\varpi_{\alpha_2}}||^{2b(s_j)}}, \tag{4.26}$$

对于某个局部截面 $s_U\colon\ U \subset \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}) \to \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$，这里我们考虑由 $V(\varpi_{\alpha_k})$ 上某个固定的 SU(3)-不变内积定义的 $||\cdot||$，$k = 1, 2$。由此可得

$$\nabla^H|_U = \mathrm{d} + \mathrm{diag}\left\{ A_U^{(1)}, \ldots, A_U^{(r)} \right\}, \tag{4.27}$$

使得

$$A_U^{(j)} = -\partial \log \left(||s_U v^+_{\varpi_{\alpha_1}}||^{2a(s_j)} ||s_U v^+_{\varpi_{\alpha_2}}||^{2b(s_j)} \right), \quad \forall j = 1, \ldots, r. \tag{4.28}$$

特别地，考虑 $U = U^-(B)$，使得

$$U^-(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z_1 & 1 & 0 \\ z_2 & z_3 & 1 \end{pmatrix} B \;\middle|\; z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{(opposite big cell)}, \tag{4.29}$$

参见注记 2.15。取局部截面 $s_U\colon\ U^-(B) \to \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$，使得 $s_U(nB) = n, \forall nB \in U^-(B)$，并注意到

$$V(\varpi_{\alpha_1}) = \mathbb{C}^3 \quad \text{and} \quad V(\varpi_{\alpha_2}) = \textstyle\bigwedge^2(\mathbb{C}^3),$$

其中 $v^+_{\varpi_{\alpha_1}} = e_1$，且 $v^+_{\varpi_{\alpha_2}} = e_1 \wedge e_2$，固定的 $||\cdot||$ 由 $\mathbb{C}^3$ 和 $\bigwedge^2(\mathbb{C}^3)$ 上的标准 SU(3)-不变内积定义，我们得到

$$A_U^{(j)} = -\partial \log \left[\left(1 + \sum_{i=1}^{2} |z_i|^2 \right)^{a(s_j)} \left(1 + |z_3|^2 + \left| \det \begin{pmatrix} z_1 & 1 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right|^2 \right)^{b(s_j)} \right], \tag{4.30}$$

对每个 $j = 1, \ldots, r$。由上述内容可得无穷多个 Hermitian–Yang–Mills 瞬子的显式例子。

Appendix A. Line bundles with prescribed slope

设 X_P 为旗簇。固定一个整数 K¨ahler 类 $[\omega_0] \in \mathcal{K}(X_P)$，并固定一个整数 $m_0 \in \mathbb{Z}$，在本附录中，我们研究与下列方程的可解性相关的问题

$$\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = m_0, \quad \mathbf{E} \in \mathrm{Pic}(X_P). \tag{A.1}$$

主要目的是描述为确保方程 (A.1) 可解而对 ω_0 和 m_0施加的约束。正如下面的结果所示，对这一问题的研究使我们得以在交理论与数论之间建立富有成果的联系。我们首先证明以下基本结果。

命题 A.1. 给定 $m_0 \in \mathbb{Z}$ 和一个整数 K¨ahler 类 $[\omega_0] \in \mathcal{K}(X_P)$，则方程

$$\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = m_0, \quad \mathbf{E} \in \mathrm{Pic}(X_P), \tag{A.2}$$

有解当且仅当 $\tau([\omega_0]) | m_0$，使得

$$\tau([\omega_0]) := \gcd\left\{ \int_{X_P} c_1(\mathscr{O}_\alpha(1)) \wedge [\omega_0]^{n-1} \;\middle|\; \alpha \in \Delta \backslash I \right\}, \tag{A.3}$$

其中，$\mathscr{O}_\alpha(1)$、$\alpha \in \Delta \backslash I$ 是 $\mathrm{Pic}(X_P)$ 的生成元。

证明。给定旗簇 X_P、一个固定的积分 Kähler 类 $[\omega_0] \in \mathcal{K}(X_P)$，以及某个固定的 $m_0 \in \mathbb{Z}$，我们寻求该方程的解。

$$\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = m_0, \quad \mathbf{E} \in \mathrm{Pic}(X_P). \tag{A.4}$$

考虑 $\mathbf{E} = \bigotimes_{\alpha\in\Delta\setminus I} \mathscr{O}_\alpha(x_\alpha)$，使得 $x_\alpha \in \mathbb{Z}$，$\forall \alpha \in \Delta\setminus I$，上面的方程可化为线性方程

$$\sum_{\alpha\in\Delta\setminus I} \deg_{\omega_0}(\mathscr{O}_\alpha(1))x_\alpha = m_0, \tag{A.5}$$

使得 $\deg_{\omega_0}(\mathscr{O}_\alpha(1)) = \int_{X_P} c_1(\mathscr{O}_\alpha(1)) \wedge [\omega_0]^{n-1}$, $\forall \alpha \in \Delta\setminus I$。由于 $c_1(\mathscr{O}_\alpha(1))$、$\alpha \in \Delta\setminus I$ 和 $[\omega_0]$ 均为整类，因此

$$\deg_{\omega_0}(\mathscr{O}_\alpha(1)) = \int_{X_P} c_1(\mathscr{O}_\alpha(1)) \wedge [\omega_0] \wedge [\omega_0]^{n-2} = \mathcal{Q}_{\omega_0}\big(c_1(\mathscr{O}_\alpha(1)), [\omega_0]\big) \in \mathbb{Z}, \tag{A.6}$$

$\forall \alpha \in \Delta\setminus I$，其中 $\mathcal{Q}_{\omega_0}\colon\ H^2(X_P,\ \mathbb{Z}) \times H^2(X_P,\ \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ 是与底层极化霍奇结构相关联的霍奇-黎曼双线性形式（例如 [Voi07], [PS08]）。因此，方程（A.5）等价于线性丢番图方程

$$\sum_{\alpha\in\Delta\setminus I} \mathcal{Q}_{\omega_0}\big(c_1(\mathscr{O}_\alpha(1)), [\omega_0]\big)x_\alpha = m_0. \tag{A.7}$$

由于上述线性丢番图方程有解当且仅当，

$$\gcd\big\{\mathcal{Q}_{\omega_0}\big(c_1(\mathscr{O}_\alpha(1)), [\omega_0]\big)\ \big|\alpha \in \Delta\setminus I\big\}\Big| m_0, \tag{A.8}$$

例如，参见 [Mor69，第 5], [Nat08，§1.6],即可得到所需结果。 □

注记 A.2。由上述结果可知，$\tau([\omega_0])\big|\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E})$，$\forall \mathbf{E} \in$ 皮卡群(X_P) .

R注记 A.3。注意，由广义贝祖恒等式 [Nat08，§1.2],可得

$$\tau([\omega_0])\mathbb{Z} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta\setminus I} \mathcal{Q}_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}_\alpha, \omega_0)\mathbb{Z}, \tag{A.9}$$

这里我们用到了这一事实:

$$\mathcal{Q}_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}_\alpha, \omega_0) := \int_{X_P} \mathbf{\Omega}_\alpha \wedge \omega_0^{n-1} = \mathcal{Q}_{\omega_0}\big(c_1(\mathscr{O}_\alpha(1)), [\omega_0]\big), \tag{A.10}$$

对每个 $\alpha \in \Delta\setminus I$。

注记 A.4. 在命题 A.1 的情形下，给定一个素数 $p \in\mathbb{Z}$，方程

$$\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = p, \quad \mathbf{E} \in \mathrm{Pic}(X_P), \tag{A.11}$$

有解，当且仅当 $\tau([\omega_0]) = p$ 或 $\tau([\omega_0]) = 1$。

注记 A.5. 注意，对于每个舒伯特除子 $D_\alpha \in \mathrm{Div}(X_P)$，$\alpha \in \Delta\setminus I$，都有 $\mathscr{O}_\alpha(1) = \mathcal{O}(D_\alpha)$; 参见第 2.3 小节。因此，给定一个积分 Kähler 类 $[\omega_0] \in \mathcal{K}(X_P)$，我们有

$$\deg_{\omega_0}(\mathscr{O}_\alpha(1)) = \int_{D_\alpha} \omega_0^{n-1} = \big\langle [\omega_0^{n-1}], [D_\alpha]\big\rangle. \tag{A.12}$$

对于每个整数 n 和每个素数 $p \in\mathbb{Z}$，令 $v_p(n)$ 为满足 $p^{v_p(n)}\big| n$ 的最大整数。由算术基本定理可得

$$\tau([\omega_0]) = \prod_{p|\tau([\omega_0])} p^{\min\left\{v_p(\langle [\omega_0^{n-1}],[D_\alpha]\rangle)\ \big|\ \alpha\in\Delta\setminus I\right\}}, \tag{A.13}$$

例如，参见 [Nat08，定理 1。11]。因此，$\tau([\omega_0])$ 的素因数分解完全由交数 $\langle [\omega_0^{n-1}], [D_\alpha]\rangle$, $\alpha \in \Delta\setminus I$ 决定。

由命题 A.1，我们得到以下推论。

推论 A.6. 如果 $[\omega_0] \in \mathcal{K}(X_P)$ 是一个整 K¨ahler 类，满足 $\tau([\omega_0]) = 1$，且$m_0 \in \mathbb{Z}$ 满足

$$m_0 \geq \big(\mathcal{Q}_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}_\gamma, \omega_0) - 1\big) \sum_{\alpha \in \Delta\backslash I, \alpha \neq \gamma} \mathcal{Q}_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}_\alpha, \omega_0), \tag{A.14}$$

对于某个 $\gamma \in \Delta\backslash I$，则存在 $\mathbf{E} \in$皮卡群(X_P)，使得 $H^0(X_P, \mathbf{E}) \neq \{0\}$，且$\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = m_0$。

证明。若方程 (A.14) 中给出的条件成立，则由 [Nat08 定理 1.16]可知，存在整数 $s_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\alpha \in \Delta\backslash I$，使得

$$\sum_{\alpha \in \Delta\backslash I} \mathcal{Q}_{\omega_0}\big(\mathbf{\Omega}_\alpha, \omega_0\big) s_\alpha = m_0. \tag{A.15}$$

D定义 $\mathbf{E} := \bigotimes_{\alpha \in \Delta\backslash I} \mathscr{O}_\alpha(s_\alpha)$，可得 $\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = m_0$。特别地，我们有

$$\lambda(\mathbf{E}) = \sum_{\alpha \in \Delta\backslash I} s_\alpha \varpi_\alpha \in \Lambda^+, \tag{A.16}$$

也就是说，$\lambda(\mathbf{E})$ 是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的一个整数支配权。因此，根据 Borel-Weil 定理，可得

$$H^0(X_P, \mathbf{E}) \cong V(\lambda(\mathbf{E}))^* \neq \{0\}, \tag{A.17}$$

至此，证明完成。 □

注记 A.7. 在上述推论的情形下，我们有：在证明中构造的 $\mathbf{E} \in \mathrm{Pic}(X_P)$ 是一个半正全纯线丛（例如 [Sno89]）。因此，在前一推论的假设下，对于每个充分大的整数 $m_0 \in \mathbb{Z}$，方程$\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = m_0$ 都可以由某个半正全纯线丛求解。

现在我们可以证明定理 E。固定一个积分 K¨ahler 类 $[\omega_0] \in \mathcal{K}(X_P)$，考虑 $\mathbb{Z}_{>0}$ 的以下子集：

$$\mathcal{A}_{[\omega_0]}(n) := \left\{ m \in \mathbb{Z}_{>0} \;\middle|\; \begin{array}{c} 1 \leq m \leq n, \\ \exists\ \mathbf{E} \in \mathrm{Pic}(X_P),\ \text{s.t. } \mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = m. \end{array} \right\}. \tag{A.18}$$

由命题 A.1 可得以下结果。

定理 A.8. 对于每个积分 *K¨ahler* 类 $[\omega_0] \in \mathcal{K}(X_P)$，我们有

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\big|\mathcal{A}_{[\omega_0]}(n)\big|}{n} = \frac{1}{\tau([\omega_0])}, \tag{A.19}$$

使得 $\tau([\omega_0]) :=$ 最大公因数$\big\{$ 度数$_{\omega_0}(\mathscr{O}_\alpha(1)) \;\big|\; \alpha \in \Delta\backslash I\big\}$，其中 $\mathscr{O}_\alpha(1)$、$\alpha \in \Delta\backslash I$ 是皮卡群 $\mathrm{Pic}(X_P)$ 的生成元。

证明。 由命题 A.1 可知

$$\mathcal{A}_{[\omega_0]}(n) = \Big\{ m \in \mathbb{Z}_{>0} \;\Big|\; 1 \leq m \leq n,\ \tau([\omega_0]) | m \Big\}, \tag{A.20}$$

$\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$。给定 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，根据带余除法，存在唯一的整数 $t(n)$ 和 $r(n)$，使得

$$n = \tau([\omega_0]) t(n) + r(n), \quad 0 \leq r(n) < \tau([\omega_0]). \tag{A.21}$$

因此，对于每个 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们有

$$\big|\mathcal{A}_{[\omega_0]}(n)\big| = t(n) = \frac{n - r(n)}{\tau([\omega_0])}. \tag{A.22}$$

由于 $0 \leq r(n) < \tau([\omega_0])$，因此可得

$$0 \leq \frac{1}{\tau([\omega_0])} - \frac{\big|\mathcal{A}_{[\omega_0]}(n)\big|}{n} < \frac{\tau([\omega_0])}{n}. \tag{A.23}$$

因此，$\frac{|\mathcal{A}_{[\omega_0]}(n)|}{n} \to \frac{1}{\tau([\omega_0])}$ 当 $n \to +\infty$ 时。 □

注记 A.9。 上述结果表明，子集

$$\mathcal{A}_{[\omega_0]} = \big\{ m \in \mathbb{Z}_{>0} \;\big|\; \mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = m, \text{ for some } \mathbf{E} \in \mathrm{Pic}(X_P) \big\}, \tag{A.24}$$

具有渐近密度（例如 [Nat08，第 16]章）

$$d(\mathcal{A}_{[\omega_0]}) := \lim_{n\to+\infty} \frac{\big|\mathcal{A}_{[\omega_0]} \cap [1,n]\big|}{n} = \frac{1}{\tau([\omega_0])}. \tag{A.25}$$

备注 A.10（霍奇-黎曼双线性形式）。 在命题 A.5 的设定中，若我们考虑 $\Delta\backslash I = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho\}$，其中 ρ 是 X_P 的皮卡德数，我们有

$$\deg_{\omega_0}(\mathbf{E}) = \mathcal{Q}_{\omega_0}\big(c_1(\mathbf{E}), [\omega_0]\big) = \sum_{i,j=1}^{\rho} \langle c_1(\mathbf{E}), \mathbb{P}^1_{\alpha_i}\rangle \langle [\omega_0], \mathbb{P}^1_{\alpha_j}\rangle \underbrace{\mathcal{Q}_{\omega_0}\big(\mathbf{\Omega}_{\alpha_i}, \mathbf{\Omega}_{\alpha_j}\big)}_{(\mathcal{Q}_{\omega_0})_{ij}}, \tag{A.26}$$

使得

$$(\mathcal{Q}_{\omega_0})_{ij} = \int_{X_P} \mathbf{\Omega}_{\alpha_i} \wedge \mathbf{\Omega}_{\alpha_j} \wedge \omega_0^{n-2}, \tag{A.27}$$

$\forall i,\ j = 1,\ \ldots\ldots,\ \rho$。根据 [Sz´e14，引理 47]，可知

$$(\mathcal{Q}_{\omega_0})_{ij} = (n-2)!\Big(\Lambda_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}_{\alpha_i})\Lambda_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}_{\alpha_j}) - \langle \mathbf{\Omega}_{\alpha_i}, \mathbf{\Omega}_{\alpha_j}\rangle_{\omega_0}\Big)\mathrm{Vol}(X_P, \omega_0), \tag{A.28}$$

$\forall i,\ j = 1,\ \ldots\ldots,\ \rho$。根据注记 2.25，可得

$$\Lambda_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}_\alpha) = \sum_{\beta\in\Phi_I^+} \frac{\langle \varpi_\alpha, \beta^\vee\rangle}{\langle \lambda([\omega_0]), \beta^\vee\rangle},\ \langle \mathbf{\Omega}_\alpha, \mathbf{\Omega}_\gamma\rangle_{\omega_0} = \sum_{\beta\in\Phi_I^+} \frac{\langle \varpi_\alpha, \beta^\vee\rangle}{\langle \lambda([\omega_0]), \beta^\vee\rangle}\frac{\langle \varpi_\gamma, \beta^\vee\rangle}{\langle \lambda([\omega_0]), \beta^\vee\rangle}, \tag{A.29}$$

$\forall \alpha,\ \gamma \in \Delta\backslash I$。此外，由方程 (2.45) 可得

$$\mathrm{Vol}(X_P, \omega_0) = \prod_{\beta\in\Phi_I^+} \frac{\langle \lambda([\omega_0]), \beta^\vee\rangle}{\langle \varrho^+, \beta^\vee\rangle}. \tag{A.30}$$

因此，霍奇-黎曼双线性形式 $\mathcal{Q}_{\omega_0}\colon H^2(X_P,\mathbb{Z}) \times H^2(X_P,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ 完全由 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的 Cartan 矩阵所给出的基本权与单根之间的关系决定。此外，固定一个积分 K¨ahler 类 $\omega_0 = \sum_{\alpha\in\Delta\backslash I} s_\alpha \mathbf{\Omega}\alpha$，并固定 $m_0 \in \mathbb{Z}$，方程 $\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = m_0, \mathbf{E} \in$ 皮卡群(X_P) 等价于

$$\begin{pmatrix} \int_{\mathbb{P}^1_{\alpha_1}} c_1(\mathbf{E}) & \cdots & \int_{\mathbb{P}^1_{\alpha_\rho}} c_1(\mathbf{E}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathcal{Q}_{\omega_0})_{11} & \cdots & (\mathcal{Q}_{\omega_0})_{1\rho} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathcal{Q}_{\omega_0})_{\rho 1} & \cdots & (\mathcal{Q}_{\omega_0})_{\rho\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_\rho \end{pmatrix} = m_0,\ \mathbf{E} \in \mathrm{Pic}(X_P). \tag{A.31}$$

值得指出的是，若 $\mathbf{F} \in$ 皮卡群(X_P) 满足 $\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{F}) = m_0$，则方程 (A.31) 的所有解均可写为 $\mathbf{F} \otimes \mathbf{G}$，其中 $\mathbf{G} \in$ 皮卡群(X_P) 是相应齐次问题 $\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = 0, \mathbf{E} \in$ 皮卡群(X_P) 的一个解。

下面通过一个例子来阐释上述思路。

例 A.11. 设 $X_P = \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$ 如例 4.1 所示。给定某个积分 K¨ahler 度量$\omega_0 = s_1\mathbf{\Omega}_{\alpha_1} + s_2\mathbf{\Omega}_{\alpha_2}$，通过直接计算可得：

(1) $(\mathcal{Q}_{\omega_0})_{11} = 1!\Big[\Big(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_1+s_2}\Big)^2 - \Big(\frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{(s_1+s_2)^2}\Big)\Big]\frac{s_1s_2(s_1+s_2)}{2} = s_2$;

(2) $(\mathcal{Q}_{\omega_0})_{22} = 1!\left[\left(\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_1+s_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{s_2^2}+\frac{1}{(s_1+s_2)^2}\right)\right]\frac{s_1s_2(s_1+s_2)}{2} = s_1$;

(3) $(\mathcal{Q}_{\omega_0})_{12} = (\mathcal{Q}_{\omega_0})_{21} = 1!\left[\left(\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_1+s_2}\right)\left(\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_1+s_2}\right) - \frac{1}{(s_1+s_2)^2}\right]\frac{s_1s_2(s_1+s_2)}{2} = s_1+s_2$.

Therefore, for an arbitrary integral class Kähler metric $\omega_0 = s_1\mathbf{\Omega}_{\alpha_1} + s_2\mathbf{\Omega}_{\alpha_2}$, we have

$$\mathcal{Q}_{\omega_0} = \begin{pmatrix} s_2 & s_1+s_2 \\ s_1+s_2 & s_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}). \tag{A.32}$$

由上可知，与问题 $\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = m_0$ 相关的一般方程，使得$m_0 \in \mathbb{Z}$，且 $\mathbf{E}$ ∈皮卡群($\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$)，可以显式地写成如下形式：

$$(s_1s_2 + s_2(s_1+s_2))x_1 + (s_1s_2 + s_1(s_1+s_2))x_1 = m_0, \tag{A.33}$$

其中 $\mathbf{E} = \mathscr{O}_{\alpha_1}(x_1)\otimes\mathscr{O}_{\alpha_2}(x_2)$ ∈ 皮卡群($\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$)，参见方程 (A.31)。注意，在 $s_1 = s_2 = 2$ 的特殊情形下，我们可得到方程 (4.16)。由命题 A.1 可知，线性丢番图方程 (A.33) 当且仅当满足以下条件时可解，

$$\tau([\omega_0]) = \gcd\big\{s_1s_2 + s_2(s_1+s_2), s_1s_2 + s_1(s_1+s_2)\big\}\Big| m_0. \tag{A.34}$$

如例 4.1 所示，上述思想使我们能够构造出若干个显式的非平凡 Hermitian–Yang–Mills 瞬子实例。此外，由定理 A.8，对于每个整 K¨ahler 类 $[\omega_0] \in \mathcal{K}(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}))$，若满足 $\omega_0 = \omega_0 = s_1\mathbf{\Omega}_{\alpha_1} + s_2\mathbf{\Omega}_{\alpha_2}$，则我们有 $\mathcal{A}_{[\omega_0]}$ 的自然密度为

$$d(\mathcal{A}_{[\omega_0]}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\big|\mathcal{A}_{[\omega_0]}\cap[1,n]\big|}{n} = \frac{1}{\tau(s_1,s_2)}, \tag{A.35}$$

使得 $\tau(s_1,\ s_2)\colon = \gcd\big\{s_1s_2+s_2(s_1+s_2)\ s_1s_2+s_1(s_1+s_2)\big\}$。注意到，由于 $\tau(s_1,\ s_2)$ 关于变量 s_1 和 s_2 对称，我们可以很容易地构造出满足 $\tau([\omega_1]) = \tau([\omega_2])$ 且具有 $[\omega_1] \neq [\omega_2]$ 的整 K¨ahler 类 $[\omega_1],\ [\omega_2] \in \mathcal{K}(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}))$。

为了证明定理 F，我们介绍一些关于旗簇上的本原 (1，1)-形式的基本结果。

注 A.12（本原 2-形式）。给定一个旗簇 X_P，其上带有某个固定的整 K¨ahler 类 $[\omega_0] \in \mathcal{K}(X_P)$，并考虑 Λ_{ω_0}，即所对应的 Lefschetz 算子的对偶，我们可以显式描述本原子模

$$H^2_{\omega_0}(X_P,\mathbb{Z})_{\mathrm{prim}} = \ker\Big(\Lambda_{\omega_0}\colon H^2(X_P,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}\Big), \tag{A.36}$$

关于以 X_P 为基础的复单李代数的 Cartan 矩阵。事实上，沿用注 A.10 中的记号，给定 $[\psi] \in H^2(X_P,\mathbb{Z})$，我们有

$$\Lambda_{\omega_0}([\psi]) = \sum_{\alpha\in\Delta\backslash I}\Lambda_{\omega_0}([\mathbf{\Omega}_\alpha])x_\alpha, \tag{A.37}$$

使得 $x_\alpha = \big\langle\lambda([\psi]),[\mathbb{P}^1_\alpha]\big\rangle, \forall\alpha\in\Delta\backslash I$。由于 $\Lambda_{\omega_0}([\mathbf{\Omega}_\alpha]) = \mathcal{Q}_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}_\alpha,\omega_0),\ \ \forall\alpha\in\Delta\backslash I$，我们有

$$\Lambda_{\omega_0}([\psi]) = 0 \iff \sum_{\alpha\in\Delta\backslash I}\frac{\mathcal{Q}_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}_\alpha,\omega_0)}{\tau([\omega_0])}x_\alpha = 0. \tag{A.38}$$

记 $q_\alpha(\omega_0) = \frac{\mathcal{Q}_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}_\alpha,\omega_0)}{\tau([\omega_0])},\ \ \forall\alpha\in\Delta\backslash I$，并取某个 $\gamma\in\Delta\backslash I$，我们通过如下设置，得到 $H^2(X_P,\mathbb{Z})_{\mathrm{prim}}$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基。

$$\xi_\alpha := -q_\alpha(\omega_0)[\mathbf{\Omega}_\gamma] + q_\gamma(\omega_0)[\mathbf{\Omega}_\alpha], \tag{A.39}$$

对所有满足 $\alpha\neq\gamma$ 的 $\forall\alpha\in\Delta\backslash I$，由此我们得到

$$H^2(X_P,\mathbb{Z})_{\mathrm{prim}} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta\backslash I,\alpha\neq\gamma}\mathbb{Z}\xi_\alpha. \tag{A.40}$$

根据构造，我们得到一个关于 $\mathcal{Q}_{\omega_0}$ 的正交分解

$$H^2(X_P,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\omega_0] \oplus H^2(X_P,\mathbb{Z})_{\mathrm{prim}}. \tag{A.41}$$

若考虑扩张 $\mathcal{Q}_{\omega_0}\colon H^2(X_P,\mathbb{Q}) \times H^2(X_P,\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$，则可对基 ξ_α, $\alpha \in \Delta\backslash I$, $\alpha \neq \gamma$ 关于 $\mathcal{Q}_{\omega_0}$ 应用格拉姆–施密特过程，从而将 $H^2(X_P,\mathbb{Q})$ 完全分解为 $\mathcal{Q}_{\omega_0}$-正交的 $\mathbb{Q}$-子空间的直和。由式 (A.39)，我们可以显式描述同态 $\mu_{[\omega_0]}\colon \mathrm{Pic}(X_P) \to \mathbb{Z}$ 的核的一组生成元。事实上，记

$$\mathrm{Pic}^0_{\omega_0}(X_P) = \Big\{ \mathbf{E} \in \mathrm{Pic}(X_P) \;\Big|\; \mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = 0 \Big\}, \tag{A.42}$$

由于 $\mathrm{Pic}^0_{\omega_0}(X_P) \cong H^2_{\omega_0}(X_P,\mathbb{Z})^{\mathrm{prim}}$，我们有

$$\mathscr{O}_\gamma(-q_\alpha(\omega_0)) \otimes \mathscr{O}_\alpha(q_\gamma(\omega_0)), \quad \forall \alpha \in \Delta\backslash I, \alpha \neq \gamma, \tag{A.43}$$

定义 $\mathrm{Pic}^0_{\omega_0}(X_P)$ 的一组生成元。此外，考虑有限生成子群 $\mathrm{H}_{\omega_0} \subset \mathrm{Hom}(P,\mathbb{C}^\times)$，使得

$$\mathrm{H}_{\omega_0} := \Big\langle \vartheta_{\varpi_\gamma}^{-q_\alpha(\omega_0)} \vartheta_{\varpi_\alpha}^{q_\gamma(\omega_0)} \;\Big|\; \alpha \in \Delta\backslash I, \alpha \neq \gamma \Big\rangle, \tag{A.44}$$

回顾，$\mathrm{Hom}(P,\mathbb{C}^\times) = \mathrm{Hom}(T(\Delta\backslash I)^{\mathbb{C}},\mathbb{C}^\times)$，且 $(\mathrm{d}\vartheta_{\varpi_\alpha})_e = \varpi_\alpha$, $\forall \alpha \in \Delta$。上述构造的子群 H_{ω_0} 完成了如下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
1 & \longrightarrow & \mathrm{H}_{\omega_0} & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{Hom}(P,\mathbb{C}^\times) & \xrightarrow{\widehat{\mu}_{[\omega_0]}} & \tau([\omega_0])\mathbb{Z} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
1 & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^0_{\omega_0}(X_P) & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{Pic}(X_P) & \xrightarrow{\mu_{[\omega_0]}} & \tau([\omega_0])\mathbb{Z} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 1 & & 1 & & & &
\end{array}$$

在上述图的顶行中，我们考虑 $\widehat{\mu}_{[\omega_0]}\colon \mathrm{Hom}(P,\mathbb{C}^\times) \to \tau([\omega_0])\mathbb{Z}$，使得

$$\widehat{\mu}_{[\omega_0]}(\vartheta) := (n-1)! \left[\sum_{\beta\in\Phi_I^+} \frac{\langle (\mathrm{d}\vartheta)_e, \beta^\vee\rangle}{\langle \lambda([\omega_0]), \beta^\vee\rangle} \right] \left[\prod_{\beta\in\Phi_I^+} \frac{\langle \lambda([\omega_0]), \beta^\vee\rangle}{\langle \varrho^+, \beta^\vee\rangle} \right]. \tag{A.45}$$

$\forall \vartheta \in \mathrm{Hom}(P,\mathbb{C}^\times)$。因此，由定理 3.6 可得 $\widehat{\mu}_{[\omega_0]}(\vartheta) = \mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}_\vartheta)$，其中 $\mathbf{E}_\vartheta \in \mathrm{Pic}(X_P)$ 是由 $\vartheta \in \mathrm{Hom}(P,\mathbb{C}^\times)$ 定义的全纯线丛。注意，命题 A.1 保证 $\widehat{\mu}_{[\omega_0]}$ 和 $\mu_{[\omega_0]}$ 都是满射同态。

例 A.13。如前所述，考虑 $X_P = \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$ 的情形。给定某个积分 Kähler 类 $[\omega_0] = s_1[\mathbf{\Omega}_{\alpha_1}] + s_2[\mathbf{\Omega}_{\alpha_2}]$，由方程 (A.32) 可得

(1) $\mathcal{Q}_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}_{\alpha_1},\omega_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2 & s_1+s_2 \\ s_1+s_2 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = s_1s_2 + s_2(s_1+s_2)$;

(2) $\mathcal{Q}_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}_{\alpha_2},\omega_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2 & s_1+s_2 \\ s_1+s_2 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = s_1s_2 + s_1(s_1+s_2)$.

记 $q_j(\omega_0) = \mathcal{Q}_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}^{\alpha_j}, \omega_0)$ $\underline{\tau([\omega_0])}$, $j = 1, 2$。由上文可知

$$\xi = -q_2(\omega_0)[\mathbf{\Omega}_{\alpha_1}] + q_1(\omega_0)[\mathbf{\Omega}_{\alpha_2}], \tag{A.46}$$

生成 $H^2_{\omega_0}(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}),\mathbb{Z})^{\mathrm{prim}}$。因此，我们得到 $\mathcal{Q}_{\omega_0}$-正交分解

$$H^2(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}),\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\omega_0] \oplus \mathbb{Z}\xi. \tag{A.47}$$

在这种特定情况下，我们有

$$\mathrm{H}_{\omega_0} = \left\{ \vartheta_{\varpi_{\alpha_1}}^{-nq_2(\omega_0)} \vartheta_{\varpi_{\alpha_2}}^{nq_1(\omega_0)} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\langle \vartheta_{\varpi_{\alpha_1}}^{-q_2(\omega_0)} \vartheta_{\varpi_{\alpha_2}}^{q_1(\omega_0)} \right\rangle. \tag{A.48}$$

若我们考虑 $\omega_0 \in c_1(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}))$，如例 4.1 所示，则得到 $q_1(\omega_0) = q_2(\omega_0) = 1$。因此可得

$$\mathrm{H}_{\omega_0} = \left\{ \vartheta_{\varpi_{\alpha_1}}^{-n} \vartheta_{\varpi_{\alpha_2}}^{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\langle \vartheta_{\varpi_{\alpha_1}}^{-1} \vartheta_{\varpi_{\alpha_2}} \right\rangle. \tag{A.49}$$

特别地，我们得到

$$\mathrm{Pic}^0_{\omega_0}(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})) = \left\{ \mathscr{O}_{\alpha_1}(-n) \otimes \mathscr{O}_{\alpha_2}(n) \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{A.50}$$

上述子群 H_{ω_0} 和皮卡群$^0_{\omega_0}(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}))$ 构成如下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
1 & \longrightarrow & \mathrm{H}_{\omega_0} & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{Hom}(B, \mathbb{C}^\times) & \xrightarrow{\widehat{\mu}_{[\omega_0]}} & 12\mathbb{Z} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
1 & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^0_{\omega_0}(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})) & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{Pic}(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})) & \xrightarrow{\mu_{[\omega_0]}} & 12\mathbb{Z} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 1 & & 1 & & & &
\end{array}$$

基于上述思路，我们可以通过以下方式构造 $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$ 上的 $[\omega_0]$-多项式稳定全纯向量丛：
给定某个 $\mathbf{F}_0 \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}))$，取一组互不相同的元素 $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_r \in \mathrm{Pic}^0_{\omega_0}(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}))$，并定义

$$\mathbf{E} := \bigoplus_{j=1}^{r} \left(\mathbf{F}_0 \otimes \mathbf{G}_j \right). \tag{A.51}$$

根据构造，$\mathbf{E}$ 是 $[\omega_0]$-多项式稳定的。注意，$\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = \mu_{[\omega_0]}(\mathbf{F}_0)$。总之，对每个 $m_0 \in 12\mathbb{Z}$ 及每个整数 $r > 0$，都存在一个 $[\omega_0]$-多项式稳定全纯向量丛 $\mathbf{E}$，定义在$\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$上，满足 $\mathrm{rank}(\mathbf{E}) = r$ 且 $\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = m_0$。

根据上述评注中提出的思路，我们可以证明定理 F。

定理 A.14. 给定一个积分的 *Kähler* 类 $[\omega_0] \in \mathcal{K}(X_P)$，则有

$$K_0(X_P) \cong SK_0(X_P) \oplus \mathrm{Pic}^0_{\omega_0}(X_P) \oplus \tau([\omega_0])\mathbb{Z}, \tag{A.52}$$

使得

(1) $SK_0(X_P) := \ker\left(\det\colon\ K_0(X_P) \to \mathrm{Pic}(X_P)\right)$,

(2) $\mathrm{Pic}^0_{\omega_0}(X_P) := \left\{ \mathbf{E} \in \mathrm{Pic}(X_P) \;\middle|\; \deg_{\omega_0}(\mathbf{E}) = 0 \right\}$,

(3) $\tau([\omega_0]) := \gcd\left\{ \deg_{\omega_0}(\mathscr{O}_\alpha(1)) \;\middle|\; \alpha \in \Delta \backslash I \right\}$,

其中，$\mathscr{O}_\alpha(1)$、$\alpha \in \Delta\backslash I$ 是$\mathrm{Pic}(X_P)$的生成元。此外，$\mathrm{Pic}^0_{\omega_0}(X_P)$ 的生成元完全由霍奇-黎曼双线性形式 $\mathcal{Q}_{\omega_0}$确定。

证明。给定 $\mathbf{E} \in$ 皮卡群(X_P)，我们有 $\mathbf{E} = \bigotimes_{\alpha\in\Delta\backslash I} \mathscr{O}_\alpha(n_\alpha)$，使得 $n_\alpha \in \mathbb{Z}$，$\forall \alpha \in \Delta\backslash I$。因此，若我们定义

$$\mathcal{E} := \bigoplus_{\alpha\in\Delta\backslash I} \mathscr{O}_\alpha(n_\alpha), \tag{A.53}$$

由此可得 $[\mathcal{E}] \in K_0(X_P)$ 和 $\det([\mathcal{E}]) = \mathbf{E}$。因此，$\det\colon\ K_0(X_P) \to$ 皮卡群(X_P) 是满射同态。记 $SK_0(X_P) := \ker\left(\det\colon\ K_0(X_P) \to \text{皮卡群}(X_P)\right)$，我们得到阿贝尔群的短正合列。

$$1 \longrightarrow SK_0(X_P) \xrightarrow{\iota} K_0(X_P) \xrightarrow{\det} \mathrm{Pic}(X_P) \longrightarrow 1$$

一旦 $\mathrm{Pic}(X_P)$ 是自由阿贝尔群，上述阿贝尔群的短正合列就会分裂，即，

$$K_0(X_P) \cong SK_0(X_P) \oplus \mathrm{Pic}(X_P). \tag{A.54}$$

F由注 A.12，我们还得到以下阿贝尔群的短正合列 s

$$1 \longrightarrow \mathrm{Pic}^0_{\omega_0}(X_P) \xrightarrow{\iota} \mathrm{Pic}(X_P) \xrightarrow{\deg_{\omega_0}} \tau([\omega_0])\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

由于 $\tau([\omega_0])\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ 也是自由阿贝尔群，因此上述阿贝尔群的短正合列也分裂，从而

$$\mathrm{Pic}(X_P) \cong \mathrm{Pic}^0_{\omega_0}(X_P) \oplus \tau([\omega_0])\mathbb{Z}. \tag{A.55}$$

结合上述事实，我们得到

$$K_0(X_P) \cong SK_0(X_P) \oplus \mathrm{Pic}(X_P) \cong SK_0(X_P) \oplus \mathrm{Pic}^0_{\omega_0}(X_P) \oplus \tau([\omega_0])\mathbb{Z}. \tag{A.56}$$

如我们所见，固定某个 $\gamma \in \Delta\backslash I$，可得

$$\mathrm{Pic}^0_{\omega_0}(X_P) = \left\langle \mathscr{O}_\gamma(-q_\alpha(\omega_0)) \otimes \mathscr{O}_\alpha(q_\gamma(\omega_0)) \;\middle|\; \alpha \in \Delta\backslash I, \alpha \neq \gamma \right\rangle, \tag{A.57}$$

使得 $q_\alpha(\omega_0) = {}^{\mathcal{Q}_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}_\alpha,\omega_0)\ \tau([\omega_0])}$， $\forall \alpha \in \Delta\backslash I$，也就是说，皮卡群$^0_{\omega_0}(X_P)$的生成元完全由霍奇-黎曼双线性形式 $\mathcal{Q}_{\omega_0}$ 确定。□

注记 A.15。 在上述定理的设定下，式 (A.52) 给出的分解也可以由以下阿贝尔群的分裂正合列得到：

$$1 \longrightarrow \det{}^{-1}\left(\mathrm{Pic}^0_{\omega_0}(X_P)\right) \xrightarrow{\iota} K_0(X_P) \xrightarrow{\deg_{\omega_0} \circ \det} \tau([\omega_0])\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

and

$$1 \longrightarrow SK_0(X_P) \xrightarrow{\iota} \det{}^{-1}\left(\mathrm{Pic}^0_{\omega_0}(X_P)\right) \xrightarrow{\det} \mathrm{Pic}^0_{\omega_0}(X_P) \longrightarrow 1$$

下面说明最后几个定理给出的结果。

例 A.16. 与前面一样，考虑 $X_P = \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$。给定 $\omega_0 \in c_1(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}))$，使得 $\omega_0 = 2(\mathbf{\Omega}_{\alpha_1} + \mathbf{\Omega}_{\alpha_2})$，由前面的计算（见例 A.13）可得

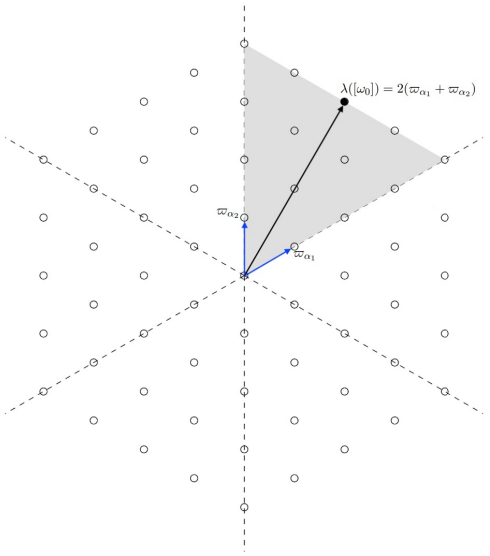
$$K_0(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})) \cong SK_0(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})) \oplus \left\langle \mathscr{O}_{\alpha_1}(-1) \otimes \mathscr{O}_{\alpha_2}(1) \right\rangle \oplus 12\mathbb{Z}. \tag{A.58}$$

现在考虑 $[\omega_0] \in \mathcal{K}(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}))$，使得 $\omega_0 = 2\mathbf{\Omega}_{\alpha_1} + \mathbf{\Omega}_{\alpha_2}$。由例 A.13 可得

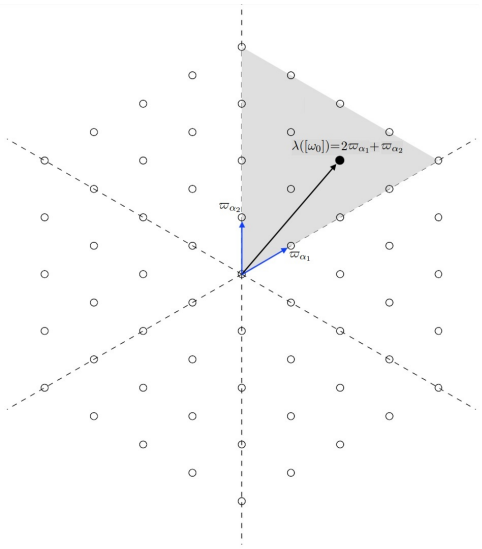
$$\mathcal{Q}_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}_{\alpha_1}, \omega_0) = 5 \quad \text{and} \quad \mathcal{Q}_{\omega_0}(\mathbf{\Omega}_{\alpha_1}, \omega_0) = 8. \tag{A.59}$$

因此，我们有 $\tau([\omega_0]) = 1$，所以

$$K_0(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})) \cong SK_0(\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})) \oplus \left\langle \mathscr{O}_{\alpha_1}(-8) \otimes \mathscr{O}_{\alpha_2}(5) \right\rangle \oplus \mathbb{Z}. \tag{A.60}$$



(A) 对应的整权 $\omega_0 = 2(\mathbf{\Omega}_{\alpha_1} + \mathbf{\Omega}_{\alpha_2})$



(B) 对应的整权 $\omega_0 = 2\mathbf{\Omega}_{\alpha_1} + \mathbf{\Omega}_{\alpha_2}$.

由整 K¨ahler 类定义的整权。

此外，由公式 (A.35) 可得：

(1) $d(\mathcal{A}_{[\omega_0]}) = \frac{1}{12}$, if $\omega_0 = 2(\mathbf{\Omega}_{\alpha_1} + \mathbf{\Omega}_{\alpha_2})$;
(2) $d(\mathcal{A}_{[\omega_0]}) = 1$, if $\omega_0 = 2\mathbf{\Omega}_{\alpha_1} + \mathbf{\Omega}_{\alpha_2}$.

可以看出，如果我们考虑 $\omega_0 = 2\mathbf{\Omega}_{\alpha_1} + \mathbf{\Omega}_{\alpha_2}$，那么对于每一个 $m_0 \in \mathbb{Z}$，方程 $\mu_{[\omega_0]}(\mathbf{E}) = m_0$, $\mathbf{E}$ ∈皮卡群($\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$) 都可以求解。

References

[AB03] Hassan Azad 和 Indranil Biswas。旗流形上的拟势与 K¨ahler-Einstein 度量。II。 *J. Algebra*, 269(2):480–491, 2003。[Akh95] Dmitri N. Akhiezer。 *Lie group actions in complex analysis*。《数学的方面》, E27。Friedr. Vieweg & Sohn, 布伦瑞克 , 1995。[BGG73] I N Bernstein 、 I M Gel'fand 和 S I Gel'fand。g/p 空间的舒伯特胞腔与上同调。 *Russian Mathematical Surveys*, 28(3):1, 1973年6月。[BH59] A. Borel 和 F. Hirzebruch。特征类与齐性空间。II。 *Amer. J. Math.* 81 315 382, 1959 , : – 。[BMT11]

Arend Bayer、Emanuele Macr`ı 和 Yukinobu Toda。三维上的 Bridgeland 稳定条件 I：Bogomolov–Gieseker 型不等式。 *arXiv preprint arXiv:1103.5010*, 2011年。[BR62] A. Borel 和 R. Remmert。 ¨论紧致齐性 K ¨ *Math.* ähler 流形。 , : – *Ann.* 145 429 439, 1961 62 / 。[Bri05] Michel Brion。 *Lectures on the Geometry of Flag Varieties*, 第 33–85 页。Birkh¨auser Basel, 巴塞尔, 2005。[Bri07] Tom Bridgeland。三角范畴上的稳定性条件。 *Annals of Mathematics*, 第 317–345 页, 2007年。[CCL21] Jianchun Chu、Tristan C Collins 和 Man-Chun Lee。紧致 Kähler 流形上几乎校准的 (1 ¨ *Geometry & Topology* 25 5 2573 2619, 2021)–形式空间。 , ( ): – 。[CG19] Eder M. Correa 和 Lino Grama。复旗流形典范丛上的卡拉比 - 丘度量。 *J. Algebra*, 527:109–135, 2019年。[Che21] Gao Chen。J 方程与超临界去变形 Hermitian–Yang–Mills 方程。 *Inventiones mathematicae* 225 529 602, 2021 , : – 。[Chi12]

Evgeni˘ı Mikha˘ılovich Chirka。 *Complex analytic sets*, 第 46 卷。Springer Science & Business Media, 2012年。[CJY20] Tristan C Collins、Adam Jacob 和 Shing-Tung Yau。具有指定拉格朗日相位的 (1, 1) 形式：先验估计与代数障碍。 *Cambridge Journal of Mathematics*, 8 2 407 452, 2020 ( ): – 。

[Cor19] Eder M. Correa。齐性接触流形与卡拉比-丘锥的消解。 *Comm.* , ( ): – 。[CS20] *Math. Phys.* 367 3 1095 1151, 2019
Tristan C Collins 和 Yun Shi。稳定性与变形 Hermitian–Yang–Mills 方程。*arXiv preprint arXiv:2004.04831*, 2020年。[CXY18] T Collins、Dan Xie 和 Shing-Tung Yau。几何与物理中的变形 Hermitian–Yang–Mills 方程。 *Geometry and physics*, 1:69–90, 2018年。[CY21] Tristan C Collins 和 Shing-Tung Yau。镜像对称中的矩映射、非线性偏微分方程与稳定性 I：测地线。 *Annals of PDE*, 7(1):11, 2021年。[Dem97] Jean-Pierre Demailly。 *Complex analytic and differential geometry*。Citeseer, 1997年。[Don85] Simon K Donaldson。复代数曲面上的反自对偶 Yang–Mills 联络与稳定向量丛。 *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1):1–26, 1985年。[Don87] S. K. Donaldson。无穷行列式、稳定丛与曲率。 *Duke Mathematical Journal* 54 1 231 247, 1987 , ( ): – 。[Dou01a] Michael R Douglas。D-膜、范畴与 n $= 1$ *Journal of Mathematical* 超对称性。 , ( ): – *Physics* 42 7 2818 2843, 2001 。[Dou01b] Michael R Douglas。卡拉比 - 丘流形上的 D- 膜、载干 *European Congress of Mathematics: Barcelona July 10–14 2000 Volume II* 449 466 2001 , , , 第 – 页。 Springer, 。[Dou02] Michael R Douglas。狄利克雷膜、同调镜像对称与稳定性。 *arXiv preprint math/0207021* 2002 , 。[Dua03] Haibao Duan。舒伯特簇的次数。 *Advances in Mathematics* 180 1 112 133, , ( ): – 。[Fle84] 2003
Hubert Flenner。射影簇上半稳定丛的限制。 *Commentarii Mathematici Helvetici* 59 635 650, 1984 , : – 。[FW01] William Fulton 和 Chris Woodward。关于舒伯特类的量子乘积。 *Journal of Algebraic Geometry* 13 641 661, 2001 , : – 。[GH14] Phillip Griffiths 和 Joseph Harris。 *Principles of algebraic geometry*。John Wiley & Sons, 2014年。[HL10] Daniel Huybrechts 和 Manfred Lehn。 *The geometry of moduli spaces of sheaves*。剑桥大学出版社, 2010年。[Hum72] James E. Humphreys。 *Introduction to Lie algebras and representation theory*。《研究生数学教材》第 9 卷。施普林格出版社, 纽约-柏林, 1972年。[Hum75] James E. Humphreys。 *Linear algebraic groups*。《研究生数学教材》第 21 号。施普林格出版社, 纽约-海德堡, 1975年。[Huy05] Daniel Huybrechts。 *Complex geometry*。Universitext。施普林格出版社, 柏林, 2005年。入门介绍。[JY17] Adam Jacob 和 Shing-Tung Yau。全纯线丛上的一种特殊拉格朗日型方程。 *Mathematische Annalen*, 369:869–898, 2017年。[Kob14] Shoshichi Kobayashi。 *Differential geometry of complex vector bundles*, 第 793 卷。普林斯顿大学出版社, 2014年。[Lan04] Adrian Langer。正特征下的半稳定层。 *Annals of mathematics*, 第 251–276 页, 2004年。[Laz17] Robert K Lazarsfeld。 *Positivity in algebraic geometry I: Classical setting: line bundles and linear series* 48 2017 , 第 卷。 Springer, 。[LB18] V. Lakshmibai 和 Justin Brown。 *Flag varieties* 53 *Texts and Readings in Math-* , 《》 卷。 *ematics* 2018
Hindustan Book Agency, 德里, 。几何、组合学与表示论的交汇，第二版 [MR2474907]。[Lin22] Chao-Ming Lin。变形 Hermitian–Yang–Mills 方程、正性定理与可解性。 *arXiv preprint arXiv:2201.01438*, 2022年。[LR08] Venkatramani Lakshmibai 和 Komaranapuram N. Raghavan。 *Standard monomial theory*, 第 137 卷, 属于 *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*。施普林格出版社, 柏林, 2008年。不变量理论方法，《不变理论与代数变换群》第 8 卷。[LYZ00] Naichung Conan Leung、Shing-Tung Yau 和 Eric Zaslow。通过傅里叶-村上变换，从特殊拉格朗日到 Hermitian–Yang–Mills。 *arXiv preprint math/0005118*, 2000年。[Mat72] Yozo Matsushima。关于 K¨ahler-Einstein 流形的评注。 *Nagoya Math. J.*, 46:161–173, 1972年。[MMMS00] Marcos Marino、Ruben Minasian、Gregory Moore 和 Andrew Strominger。超对称 p-膜产生的非线性瞬子。 *Journal of High Energy Physics*, 2000(01):005, 2000年。[Mor69] Louis Joel Mordell。 *Diophantine equations*。学术出版社, 1969年。[MR82] Vikram B Mehta 和 Annamalai Ramanathan。射影簇上的半稳定层及其到曲线的限制。 *Mathematische Annalen*, 258(3):213–224, 1982年。[MR84] Vikram Bhagvandas Mehta 和 Annamalai Ramanathan。稳定层的限制与基本群的表示。 *Inventiones mathematicae*, 77(1):163–172, 1984年。

[MS17] Emanuele Macr ` *Moduli of Curves:* 1 和 *CIMAT Guanajuato Mexico 2016* 139 211, 2017
Benjamin Schmidt。《Bridgeland 稳定性讲义》。[Nat08] Melvyn B Nathanson。《 *Elementary methods in number theory*》，第195卷。Springer Science & Business Media，2008年。[Pin19] Vamsi P Pingali。《关于变形 Hermitian Yang-Mills PDE 的一则注记》。*Elliptic Equations* 64 3 503 518, 2019 *Complex Variables and* ，（）：–。

[Pop74] V L Popov。《线性代数群齐性空间的皮卡群及一维齐性向量丛》。 *Mathematics of the USSR-Izvestiya*，8(2):301，1974年4月。[Pro07] Claudio Procesi。《 *Lie groups: an approach through invariants and representations*》，第115卷。Springer，2007年。[PS08] Chris AM Peters 和 Joseph HM Steenbrink。《 *Mixed hodge structures*》，第52卷。Springer Science & Business Media，2008年。[Sno89] Dennis Snow。《齐性向量丛》。载于 *Group Actions and Invariant Theory (Montreal, PQ, 1988) CMS Conf. Proc* 10, 193 205, 1989 ，第 卷，页码–。[Sol13] Jake P Solomon。《Calabi 同态、拉格朗日路径与特殊拉格朗日子流形》。 *Mathematische Annalen* 357 1389 1424, 2013 ：–。[Sol14] Jake P Solomon。《正拉格朗日子流形空间的曲率》。 *Geometric and Functional Analysis* 24 670 689, 2014 ：–。[Sz´e14] G´abor Sz´ekelyhidi。《 *An Introduction to Extremal Kahler Metrics*》，第152卷。美国数学学会，2014年。[Tak78] Masaru Takeuchi。《复射影空间中的齐性 K ¨ *Japan. J.* ahler 子流形》。[， （）：–。 *Math. (N.S.)* 4 1 171 219, 1978
06] R. P. Thomas。《稳定性条件与辫群》。 *Communications in Analysis and Geometry* 14 1 135 161, 2006 ，（）：–。[Tim11] Dmitry A. Timashev。《 *Homogeneous spaces and equivariant embeddings* 138 *Ency-*》，第 卷。 *clopaedia of Mathematical Sciences* 2011
Springer，海德堡，。不变量理论与代数变换群，第8卷。[UY86] Karen Uhlenbeck 和 Shing-Tung Yau。《稳定向量丛上 Hermitian-Yang-Mills 联络的存在性》。 *Communications on Pure and Applied Mathematics* 39 1 257 293, ，（S）：S –S。[Voi07] 1986
Claire Voisin。《 *Hodge theory and complex algebraic geometry. I*》，第 76 *Cambridge Studies* 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2007 *in Advanced Mathematics*
英文版，。由 Leila Schneps 从法文译出。

IMECC-Unicamp, Departamento de Matemática. Rua Sérgio Buarque de Holanda 651, Cidade Universitária Zeferino Vaz. 13083-859 Campinas-SP Brazil ，，

E-mail: ederc@unicamp.br