arXiv:2304.02124v1 [cs.DS] 4 Apr 2023

# The Bit Complexity of Efficient Continuous Optimization

Mehrdad Ghadiri* Richard Peng† Santosh S. Vempala‡

**Abstract**

我们分析基本优化问题高效算法的位复杂度，例如线性回归、 $p$-范数回归和线性规划（线性规划）。最先进的算法是迭代式的；就算术运算次数而言，它们达到了当前两个 $n\times n$ 矩阵相乘的时间复杂度（相差至多多对数因子）。然而，以往的工作通常假设算术运算具有无限精度，并且由于复杂的逆维护技术，这些算法的实际运行时间尚不明确。为确定这些算法的运行时间和位复杂度，我们证明了一个称为 *inverse maintenance*的核心公共子程序具有向后稳定性。此外，我们表明，求解约束加权回归问题的迭代方法可以借助有界误差预条件器来实现。具体而言，我们证明，线性规划可以在矩阵乘法时间乘以依赖于矩阵条件数 $\kappa$ 以及线性规划问题的内半径和外半径的多对数因子的时间内近似求解。 $p$-范数回归可以在矩阵乘法时间乘以关于 $\kappa$的多对数因子的时间内近似求解。最后，线性回归可以在输入稀疏时间乘以关于 $\kappa$ 的多对数因子的时间内近似求解。此外，通过利用更快的稀疏线性方程组求解器，我们还给出了实现低于矩阵乘法时间的$p$-范数回归求解结果。

*Georgia Institute of Technology, ghadiri@gatech.edu
†Georgia Institute of Technology & University of Waterloo, y5peng@uwaterloo.ca
‡Georgia Institute of Technology, vempala@gatech.edu

A preliminary version of this work that focuses only on the $p$-norm problem and the running time for sparse instances appears in arxiv:2109.11537 [GPV21].

# 目录

1 引言 1
1.1 结果.21.2 技术.51.3 讨论.71.4 符号与预备知识.7

2 线性回归 9

**3 逆矩阵维护稳定性 13**3.1 密集型逆维护数据结构的位复杂度.153.2 稀疏逆维护数据结构的位复杂度.17

4 使用内点法的线性规划 **20**
4.1 线性规划预备知识与初始可行点.214.2 求解线性规划的稳健内点法.244.3 无逆矩阵的路径跟踪内点法.304.4 比矩阵乘法更快地求解稀疏线性规划（适用于 $\omega > 2$.5.35

**5 $p$-范数回归 39**
5.1 残差问题.395.2 求解残差问题.425.3 带等式约束的加权线性回归.465.4 混合 $(2, \infty)$-范数最小化.48
5.5 混合 $(2, p)$-范数最小化.58

**6 Open Problems 64**

**References 64**

低秩矩阵**69**

# 1 引言

过去二十年，算法设计中的许多突破都依赖于连续算法原语 [LS13, BCLL18, AKPS19, CLS21, Bra20, BLSS20]。对连续方法的日益关注反过来又引发了对基本数值例程的重新兴趣和改进的运行时界限。然而，这些界限中的许多最初是在假设无限精度的精确计算的情况下声称的[1]。放松这一假设对于声称真正更快的算法当然至关重要。作为说明，在线性方程组的情况下，克rylov子空间方法如著名的共轭梯度算法已知需要 $O(n \cdot \text{NNZ(A)})$ 算术运算（其中 NNZ 表示非零条目的数量），但每个都涉及最坏情况下具有 $\Omega(n)$ 位的中间数字。因此，尽管每次迭代只是矩阵-向量乘法，每次迭代的成本是 $O(n \cdot \text{NNZ(A)})$，总体成本是$O(n^2 \cdot \text{NNZ(A)})$，这使其比“直接方法”差得多——线性方程组可以用位复杂度 $O(n^\omega)$ [Sto05]求解~。通过仔细的位复杂度分析表明，块-克rylov方法可用于求解充分稀疏的线性方程组，对于多项式条件矩阵，比矩阵乘法更快 [PV21, Nie22]。

对于回归和线性规划等更一般的凸优化问题，快速迭代方法数十年来一直受到深入研究，其中相当一部分工作聚焦于凸优化的内点法（IPM）。自 Karmarkar [Kar84] 和 Vaidya 的开创性论文 [Vai89], 以来，维护经过低秩更新修改的矩阵的逆，一直是线性规划快速算法中的重要工具 [CLS19, Bra20, BLSS20, BLL+21、JSWZ21、SY21]、 $p$-范数回归[BCLL18, AKPS19, APS19, AS20, AKPS22, ABS21], 半正定规划 [JKL+20、HJS+22、JNW22]以及诸多动态优化问题 [BNS19, BN19, BFN22, JPW22]。近期在渐近复杂度方面取得的成功，已使其接近矩阵乘法所需的时间；这些方法都依赖于在每次迭代中求解一个缓慢变化的线性方程组。因此，与在每次迭代中从头求解线性方程组相比，它们更适合采用逆矩阵维护。

在优化文献中，人们普遍承认，位复杂度分析可能十分困难。例如，在介绍其内点法的论文中 [Ren 88], Renegar 对 Karmarkar 提出的原始内点算法的位复杂度作了如下评论：

> “在本文的原始版本中，我写道，我不明白如何像 Karmarkar 在其论文中所声称的那样，使用 $O(L)$ 位精度（假设表示原始问题所需的位数为 $L$）来执行 Karmarkar 的算法。后来，Karmarkar使我相信，如果不依赖秩一更新，这是可以做到的，而本文中的算法并不依赖秩一更新。我们的复杂度分析中所包含的论证依赖于这样一个事实：只需近似求解所需解的线性方程，而利用Cholesky 分解以及相应矩阵的条件数有界这一事实，可以高效地完成这一过程。$2^{O(L)}$。” [任88]

这里， $L$ 指的是问题的总比特复杂度（即矩阵 A、b、c的所有条目的比特数之和）。后续工作论证了， $L$ 可以替换为约束矩阵 A的最大子行列式的对数 [LS13, CLS19,Bra20]。由于后者更小，我们在本文其余部分采用后一个定义来表示 $L$。我们立即指出， $L$ 可能大到 $n$l，其中l 是表示A的任意单个条目所使用的比特数。此外，在随机矩阵上，以高概率有 $L = \Omega(n)$[TV05]。这意味着，对于大多数实例，这些算法的实际运行时间比算术运算的数量多出一个 $n$倍。在本文中，我们证明，这些算法（经过适当的修改和舍入）可以在比特复杂度取决于条件数的对数（在随机矩阵上以高概率为 $O$(对数 $n$)[Ede88, Ede89]）以及线性规划外半径与内半径之比的对数的情况下执行。在另一篇引入其条件数的论文中 [Ren96], Renegar 提倡使用共轭梯度法来求解内点法每一步中产生的线性方程组。注意，这也会导致一个额外的 $n$因子。

由于矩阵逆只能近似计算，因此有必要说明需要多少位的精度，才能保证尽管在逆矩阵维护过程中误差不断累积，最终目标精度仍然足够小。这一性质与数值分析学家所称的稳定性密切相关，并且经过了仔细

[1] This is unlike the development in the classic book [GLS12], where bit complexity analysis is carried out carefully when establishing polynomial time bounds.

在许多数值算法中被研究，例如，用于特征值的计算 [TBI97]；然而，对于基于内点法的最先进结果，它并未被严格确立。

对于非线性优化问题，情况更为棘手，例如 $p$-范数最小化，即 $\min\{\|x\|_p^p : A^\top x = b\}$。对于任意 $p \geq 2$，存在仅需 $\tilde{O}(n^{1/3})$ 次迭代的迭代算法（与线性规划不同，后者目前需要 $\sqrt{n}$ 次迭代）。然而，这些算法的分析 [AKPS19, APS19, AS20, BCLL18] 假设无限位精度，同时使用逆矩阵维护的复杂变体。$p$-范数最小化的另一个困难在于精确解的位复杂度可能无界（因为它可能是无理数），而对于线性方程组（以及线性回归，即 $p = 2$），使用有理数表示可将其界限为 $O(nl)$，其中 $l$ 是输入矩阵条目的位复杂度。已证明线性方程组可在时间 $O(n^\omega \cdot l)$ [Sto05] 内求解；然而，即使是在输入稀疏时间内求解线性回归问题的算法的位复杂度，这是一个被广泛研究且重要的问题 [CW14, NN13, CLM+15]，尚未确立。

在本文中，我们研究最先进算法在线性回归、 $p$-范数最小化和线性规划中的位复杂度。我们的核心技术结果界定了用于求解线性回归问题的一般逆矩阵维护和迭代算法的位复杂度。我们相信这些工具将广泛适用于连续优化中的数值算法。

指数低于 2 的矩阵乘法算法不切实际。5 意味着我们给出的最快位复杂度界仅具有理论意义。不过，我们的结果适用于截至当前最快算法的所有矩阵乘法算法，其矩阵指数为 $\omega \approx 2.372$ [AW21]。具体而言，它们适用于具有 $O(n^3)$ 和 $O(n^{2.808})$ (Strassen 算法 [S+69]) 运行时间的算法。此外，我们所研究的迭代算法在实践中效果显著。例如，我们在第 4 节的分析基于 Gurobi 库中使用的内点法 [2]；针对 $p$-范数回归的迭代精炼方法在实践中已展现出良好前景 [APS19]；而用于线性回归的迭代方法，则为张量分解带来了理论上和实践上都更快的算法 [FFG22]。

## 1.1 Results

我们从一些与算法的稳定性和位复杂度相关的定义开始。函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的条件数被定义为满足以下条件的最小非负实数 $\kappa_f$

$$\frac{\|f(x+\delta x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} = \kappa_f \cdot \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} + O\left(\left(\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\right)^2\right),$$

其中 $y, \delta y \in \mathbb{R}^n$。对于矩阵的逆，这与定义为 $\kappa(A) := \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$ 的矩阵条件数相同。已有研究表明，基于快速矩阵乘法的递归算法是对数稳定的 [DDH07]，具体含义如下。

$$\frac{\|g(A) - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq O(\varepsilon)\kappa(A)^{\text{poly}\log(n)} + O(\varepsilon^2),$$

其中，$g(A) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是求逆算法的输出。取 $\varepsilon < \epsilon \|A^{-1}\| \kappa(A)^{\text{poly}\log(n)}$，我们可以保证 $\|g(A) - A^{-1}\| \leq \epsilon$。这意味着，通过使用 $\text{poly}\log(n) \cdot \log(\kappa) + \log(1/\epsilon)$ 位，我们可以达到 $\|g(A) - A^{-1}\| \leq \epsilon$。因此，我们考虑以下数值稳定性的定义，它们在相差一个 $\kappa(A)$ 因子的范围内等价。

定义 1（计算逆矩阵的数值稳定性）。设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是一个可逆矩阵。考虑一种算法，它计算矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 作为 $A$ 的逆矩阵。若满足 $\|M - A^{-1}\| \leq \varepsilon$，则该算法是前向稳定的；若满足 $\|M^{-1} - A\| \leq \varepsilon$，则该算法是后向稳定的。

正如我们稍后将讨论的，前向稳定性足以求解线性回归。然而，为了保证逆矩阵维护，我们需要后向稳定性。

我们的第一个结果界定了在输入稀疏时间内求解线性回归问题的位复杂度。随后，我们将这一结果扩展到某些加权约束回归问题，这些问题被用作 $p$-范数回归问题的子程序。我们将使用运行时间来表示计算位级操作在内的总时间。

[2] https://www.gurobi.com/wp-content/plugins/hd_documentations/documentation/9.0/refman.pdf

以及位复杂度来指代表示的大小。我们还使用“高概率”表示：对于任意常数 $C$，其概率至少为 $1-n^{-C}$。

定理 1.1（线性回归）。设 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times d}$ 是一个满秩矩阵，具有 $n\geq d$ 且条件数由 $\kappa$ 界定，以及 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ 均具有 $\log(\kappa)$ 的位复杂度。设 $\mathbf{x}^*=\arg\min_{\mathbf{x}}\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2=(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{b}$ 和 $0<\epsilon<1$。则存在一种算法，以高概率计算 $\mathbf{x}$ 使得

$$\|\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}^*\|_{\mathbf{A}^\top\mathbf{A}}\leq\epsilon\cdot\left\|\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{b}\right\|_2,$$

或者等价地

$$\|\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{b}\|_2\leq\epsilon\cdot\left\|\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{b}\right\|_2+\left\|(\mathbf{I}-\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top)\mathbf{b}\right\|_2,$$

在时间 $\tilde{O}((d^\omega+d^2\cdot\log^2(1/\epsilon)+\mathrm{NNZ}(\mathbf{A})\cdot\log^2(1/\epsilon))\cdot\log\kappa)$ 内。

˜该 $O$ 在上述结果和本文的其余部分中隐藏了 $\mathrm{poly}\log(nd)$ 因子以及 $\mathrm{poly}\log\log(\kappa/\epsilon)$ 因子。为简单起见，在我们所有的结果中，我们假设矩阵 $\mathbf{A}$ 具有满列秩。然而，这并非限制。如我们在附录 A 中所示，低秩矩阵可以通过连接单位矩阵的一个小因子来修改为具有满列秩的矩阵，这会引入一个小误差。

接下来，我们考虑近似求解线性规划的位复杂度。我们考虑如下形式的线性规划：

$$\min_{\mathbf{A}^\top\mathbf{x}=\mathbf{b},\mathbf{x}\geq0}\mathbf{c}^\top\mathbf{x}\quad(\text{primal})\quad\text{and}\quad\max_{\mathbf{A}\mathbf{y}\leq\mathbf{c}}\mathbf{b}^\top\mathbf{y}\quad(\text{dual}).$$

我们首先定义一些参数。

定义 2。设 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times d}$、$\mathbf{b}\in\mathbb{R}^d$、$\mathbf{c}\in\mathbb{R}^n$ with $n\geq d$。对于形如 $\min_{\mathbf{A}^\top\mathbf{x}=\mathbf{b}、\mathbf{x}\geq0}\mathbf{c}^\top\mathbf{x}$ 的线性规划，我们定义以下量：

- 内半径 $r$：存在一个 $\mathbf{x}$，使得 $\mathbf{A}^\top\mathbf{x}=\mathbf{b}$，并且对所有 $i\in[n]$，$\mathbf{x}_i\geq r\geq0$。
- 外半径 $R$：对于所有满足 $\mathbf{A}^\top\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的 $\mathbf{x}\geq0$，$\|\mathbf{x}\|_2\leq R$。

下一个定理表明，鲁棒内点法 [CLS19、Bra20] 只需要使用具有 $\tilde{O}(\log(\frac{\kappa R}{\epsilon r}\cdot))$ 位的定点算术。我们注意到，直接使用 [CLS19、Bra20], 中的算法，并不能推出以下结果的时间复杂度。首先，必须界定逆矩阵维护的位复杂度（在更新步骤中进行适当的舍入——参见算法 4中的数据结构）；其次，对问题所做的修改必须以确保约束矩阵的条件数不会发生显著变化的方式进行，从而找到初始可行解。我们采用 [LV21]的初始化方法，并证明所得矩阵的条件数与 $n$相比仅相差多项式因子。

定理 1.2（鲁棒内点法）。给定满列秩矩阵 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times d}$，其条件数为 $\kappa$，$\mathbf{b}\in\mathbb{R}^d$、$\mathbf{c}\in\mathbb{R}^n$ 的位复杂度均为 $\log(\kappa)$，以及误差参数 $0<\epsilon<1$。假设线性规划 $\min_{\mathbf{A}^\top\mathbf{y}=\mathbf{b},\mathbf{y}\geq0}\mathbf{c}^\top\mathbf{y}$ 的内半径和外半径分别为 $r$ 和 $R$。那么存在一种算法，能够计算出 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$，使得

$$\mathbf{c}^\top\widehat{\mathbf{x}}\leq\min_{\mathbf{A}^\top\mathbf{x}=\mathbf{b},\mathbf{x}\geq0}\mathbf{c}^\top\mathbf{x}+\epsilon\quad,\ and\quad\left\|\mathbf{A}^\top\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{b}\right\|_2\leq\epsilon,$$

在时间 $\tilde{O}\left((n^\omega+n^{2.5-\alpha/2}+n^{2+1/6})\cdot\log(\frac{\kappa R}{\epsilon r}\cdot)\cdot\log(\frac{R}{\epsilon}\cdot r)\right)$ 内。

为便于记号说明，我们只假设A、b、c 的位复杂度由$\log(\kappa)$ 界定。如果它们的位复杂度为 l，则第一个对数因子将替换为$\mathrm{l}+\log(\frac{\kappa R}{\epsilon r}\cdot)$。注意，与[CLS19], 中所述的位复杂度（即方形子矩阵上的最大行列式的对数）不同，我们的位复杂度依赖于$\log(\kappa)$。注意，尽管在最坏情况下这两个量都是 $\Omega(n)$，但对于随机矩阵，后者为 $\Omega(n)$，而前者为 $O(\log n)$。这是因为，对于随机矩阵，条件数以高概率多项式有界 [Ede88,Ede89]，而行列式以高概率呈指数级增大[TV05]。此外，在 LPs的平滑分析中，$\log(R/r)$ 已被证明为 $O(\log n)$[BD02]。最后，请注意，我们关注的是LPs的近似解。精确解可能需要与方形子矩阵的最大行列式的对数成正比的位复杂度。

The exponent of the third term above is recently improved to $2+\frac{1}{18}$ by using more complicated data structures [JSWZ21].

上述方法并不总是近似求解线性规划的最快算法。下一个结果基于使用移位数系求解线性方程组 [Sto 05], , 避免了对数($\kappa$) 因子。该方法不使用逆维护技术。

定理1.3（无逆内点法）。给定$A \in \mathbb{R}^{n\times d}$，其具有满列秩，$b \in \mathbb{R}^d$、$c \in \mathbb{R}^n$ 均具有位复杂度 $l$，以及误差参数 $0 < \epsilon < 1$；假设线性规划$\min_{A^\top y=b, y\geq 0} c^\top y$ 的内半径和外半径分别为 $r$ 和 $R$。那么存在一种算法，可以找到 $by \in \mathbb{R}^n$，使得

$$\mathbf{c}^\top \widehat{\mathbf{x}} \leq \min_{\mathbf{A}^\top \mathbf{x}=\mathbf{b}, \mathbf{x}\geq 0} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \epsilon \quad , \textit{and} \quad \left\|\mathbf{A}^\top \widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\right\|_2 \leq \epsilon,$$

在时间 $\tilde{O}\left(n^{\omega+0.5} \cdot \left(l + \log(\frac{R}{\epsilon} \cdot r)\right) \cdot \log(\frac{R}{\epsilon} \cdot r)\right)$.

定理 1.3 的算法比定理 1.2 快 $n^{0.5}$ 倍，当 $l = O(1), \log(\kappa) = \Omega(n)$，且 $\log(R/r) = O(\log n)$。我们在第 4.1 节讨论这种情况。这凸显了一个事实：考虑算法的实际运行时间时，算术运算次数较少的算法不一定运行时间最短。我们关于线性规划的最终结果见定理 4.1 ，并表明对于 $\omega > 2$，5 阶稀疏多项式条件矩阵，可以将运行时间降至矩阵乘法时间以下。

接下来我们转向 $p$-范数最小化问题，针对 $p \geq 2$。我们所有的结果都可以扩展到 $p \in (1, 2]$ 的情形，方法是使用[AKPS19]第7节中介绍的方法考虑对偶范数。我们的第一个结果给出了在稀疏和稠密情形下求解 $p$-范数问题的位复杂度界。由于两种情形之间唯一的区别在于我们使用的数据结构，因此我们在同一个定理中同时给出两种情形。

定理1.4（$p$-范数最小化）。令$A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 为一个条件数有界于 $\kappa$的矩阵，且 $b \in \mathbb{R}^d$ 为一个位复杂度有界于 $\log(\kappa)$ 的向量。令 $y^* = \operatorname{argmin}_{A^\top y=b} kyk_p^p$。对于 $p \geq 2$，存在一种算法计算 by，使得 $k\pi_A(by - y^*)k_2 \leq \epsilon k\pi_A y^* k_2$，且

$$\|\widehat{\mathbf{x}}\|_p^p \leq (1+\epsilon)\, \|\mathbf{x}^*\|_p^p$$

*in time*

$$\tilde{O}_p\left(\left(n^\omega + n^{7/3} \cdot \log(1/\epsilon)\right) \log^{1.5}(\kappa/\epsilon) \log^2(1/\epsilon)\right).$$

*Moreover, for sparse matrices, there is an algorithm that returns an output with the same guarantees, with high probability, in time*

$$\tilde{O}_p\left(n^{7/3} \cdot \left(1 + \mathrm{NNZ}(\mathbf{A})^{\frac{\omega-7/3}{\omega-1}}\right) \log^{2.5}(\kappa/\epsilon) \log^3(1/\epsilon)\right).$$

下标 $p$ 隐藏了一个函数 $f(p)$。对于$\omega > 7/3$ 的任意取值、$\mathrm{NNZ}(A) = o(n^{\omega-1})$ 以及$\log(\kappa/\epsilon) = \mathrm{poly}(n^{2.363}\epsilon^{-1})$，上述结果给出了一个运行时间 $(n^\omega)$。例如，对于具有 (A)( ) 且当前值为 .372 的多项式条件矩阵，运行时间为 $\tilde{O}_p(\cdot \log ())$。请注意，对于 $p$-范数和线性规划，$\log(1/\epsilon)$ 与 $\log(\kappa/\epsilon)$的幂次不同。这是因为在我们的 $p$-范数回归算法的子程序中，对最优值进行“猜测”所产生的算法迭代次数不同。此外请注意，对于 $p$-范数问题，我们还会通过拼接一个（梯度）向量来修改矩阵。我们证明，这只会使矩阵的条件数增加一个多项式因子——参见第 5.2 节。我们还强调，对于求解作为该算法子程序的约束加权回归问题，我们采用了不同于 [AKPS 19] 的方法，以确保我们处理的数字仅具有$\log(\kappa/\epsilon)$比特——参见第5.3节。请注意，对算法中的 $p$ 的˜数字取幂，只会将位复杂度增加一个 $p$ 因子，而该因子会被 $O_p$记号所吸收。

我们求解 $p$-范数最小化问题的方法是求解一系列经 平滑处理的 $p$-范数最小化问题（见第 5.1节和 5.2节），以获得常数因子近似。经平滑处理的 $p$-范数问题（我们也称之为混合 $(2, p)$-范数最小化）定义如下。

定义 3（平滑的 $p$-范数最小化问题）。设$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 和 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$，其中 $n \geq d$。对于 $p \geq 2$，令

$$\mathbf{x}^* = \operatorname*{arg\,min}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\mathbf{A}^\top\mathbf{x}=\mathbf{b}} \sum_{i=1}^{n} \gamma_p(\mathbf{t}_i, \mathbf{x}_i),$$

*where for* $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *and* $x \in \mathbb{R}$,

$$\gamma_p(t,x) := \begin{cases} \frac{p}{2}t^{p-2}x^2 & \text{if } |x| \leq t, \\ |x|^p + (\frac{p}{2}-1)t^p & \text{otherwise.} \end{cases}$$

*Then the smoothed* $p$*-norm problem asks for* $\widehat{\mathbf{x}}$ *such that* $\|\pi_{\mathbf{A}}(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*)\|_2 \leq \epsilon \cdot \|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{x}^*\|_2$ *and*

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_p(\mathbf{t}_i, \widehat{\mathbf{x}}_i) \leq (1+\epsilon) \cdot \sum_{i=1}^{n} \gamma_p(\mathbf{t}_i, \mathbf{x}_i^*).$$

我们展示了以下混合 $(2,\infty)$-范数最小化问题可以作为此类平滑 $p$-范数问题的代理，但这会导致求解 $p$-范数最小化问题时运行时间更长。然而，由于混合 $(2,\infty)$-范数最小化本身就是一个重要问题，我们也为其提出了一种乘法权重更新算法。

**Definition 4** (Mixed（2，∞）-范数最小化问题）。设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$、$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$、$\mathbf{r}$，$\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$，其中 $n \geq d$。Le $t$

$$\mathbf{x}^* = \operatorname*{arg\,min}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\mathbf{A}^\top\mathbf{x}=\mathbf{b}} \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{r}}^2 + \|\mathbf{s}\odot\mathbf{x}\|_\infty,$$

其中 $\odot$ 是逐元素（Hadamard）乘积，$\mathrm{k}\mathbf{y}\mathrm{k}_{\mathbf{r}}^2 = \mathbf{y}^\top\mathrm{R}\mathbf{y}$，且 R 是与 r 对应的对角矩阵。然后，混合$(2,\infty)$-范数最小化问题要求找到$\mathbf{b}\mathbf{y}$，使得 $\mathrm{k}\pi_{\mathbf{A}}(\mathbf{b}\mathbf{y} - \mathbf{y}^*)\mathrm{k}_2 \leq \epsilon\cdot \mathrm{k}\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{y}^*\mathrm{k}_2$ 以及

$$\|\widehat{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{r}}^2 + \|\mathbf{s}\odot\widehat{\mathbf{x}}\|_\infty \leq (1+\epsilon)\cdot\left(\|\mathbf{x}^*\|_{\mathbf{r}}^2 + \|\mathbf{s}\odot\mathbf{x}^*\|_\infty\right).$$

We provide a constant factor approximation algorithm for this problem.

定理 1.5（混合$(2,\infty)$-范数最小化）。设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 和 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$，$\mathbf{r}$,$\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$, $n \geq d$，使得$\mathbf{A}$ 的条件数小于 $\kappa$，且它们的位复杂度均由 $\log(\kappa)$ 有界。对于$0 < \epsilon < 1$，存在一个算法输出 $\mathbf{b}\mathbf{y}$，使得$\mathrm{k}\pi_{\mathbf{A}}(\mathbf{b}\mathbf{y} - \mathbf{y}^*)\mathrm{k}_2 \leq \epsilon\cdot \mathrm{k}\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{y}^*\mathrm{k}_2$并且

$$\|\widehat{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{r}}^2 + \|\mathbf{s}\odot\widehat{\mathbf{x}}\|_\infty = O(1)\cdot(\|\mathbf{x}^*\|_{\mathbf{r}}^2 + \|\mathbf{s}\odot\mathbf{x}^*\|_\infty), \tag{1}$$

*where* $\mathbf{x}^* = \arg\min_{\mathbf{x}:\mathbf{A}^\top\mathbf{x}=\mathbf{b}} \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{r}}^2 + \|\mathbf{s}\odot\mathbf{x}\|_\infty$, *in time*

$$\tilde{O}_p((n^\omega + n^{7/3}\cdot\log^2(1/\epsilon))\log(\alpha_2\kappa/\epsilon)\log(\alpha_1\kappa)\log(\kappa/\epsilon)),$$

其中 $\alpha_1 = 1/(\min_{i\in[n]}\mathrm{r}_i + \mathrm{s}_i^2)$，且 $\alpha_2 = (\max_{i\in[n]}\mathrm{r}_i + \max_{i\in[n]}\mathrm{s}_i)/\min_{i\in[n]}\mathrm{r}_i$。此外，对于稀疏矩阵，存在一种算法，以至少 $1 - n^{-10}\cdot\log(\alpha_2)$ 的概率返回具有相同保证的输出，运行时间为

$$\tilde{O}\left(n^{7/3}\cdot\left(1 + \mathrm{NNZ}(\mathbf{A})^{\frac{\omega-7/3}{\omega-1}}\right)\log^2(1/\epsilon)\log(\alpha_2\kappa/\epsilon)\log(\alpha_1\kappa)\log^2(\kappa/\epsilon))\right).$$

我们最后指出，虽然这些问题的位复杂度对于拉普拉斯矩阵以及最大流等图问题是已知的，但在我们的工作之前，对于一般矩阵则是未知的。造成这一差异的主要原因是对一般矩阵使用了逆维护技术，以及难以为此类矩阵的条件数建立界。

## 1.2 技术

逆矩阵维护是自卡-马卡尔以来一直用于优化算法的一项重要技术 [卡84]。此后，它还被应用于许多其他算法，例如用于 $p$-范数最小化的迭代精炼算法和动态算法。以下恒等式用于逆矩阵维护，在优化领域文献中已得到广泛应用（但未进行稳定性和位复杂度分析），以加速各种不同的迭代算法。

事实 1.6 (Sherman-Morrison-Woodbury 恒等式 [Woo50]). 对于可逆的 $n \times n$ 矩阵 $\mathbf{M}$ 和矩阵$\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times r}$、$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r\times r}$、$\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{r\times n}$，有

$$(\mathbf{M}+\mathbf{UCV})^{-1} = \mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{VM}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{VM}^{-1}.$$

由于矩阵的精确逆不一定能在定点算术中用有限位数表示，我们只能使用近似逆矩阵。那么，当我们应用 Sherman-Morrison-Woodbury恒等式时，需要多少位才能将误差维持在较小范围内，从而保证我们的迭代算法收敛？请注意，逆矩阵所需的误差决定了其位复杂度。

我们的第一个主要技术是证明，通过 Sherman-Morrison-Woodbury 进行逆矩阵维护˜恒等式是向后稳定的。我们需要使用 $O(\log(\kappa/\epsilon))$ 位来表示我们的数值，以获得这一保证。下面的引理表明，应用 Woodbury恒等式后，向后误差在每次迭代中只会加性增加。因此，如果我们使用该方法进行 poly($n$) 次迭代，误差只会增加 poly$(n,\kappa)\cdot\varepsilon$。因此，通过选择 $\varepsilon$ 足够小的值，我们可以保证，在一个经过 poly($n$) 次迭代的算法过程中（例如内点法 [CLS19、Bra20]和乘法权重更新法 [AKPS19]中），逆的误差都很小。

e 引理 1.7（逆矩阵维护的后向稳定性）。设 Z $\in \mathbb{R}^{n\times n}$、Z $\in \mathbb{R}^{n\times n}$、C $\in \mathbb{R}^{m\times m}$ 为可逆矩阵。此外，设 U、V $\in \mathbb{R}^{n\times m}$ 满足 Z $+\,$UCV$^\top$ 可逆。设 $\kappa > m+n$ 满足

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathrm{F}}, \|\mathbf{V}\|_{\mathrm{F}}, \|\mathbf{C}\|_{\mathrm{F}}, \left\|\mathbf{C}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}, \|\mathbf{Z}\|_{\mathrm{F}}, \left\|\mathbf{Z}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}, \left\|\mathbf{Z}+\mathbf{UCV}^\top\right\|_{\mathrm{F}}, \left\|(\mathbf{Z}+\mathbf{UCV}^\top)^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \le \kappa$$

且 $0 < \varepsilon_1$、$\varepsilon_2 < 1$。假设

$$\left\|\widetilde{\mathbf{Z}} - \mathbf{Z}\right\|_{\mathrm{F}} \le \varepsilon_1. \tag{2}$$

若 D $\in \mathbb{R}^{m\times m}$ 是一个可逆矩阵，且满足

$$\left\|\mathbf{D}^{-1} - (\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{V}^\top\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \le \varepsilon_2,$$

*then*

$$\left\|(\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1} - \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}^\top\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1})^{-1} - (\mathbf{Z}+\mathbf{UCV}^\top)\right\|_{\mathrm{F}} \le 512\kappa^{26}\varepsilon_2 + \varepsilon_1.$$

除了逆矩阵维护，对于 $p$-范数最小化问题，我们还需要在以常数因子谱近似作为预条件器的情况下求得高精度解。值得注意的是，即使在只求解一个静态线性回归问题（而非像 $p$-范数回归算法那样处理一系列动态变化的线性回归问题）时，为了在特定运行时间内获得高精度解，也可能需要采用基于预条件的迭代方法，而不是直接求解。一个例子是用于求解线性回归问题的高精度输入稀疏时间算法[CW14、CLM+15]。另一个例子由 [FFG22] 给出，涉及张量分解；在这种情形下，算法需要采用预条件方法，才能将运行时间加速至次二次级。

引理1.8（约束加权线性回归的高精度解）。设A $\in \mathbb{R}^{n\times d}$ 具有满列秩，b $\in \mathbb{R}^{d}$，且W $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为对角矩阵，其中 $R$I $\ge$ W $\ge$ I。此外，设 y$^*$ =为 argmin$_{\mathrm{x:A^\top y=b}}$ 1 2 kyk$^2$ w。则

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}.$$

此外，给定一个矩阵eM$^{-1}$，使得存在矩阵M，满足 $\left\|\mathrm{eM}^{-1} - \mathrm{M}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \le$ $_{d\,\lambda}$ $^{\varepsilon}_{\top}\cdot\cdot\|\mathbf{AW}^{-1}\mathbf{A}\|_2$ , 并且A$^\top$W$^{-1}$A $\le$ M $\le \lambda$A$^\top$W$^{-1}$A 满足某个常数 $\lambda \ge 1$，存在一种算法，可以找到 by，使得

$$\|\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*\|_2 \le \epsilon\cdot\|\mathbf{x}^*\|_2, \quad \|\widehat{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{W}} \le (1+\epsilon)\|\mathbf{x}^*\|_{\mathbf{W}}, \quad \textit{and} \quad \|\pi_{\mathbf{A}}(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*)\|_2 \le \epsilon\|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{x}^*\|_2,$$

其中 $\pi_{\mathbf{A}}$ 是矩阵 A的投影矩阵，在 $O((d^2 + \mathrm{NNZ}(\mathrm{A}))\cdot\log(\kappa(\mathrm{A})\cdot R)\cdot\log^2(\frac{R}{\epsilon}))$ 时间内。

注意，由于 $\left\|\mathrm{M}^{-1}\right\| \le$ poly$(n\kappa/R)$，我们可以将 eM$^{-1}$ 取为一个位复杂度为 $O(\log(nR\kappa/\epsilon))$ 的矩阵，以满足条件 $\left\|\mathrm{eM}^{-1} - \mathrm{M}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \le$ $_{d\,\lambda}$ $^{\varepsilon}_{\top}\cdot\cdot$kA W$^{-1}$Ak$_2$。引理 1.8 的一个难点在于，我们要求向量 bx 与 x$^*$ 在两种不同的范数下都很接近：一种由 W 诱导，另一种由 $\pi_{\mathrm{A}}$诱导。有趣的是，正如我们所证明的，要达到这一点并不需要进行 log($\kappa$) 次迭代。

## 1.3 讨论

尽管过去几十年来，人们已广泛研究了优化算法按算术运算次数衡量的运行时间，但在许多近期工作中，位复杂度仍未得到分析。[CLS19]和 [AKPS19] 分别提出了求解线性规划和 $p$-范数最小化问题的算法，其运行时间与矩阵乘法时间 $n^\omega$ 相当，仅相差多对数因子。然而，即使在线性方程组上采用定点算术，通过计算逆并将其作用于向量来求解一个线性方程组，也需要 $\Omega(\log(\kappa/\epsilon))$ 的位复杂度，即便原始线性方程组的位复杂度为 $O(1)$ 也是如此。下面这个矩阵便是一个例子：它的条件数大于 $2^{n-1}$；分别通过测试向量 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\cdots 0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}(-1/2)^{n-1} & (-1/2)^{n-2}\cdots -1/2 & 1\end{bmatrix}$，可得到其最大和最小奇异值。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d\times d}.$$

事先并不清楚，当我们需要求解迭代方法求解所需的一系列动态变化的线性方程组时，为保证收敛需要什么样的位复杂度 $p$-范数最小化与线性规划。尽管已考虑过逆矩阵维护过程的前向稳定性[Yip86], 这样的界对于需要 poly$(n)$ 次迭代的算法来说是不够的。

请注意，如上例所示，一个具有 $O(n^\omega)$ 次算术运算且位复杂度为 $\log(\kappa)$的算法，在最坏情况下的运行时间为 $O(n^{\omega+1})$。因此，确定 $\log(\kappa)$ 因子的正确幂次至关重要。此外，如定理1.3所示，算术运算次数较少的算法不一定具有最佳的总体运行时间。

大纲。 我们首先在第 2 节中给出关于输入稀疏时间线性回归的结果。然后在第 3 节中给出我们的数值稳定的逆矩阵维护。使用此逆向维护过程处理稠密和稀疏矩阵的数据结构在第 3.1 节中给出。有了这些，我们在第 4 节中给出求解线性规划的结果。我们首先在第 4.1 节中讨论总体算法以及如何找到初始可行解。然后在第 4.2 节中给出使用鲁棒内点法的线性规划求解器，在第 4.3 节中给出基于移位数的线性规划求解器，以及关于稀疏线性规划和 $\omega > 2.5$ 的结果在第4.4 节中给出。

我们介绍用于求解 $p$-范数最小化问题的算法外层循环，该问题在第5.1节中使用了一系列残差问题的解。然后在第5.2节中，我们讨论如何通过求解平滑的 $p$-范数最小化问题的实例来有效地求解残差问题，以及如何将混合$(2,\infty)$-范数最小化用作代理。接着，我们在第5.4节介绍用于求解混合$(2,\infty)$-范数最小化问题的乘法权重更新（MWU）算法。最后，在第5.5节中，我们介绍用于求解平滑的 $p$-范数最小化问题的乘法权重更新（MWU）算法。

## 1.4 Notation and Preliminaries

线性代数符号。我们用 $\odot$ 表示哈达玛积（逐项乘积）。对于向量 $x$，令 $|x|$为一个与 $x$ 大小相同的向量，使得对所有 $i$，$(|x|)_i = |x_i|$；而 $x^p$ 表示一个向量，其第 $i$ 个条目等于 $x$ 的第 $i$ 个条目取 $p$ 次幂，即 $(x^p)_i = (x_i)^p$。类似地，对于对角矩阵（或向量）$M$，$\sqrt{M}$ 是一个矩阵，其中每个条目都等于 $M$ 中对应条目的平方根。对于一个有 $n$ 行的矩阵 $A$ 和一个子集 $S \subseteq [n]$，令 $A_S$ 表示取出 $A$ 中索引属于 $S$ 的行所得到的矩阵。$A_{:S}$ 表示取出 $A$ 中索引属于 $S$ 的列所得到的矩阵。对于方阵 $A$，$\in \mathbb{R}^{n\times n}$ 且 $S \subseteq [n]$，$A_{S,S}$ 表示取出 $A$ 中属于 $S \times S$ 的条目所得到的矩阵。注意，我们在转置之前应用这些下标，即 $A_S^\top = (A_S)^\top$。我们用 $A^\dagger$表示 $A$ 的摩尔－彭若斯逆（即伪逆）。

k·k$_F$ 表示弗罗贝尼乌斯范数。我们用 |||·|||表示矩阵的逐项范数，例如， |||A|||$_\infty$ 是A的条目中的最大幅度。对于矩阵 A，我们用 $\kappa(A) :=$kAk$_2$ $\left\|A^+\right\|_2$表示其条件数。换句话说，矩阵的条件数是其最大奇异值除以其最小非零奇异值。我们用 $\pi_A$表示A的正交投影矩阵。特别地，如果A具有满列秩， $\pi_A$ =A(A$^\top$A)$^{-1}$A$^\top$。在整篇论文中，为了使符号不那么繁琐，我们假设向量b和矩阵A的位复杂度至多为log($\kappa$)。这意味着b和A的每个条目的绝对值要么为零，要么在区间[$\frac{1}{\kappa}, \kappa$]中。这不失一般性，因为运行时间中依赖于 $\kappa$ 的因子可以用log(($\kappa \cdot 2^\ell$)/$\epsilon$)替换，其中$l$ 是输入的位复杂度。

在上下文明确时，我们用向量对应的大写字母表示该向量所对应的对角矩阵，例如，W 表示与 w 对应的对角矩阵。此外，对于 u,w $\in \mathbb{R}^n$，我们定义

$$\|u\|_w = \|u\|_W := \sqrt{u^\top W u},$$

对于 w $\geq 0$。更一般地，对于一个对称半正定矩阵 M，我们记 kuk$_M$ = $\sqrt{u^\top M u}$。对于向量 u$_1$ $\in \mathbb{R}^{n_1}, \ldots,$ u$_k$ $\in \mathbb{R}^{n_k}$，我们将 (u$_1, \ldots,$ u$_k$) $\in \mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_k}$ 记作它们的拼接。注意， $n_i$可以等于 1，此时 u$_i$ 是一个数。对于一个数 $t \in \mathbb{R}$，我们用®$t$ 表示所有条目都等于 $t$ 的向量。向量的维数将由上下文明确给出，例如，如果 A $\in \mathbb{R}^{n\times d}$, [A®] 表示通过向矩阵 A附加一个全为零的列而得到的矩阵。对于一个函数 $f$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和向量u $\in \mathbb{R}^n$，我们定义($f$(u))$_i$ = $f$(u$_i$)，即将 $f$扩展为 $f$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$。

矩阵乘法。我们分别用 $\omega$ 和 $\alpha$ 表示矩阵乘法指数及其对偶。此外，我们用 MM($n, m, d$) 表示将一个 $n\times m$ 矩阵与一个 $m\times d$ 矩阵相乘的代价，例如 MM($n, n, n$) = $n^\omega$，以及 MM($n, n, n^\alpha$) = $n^{2+o(1)}$。我们需要以下引理来界定运行时间中矩形矩阵乘法（用于逆矩阵维护）的运行时间。

引理 1.9 ([GU18, CLS19])。 设 $n \geq d$。然后，一个 $n \times d$ 矩阵与一个 $d \times n$ 矩阵或一个$n \times n$ 矩阵与一个 $n \times d$ 矩阵可以在以下运行时间内完成乘法。

$$n^{2+o(1)} + d^{(\omega-2)/(1-\alpha)} n^{2-\alpha\cdot(\omega-2)/(1-\alpha)+o(1)}.$$

For ease of notation, we drop $o(1)$ in the running time of matrix multiplication throughout the paper.

**General assumptions.** We now state a few preliminary results to establish our assumptions in this paper.

**Remark 1.10.** *Let*

$$x^* = \arg\min_{x:A^\top x=b} \|x\|_p^p .$$

对于 $p \geq 2$，如果 kx$^*$k$_p^p$ $\leq \varepsilon$，那么 kx$^*$k$_2^p$ $\leq d^{(p-2)/2}\varepsilon$。因此，不失一般性，我们可以假设 kx$^*$k$_p^p$ $> 1/$poly($\kappa$)，否则 x = ®0 在 $p$-范数目标以及 kA$^\top$x –bk$_2$ 两方面的误差都很小。

下一个引理（证明见附录）指出，我们只需关注满列秩矩阵。

引理 1.11。设 $p \geq 2$, A $\in \mathbb{R}^{n\times d}$, b $\in \mathbb{R}^d$, $n \geq d$, 使得 A 的最小非零奇异值等于 $\sigma > 0$。此外，设 $0 < \varepsilon_1 < 1$ and $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cdot 2^{\sigma \cdot d^{(p-2)/2p}}$。令

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A \\ \varepsilon_2 I \end{bmatrix}.$$

此外，设 $0 < \varepsilon_3 < 1$, x$^*$ $\in \mathbb{R}^n$ and bx $\in \mathbb{R}^{n+d}$，使得

$$x^* = \arg\min_{x:A^\top x=b} \|x\|_p^p \quad , \quad \|\widehat{x}\|_p^p \leq (1+\varepsilon_3) \min_{x:\overline{A}^\top x=b} \|x\|_p^p \quad , \text{ and } \quad \left\|\overline{A}^\top \widehat{x} - b\right\|_2 \leq \varepsilon_3 .$$

*Let* $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^d$ *be a vector with entries equal to the first* $n$ *entries of* $\widehat{x}$. *Then*

$$\left\|A^\top \widetilde{x} - b\right\|_2 \leq \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \cdot \|b\|_2 \quad , \text{ and } \quad \|\widetilde{x}\|_p^p \leq (1+\varepsilon_3)\|x^*\|_p^p .$$

注 1.12。 $\mathbf{A}$ 在引理 *1.11* 具有满列秩。此外，为达到 $\epsilon$的误差，我们可以取$\varepsilon_3 = \epsilon/2$和 $\varepsilon_1 = \epsilon/(2\,\mathrm{kbk}_2)$。因此 $\kappa(\mathrm{A}) \le 4\cdot d^{(p-2)/2p}\kappa(\mathrm{A})\,\mathrm{kbk}_2$。因此，使用 A求解问题只需将位复杂度增加一个多对数因子。此外，由于 $n+d \le 2n$，运行时间中的多项式因子仅增加常数因子。因此，在本文其余部分中，不失一般性地，我们假设矩阵 A 具有满列秩。

备注 1.13。由于当 $n = d$ 时 A 具有满列秩，因此 $\mathrm{A}^\top\mathrm{x}$ =b 有唯一解 $\mathrm{x}^*$；我们可以通过求解 $\mathrm{A}^\top\mathrm{x} = \mathrm{b}$ 来计算一个接近 $\mathrm{x}^*$ 的向量 bx，并且通过适当的精度和位复杂度，可以保证 $\mathrm{kA}^\top\mathrm{bx} - b\mathrm{k} \le \epsilon$ 和 $\mathrm{kbxk}_p \le (1+\epsilon)\,\mathrm{kx}^*\mathrm{k}_p$。因此，在本文其余部分中，我们假设 $n > d$。

逆矩阵维护。 以下内容可直接由事实 1.6 推出，也是 robustIPM [CLS19、 Bra20] 获得一个解的主要工具之一，所需 $n^\omega$ 次算术运算。

推论 1.14。令 $\mathrm{P} = \mathrm{A}(\mathrm{A}^\top(\mathrm{V}+\mathrm{Q})\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^\top$，其中 V 是一个对角矩阵，Q 是一个满足 $T$ =supp(Q) 的稀疏对角矩阵。那么，

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top(\mathbf{V}+\mathbf{Q})\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top = \mathbf{P} - \mathbf{P}_{:T}(\mathbf{Q}_{T,T}^{-1} + \mathbf{P}_{T,T})^{-1}\mathbf{P}_{:T}^\top.$$

证明。 我们有 $\mathbf{A}^\top\mathbf{Q}\mathbf{A} = \mathbf{A}_T^\top\mathbf{Q}_{T,\,T}\mathbf{A}_T$因为 Q 的非零条目仅为索引属于 $T$ 的那些条目。根据事实 1.6，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top(\mathbf{V}+\mathbf{Q})\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{V}\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top\mathbf{Q}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{V}\mathbf{A} + \mathbf{A}_T^\top\mathbf{Q}_{T,T}\mathbf{A}_T)^{-1}\mathbf{A}^\top \\ &= \mathbf{A}\left((\mathbf{A}^\top\mathbf{V}\mathbf{A})^{-1} - (\mathbf{A}^\top\mathbf{V}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}_T^\top(\mathbf{Q}_{T,T}^{-1} + \mathbf{A}_T(\mathbf{A}^\top\mathbf{V}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}_T^\top)^{-1}\mathbf{A}_T(\mathbf{A}^\top\mathbf{V}\mathbf{A})^{-1}\right)\mathbf{A}^\top.\end{aligned}$$

T该结果可由注意到 $\mathrm{A}_T(\mathrm{A}^\top\mathrm{VA})^{-1}\mathrm{A}_T^\top = \mathrm{P}_{T,T}$ 以及 $\mathrm{A}(\mathrm{A}^\top\mathrm{VA})^{-1}\mathrm{A}_T^\top = \mathrm{P}_{:\ T}$. □

## 2 Linear Regression

对于一个线性回归问题 $\min_\mathrm{x}\mathrm{kAy} - \mathrm{bk}_2$，其中 $\mathrm{y}^* = \arg\min_\mathrm{x}\mathrm{kAy} - \mathrm{bk}_2$，我们可能希望使$\mathrm{ky} - \mathrm{y}^*\mathrm{k}_2$ 或$\mathrm{kA}(\mathrm{y} - \mathrm{y}^*)\mathrm{k}_2 = \mathrm{ky} - \mathrm{y}^*\mathrm{k}_{\mathrm{A}^\top\mathrm{A}}$更小。这些目标因若干原因而不同。例如，$\mathrm{y}^*$可能并不唯一（如果 A 不是满秩的），但 $\mathrm{Ay}^*$是唯一的。即使在 $\mathrm{y}^*$ 唯一的情况下，$\mathrm{ky} - \mathrm{y}^*\mathrm{k}$ 也可能很大，而 $\mathrm{ky} - \mathrm{y}^*\mathrm{k}_{\mathrm{A}^\top\mathrm{A}}$可能很小，例如当 $\mathrm{y} - \mathrm{y}^*$ 沿着与A 的最小奇异值相对应的A 的右奇异向量方向时。不过请注意，$\sigma_{\min}^2\mathrm{I} \le \mathrm{A}^\top\mathrm{A} \le \sigma_{\max}^2\mathrm{I}$，其中 $\sigma_{\min}$和 $\sigma_{\max}$ 分别是 A 的最小和最大奇异值。因此，假设 $\sigma_{\min} \le 1 \le \sigma_{\max}$ （这可以通过缩放实现），$\mathrm{ky} - \mathrm{y}^*\mathrm{k}_2$ 在一个 $\kappa(\mathrm{A})^2$ 倍的范围内，与 $\mathrm{ky} - \mathrm{y}^*\mathrm{k}_{\mathrm{A}^\top\mathrm{A}}$ 相比。

在许多应用中，目标是直接界定 $\mathrm{kx} - \mathrm{x}^*\mathrm{k}_{\mathrm{A}^\top\mathrm{A}}$。例如，参见推论 2.5，它是求解线性规划的内点法每次迭代中计算出的一个向量。只需确保 $\mathrm{kx} - \mathrm{x}^*\mathrm{k}_2 \le \kappa^{\epsilon}(\mathrm{A})$，或直接界定 $\mathrm{kx} - \mathrm{x}^*\mathrm{k}_{\mathrm{A}^\top\mathrm{A}}$，即可实现这一点。即使不考虑位复杂度，前一种方法也可能需要 $\log(\kappa/\epsilon)$ 次迭代。本节将证明，采用误差有界的预条件，迭代方法可在 $O(\log(1/\epsilon))$ 次迭代内实现后一目标，从而避免迭代次数中出现 $\log(\kappa)$ 因子。随后，我们将采用该方法，借助无偏草图方法（参见 [CW14、NN13]）找到矩阵的谱近似，从而在输入稀疏时间内以高精度求解线性回归问题，并界定其位复杂度。

备注 2.1。请注意，$\|\mathrm{y}^{(k)} - \mathrm{y}^*\|_{\mathrm{A}^\top\mathrm{A}}$ 的界并不意味着对 $\mathrm{kAy} - \mathrm{bk}_2$ 的乘法误差界。它只能给出如下形式的加法误差界。

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \le \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)\|_2 + \|\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}\|_2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_{\mathbf{A}^\top\mathbf{A}} + \left\|(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})\mathbf{A}^\top)\mathbf{b}\right\|_2.$$

右端项的第二项可能为零，此时我们有 $\min_\mathrm{x}\mathrm{kAx} - \mathrm{bk}_2 = 0$。然而，即使最优解的误差为零，也未必能够实现零误差（至少使用定点算术表示的数值时无法保证）。

引理 2.2（Richardson 迭代的位复杂度）。设 $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 是一个满秩矩阵，$n \geq d$。设 $\lambda \geq 1$，且 $\mathrm{M}$，$\mathrm{eM} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 是对称矩阵，满足 $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} \preceq \mathrm{M} \preceq \lambda \cdot \mathrm{A}^\top\mathrm{A}$ 且 $\left\|\mathrm{eM}^{-1} - \mathrm{M}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq {}_{d\,\lambda}\ {}^{\varepsilon}{}_{\cdot\cdot\|\mathrm{A}^\top\mathrm{A}\|_2}$。令 $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathrm{eM}^{-1}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A}\mathbf{x}^{(k)} - \mathrm{A}^\top\mathbf{b})$。那么我们有

$$\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\|_{\mathbf{M}} \leq \left(1 - \frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right)^k \left\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^*\right\|_{\mathbf{M}},$$

*where* $\mathbf{x}^* = \arg\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$.

*Proof.* We have $\mathbf{x}^* = (\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{b}$, and

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^* &= \mathbf{x}^{(k)} - \widetilde{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{A}^\top\mathbf{b}) - \mathbf{x}^* \\
&= \mathbf{x}^{(k)} - \widetilde{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{x}^*) - \mathbf{x}^* \\
&= (\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{A})(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*)
\end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^*\right\|_{\mathbf{M}} &= \left\|(\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{A})(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*)\right\|_{\mathbf{M}} \\
&= \left\|(\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{A} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{A} - \widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{A})(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*)\right\|_{\mathbf{M}} \\
&\leq \left\|(\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{A})(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*)\right\|_{\mathbf{M}} + \left\|(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{A} - \widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{A})(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*)\right\|_{\mathbf{M}}
\end{aligned}$$

Now we have

$$\left\|(\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{A})(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*)\right\|_{\mathbf{M}}^2 = (\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*)^\top(\mathbf{I} - \mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1})\mathbf{M}(\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{A})(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*)$$

Defining $\mathbf{H} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1/2}$, we have

$$\mathbf{M}^{1/2}(\mathbf{I} - \mathbf{H})^2\mathbf{M}^{1/2} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1})\mathbf{M}(\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{A}).$$

Moreover,

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{I} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1/2} \preceq \mathbf{H} \preceq \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1/2} = \mathbf{I}.$$

Therefore $0 \preceq \mathbf{I} - \mathbf{H} \preceq (1 - \frac{1}{\lambda})\mathbf{I}$, which implies

$$0 \preceq (\mathbf{I} - \mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1})\mathbf{M}(\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{A}) \preceq (1 - \frac{1}{\lambda})^2\mathbf{M}.$$

Hence

$$\left\|(\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{A})(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*)\right\|_{\mathbf{M}}^2 \leq (1 - \frac{1}{\lambda})^2\left\|(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*)\right\|_{\mathbf{M}}^2.$$

Now we have

$$\left\|(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{A} - \widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{A})(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*)\right\|_{\mathbf{M}}^2 = (\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*)^\top\mathbf{A}^\top\mathbf{A}(\mathbf{M}^{-1} - \widetilde{\mathbf{M}}^{-1})\mathbf{M}(\mathbf{M}^{-1} - \widetilde{\mathbf{M}}^{-1})\mathbf{A}^\top\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*).$$

Defining $\mathbf{G} = \mathbf{M}^{1/2}\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{M}^{1/2}$, we have

$$(\mathbf{M}^{-1} - \widetilde{\mathbf{M}}^{-1})\mathbf{M}(\mathbf{M}^{-1} - \widetilde{\mathbf{M}}^{-1}) = \mathbf{M}^{-1/2}(\mathbf{I} - \mathbf{G})^2\mathbf{M}^{-1/2}$$

现在请注意

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} - \mathbf{G} &= \mathbf{I} - \mathbf{M}^{1/2}(\widetilde{\mathbf{M}}^{-1} - \mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^{-1})\mathbf{M}^{1/2} \\
&= \mathbf{I} - \mathbf{M}^{1/2}(\widetilde{\mathbf{M}}^{-1} - \mathbf{M}^{-1})\mathbf{M}^{1/2} - \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}^{1/2} \\
&= -\mathbf{M}^{1/2}(\widetilde{\mathbf{M}}^{-1} - \mathbf{M}^{-1})\mathbf{M}^{1/2}
\end{aligned}$$

因此我们有

$$\|\mathbf{I}-\mathbf{G}\|_2 \le \|\mathbf{I}-\mathbf{G}\|_F \le \left\|\mathbf{M}^{1/2}\right\|_F^2 \left\|\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}-\mathbf{M}^{-1}\right\|_F = \mathrm{tr}(\mathbf{M})\left\|\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}-\mathbf{M}^{-1}\right\|_F \le \frac{d\cdot\lambda\cdot\|\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\|_2\cdot\varepsilon}{d\cdot\lambda\cdot\|\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\|_2} = \varepsilon$$

Therefore we have

$$\begin{aligned}
\left\|(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{A}-\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{A})(\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*)\right\|_{\mathbf{M}}^2 &= (\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*)^\top\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1/2}(\mathbf{I}-\mathbf{G})^2\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{A}^\top\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*)\\
&= \left\|(\mathbf{I}-\mathbf{G})\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{A}^\top\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*)\right\|_2^2\\
&\le \varepsilon^2\cdot\left\|\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{A}^\top\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*)\right\|_2^2\\
&= \varepsilon^2\cdot(\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*)^\top\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*)\\
&\le \varepsilon^2\cdot(\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*)^\top\mathbf{A}^\top\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*)\\
&\le \varepsilon^2\cdot(\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*)^\top\mathbf{M}(\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*)\\
&\le \varepsilon^2\cdot\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*\right\|_{\mathbf{M}}^2
\end{aligned}$$

Therefore combining the above, we have

$$\left\|\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^*\right\|_{\mathbf{M}} \le \left(1-\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right)\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*\right\|_{\mathbf{M}}.$$

□

注 2.3. 为保证 $\left\|\mathrm{eM}^{-1}-\mathrm{M}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \le {}_{d\,\lambda}\ {}^{\varepsilon}{}_{\cdot\|\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\|_2}{}'$，我们需要使用 $\log(\,{}_{d^3\cdot\lambda}\mathrm{k}\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathrm{k}_{\varepsilon}{}^{2}\quad {}^{2}\mathrm{k}_{\mathbf{M}^{-1}}\mathrm{k}\,)$比特。由于 $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\le\mathbf{M}$，我们有 $(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\ge\mathbf{M}^{-1}$，这意味着上述界只需要 $\mathrm{poly}\log(d\lambda)\log(\frac{\kappa}{\epsilon})$比特复杂度。如果我们使用 $\mathbf{M}=\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$，即 $\lambda=1$，那么取 $\varepsilon=\ {}^{\epsilon}{}_{\|\mathbf{b}\|_2}$ 且 $\mathrm{y}^{(0)}=®0$，我们有 ——

$$\left\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^*\right\|_{\mathbf{A}^\top\mathbf{A}} \le \epsilon,$$

由于 $\mathrm{kx}^*\mathrm{k}_{\mathbf{A}^\top\mathbf{A}} = \left\|\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{b}\right\|_2 \le \mathrm{kbk}_2$。这将使计算所需的数e 的位复杂度为 $\tilde{O}(\log(\frac{\kappa\cdot\|\mathbf{b}\|_2}{\epsilon}))$。因此，假设可以访问矩阵 M，我们就能找到 bx，使得

$$\|\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{b}\|_2 \le \epsilon+\min_{\mathbf{x}}\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2,$$

*in time* $\tilde{O}\left(\left(\mathrm{NNZ}(\mathbf{A})+d^2\right)\cdot\log(\frac{\kappa\cdot\|\mathbf{b}\|_2}{\epsilon})\right)$.

注2.4. 如果我们使用谱近似，那么在每次迭代中，我们只能保证误差减少 $(1-\lambda^{-1})$倍，并且必须执行 Richardson 迭代的$\log(1/\epsilon)$ 次迭代，才能达到所需的误差。因此，由于在每次迭代中，解向量的位复杂度会加性增加 $O(\log\kappa)$，所以第 $k$次迭代的位复杂度为 $O(k\cdot\log\ \kappa)$。这意味着运行时间为

$$\tilde{O}((\mathrm{NNZ}(\mathbf{A})+d^2)\cdot\log\kappa\cdot\log^2\frac{1}{\epsilon}).$$

The following bounds the occurring error in computations we perform in each iteration of iterative algorithms for solving linear programs.

推论 2.5.设 $\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{n\times d}$,$\mathrm{W}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为满秩矩阵，且$\mathrm{u}=\sqrt{\mathrm{W}}\mathrm{A}(\mathrm{A}^\top\mathrm{W}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^\top\sqrt{\overline{\mathrm{W}}}\mathrm{g}$。此外，设 $\lambda\ge\overline{1}$，且 $\mathrm{M},\mathrm{e}\ \mathrm{M}\in\mathbb{R}^{d\times d}$ 为对称矩阵，使得 $\mathrm{A}^\top\mathrm{W}\mathrm{A}\le\mathrm{M}\le\lambda\cdot\mathrm{A}^\top\mathrm{W}\mathrm{A}$ 且 $\left\|\mathrm{eM}^{-1}-\mathrm{M}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \le {}_{d\,\lambda}\ {}^{\varepsilon}{}_{\top\cdot\|\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}\|_2}$。设$\mathbf{x}^{(0)}=®0$，$\mathrm{x}\ \overline{{}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}}-\mathrm{eM}^{-1}(\mathrm{A}^\top\mathrm{W}\mathrm{A}\mathrm{x}^{(k)}-\mathrm{A}^\top\sqrt{\mathrm{W}}\mathrm{g})$，且 $\mathrm{eu}=\sqrt{W}\mathrm{A}\mathrm{x}^{(k)}$。那么我们有

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u}\|_2 \le \lambda\cdot\left(1-\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right)^k\left\|\sqrt{\mathbf{W}}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{W}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\sqrt{\mathbf{W}}\mathbf{g}\right\|_2.$$

证明。 考虑对以下线性回归问题应用 Richardson 迭代：$\min_x \left\|\sqrt{W}\mathrm{A}y - \mathrm{g}\right\|_2$，并假设 $\mathrm{y}^* = \mathrm{argmin}_x \left\|\sqrt{W}\mathrm{A}y - \mathrm{g}\right\|_2$。那么根据引理 2.2，我们有

$$\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\|_{\mathbf{M}} \leq \left(1 - \frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right)^k \left\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^*\right\|_{\mathbf{M}}.$$

Therefore

$$\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\|_{\mathbf{A}^\top\mathbf{W}\mathbf{A}} \leq \lambda \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right)^k \|\mathbf{x}^*\|_{\mathbf{A}^\top\mathbf{W}\mathbf{A}}.$$

Now note that

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}^*\|^2_{\mathbf{A}^\top\mathbf{W}\mathbf{A}} &= \mathbf{g}^\top\sqrt{\mathbf{W}}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{W}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^\top\mathbf{W}\mathbf{A})(\mathbf{A}^\top\mathbf{W}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\sqrt{\mathbf{W}}\mathbf{g}\\ &= \left\|\sqrt{\mathbf{W}}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{W}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\sqrt{\mathbf{W}}\mathbf{g}\right\|_2^2\\ &\leq \|\mathbf{g}\|_2^2,\end{aligned}$$

where the inequality follows since $\sqrt{\mathbf{W}}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{W}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\sqrt{\mathbf{W}}$ is a projection matrix. Moreover

$$\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\|_{\mathbf{A}^\top\mathbf{W}\mathbf{A}} = \left\|\sqrt{W}\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*)\right\|_2 = \|\widetilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_2.$$

Combining the above with the inequalities implies the result. □

引理2.2和注2.3给出了这样一个界：假设可以访问一个足够接近 $\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$ 的逆的矩阵，则可以求得一个解，并确定其位复杂度和运行时间。然而，在许多应用中，我们甚至无法访问 $\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$。例如，对于输入稀疏时间线性回归算法[CW14，CLM+15] 这是因为计算$\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$ 需要 $\Omega(d \cdot \mathrm{NNZ}(\mathrm{A}))$ 次算术运算。另一个近期的例子是次二次时间克罗内克回归算法，因为$\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$ 的大小为 $\Omega(d^2)$，而计算它会阻碍获得次二次时间算法。

由于引理2.2 只需要一个接近 $\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$ 的逆的矩阵，我们转而寻找 $\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$的谱近似M，然后使用经典方法 [DDH07、DDHK07], 找到一个接近 M 的逆的矩阵 M，即 $\left\|\mathrm{eM}^{-1} - \mathrm{M}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq {}_{d\,\lambda}{}^{\varepsilon \cdot \|\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\|_2}$。为了找到该谱近似，我们使用以下结果。

引理 2.6（[NN13，KN14]）。设 $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$, $0 < \varepsilon, \delta < 1$，且 $n \geq d$。存在一种算法，可采样一个矩阵 S，其有 $O(d\log^8(d/\delta)/\varepsilon^2)$ 行、 $n$列，且每列有 $s = \theta(\log^3(d/\delta)/\varepsilon)$ 个非零条目，使得

$$(1-\varepsilon)\mathbf{A}^\top\mathbf{A} \leq \mathbf{A}^\top\mathbf{S}^\top\mathbf{S}\mathbf{A} \leq (1+\varepsilon)\mathbf{A}^\top\mathbf{A},$$

其概率至少为 $(1-\delta)$。此外，S 的所有条目都属于 $\{0, \frac{1}{\sqrt{s}}, -\frac{1}{\sqrt{s}}\}$。最后，采样 S 并将其与 A 相乘所需的时间为

$$O(\mathrm{NNZ}(\mathbf{A}) \cdot \mathrm{poly}\log(d/\delta)/\varepsilon^2).$$

现在，我们已准备好证明输入稀疏时间线性回归的结果。

定理 *1.1* 的证明。 我们的方法是先计算一个矩阵 $\mathbf{M}$，使得 $\mathbf{A}^\top\mathbf{A} \preceq \mathbf{M} \preceq \lambda\cdot\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$ 对某个常数 $\lambda > 1$成立。我们使用引理 2.6来实现这一点。我们选取 $\delta$ =poly$(n)$。我们还选取 $s$ 使其为 4 的幂，从而控制 S 的位复杂度。此外，我们可以选取一个常数 $\varepsilon_1$，使得 $\frac{1}{1-\varepsilon_1}$ 为 1 加上 2 的某个幂。于是，我们有

$$\mathbf{A}^\top\mathbf{A} \preceq \frac{1}{1-\varepsilon_1}\cdot\mathbf{A}^\top\mathbf{S}^\top\mathbf{S}\mathbf{A} = \mathbf{M} \preceq \frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}\cdot\mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \lambda\cdot\mathbf{A}^\top\mathbf{A}.$$

注意，根据我们对参数的选择，M 的位复杂度与A 的位复杂度相同，至多相差常数因子和 polylog$(nd)$ 因子。此外，M 的条件数与 A 的相同（至多相差常数

˜因子）由于 $\mathbf{M}$ 在谱意义上接近 $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$。注意，根据引理 ˜ 2 6, $O$ NNZ + 。我们可以在时间 $\mathbf{M}$ 内计算 $((\mathbf{A})d^\omega)$ 因为 $\mathbf{SA}$ 的行数为 $O(d)$。

我们现在可以计算 $\mathrm{eM}^{-1}$ 使得 $\left\|\mathrm{eM}^{-1}-\mathrm{M}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq {}_{d\,\lambda}{}^{\varepsilon_2}\cdot\cdot\mathrm{kA}^\top\mathrm{Ak}_2$ , 对于某个常数 $0<\varepsilon_2<1$ 使得$1-\frac{1}{\lambda}+\varepsilon_2<1$, 在 $\tilde{O}(d^\omega\cdot\log(\kappa))$ 时间内使用标准方法 [DDH07, DDHK07]。然后我们使用 Richardson 迭代（引理 2.2）来计算回归问题的解。此步骤的运行时间是$\tilde{O}((\mathrm{NNZ}(\mathbf{A})+d^2)\cdot\log\kappa\cdot\log^2(1/\epsilon))$ 根据注 2.4。这给出了总运行时间为

$$\tilde{O}((d^\omega+d^2\cdot\log^2(1/\epsilon)+\mathrm{NNZ}(\mathbf{A})\cdot\log^2(1/\epsilon))\cdot\log\kappa).$$

□

# 3 Inverse Maintenance Stability

在本节中，我们通过Sherman-Morrison-Woodbury 恒等式证明逆矩阵维护技术的后向稳定性（见事实 1.6）。我们的表述基于逆矩阵的弗罗贝尼乌斯范数误差，而该误差进而决定所计算逆矩阵的位复杂度。注意，由于范数的等价性，这将给出其他范数下的位复杂度结果，除维度上的多对数因子外˜。我们证明，逆矩阵维护具有后向稳定性，其位复杂度为 $O$(对数$(\kappa/\epsilon)$)。

引理 3.1（前向误差与后向误差的联系）。令$\mathbf{M},\mathbf{N}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为可逆矩阵，并且 $\kappa>1$ 满足$\mathrm{kNk}_{\mathrm{F}}, \left\|\mathbf{N}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}\leq\kappa$。假设$\mathrm{kM}-\mathrm{Nk}_{\mathrm{F}}\leq\varepsilon<\frac{1}{2\kappa}$。则 $\left\|\mathbf{M}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}\leq 2\kappa$，并且

$$\left\|\mathbf{M}^{-1}-\mathbf{N}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}\leq 2\kappa^2\cdot\varepsilon$$

*Proof.* Let $\mathbf{E}=\mathbf{M}-\mathbf{N}$. Then by using the Woodbury identity we have

$$\mathbf{M}^{-1}=\mathbf{N}^{-1}-\mathbf{N}^{-1}\mathbf{E}(\mathbf{I}+\mathbf{N}^{-1}\mathbf{E})^{-1}\mathbf{N}^{-1}$$

Now note that

$$(\mathbf{I}+\mathbf{N}^{-1}\mathbf{E})^{-1}=(\mathbf{I}+\mathbf{N}^{-1}\mathbf{M}-\mathbf{I})^{-1}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}.$$

Therefore

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{M}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}&\leq\left\|\mathbf{N}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}+\left\|\mathbf{N}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{M}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}\\&\leq\left\|\mathbf{N}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}+\left\|\mathbf{N}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}\|\mathbf{E}\|_{\mathrm{F}}\left\|\mathbf{M}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}\\&\leq\kappa+\kappa\varepsilon\cdot\left\|\mathbf{M}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}.\end{aligned}$$

Therefore

$$\left\|\mathbf{M}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}\leq\frac{\kappa}{1-\kappa\varepsilon}\leq 2\kappa.$$

Hence,

$$\left\|\mathbf{M}^{-1}-\mathbf{N}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}=\left\|\mathbf{N}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{M}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}\leq\left\|\mathbf{N}^{-1}\right\|_{F}\|\mathbf{E}\|_{F}\left\|\mathbf{M}^{-1}\right\|_{F}\leq 2\kappa^2\varepsilon.$$

□

现在，我们可以分析用于逆矩阵维护的 Sherman-Morrison-Woodbury 公式的稳定性。请注意，这种表述中的误差有两个来源：一是原始矩阵的逆，二是为了对逆进行低秩更新而需要计算的较小矩阵的逆。

e 引理 1.7（逆矩阵维护的后向稳定性）。设 $\mathrm{Z}\in\mathbb{R}^{n\times n},\mathrm{Z}\in\mathbb{R}^{n\times n},\mathrm{C}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 为可逆矩阵。此外设 $\mathrm{U},\mathrm{V}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ 使得 $\mathrm{Z}+\mathrm{UCV}^\top$ 可逆。设 $\kappa>m+n$ 使得

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathrm{F}},\|\mathbf{V}\|_{\mathrm{F}},\|\mathbf{C}\|_{\mathrm{F}},\left\|\mathbf{C}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}},\|\mathbf{Z}\|_{\mathrm{F}},\left\|\mathbf{Z}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}},\left\|\mathbf{Z}+\mathbf{UCV}^\top\right\|_{\mathrm{F}},\left\|(\mathbf{Z}+\mathbf{UCV}^\top)^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}\leq\kappa$$

且 $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1$。假设

$$\left\|\widetilde{\mathbf{Z}} - \mathbf{Z}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon_1. \tag{2}$$

若 $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 是一个可逆矩阵，满足

$$\left\|\mathbf{D}^{-1} - (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{V}^{\top}\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon_2,$$

*then*

$$\left\|(\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1} - \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}^{\top}\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1})^{-1} - (\mathbf{Z} + \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{V}^{\top})\right\|_{\mathrm{F}} \leq 512\kappa^{26}\varepsilon_2 + \varepsilon_1.$$

证明。根据三角不等式和公式（2），我们有

$$\begin{aligned}\left\|(\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1} - \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}^{\top}\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1})^{-1} - (\mathbf{Z} + \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{V}^{\top})\right\|_{\mathrm{F}} &\leq \left\|(\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1} - \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}^{\top}\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1})^{-1} - (\widetilde{\mathbf{Z}} + \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{V}^{\top})\right\|_{\mathrm{F}} + \left\|\widetilde{\mathbf{Z}} - \mathbf{Z}\right\|_{\mathrm{F}} \\ &\leq \left\|(\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1} - \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}^{\top}\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1})^{-1} - (\widetilde{\mathbf{Z}} + \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{V}^{\top})\right\|_{\mathrm{F}} + \varepsilon_1. \end{aligned} \tag{3}$$

注意，$\mathbf{S} := \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{V}^{\top}\mathbf{e}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{U}$ 是下列矩阵的舒尔补。

$$\mathbf{T} := \begin{bmatrix}\mathbf{C}^{-1} & \mathbf{V}^{\top} \\ \mathbf{U} & -\widetilde{\mathbf{Z}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{U}\mathbf{C} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\widetilde{\mathbf{Z}} - \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{V}^{\top}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{C}\mathbf{V}^{\top} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}$$

注意　　到由于 $\mathbf{C}^{-1}$ 和 $-\mathbf{e}\mathbf{Z} - \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{V}^{\top}$（舒尔补）均可逆，因此 $\mathbf{T}$ 可逆，且

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{I} & -\mathbf{C}\mathbf{V}^{\top} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\widetilde{\mathbf{Z}} - \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{V}^{\top}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{U}\mathbf{C} & \mathbf{I}\end{bmatrix}.$$

由于 $\mathbf{S}$ 是 $\mathbf{T}$ 的舒尔补，

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{S}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \left\|\mathbf{T}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} &\leq \left(\sqrt{n+m} + \|\mathbf{U}\mathbf{C}\|_{\mathrm{F}}\right)\left(\sqrt{n+m} + \left\|\mathbf{C}\mathbf{V}^{\top}\right\|_{\mathrm{F}}\right)\left(\|\mathbf{C}\|_{\mathrm{F}} + \left\|(\widetilde{\mathbf{Z}} + \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{U}^{\top})^{-1}\right\|\right) \\ &\leq 2(m+n+\kappa^4)\kappa^2 \leq 4\kappa^6. \end{aligned} \tag{4}$$

Moreover

$$\|\mathbf{S}\|_{\mathrm{F}} \leq \left\|\mathbf{C}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} + \left\|\mathbf{V}^{\top}\right\|_{\mathrm{F}}\left\|\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}\|\mathbf{U}\|_{\mathrm{F}} \leq 2\kappa^3.$$

Therefore since $\left\|\mathbf{D}^{-1} - (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{V}^{\top}\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon_2$, by Lemma 3.1

$$\left\|\mathbf{D} - (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{V}^{\top}\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{U})\right\|_{\mathrm{F}} \leq (4\kappa^6)^2\varepsilon_2 = 16\kappa^{12}\varepsilon_2. \tag{5}$$

Now let

$$\mathbf{M} := \begin{bmatrix}\mathbf{D} - \mathbf{V}^{\top}\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{U} & \mathbf{V}^{\top} \\ \mathbf{U} & -\widetilde{\mathbf{Z}}\end{bmatrix}.$$

Then by (5),

$$\|\mathbf{M} - \mathbf{T}\|_{\mathrm{F}} \leq 16\kappa^{12}\varepsilon_2. \tag{6}$$

此外，根据三角不等式，$\mathrm{kTk}_{\mathrm{F}} \leq \left\|\mathbf{C}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} + \mathrm{kUk}_{\mathrm{F}} + \mathrm{kVk}_{\mathrm{F}} + \left\|\mathbf{e}\mathbf{Z}\right\|_{\mathrm{F}} \leq 4\kappa$。将其与 (4) 和 (6) 结合起来，注意到 $\mathbf{M}^{-1}$ 可逆，因为 $-\mathbf{e}\mathbf{Z}$，且 $\mathbf{D} - \mathbf{V}^{\top}\mathbf{e}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{U} + \mathbf{V}^{\top}\mathbf{e}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{D}$（舒尔补）可逆，再应用引理 3.1，可得

$$\left\|\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{T}^{-1}\right\| \leq (4\kappa^6)^2 \cdot 16\kappa^{12}\varepsilon_2 = 256\kappa^{24}\varepsilon_2.$$

算法 1：密集型逆维护数据结构（DDS）

**Variables:** $n, d \in \mathbb{N}$ with $n > d$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$, $\mathbf{Z}^{-1} \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $1 > \varepsilon > 0$.
**Procedure** INITIALIZE($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \varepsilon$)
  Set $\mathbf{A}$, $\varepsilon$, $n$, and $d$ according to the input
  Set $\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{w}$
  Compute the matrix $\mathbf{Z}^{-1}$ such that $\|\mathbf{Z} - \mathbf{A}^\top \mathbf{V}\mathbf{A}\|_F \le \varepsilon$ // for example using the approach of [DDH07, DDHK07]
过程 UPDATE($S \subseteq [n]$,$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{|S|}$)
  令 $\mathbf{q}_S = \mathbf{u} - \mathbf{v}_S$，其中 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$
  令 $\mathbf{v}_S = \mathbf{u}$
  使用 Woodbury 恒等式更新 $\mathbf{Z}^{-1}$，如下：$\mathbf{Z}^{-1} \leftarrow \mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}_S^\top \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}_S\mathbf{Z}^{-1}$，其中 $\mathbf{D}^{-1} \in \mathbb{R}^{|S|\times|S|}$ 是一个矩阵，使得 $\left\|\mathbf{D}^{-1} - (\mathbf{Q}_{S,S}^{-1} + \mathbf{A}_S\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}_S^\top)^{-1}\right\|_F \le \varepsilon$, and $\mathbf{Q}$ is the diagonal matrix corresponding to $\mathbf{q}$.
  Round entries of $\mathbf{Z}^{-1}$ to numbers with $\lceil \log(10d^2 \cdot \kappa/\varepsilon) \rceil$ bits.
**Procedure** QUERY($\widetilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^d$)
  Compute and return $\mathbf{Z}^{-1}\widetilde{\mathbf{b}}$.

现在注意，$-\mathbf{eZ} - \mathbf{UCV}^\top$ 和 $-\mathbf{eZ} - \mathbf{U}(\mathbf{D} - \mathbf{V}^\top \mathbf{eZ}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^\top$ 分别是 T 和 M 的舒尔补（对应于各自的块）。因此

$$\left\|\left(\widetilde{\mathbf{Z}} + \mathbf{U}(\mathbf{D} - \mathbf{V}^\top \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^\top\right)^{-1} - \left(\widetilde{\mathbf{Z}} + \mathbf{UCV}^\top\right)^{-1}\right\|_F \le \|\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{T}^{-1}\|_F \le 256\kappa^{24}\varepsilon_2.$$

By Woodbury identity,

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{\mathbf{Z}} + \mathbf{U}(\mathbf{D} - \mathbf{V}^\top \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^\top\right)^{-1} &= \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1} - \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{D} - \mathbf{V}^\top \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{U} + \mathbf{V}^\top \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^\top \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1} \\ &= \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1} - \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}^\top \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}.\end{aligned}$$

Therefore

$$\left\|\left(\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1} - \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}^\top \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\right) - \left(\widetilde{\mathbf{Z}} + \mathbf{UCV}^\top\right)^{-1}\right\|_F \le 256\kappa^{24}\varepsilon_2.$$

因此，由于 $\|\mathbf{Z} + \mathbf{UCV}^\top\|_F, \left\|(\mathbf{Z} + \mathbf{UCV}^\top)^{-1}\right\|_F \le \kappa$，根据引理 3.1,

$$\left\|\left(\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1} - \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}^\top \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\right) - \left(\widetilde{\mathbf{Z}} + \mathbf{UCV}^\top\right)^{-1}\right\|_F \le (2\kappa^2) \cdot 256\kappa^{24}\varepsilon_2 = 512\kappa^{26}\varepsilon_2.$$

The result follows from combining this with (3). □

我们在本节中证明了逆维护过程的稳定性。有了这个，我们接下来为稀疏矩阵和稠密矩阵开发逆维护数据结构。我们稍后使用这些数据结构来求解 $p$-范数最小化和线性规划的迭代算法。

## 3.1 稠密矩阵逆矩阵维护数据结构的位复杂度

本节介绍我们用于稠密矩阵的数据结构。对于稠密矩阵，我们的数据结构仅依赖于引理 1.7所证明的逆矩阵维护的稳定性。

**Theorem 3.2** (Dense data structure — DDS). *Let $n \ge d$. There exists a data structure with the following operations that maintain an explicit matrix $\mathbf{Z}^{-1}$.*

- INITIALIZE($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times d}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \varepsilon$): *Sets* $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, *and computes a linear operation* $\mathbf{Z}^{-1}$ *such that*

$$\left\|\mathbf{Z} - \mathbf{A}^\top \mathbf{V}\mathbf{A}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon,$$

其中，$\mathbf{V}$ 是与 $\mathbf{v}$ 对应的对角矩阵。

- UPDATE($S \subseteq [n]$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{|S|}$)：设置 $\mathbf{v}_S = \mathbf{u}$ 并更新 $\mathbf{Z}^{-1}$，使得在调用 UPDATE $k$ 次后，我们有

$$\left\|\mathbf{Z} - \mathbf{A}^\top \mathbf{V}\mathbf{A}\right\|_{\mathrm{F}} \leq (512 \cdot k \cdot \kappa^{26} + 2 \cdot k \cdot \kappa^2 + 1) \cdot \varepsilon,$$

其中，$\kappa > n + d$ 是一个满足以下条件的数

$$\|\mathbf{A}\|_{\mathrm{F}}, \left\|\mathbf{Q}_{S,S}\right\|_{\mathrm{F}}, \left\|\mathbf{Q}_{S,S}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}, \left\|\mathbf{A}^\top \mathbf{V}\mathbf{A}\right\|_{\mathrm{F}}, \left\|(\mathbf{A}^\top \mathbf{V}\mathbf{A})^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \kappa,$$

在所有更新期间以及

$$\varepsilon < \frac{1}{2\kappa \cdot (512 \cdot (k+1) \cdot \kappa^{26} + 2 \cdot k \cdot \kappa^2 + 1)}.$$

- QUERY($\mathbf{eb} \in \mathbb{R}^d$)：计算并返回 $\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{eb}$。

初始化、更新和查询的运行时间为 $\mathrm{MM}(n, d, d) \cdot O(\log(\kappa/\varepsilon))$，

$$(\mathrm{MM}(d, |S|, |S|) + \mathrm{MM}(d, d, |S|) + |S|^\omega) \cdot O(\log(\kappa/\varepsilon)),$$

*and* $d^2 \cdot O(\log(\kappa/\varepsilon))$, *respectively. Moreover the bit complexity of the matrix* $\mathbf{Z}^{-1}$ *is* $\tilde{O}(\log(\kappa/\varepsilon))$.

证明。我们证明算法 1中的数据结构实现了所需结果。计算矩阵 $\mathrm{A}^\top\mathrm{VA}$ 需要 $\mathrm{MM}(n, d, d) \cdot O(\log(\kappa))$ 时间，而计算矩阵 $\mathrm{Z}^{-1}$ 使得$\mathrm{kZ} - \mathrm{A}^\top\mathrm{VAk}_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon$ takes$d^\omega \cdot O(\log(\kappa)/\varepsilon)$ takes。由此，根据 $d \leq n$ 可得初始化的位复杂度界。

˜现在请注意，在每个更新过程结束时，我们将矩阵舍入为具有 $O(\log(\kappa/\epsilon))$位的数字。对于更新，我们需要计算矩阵D，使得 $\left\|\mathrm{D}^{-1} - (\mathrm{Q}_S^{-1}, _S + \mathrm{A}_S\mathrm{Z}^{-1}\mathrm{A}_S^\top)^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon$，这可以在时间 $(\mathrm{MM}(|S|, d, d) + \mathrm{MM}(|S|, d, |S|) + |S|^\omega) \cdot O(\log(\kappa/\varepsilon))$ 内完成。给定矩阵 $\mathrm{D}^{-1}$，更新矩阵 $\mathrm{Z}^{-1}$ 可以在时间 $(\mathrm{MM}(d, |S|, |S|) + \mathrm{MM}(d, d, |S|)) \cdot O(\log(\kappa/\varepsilon))$ 内完成。查询的成本是一次矩阵-向量乘法，其耗时为 $d^2 \cdot O(\log(\kappa/\varepsilon))$。

现在我们需要界定矩阵经过 $k$ 次更新后的误差。我们通过归纳法证明这一点。基本情形直接由初始化中的条件得出。现在假设经过 $k$ 次更新后

$$\left\|\mathbf{Z} - \mathbf{A}^\top \mathbf{V}\mathbf{A}\right\|_{\mathrm{F}} \leq (512 \cdot k \cdot \kappa^{26} + 2 \cdot k \cdot \kappa^2 + 1) \cdot \varepsilon,$$

and $\mathbf{Q}$ is the diagonal matrix corresponding to the $k+1$'st update. Let

$$\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1} = \mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}_S^\top \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}_S\mathbf{Z}^{-1} \quad \text{, with} \quad \left\|\mathbf{D}^{-1} - (\mathbf{Q}_{S,S}^{-1} + \mathbf{A}_S\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}_S^\top)^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon,$$

和 $\widehat{\ }\mathbf{Z}^{-1}$ 是通过对 $\widetilde{\ }\mathbf{Z}^{-1}$ 进行舍入得到的矩阵，其数值为 $\lceil \log(10d^2 \cdot \kappa/\varepsilon) \rceil$ 位。引理 1.7 直接给出

$$\left\|\widetilde{\mathbf{Z}} - \mathbf{A}^\top(\mathbf{V} + \mathbf{Q})\mathbf{A}\right\|_{\mathrm{F}} \leq (512 \cdot (k+1) \cdot \kappa^{26} + 2 \cdot k \cdot \kappa^2 + 1) \cdot \varepsilon.$$

此外，由于根据假设 $\mathrm{kA}^\top(\mathrm{V} + \mathrm{Q})\mathrm{Ak}_{\mathrm{F}}$，$\left\|(\mathrm{A}^\top(\mathrm{V} + \mathrm{Q})\mathrm{A})^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \kappa$，并且

$$\left\|\widetilde{\mathbf{Z}} - \mathbf{A}^\top(\mathbf{V} + \mathbf{Q})\mathbf{A}\right\|_{\mathrm{F}} \leq (512 \cdot (k+1) \cdot \kappa^{26} + 2 \cdot k \cdot \kappa^2 + 1) \cdot \varepsilon < \frac{1}{2\kappa},$$

由引理 3.1，我们有 $\left\|\widehat{\ }\mathbf{Z}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq 2\kappa$。因此条目$\widehat{\ }\mathbf{Z}^{-1}$ 小数点前的位数由 $\log_2(2\kappa) + 1$界定。因此舍入仅在小数点后的位中引入误差。因此

$$\left\|\widehat{\mathbf{Z}}^{-1} - \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\right\| \leq \varepsilon.$$

应用引理 3.1 并且因为 $\varepsilon < \frac{1}{4\kappa}$ （根据假设），$\left\|\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq 2\kappa$，以及

$$\left\|\widetilde{\mathbf{Z}}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \left\|\widetilde{\mathbf{Z}} - \mathbf{A}^\top(\mathbf{V}+\mathbf{Q})\mathbf{A}\right\|_{\mathrm{F}} + \left\|\mathbf{A}^\top(\mathbf{V}+\mathbf{Q})\mathbf{A}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \frac{1}{2\kappa} + \kappa \leq 2\kappa,$$

我们有 $\left\|\mathrm{bZ} - \mathrm{eZ}\right\|_{\mathrm{F}} \leq 2\kappa^2 \cdot \varepsilon$。因此根据三角不等式，

$$\left\|\widehat{\mathbf{Z}} - \mathbf{A}^\top(\mathbf{V}+\mathbf{Q})\mathbf{A}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \left\|\widehat{\mathbf{Z}} - \widetilde{\mathbf{Z}}\right\|_{\mathrm{F}} + \left\|\widetilde{\mathbf{Z}} - \mathbf{A}^\top(\mathbf{V}+\mathbf{Q})\mathbf{A}\right\|_{\mathrm{F}} \leq (512 \cdot (k+1) \cdot \kappa^{26} + 2 \cdot (k+1)\kappa^2 + 1) \cdot \varepsilon.$$

Therefore the desired error bound holds. □

注 3.3. 注意，如果我们不执行 DDS的 UPDATE 过程中的舍入步骤，在 $k$更新之后，位复杂度会增加 $k$ 倍，因为更新涉及矩阵相乘。然而，由于对 $\varepsilon$的上界假设，在舍入之后，所得矩阵的位复杂度为$O(\log(k\cdot \kappa/\varepsilon))$。正如我们稍后所见，我们算法中的迭代次数形式为$\mathrm{poly}(n)\log(f(n))$，其中 $f(n)$至多为 $n$的指数函数（例如，对于线性规划，迭代次数为 $\tilde{O}(n^{0.5}\log(\frac{R}{r\cdot\epsilon}))$）。因此我们算法中的 $O(\log(k\cdot\kappa/\varepsilon))$为 $O(\log(\kappa/\varepsilon))$。

注 3.4. 定理3.2要求 $\left\|\mathrm{Q}_{S,S}\right\|_{\mathrm{F}}, \left\|\mathrm{Q}_{S}^{-1},_{S}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \kappa$，其中 Q 是与权重从一次迭代到下一次迭代的差相对应的对角矩阵。尽管在我们的算法中，我们通常只对发生了显著变化的权重更新逆，即使差异很小，该条件也不会限制我们的数据结构，因为我们可以将每次更新实现为两次更新。例如，如果 $\mathrm{q}_i > 0$ 很小，我们首先使用$\mathrm{eq}_i^{(1)} = \mathrm{q}_i + 1$ 进行一次更新，然后使用$\mathrm{eq}_i^{(2)} = -1$进行第二次更新。注意，在执行此操作时，应加上并减去一个数，以便在执行辅助更新步骤时，$\mathrm{A}^\top\mathrm{VA}$和 $(\mathrm{A}^\top\mathrm{VA})^{-1}$ 的弗罗贝尼乌斯范数也保持较小。

## 3.2 Bit Complexity of Sparse Inverse Maintenance Data Structure

现在我们转向稀疏情形。首先，我们给出一种算法和位复杂度界，用于基于块 Krylov 方法计算稀疏矩阵的逆所对应的线性算子 [EGG+06，EGG+07]。我们的算法以 [PV21] 为基础，但与该文献中提出的算法有所不同，因为我们采用了 [Nie22]中给出的改进分析。

定理 3.5 ([PV21，Nie22])。 给定一个稀疏的 $n \times d$ 矩阵 $\mathbf{A}$，其按元素的最大幅值至多为 1，一个对角 $n \times n$矩阵 $\mathbf{W}$，其按元素的幅值至多为 1 以及 $m \leq d^{(\omega-2)/(\omega-1)}$，连同 $\kappa$，其给出了 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{W}$的条件数的上界，以至少 $1 - n^{-20}$的概率，我们可以在时间

$$\tilde{O}\left(\left(d \cdot \mathrm{NNZ}\left(\mathbf{A}\right) \cdot m + \left(\frac{d}{m}\right)^{\omega} m^2\right)\log\left(\kappa\right)\right)$$

*a linear operator* $\mathbf{Z}_{\mathbf{A}^\top\mathbf{WA}}$ *such that*

$$\left\|\mathbf{Z}_{\mathbf{A}^\top\mathbf{WA}} - \left(\mathbf{A}^\top\mathbf{WA}\right)^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \kappa^{-10}n^{-10}.$$

此外，对于一个 $d \times r$ 矩阵B，其中 $r \leq d/m$，$\mathrm{Z}_{\mathrm{A}^\top\mathrm{WA}}\mathrm{B}$可在 $\tilde{O}((r\cdot \mathrm{NNZ(A)}\cdot m^2 + d^2 r^{\omega-2})\log(\kappa/\epsilon))$ 时间内计算。

证明。以下陈述主要依据 [PV21][3] 中的顶层结论。由于 $\mathrm{A}^\top\mathrm{WA}$ 已经对称化，我们可以忽略涉及与非对称矩阵的转置相乘的外层步骤。因此，我们将说明如何访问一个算子 $\mathrm{Z}_{\mathrm{A}^\top\mathrm{WA}}$，使得

$$\left\|\mathbf{Z}_{\mathbf{A}^\top\mathbf{WA}} - \left(\mathbf{A}^\top\mathbf{WA}\right)^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon \tag{7}$$

The algorithm that computes access to this $\mathbf{Z}$ was given in Section 7 of [PV21].

[3]版本2， https://arxiv.org/pdf/2007.10254v2.pd f

1. Perturb with random Gaussian $\mathbf{R}$ to form the perturbed matrix

$$\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^\top \mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{R}$$

˜2. 使用 $O(m)$ 列额外生成克rylov子空间，

$$K = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^s & \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{G}^s & \widehat{\mathbf{A}}^2\mathbf{G}^s & \dots & \widehat{\mathbf{A}}^{m-1}\mathbf{G}^s \end{bmatrix},$$

whe re $s = d/m$，且 $\mathrm{G}^s$ 是一个具有 $s$ 列的稀疏高斯矩阵，$\mathrm{NNZ}(\mathrm{G}^s) = O(n)$。

b 3. 计算块汉克尔矩阵 $\mathrm{H} = \mathrm{K}^\top \mathrm{AK}$ 的逆。

具体而言，对于步骤 (3)，块汉克尔求解器生成的 $\mathbf{Z_H}$ 是两个显式矩阵˜的乘积，每个矩阵包含 $O(m\log(\kappa))$ 位，

$$\mathbf{Z_H} = \mathbf{X_H}\mathbf{Y_H}^\top$$

˜因此，对于某个 $d\times r$ 矩阵 B（每个元素最多有 $O(m \log \kappa)$ 位），根据 [PV21][1] 的引理 6.6，计算 $\mathrm{X_H B}$、$\mathrm{Y_H B}$、$\mathrm{X}^\top \mathrm{HB}$、$\mathrm{Y}^\top \mathrm{HB}$ 的成本为 $\tilde{O}(m^2 \cdot \mathrm{MM}(\frac{d}{m}, \frac{d}{m}, r) \cdot \log \kappa)$。将 $\mathrm{Z_A}^\top \mathrm{WA}$ 乘以一个 $d\times r$ 矩阵 B 的成本可分解为三部分：

1. The cost of performing the multiplication $\mathbf{K}^\top \mathbf{B}$ which takes $\tilde{O}(\mathrm{NNZ}(A) \cdot m^2 \cdot r \cdot \log^2(\kappa/\varepsilon))$ time.
2. 计算乘法的代价 $\mathbf{Y}^\top{}_{\mathbf{H}}$ 和 $\mathbf{X_H}$ 针对一个 $d$-乘-$r$ 矩阵：根据 [PV21][1]，的 6.6 引理，这需要时间$\tilde{O}(\mathrm{MM}(\frac{d}{m}, \frac{d}{m}, r) \cdot m^2 \log \kappa)$ 通过对 $\mathbf{X_H}$ 和 $\mathbf{Y_H}$的分块执行快速傅里叶变换。
3. 从右侧将K 与一个 $d\times r$矩阵相乘的耗时为 $\tilde{O}(\mathrm{NNZ}(A) \cdot m^2 \cdot r \cdot \log^2(\kappa/\varepsilon))$。

□

We are now equipped to present our sparse data structure and bound the bit complexity of its operations.

定理 3.6 (稀疏数据结构 — SDS)。设 $n \geq d$ 且 $m \leq n^{1/4}$。存在一种支持以下操作的数据结构，可将逆算子维护为显式矩阵 $\mathbf{T}$ 与基于块克rylov方法的逆（如定理 *3.5* 中所示）之和。

- Initialize($\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$,$\mathrm{w} \in \mathbb{R}^n, \varepsilon$): 设置 $\mathrm{v} = \mathrm{w}$，并初始化显式矩阵 $\mathrm{T} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 和线性算子 Z（见定理 *3.5*），使得 $\left\|(\mathrm{Z}+\mathrm{T})^{-1} - \mathrm{A}^\top \mathrm{VA}\right\|_\mathrm{F} \leq \varepsilon$，其中 V 是对应于 v 的对角矩阵。

- Update($S \subseteq [n]$, $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^{|S|}$): 设置 $\mathrm{v}_S = \mathrm{u}$ 并更新 Z 和 T，使得在对 Update 进行 $k$ 次调用后，我们有

$$\left\|(\mathbf{Z}+\mathbf{T})^{-1} - \mathbf{A}^\top \mathbf{VA}\right\|_\mathrm{F} \leq (512 \cdot k \cdot \kappa^{26} + 2 \cdot k \cdot \kappa^2 + 1) \cdot \varepsilon,$$

其中 $\kappa > n + d$ 是一个满足以下条件的数

$$\|\mathbf{A}\|_\mathrm{F}, \left\|\mathbf{Q}_{S,S}\right\|_\mathrm{F}, \left\|\mathbf{Q}_{S,S}^{-1}\right\|_\mathrm{F}, \left\|\mathbf{A}^\top \mathbf{VA}\right\|_\mathrm{F}, \left\|(\mathbf{A}^\top \mathbf{VA})^{-1}\right\|_\mathrm{F} \leq \kappa,$$

在所有更新期间以及

$$\varepsilon < \frac{1}{2\kappa \cdot (512 \cdot (k+1) \cdot \kappa^{26} + 2 \cdot k \cdot \kappa^2 + 1)}.$$

- Query(b): 计算并返回 $(\mathrm{Z}+\mathrm{T})\mathrm{b}$。

初始化和查询的运行时间分别为 $\tilde{O}\left(\left(d \cdot \mathrm{NNZ}(\mathrm{A}) \cdot m + \left(\frac{d}{m}\right)^\omega m^2\right)\log^2(\kappa/\varepsilon)\right)$ 和 $\tilde{O}(\mathrm{NNZ}(\mathrm{A}) \cdot m^2 + d^2 \cdot \log^2(\kappa/\varepsilon))$。若 $|S| \geq n/m$，则更新的运行时间等于初始化的运行时间，并且等于

$$\left(\mathrm{NNZ}(\mathbf{A}) \cdot m^2 \cdot |S| + d^2 \cdot |S|^{\omega-2} + \mathrm{MM}(d, |S|, |S|) + |S|^\omega\right) \cdot O(\log^2(\kappa/\varepsilon)),$$

否则。

算法 2：稀疏逆维护数据结构 (SDS)

变量： $n, d, m \in \mathbb{N}$ 与 $n > d$, $m \le n^{0.25}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$, 线性算子 $Z \in \mathbb{R}^{d\times d}$, 显式矩阵 $T \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $v \in \mathbb{R}^n$, $1 > \varepsilon > 0$.

过程 INITIALIZE($A \in \mathbb{R}^{n\times d}$, $w \in \mathbb{R}^n, \varepsilon$)

  根据输入设置 A、 $\varepsilon$、 $n$ 和 $d$

  设置 $v \leftarrow w$

  计算线性算子 Z，使得 $\|Z^{-1} - A^\top V A\|_F \le \varepsilon$ // 使用定理3.5 和根据引理将误差界设置得足够小 3.1

  将 T 设置为零矩阵

过程 UPDATE($S \subseteq [n]$, $u \in \mathbb{R}^{|S|}$)

  如果 $|S| \ge \frac{n}{m}$ **then**

    将 $w \in \mathbb{R}^n$ 设置为一个向量，其中 $w_i = u_i$，如果 $i \in S$，并且 $w_i = v_i$，如果 $i \in [n] \setminus S$。

    INITIALIZE($\mathbf{A}, \mathbf{w}, \varepsilon$)

  **else**

    设置 $q_S = u - v_S$ 其中 $q \in \mathbb{R}^n$

    设置 $v_S = u$

    Update the matrix $\mathbf{T}$ as the following

$$\mathbf{T} \leftarrow \mathbf{T} - (\mathbf{Z}+\mathbf{T})^\top \mathbf{A}_S^\top \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}_S (\mathbf{Z}+\mathbf{T}), \tag{8}$$

    where $\mathbf{D}^{-1} \in \mathbb{R}^{|S|\times|S|}$ is a matrix such that $\left\|\mathbf{D}^{-1} - (\mathbf{Q}_{S,S}^{-1} + \mathbf{A}_S(\mathbf{Z}+\mathbf{T})\mathbf{A}_S^\top)^{-1}\right\|_F \le \varepsilon$, and $\mathbf{Q}$ is the diagonal matrix corresponding to $\mathbf{q}$.

    Round entries of $\mathbf{T}$ to numbers with $\lceil \log(10d^2 \cdot \kappa/\varepsilon) \rceil$ bits.

**Procedure** QUERY($\widetilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^d$)

  Compute and return $\mathbf{Z}\widetilde{\mathbf{b}} + \mathbf{T}\widetilde{\mathbf{b}}$. // $\mathbf{Z}\widetilde{\mathbf{b}}$ is computed according to Theorem 3.5

证明。 我们证明，算法 2 中的数据结构能够达到所需结果。当 $|S| \ge n/m$ 时，初始化和更新的运行时间可直接由定理3.5得出。查询的运行时间则可通过对单列矩阵应用定理3.5 的第二部分得到。

对于包含 $|S| < n/m$ 的更新，我们首先需要计算 $Z^\top A_S^\top$，根据定理 3.5，这可以在时间 $\tilde{O}((\mathrm{NNZ}(A) \cdot m^2 \cdot |S| + d^2 \cdot |S|^{\omega-2}) \log^2(\kappa/\varepsilon))$ 内完成。完成这次乘法后，可以将所得矩阵的位数减少至 $\tilde{O}(\log(\kappa/\varepsilon))$，因为 $A^\top V A$ 的条件数有界于 $\kappa^{O(1)}$。注意，这个舍入误差可以计入逆的线性算子的误差。然后，额外花费 $\tilde{O}(d^2 \log(\kappa/\epsilon))$，即可计算 $(Z+T)^\top A_S^\top$。因此，可以在时间 $\tilde{O}(\mathrm{MM}(|S|, d, |S|) \cdot \log(\kappa/\varepsilon))$ 内计算 $A_S(Z+T)A_S^\top$。现在可以在时间 $\tilde{O}(|S|^\omega \cdot \log(\kappa/\varepsilon))$ 内计算 $D^{-1}$。最后，由于我们已经计算出 $(Z+T)^\top A_S^\top$，因此可以在时间 $O((\mathrm{MM}(d, |S|, |S|) + \mathrm{MM}(d, d, |S|)) \cdot \log(\kappa/\varepsilon))$ 内更新 T。

现在我们需要界定经过 $k$ 次更新后矩阵的误差。我们通过归纳法证明这一点。基本情形显然由初始化中的条件和引理 3.1 得出。现在假设经过 $k$ 次更新后

$$\left\|(\mathbf{Z}+\mathbf{T})^{-1} - \mathbf{A}^\top \mathbf{V} \mathbf{A}\right\|_F \le (512 \cdot k \cdot \kappa^{26} + 2 \cdot k \cdot \kappa^2 + 1) \cdot \varepsilon,$$

且 Q 是与第 $k+1$ 次更新相对应的对角矩阵。令

$$\widetilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T} - (\mathbf{Z}+\mathbf{T})^\top \mathbf{A}_S^\top \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}_S (\mathbf{Z}+\mathbf{T}) \quad \text{, with } \left\|\mathbf{D}^{-1} - (\mathbf{Q}_{S,S}^{-1} + \mathbf{A}_S(\mathbf{Z}+\mathbf{T})\mathbf{A}_S^\top)^{-1}\right\|_F \le \varepsilon,$$

并且 $\widehat{\mathbf{T}}$ 是将 $\widetilde{\mathbf{T}}$ 的条目舍入到精度为 $\lceil \log(10d^2 \cdot \kappa/\varepsilon) \rceil$ 位所得的矩阵。再令 $\widetilde{\widehat{\mathbf{Z}}} := \mathbf{Z}\,\widehat{\mathbf{T}}$ 以及 $\mathbf{Z} := \mathbf{Z}\,\mathbf{T}$。引理 1.7 直接给出

$$\left\|\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1} - \mathbf{A}^\top (\mathbf{V}+\mathbf{Q}) \mathbf{A}\right\|_F \le (512 \cdot (k+1) \cdot \kappa^{26} + 2 \cdot k \cdot \kappa^2 + 1) \cdot \varepsilon.$$

此外，由假设 $\|A^\top(V+Q)A\|_F$， $\left\|(A^\top(V+Q)A)^{-1}\right\|_F \le \kappa$，以及

$$\left\|\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1} - \mathbf{A}^\top (\mathbf{V}+\mathbf{Q}) \mathbf{A}\right\|_F \le (512 \cdot (k+1) \cdot \kappa^{26} + 2 \cdot k \cdot \kappa^2 + 1) \cdot \varepsilon < \frac{1}{2\kappa},$$

根据引理 3.1，我们有 $\left\|\widetilde{\mathbf{Z}}\right\|_{\mathrm{F}} \leq 2\kappa$。因此，条目$\widetilde{\mathbf{Z}}$ 小数点前的位数$_2(2\kappa) + 1$被 log 所界定。因此，舍入只会在小数点后的位产生误差。因此

$$\left\|\widehat{\mathbf{Z}} - \widetilde{\mathbf{Z}}\right\|_{\mathrm{F}} = \left\|\widehat{\mathbf{T}} - \widetilde{\mathbf{T}}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon.$$

利用引理3.1 并且由于 $\varepsilon < \frac{1}{4\kappa}$ （根据假设），$\left\|\widetilde{\mathbf{Z}}\right\|_{\mathrm{F}} \leq 2\kappa$，并且

$$\left\|\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \left\|\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1} - \mathbf{A}^{\top}(\mathbf{V}+\mathbf{Q})\mathbf{A}\right\|_{\mathrm{F}} + \left\|\mathbf{A}^{\top}(\mathbf{V}+\mathbf{Q})\mathbf{A}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \frac{1}{2\kappa} + \kappa \leq 2\kappa,$$

我们有 $\left\|\mathbf{b}\mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{e}\mathbf{Z}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq 2\kappa^2 \cdot \varepsilon$。因此，根据三角不等式，

$$\left\|\widehat{\mathbf{Z}}^{-1} - \mathbf{A}^{\top}(\mathbf{V}+\mathbf{Q})\mathbf{A}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \left\|\widehat{\mathbf{Z}}^{-1} - \widetilde{\mathbf{Z}}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} + \left\|\widetilde{\mathbf{Z}}^{-1} - \mathbf{A}^{\top}(\mathbf{V}+\mathbf{Q})\mathbf{A}\right\|_{\mathrm{F}} \leq (512 \cdot (k+1) \cdot \kappa^{26} + 2 \cdot (k+1)\kappa^2 + 1) \cdot \varepsilon.$$

因此，所需的误差界成立。 □

# 4 线性 使用内点法编程

本节中，我们考虑以下形式的线性规划问题。

$$\min_{\mathbf{x}:\mathbf{A}^{\top}\mathbf{x}=\mathbf{b},\mathbf{x}\geq 0} \mathbf{c}^{\top}\mathbf{x},$$

其中 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$、$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{d}$ 和 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n}$。我们针对该问题考虑了多种内点法。我们的主要结果如下，它界定了 [Bra20]，算法的位复杂度；该算法是 [CLS19] 的去随机化版本——见第 4.2 节。我们的算法与 [CLS19、Bra20] 算法的一个主要区别在于初始可行解的选择。受 [LV21] 启发，并且不同于 [CLS19、Bra20]，，我们选择初始可行解，使条件数和 $R/r$ 在多项式因子范围内保持不变。回顾一下，$r$ 和 $R$ 是该线性规划的内半径和外半径（见定义 2）。

定理 1.2（鲁棒内点法）。给定具有满列秩和条件数 $\kappa$ 的 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 、$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{d}$、$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n}$，其位复杂度均为 $\log(\kappa)$，以及一个误差参数 $0 < \epsilon < 1$，假设线性规划$\min_{\mathbf{A}^{\top}\mathbf{y}=\mathbf{b},\mathbf{y}\geq 0}\mathbf{c}^{\top}\mathbf{y}$ 的内半径和外半径分别为 $r$ 和 $R$。那么存在一种算法，可以计算出满足条件的 $\mathbf{by} \in \mathbb{R}^{n}$，使得

$$\mathbf{c}^{\top}\widehat{\mathbf{x}} \leq \min_{\mathbf{A}^{\top}\mathbf{x}=\mathbf{b},\mathbf{x}\geq 0} \mathbf{c}^{\top}\mathbf{x} + \epsilon \quad , and \quad \left\|\mathbf{A}^{\top}\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\right\|_2 \leq \epsilon,$$

在时间 $\tilde{O}\left((n^{\omega} + n^{2.5-\alpha/2} + n^{2+1/6}) \cdot \log(\frac{\kappa R}{\epsilon\, r}\cdot) \cdot \log(\frac{R}{\epsilon}\cdot r)\right)$ 内。

如第 1.3 节所述，即使对于位复杂度为 $O(1)$ 的矩阵，$\log(\kappa)$ 也可能为 $\Omega(n)$。此外，正如我们在第 4.1 节所讨论的，$\log(R/r)$ 也可能为 $\Omega(n)$。因此，CLS19、Bra20] 的算法总运行时间为 $O(n^{\omega+2})$。请注意，存在这样的实例：$\log(R/r)$ 为 $= O(1)$，而 $\kappa = \Omega(n)$。受此启发，我们提出以下基于使用移位数 [Sto05] 求解线性方程组的算法，以 $n^{0.5}$ 替代 $\log(\kappa)$ 因子。对于满足 $\log(R/r)$ 为 $= O(1)$、$\kappa = \Omega(n)$ 的实例，这种方法比定理 1.2 快 $n^{0.5}$ 倍。

定理 1.3（无逆内点法）。给定 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$，其具有满列秩，$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{d}$、$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n}$ 的位复杂度均为$l$，且误差参数为 $0 < \epsilon < 1$。假设线性规划 $\min_{\mathbf{A}^{\top}\mathbf{x}=\mathbf{b},\ \mathbf{x}\geq 0}\mathbf{c}^{\top}\mathbf{x}$ 的内半径和外半径分别为 $r$ 和 $R$。那么存在一种算法，可以找到 $\mathbf{bx} \in \mathbb{R}^{n}$，使得

$$\mathbf{c}^{\top}\widehat{\mathbf{x}} \leq \min_{\mathbf{A}^{\top}\mathbf{x}=\mathbf{b},\mathbf{x}\geq 0} \mathbf{c}^{\top}\mathbf{x} + \epsilon \quad , and \quad \left\|\mathbf{A}^{\top}\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\right\|_2 \leq \epsilon,$$

运行时间为 $\tilde{O}\left(n^{\omega+0.5} \cdot (l + \log(\frac{R}{\epsilon}\cdot r)) \cdot \log(\frac{R}{\epsilon}\cdot r)\right)$。

对于上述结果，我们使用经典的内点法，该方法采用 2-范数作为其势函数。将类似方法与稀疏求解器结合起来，可以在 $\omega > 2.5$ 时（例如，采用基于 Strassen 算法的算法，且 $\omega \approx 2.808$ [S+69]），针对稀疏实例改进求解线性规划的运行时间，使其超越矩阵乘法的时间。请注意，这类矩阵乘法算法正是实践中使用的算法。

定理 4.1。 [$l_2$-内点法（IPM）用于稀疏矩阵/设矩阵乘法指数 $\omega > 2.5$。给定具有满列秩的 $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$、$b \in \mathbb{R}^d$、$c \in \mathbb{R}^n$、$1 \le m \le n^{1/4}$ 误差参数 $0 < \epsilon < 1$，以及线性规划 $\min_{A^\top x = b, x \ge 0} c^\top x$，其内半径为 $r$、外半径为 $R$，存在一个算法，能够找到 $x \in \mathbb{R}^n$，使得

$$c^\top \widehat{x} \le \min_{A^\top x = b, x \ge 0} c^\top x + \epsilon \cdot \|c\|_\infty R \quad , \text{and} \quad \left\| A^\top \widehat{x} - b \right\|_2 \le \epsilon \cdot \|b\|_2 ,$$

在 $\tilde{O}\left(\left(\mathrm{NNZ}(A) \cdot m^2 \cdot n + \frac{n^{\omega}}{m^{\omega-2.5}} + n^{2.5}\right) \cdot \log^2\left(\frac{\kappa_+ \|b\|_\varepsilon}{\epsilon}\right) \cdot \log\left(\frac{n R}{\epsilon r}\right)\right)$ 时间内以高概率成立。

对于 $\mathrm{NNZ}(A) = O(n)$ 的情况，如果我们使用 Strassen 算法，并且 $\kappa/\epsilon$ 和 $R/r$ 是 $n$ 的多项式，那么上述结果意味着运行时间为 $\tilde{O}(n^{2.756})$。此外，对于任意 $\omega > 2.5$ 以及满足 $\mathrm{NNZ}(A) = o(n^{\omega-1})$ 的 A，存在一个 $m$，使得上述运行时间小于 $n^\omega$。

在第 4.1 节中，我们将介绍一些定义、参数、用于求解线性规划的一般内点法，以及我们对初始可行解的选择。随后，我们将在第 1.2、1.3 和 4.1 节中分别证明定理 4.2 至 4.4。

## 4.1 线性规划预备知识与初始可行点

我们首先定义中心路径。内点法首先在中心路径上找到一个可行解，然后沿着中心路径前进，以接近最优解。

定义 5. 若存在 $s \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$，$t \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ 使得 $x \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$ 位于中心路径上，则称点 x 为中心路径上的点。$t$

$$x \odot s = \vec{t},$$
$$A^\top x = b,$$
$$Ay + s = c,$$

® 注意，若存在 $s \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$ 使得 $x \odot s = 0$，且另外两个约束也得到满足，则 x 是一个最优解。

使用内点法求解线性规划的第一步，是在中心路径上找到一个初始可行解。为此，需要修改线性规划，使修改后的规划具有已知的可行解。

定义6（修改后的线性规划）。考虑线性规划$\min_{x: A^\top y = b, y \ge 0} c^\top y$，其内半径为 $r$，外半径为 $R$。对于任意 $R \ge 10R$，$t \ge 8\|c\|_\infty R$，我们将修正原始线性规划定义为

$$\min_{(x^+, x^-, x^\theta) \in \mathcal{P}_{\overline{R},t}} c^\top x^+ + \widetilde{c}^\top x^-,$$

*where*

$$\mathcal{P}_{\overline{R},t} = \{(x^+, x^-, x^\theta) \in \mathbb{R}^{2n+1}_{\ge 0} : A^\top (x^+ - x^-) = b, \sum_{i=1}^n x^+_i + x^\theta = \widetilde{b}\},$$

其中 $y^+_c = \frac{t}{\|c\|_\infty + t/R}$，$y^-_c = y^+_c - A(A^\top A)^{-1} b$，$ec = t/y^-_c$，$eb = \|\overline{1}^n_{i=1} y^+_{c,i}\| + R$。我们将相应的对偶多面体定义为

$$\mathcal{D}_{\overline{R},t} = \{(s^+, s^-, s^\theta) \in \mathbb{R}^{2n+1}_{\ge 0} : Ay + \lambda \vec{1} + s^+ = c, -Ay + s^- = \widetilde{c}, \lambda + s^\theta = 0 \text{ for some } y \in \mathbb{R}^d \text{ and } \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

*Note that defining*

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A & \vec{1} \\ -A & \vec{0} \\ \vec{0}^\top & 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} b \\ \widetilde{b} \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \overline{c} = \begin{bmatrix} c \\ \widetilde{c} \\ 0 \end{bmatrix},$$

*the modified primal problem is* $\min_{\overline{x}: \overline{A}^\top \overline{x} = \overline{b}, \overline{x} \ge 0} \overline{c}^\top \overline{x}$.

下一个引理指出，修改后的线性规划的初始可行解是已知的。此外，从该可行解出发，如果我们将中心性（向量 $y \odot s$ 的条目）适当降低，就能到达一个接近原始线性规划中心路径的点。

引理 4.2 (定理 11 on [LV21])。给定一个线性规划 $\min_{x:Ax=b,\ x\geq 0} c^\top y$，其内半径为 $r$，外半径为 $R$。对于任意 $0 \leq \varepsilon \leq 0.5$，修改后的线性规划（定义 6），其中 $\overline{R} = \frac{5}{\varepsilon} R$ 和 $t = 2^{16}\varepsilon^{-3} n^2 \frac{R}{r} \cdot \|c\|_\infty R$ 具有以下性质：

1.点$(y_c^+, y_c^-, R)$（如定义6中所定义）位于带有 $(s^+, s^-, s^\theta)$和 $t$的修改后的线性规划的中心路径上，其中$s^+ = \mu t / y^+$，$s^- = \mu t / s^-$，以及$s^\theta = t / y^\theta$。2. 对于任意可行的原始点 $y = (y^+, y^-, y^\theta) \in P_{\overline{R},t}$ 以及对偶 $s = (s^+, s^-, s^\theta) \in D_{\overline{R},t}$，使得56 $\|c\|_\infty R \leq y_i s_i \leq \frac{7}{6}\|c\|_\infty R$，有$(y^+ - y^-, s^+ - \mu s^\theta) \in P \times D$。此外，对于所有$i \in [n]$，$y_i^- \leq \varepsilon y_i^+$以及 $\mu s^\theta \leq \varepsilon s_i^+$。

正如我们将针对所有内点法所展示的，我们可以采取形如 $(1 - \frac{1}{C\sqrt{n}})t$ 的步长，其中 $C$ 是某个常数。因此，从修改后的线性规划的初始可行解出发，我们可以在 $O(\sqrt{n}\log(\frac{n \cdot R}{\varepsilon r} \cdot))$ 次迭代内到达一个接近原始线性规划可行解的点。随后，我们可以从该点运行内点法算法，达到一个与最优解 $\epsilon$接近的点。这可以通过另外 $O(\sqrt{n}\log(\frac{n \cdot \|c\|_\infty R}{\epsilon}))$ 次迭代完成。算法 3 展示了这一过程。在该算法中，我们用 GenericIPM 表示内点法算法，因为我们在第 4.2、4.3 和 4.4 节中使用了不同的内点法。内点法之间的差异，本质上在于衡量与中心路径接近程度的方式、每次迭代中求解的线性方程组（其特征取决于所用的梯度向量近似，以及所用的向量 x 和 s），以及求解这些线性方程组的方式。前者将在以下定义中形式化。

定义7。我们将算法 GenericIPM$(A, y^{(0)}, s^{(0)}, t(0), t(end), \varepsilon)$视为一个通用内点法，如果对于势函数 $f$、一个取决于 $n$ 的函数 $g$，以及给定的$y^{(0)}$、$s^{(0)} \in \mathbb{R}^n$、$t \in \mathbb{R}$，满足 $f(y^{(0)}, s^{(0)}, t(0)) \leq g(n)$，它返回 $y^{(end)}$、$s^{(end)}$，使得 $f(y^{(end)}, s^{(end)}, t(end)) \leq g(n)$，并且$\|A^\top(y^{(end)} - y^{(0)})\| \leq \varepsilon$。对于基于 2-范数的内点法，$f(y, s, t) = \|(y \odot s - \mu t)/t\|_2$，并且 $g(n) = 0.01$。对于鲁棒内点法，$f(y, s, t) = \Phi_\lambda((y \odot s - \mu t)/t)$，其中 $\Phi_\lambda(u) = \sum_{i=1}^n \cosh(\lambda u_i)$，$\lambda > 0$ 是一个参数，并且$g(n) = 16n$。

内点法算法在每次迭代中，通过求解以下线性方程组并令 $x = x + \delta_x$ 且 $s = s + \delta_s$，来更新原始向量和松弛向量 x 和 s，

$$\begin{aligned} \overline{X}\widetilde{\delta}_s + \overline{S}\widetilde{\delta}_x &= \widetilde{\delta}_\mu, \\ A^\top \widetilde{\delta}_x &= 0, \\ A\widetilde{\delta}_y + \widetilde{\delta}_s &= 0, \end{aligned}$$

其中 $x$、$s$、$\delta_\mu$ 是与 $x$、$s$、$\delta_\mu$接近（在某种范数下）的向量，并且 $\delta_\mu$ 是势函数梯度的一个向量函数 $f$。注意，我们近似求解这些线性方程组，但由于误差是可加的（见推论2.5），因此可以界定该算法的总可行性误差。

我们在第 4.2 节使用鲁棒内点法，在第 4.3 节和第 4.4 节使用基于 2-范数的内点法。在第 4.2 节中，线性方程组通过与一个逆矩阵相乘来求解，该逆矩阵最初通过分治算法和快速矩阵乘法 [DDH07, DDHK07]，得到，并通过 Woodbury 恒等式在低秩更新下维护——参见推论 1.14。在第 4.3 节中，线性方程组使用移位数表示法 [Sto05] 求解——参见定理 4.10。在第 4.4 节中，线性方程组通过与逆矩阵的表示相乘来求解；这些表示由块 Krylov 方法 [EGG+06, EGG+07, PV21, Nie22]，得到，并通过 Woodbury 恒等式在低秩更新下维护。第 4.2 节和第 4.4 节中的线性方程组求解器的运行时间取决于相应矩阵的条件数。由于修改后的线性规划会改变矩阵，我们需要论证其条件数不会比原始矩阵的条件数大幅增加。

**Algorithm 3:** Path following interior point method (IPM)

1 假设：线性规划的内半径为 $r$，外半径为 $R$ 2 输入：满列秩矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 和向量 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$、$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$；误差参数$0 < \epsilon_1$、$\epsilon_2 < 1$。3 输出：$\mathbf{bx} \in \mathbb{Q}^n_{\geq 0}$，使得 $\mathbf{kA^\top bx - bk}_2 \leq \epsilon_2 \mathbf{kbk}_2$，且 $\mathbf{c^\top bx} \leq \min_{\mathbf{x}:\mathbf{A}^\top\mathbf{x}=\mathbf{b},\mathbf{x}\geq 0}\mathbf{c}^\top\mathbf{x} + \epsilon_1$。4 令 $\varepsilon = 1/(100\sqrt{n})$，$\overline{R} = \frac{5}{\varepsilon}R$，$t = 2^{16}\varepsilon^{-3}n^2\frac{R}{r}\cdot \mathbf{kck}_\infty R$。5 令 A、b、c、$\mathbf{x}_c^+$、$\mathbf{x}_c^-$ 如定义6中针对修改后的线性规划问题所定义。6 令 $\mathbf{x}_c^\theta = \overline{R}$、$\mathbf{x}^{(0)} = (\mathbf{x}_c^+, \mathbf{x}_c^-, \mathbf{x}_c^\theta)$，以及 $\mathbf{s}^{(0)} = t/\mathbf{x}^{(0)}$ 7 令 $(\mathbf{x}^{(\mathrm{end})}, \mathbf{s}^{(\mathrm{end})}) = \textsc{GenericIPM}(\mathbf{A}, \mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{s}^{(0)}, t, \mathbf{kck}_\infty R, \epsilon_2)$ 8 设 $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-$，$\mathbf{s}^{(0)} = \mathbf{s}^+ - \mathbf{s}^-$，其中 $\mathbf{x}^{(\mathrm{end})} = (\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-, \mathbf{x}^\theta)$，$\mathbf{s}^{(\mathrm{end})} = (\mathbf{s}^+, \mathbf{s}^-, \mathbf{s}^\theta)$ 9 令 $(\mathbf{x}^{(\mathrm{end})}, \mathbf{s}^{(\mathrm{end})}) = \textsc{GenericIPM}(\mathbf{A}, \mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{s}^{(0)}, \mathbf{kck}_\infty R, \epsilon/2n, \epsilon_2)$。

**Lemma 4.3.** *Condition number of* $\overline{\mathbf{A}}$ *(as defined in Definition 6) is less than* $8\cdot(\kappa(A)+\log(n))^7$.

证明。首先注意，A 和 $\mathbf{B} \coloneqq \begin{bmatrix}\mathbf{A}^\top & -\mathbf{A}^\top & \mathbf{0}\end{bmatrix}^\top$ 的条件数相同。因此令 $\mathbf{g} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & 1\end{bmatrix}^\top$，由于 $\mathbf{kgk}_2 \leq \sqrt{n+1}$，并且

$$\left\|(\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{B}^\top\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\top)\mathbf{g}\right\|_2 \geq 1,$$

by Lemma 5.13, the condition number of $\overline{\mathbf{A}}$ is less than $8\cdot(\kappa(A)+\log(n))^7$. □

对于采用逆矩阵维护的内点法（第 4.2 和 4.4 节），位复杂度会与逆矩阵交互进行分析，并且，为防止所得向量的位复杂度增长，在将逆矩阵应用于向量时进行所需的舍入。对于采用移位数求解线性方程组的内点法（第 4.3 节），给定一个整数矩阵和向量，线性方程组的精确解将作为有理向量返回。为确保（有理向量或实向量的）位复杂度不会失控，我们需要在有理向量与实（定点）向量之间切换。为此，我们定义~以下可在 $O(nl)$ 中计算的函数，其中$l$ 是输入向量的位复杂度，并且$q$ 或 $1/\epsilon$。

定义 8。对于向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和数 $q \in \mathbb{Q}$，我们将 $\textsc{QRound}(\mathbf{x}, q)$ 定义为向量 $\mathbf{u} \in \mathbb{Q}^n$，其中 $\mathbf{u}_i$ 是最接近 $\mathbf{x}_i$ 的 $q$ 的幂（或负的幂）的数。对于向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 或 $\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^n$ 和数 $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$，我们将 $\textsc{Round}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ 定义为定点向量 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$，其中 $|\mathbf{u}_i - \mathbf{x}_i| \leq \varepsilon$。

现在，我们已经准备好在接下来的章节中介绍我们的内点法，并分析其运行时间。在此之前，我们给出一个例子，其中采用移位数的内点法（定理 1.3）比基于逆矩阵维护的内点法（定理 1.2）具有更短的运行时间。令

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&0&0&0&\cdots&0&0&0\\2&1&0&0&\cdots&0&0&0\\0&2&1&0&\cdots&0&0&0\\0&0&2&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1&0&0\\0&0&0&0&\cdots&2&1&0\\0&0&0&0&\cdots&0&2&1\\1&0&0&0&\cdots&0&0&0\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix}4/3\\1\\1\\1\\\vdots\\1\\1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\\vdots\\1\\1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Then for the following linear program

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n-1}:\mathbf{A}^\top\mathbf{x}=\mathbf{b},\mathbf{x}\geq 0} \mathbf{c}^\top\mathbf{x},$$

$R \leq 2\sqrt{n}$ 因为对于满足 $\mathbf{kxk}_2 > 2\sqrt{n}$ 的 $\mathbf{x} \geq 0$，存在 $i \in [n]$ 使得 $\mathbf{x}_i > 4$。那么可以看出，如果$i \neq n$，则 $(\mathbf{A}^\top\mathbf{x})_i > 4 > \mathbf{b}_i$；如果 $i = n$，则 $(\mathbf{A}^\top\mathbf{x})_1 > 4 > \mathbf{b}_1$。此外，注意对于 $\mathbf{x} = \frac{1}{3}\cdot\mathbf{c}$，有 $\mathbf{x} \geq 0$

且 $A^\top y = b$。因此 $r > \frac{1}{3}$。于是 $R/r \le \frac{\sqrt{n}}{3}$。然而，正如第 1.3 节所讨论的，$\kappa(A)$ 至少为 $2^{n-2}$（对于最大和最小奇异值，分别检查 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\cdots 0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}(-1/2)^{n-1} & (-1/2)^{n-2}\cdots -1/2 & 1\end{bmatrix}$ 中的向量）。在这种情况下，定理 1.3 的运行时间为 $\tilde{O}(n^{\omega+0.5}\log^2(1/\epsilon))$，而定理 1.2 的运行时间为 $\tilde{O}(n^{\omega+1}\log(1/\epsilon))$。

## 4.2 Robust Interior Point Method For Solving Linear Programs

The main result of this section is the following theorem that is achieved by Algorithm 5.

定理 1.2（鲁棒内点法）。给定 $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 具有满列秩且条件数为 $\kappa$，$b \in \mathbb{R}^d$，$c \in \mathbb{R}^n$ 的位复杂度均为 $\log(\kappa)$，以及误差参数 $0 < \epsilon < 1$，假设线性规划 $\min_{A^\top y=b, y\ge 0} c^\top y$ 的内半径和外半径分别为 $r$ 和 $R$。那么存在一个算法，可以计算出 $by \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$c^\top \widehat{x} \le \min_{A^\top x=b, x\ge 0} c^\top x + \epsilon \quad , \text{and} \quad \left\|A^\top \widehat{x} - b\right\|_2 \le \epsilon,$$

耗时 $\tilde{O}\left((n^\omega + n^{2.5-\alpha/2} + n^{2+1/6})\cdot \log(\frac{\kappa R}{\epsilon\, r}\cdot) \cdot \log(\frac{R}{\epsilon}\cdot r)\right)$。

For this result we work with the potential function of the form $\Phi_\lambda(\frac{xs}{t} - 1)$, where

$$\Phi_\lambda(u) = \sum_{i=1}^n \cosh(\lambda u_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\exp(\lambda u_i) + \exp(-\lambda u_i)}{2}.$$

我们使用以下数据结构来维护投影矩阵 $A(A^\top XS^{-1})A^\top$ 并计算 e echanges $\delta_s$ 和 $\overline{\delta_{x\circ}}$

定理 4.4（投影维护数据结构 — PDS）。设 $n \ge d$。存在一个具有以下操作的数据结构，用于维护显式矩阵 $Z^{-1}$。

- Initialize($A \in \mathbb{R}^{n\times d}$,$x \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$b\alpha, \varepsilon$): 设置 $x = x$, $s = s$, $r = r$，并计算一个 b 线性运算 Z 使得
$$\left\|\widehat{Z} - A(A^\top \overline{XS}^{-1} A)^{-1} A^\top\right\|_F \le \kappa^2 \cdot \varepsilon.$$
此外，设置 $er = ex = es = 0 \in \mathbb{R}^n$, $T = \varnothing$，并设置 $ew = bZ\overline{S}^{-1} f(r)$。

- Update($S \subseteq [n]$, $x(u) \in \mathbb{R}^{|S|}$, $s(u) \in \mathbb{R}^{|S|}$, $r(u) \in \mathbb{R}^{|S|}$): 设置 $ex_S = x(u) - x_S$, $es_S = s(u) - s_S$, $er_S = r(u) - r_S$，以及 $T = T \cup S$。如果 $|T| > nb^\alpha$，设置 $x = x + ex$, $s = s + es$, $r = r + er$, $er = ex = es = 0 \in \mathbb{R}^n$, $T = \varnothing$，并更新 bZ 使得在对 Update 的 $k$ 次调用之后，我们有
$$\left\|\widehat{Z} - A(A^\top \overline{XS}^{-1} A)A^\top\right\|_F \le 50\kappa^{12} \cdot (512 \cdot k \cdot (5\kappa^5)^{26} + 2 \cdot k \cdot (6\kappa^5)^2 + 1) \cdot \varepsilon,$$
*where* $\kappa > n + d$ *is a number such that*
$$\|A\|_F, \left\|\overline{XS}^{-1}\right\|_F, \left\|\overline{X}^{-1}\overline{S}\right\|_F, \left\|\widetilde{X}\widetilde{S}^{-1}\right\|_F, \left\|\widetilde{X}^{-1}\widetilde{S}\right\|_F, \left\|A^\top \overline{XS}^{-1} A\right\|_F, \left\|(A^\top \overline{XS}^{-1} A)^{-1}\right\|_F \le \kappa,$$
*during all the updates and*
$$\varepsilon < \frac{1}{10\kappa^5 \cdot (512 \cdot (k+1) \cdot (5\kappa^5)^{26} + 2 \cdot k \cdot (6\kappa^5)^2 + 1)}.$$
*After updating* $\widehat{Z}$, *it sets* $\widetilde{w} = \widehat{Z}\overline{S}^{-1} f(\overline{r})$.

- Query(): *Compute* $D^{-1} \in \mathbb{R}^{|T|\times|T|}$ *such that*
$$\left\|D^{-1} - \left(\widetilde{X}_{T,T}^{-1}\widetilde{S}_{T,T} + \widehat{Z}_{T,T}\right)^{-1}\right\|_F \le \varepsilon.$$
*Then it computes and returns*
$$\widetilde{w} + \widehat{Z}(\overline{S}^{-1})_T^\top f(\widetilde{r}_T) - \widehat{Z}_{:T} D^{-1} (\widehat{Z}_{:T})^\top \overline{S}^{-1} f(\overline{r} + \widetilde{r}).$$

~ ~初始化、更新和查询的运行时间分别为 $n^{\omega}\cdot\ O(\log(\kappa/\varepsilon))$, $\mathrm{MM}(n,n,|T|)\cdot O(\log(\kappa/\varepsilon))$, and$(n^{1+\widehat{\alpha}}+n^{\widehat{}\alpha\cdot\omega})\cdot\ \tilde{O}(\log(\kappa/\varepsilon))$, 分别。

证明。 我们证明算法 4 中的数据结构达到了所需的结果。首先注意到 $\mathbf{M}$ 可逆，因为 $\mathbf{SX}^{-1}$，并且$\mathbf{A}^{\top}\mathbf{XS}^{-1}$ $\mathbf{A}$ 可逆，且

$$\mathbf{M}^{-1}=\begin{bmatrix}(\mathbf{A}^{\top}\overline{\mathbf{XS}}^{-1}\mathbf{A})^{-1} & -(\mathbf{A}^{\top}\overline{\mathbf{XS}}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\top}\overline{\mathbf{XS}}^{-1}\\ -\overline{\mathbf{XS}}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\top}\overline{\mathbf{XS}}^{-1}\mathbf{A})^{-1} & \overline{\mathbf{XS}}^{-1}+\overline{\mathbf{XS}}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\top}\overline{\mathbf{XS}}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\top}\overline{\mathbf{XS}}^{-1}\end{bmatrix}.$$

注意，由三角不等式可得 $\mathrm{kMk}_{\mathrm{F}}\ \leq\ 3\kappa$，且 $\left\|\mathrm{M}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}\ \leq\ 2\kappa+2\kappa^{3}+\kappa^{5}$。由于 Z 是一个满足$\left\|\mathrm{Z}^{-1}-\mathrm{M}\right\|_{\mathrm{F}}\leq\varepsilon$的矩阵，令 eZ 为 Z 的 $n\times n$右下块，则 bZ $=\mathrm{SX}^{-1}(\mathrm{eZ}\ -\mathrm{XS}^{-1})\mathrm{X}^{-1}\mathrm{S}$ 是 $\mathrm{A}(\mathrm{A}^{\top}\mathrm{XS}^{-1}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\top}$ 的线性算子。

现在我们对运行时间进行界定。初始化需要计算一个带有 $n\ \geq\ d$的 $(n+d)\ \times(n+d)$ 矩阵的逆。所需的误差界和条件数界给出的运行时间为$n^{\omega}\cdot\ \tilde{O}(\log(\kappa/\varepsilon))$。然后，由于 X 和S 是对角矩阵，根据算法4 的第 7 行和第 8 行计算 bZ 和 ew 可在 $\tilde{O}(n^{2}\log(\kappa/\varepsilon))$ 时间内完成。

我们现在界定更新的运行时间。如果 $|T|\leq n^{\widehat{}\alpha}$，则成本由 $\tilde{O}(n\log(\kappa/\varepsilon))$ 界定，因为我们只根据输入为向量的条目设置新值。否则，我们更新逆。计算 $\mathrm{D}^{-1}$ 需要 $|T|^{\omega}\cdot\ \tilde{O}(\log(\kappa/\varepsilon))$，因为误差界和条件数界以及 UZU 只选择 Z 的子矩阵这一事实。然后计算 $\mathrm{ZU}^{\top}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{UZ}$ 需要 $\mathrm{MM}(n,n,|T|)\cdot\ \tilde{O}(\log(\kappa/\varepsilon))$，有了这个矩阵，我们可以在 $\tilde{O}($ $n^{2}\log(\kappa/\varepsilon)$) 时间内更新 Z。最后，对于更新，我们需要重新计算 ew，这可以在 $\tilde{O}(n^{2}\log(\kappa/\varepsilon))$ 时间内完成，类似于初始化步骤。

由于查询过程中计算 $\mathrm{D}^{-1}$ 最多需要 $n\mathrm{b}_{\alpha\cdot\omega}\cdot\ \tilde{O}(\log(\kappa/\varepsilon))$。然后，根据算法 4 的查询步骤计算 ew + $\mathrm{bZ}(\mathrm{S}^{-1})_{T}^{\top}f(\mathrm{er}_{T})\ -\mathrm{bZ}_{:T}\mathrm{D}^{-1}(\mathrm{bZ}_{:T})^{\top}\mathrm{S}^{-1}f(\mathrm{r}+\mathrm{er})$，只需 $n^{1+\widehat{\alpha}}\cdot\ \tilde{O}(\log(\kappa/\varepsilon))$ 时间。注意，在此过程中我们不会构造矩阵 bZ，因为构造该矩阵会产生 $\Omega(n^{2})$ 的开销。

现在我们需要界定经过 $k$ 次更新后矩阵的误差。我们用归纳法证明这一点。对于基本情形，注意 $\left\|\mathrm{Z}^{-1}-\mathrm{M}\right\|_{\mathrm{F}}\leq\varepsilon$。因此，由于 $\mathrm{kMk}_{\mathrm{F}}$ , $\left\|\mathrm{M}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}\leq 5\kappa^{5}$，我们有

$$\left\|\widetilde{\mathbf{Z}}-(\overline{\mathbf{XS}}^{-1}+\overline{\mathbf{XS}}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\top}\overline{\mathbf{XS}}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\top}\overline{\mathbf{XS}}^{-1})\right\|_{\mathrm{F}}\leq 5\kappa^{5}\cdot\varepsilon.$$

因此

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{\mathbf{Z}}-\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\top}\overline{\mathbf{XS}}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\top}\right\|_{\mathrm{F}}&=\left\|\overline{\mathbf{X}}^{-1}\overline{\mathbf{S}}(\widetilde{\mathbf{Z}}-\overline{\mathbf{XS}}^{-1})\overline{\mathbf{X}}^{-1}\overline{\mathbf{S}}-\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\top}\overline{\mathbf{XS}}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\top}\right\|_{\mathrm{F}}\\&\leq\left\|\overline{\mathbf{X}}^{-1}\overline{\mathbf{S}}\right\|_{\mathrm{F}}\left\|\widetilde{\mathbf{Z}}-(\overline{\mathbf{XS}}^{-1}+\overline{\mathbf{XS}}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\top}\overline{\mathbf{XS}}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\top}\overline{\mathbf{XS}}^{-1})\right\|_{\mathrm{F}}\left\|\overline{\mathbf{X}}^{-1}\overline{\mathbf{S}}\right\|_{\mathrm{F}}\\&\leq 5\kappa^{7}\cdot\varepsilon.\end{aligned}$$

现在假设经过 $k$ 更新后

$$\left\|\mathbf{Z}^{-1}-\mathbf{M}\right\|_{\mathrm{F}}\leq(512\cdot k\cdot(5\kappa^{5})^{26}+2\cdot k\cdot(6\kappa^{5})^{2}+1)\cdot\varepsilon,$$

且 $\mathrm{eXeS}^{-1}$ 是与第 $k+1$ 次更新对应的对角矩阵。令

$$\mathbf{Y}=\mathbf{Z}-\mathbf{ZU}^{\top}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{UZ}\ \ ,\text{with}\ \ \left\|\mathbf{D}^{-1}-\left(\widetilde{\mathbf{X}}_{T,T}^{-1}\widetilde{\mathbf{S}}_{T,T}+\mathbf{UZU}^{\top}\right)^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}\leq\varepsilon,$$

且 $\widehat{}\mathbf{Y}$ 是将 $\mathbf{Y}$ 的条目舍入为以下精度的数值后得到的矩阵： $\lceil\log(100(n+d)^{2}\cdot\ \kappa^{5}/\varepsilon)\rceil$ 位。引理 1.7 直接给出

$$\left\|\mathbf{Y}^{-1}-\widehat{\mathbf{M}}\right\|_{\mathrm{F}}\leq(512\cdot(k+1)\cdot(5\kappa^{5})^{26}+2\cdot k\cdot(6\kappa^{5})^{2}+1)\cdot\varepsilon,$$

where $\widehat{\mathbf{M}}$ is the matrix $\mathbf{M}$ after the update, i.e.,

$$\widehat{\mathbf{M}}=\mathbf{M}+\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{d\times d} & \mathbf{0}_{d\times n}\\ \mathbf{0}_{n\times d} & \widetilde{\mathbf{S}}\widetilde{\mathbf{X}}^{-1}\end{bmatrix}.$$

此外，范数界假设意味着 $\left\|\mathbf{M}\right\|_{\mathrm{F}}, \left\|\mathbf{M}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq 5\kappa^5$，以及

$$\left\|\mathbf{Y}^{-1} - \widehat{\mathbf{M}}\right\|_{\mathrm{F}} \leq (512 \cdot (k+1) \cdot (5\kappa^5)^{26} + 2 \cdot k \cdot (6\kappa^5)^2 + 1) \cdot \varepsilon < \frac{1}{10\kappa^5},$$

由引理 3.1，我们有 $\|\mathbf{Y}\|_{\mathrm{F}} \leq 10\kappa^5$。因此条目 $\mathbf{Y}$ 小数点前的位数由 $\log_2(10\kappa^5) + 1$ 界定。因此舍入仅在小数点后的位中引入误差。因此

$$\left\|\mathbf{Y} - \widehat{\mathbf{Y}}\right\| \leq \varepsilon.$$

根据引理 3.1 并且因为 $\varepsilon < \frac{1}{10\kappa^5}$（根据假设），$\|\mathbf{Y}\|_{\mathrm{F}} \leq 10\kappa^5$，并且

$$\|\mathbf{Y}^{-1}\|_{\mathrm{F}} \leq \left\|\mathbf{Y}^{-1} - \widehat{\mathbf{M}}\right\|_{\mathrm{F}} + \left\|\widehat{\mathbf{M}}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \frac{1}{10\kappa^5} + 5\kappa^5 \leq 6\kappa^5,$$

我们有 $\left\|\mathbf{Y}^{-1} - \mathbf{Y}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq 2 \cdot (6\kappa^5)^2 \cdot \varepsilon$。因此根据三角不等式，

$$\left\|\widehat{\mathbf{Y}}^{-1} - \widehat{\mathbf{M}}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \left\|\widehat{\mathbf{Y}}^{-1} - \mathbf{Y}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} + \left\|\mathbf{Y}^{-1} - \widehat{\mathbf{M}}\right\|_{\mathrm{F}} \leq (512 \cdot (k+1) \cdot (5\kappa^5)^{26} + 2 \cdot (k+1) \cdot (6\kappa^5)^2 + 1) \cdot \varepsilon.$$

因此

$$\left\|\widehat{\mathbf{Y}} - \widehat{\mathbf{M}}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq 2 \cdot (5\kappa^5)^2 \cdot (512 \cdot (k+1) \cdot (5\kappa^5)^{26} + 2 \cdot (k+1) \cdot (6\kappa^5)^2 + 1) \cdot \varepsilon.$$

因此在更新之后，我们有，

$$\left\|\widehat{\mathbf{Z}} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{A}^\top\right\|_{\mathrm{F}} \leq 2\kappa^2 \cdot (5\kappa^5)^2 \cdot (512 \cdot (k+1) \cdot (5\kappa^5)^{26} + 2 \cdot (k+1) \cdot (6\kappa^5)^2 + 1) \cdot \varepsilon.$$

□

鲁棒内点法收敛，如果 $\|(\mathbf{x}\mathbf{s} - t)/t\|_\infty$, $\left\|\mathbf{e}_{\delta_\mathbf{x}}/\mathbf{x}\right\|_2$ 和 $\left\|\mathbf{e}_{\delta_\mathbf{s}}/\mathbf{s}\right\|_2$ 在整个算法过程中都很小。这里我们论证，如果我们为求解对应于鲁棒内点法迭代的线性方程组设置误差参数，则这些量保持很小。我们首先为精确求解提供这些量的界。

引理 4.5 ([LV21])。设 $\mathbf{y}$、$\mathbf{s}$ 为向量，满足 $\|\log \mathbf{y} - \log \mathbf{y}\|_\infty \leq \frac{1}{48}$、$\|\log \mathbf{s} - \log \mathbf{s}\|_\infty \leq \frac{1}{48}$、$\mathbf{W} = \mathbf{X}\mathbf{S}^{-1}$ 以及 $\mathbf{P} = \sqrt{\mathbf{W}}(\mathbf{A}^\top \mathbf{W}\mathbf{A})^{-1}\sqrt{\mathbf{W}}$。此外，设

$$\delta_\mathbf{x} := \frac{\overline{\mathbf{X}}}{\sqrt{\overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{S}}}}(\mathbf{I} - \mathbf{P})\frac{\mathbf{I}}{\sqrt{\overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{S}}}}\widetilde{\delta}_\mu, \quad \textit{and} \quad \delta_\mathbf{s} := \frac{\overline{\mathbf{S}}}{\sqrt{\overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{S}}}}\mathbf{P}\frac{\mathbf{I}}{\sqrt{\overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{S}}}}\widetilde{\delta}_\mu,$$

其中 $\mathbf{e}_{\delta_\mu} = -\frac{t \cdot \nabla\Phi_\lambda(\mathbf{r})}{32\lambda\|\nabla\Phi_\lambda(\mathbf{r})\|_2}$，$\mathbf{r}$ 是一个具有 $\left\|\mathbf{r} - \mathbf{y}\odot\mathbf{s}_t^{-t}\right\|_\infty \leq \frac{1}{48\lambda}$ 的向量，且 $\lambda = 16$ 对数 $40n$。然后在不变量 $\Phi_\lambda(\frac{\mathbf{x}\odot\mathbf{s}-t}{t}) \leq 16n$ 下，

$$\left\|\frac{\mathbf{x}\odot\mathbf{s} - t}{t}\right\|_\infty \leq \frac{1}{16}, \quad \textit{and} \quad \|\delta_\mathbf{x}/\overline{\mathbf{x}}\|_2 \leq \frac{1}{20\lambda}, \quad \textit{and} \quad \|\delta_\mathbf{s}/\overline{\mathbf{s}}\|_2 \leq \frac{1}{20\lambda}.$$

上述引理的界 $\left\|\mathbf{y}\odot\mathbf{s}_t^{-t}\right\|_\infty \leq \frac{1}{16}$ 直接由 $\Phi_\lambda(\mathbf{y}\odot\mathbf{s}_t^{-t}) \leq 16n$ 得出，且不依赖于 $\delta_\mathbf{x}$ 和 $\delta_\mathbf{s}$ 的计算。

备注 4.6。*[LV21]* 中所述的 $\|\delta_\mathbf{x}/\mathbf{x}\|_2$ 和 $\|\delta_\mathbf{s}/\mathbf{s}\|_2$ 的上界为 $1/(16\lambda)$，但使用相同的论证，可以很容易地将其加强为我们上面给出的界。现在注意，与其计算 $\delta_\mathbf{x}$ 和 $\delta_\mathbf{s}$，我们根据推论 *2.5* 计算 $\delta_\mathbf{x}$ 和 $\delta_\mathbf{s}$。注意，我们使用矩阵本身作为预条件器，因此根据推论 *2.5*，我们只需执行一步。这给出了 $\mathbf{u}$，使得 $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}\|_2 \leq \varepsilon\|\mathbf{u}\|_2$，其中 $\mathbf{u} = \mathbf{P}\sqrt{\mathbf{S}}\mathbf{e}_{\delta_\mu}$。因此

$$\left\|\frac{\widetilde{\delta}_\mathbf{x}}{\overline{\mathbf{x}}}\right\|_2 \leq \frac{1}{20\lambda} + \left\|\frac{\widetilde{\delta}_\mathbf{x} - \delta_\mathbf{x}}{\overline{\mathbf{x}}}\right\|_2 = \frac{1}{20\lambda} + \left\|\frac{\mathbf{I}}{\sqrt{\overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{S}}}}(\widetilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})\right\|_2 \leq \frac{1}{20\lambda} + \frac{\varepsilon}{\min_{i\in[n]}\sqrt{\overline{\mathbf{x}}_i\overline{\mathbf{s}}_i}}\|\mathbf{u}\|_2$$

**Algorithm 4:** Prjoection maintenance data structure (PDS)

**Variables:** $n, d \in \mathbb{N}$ with $n > d$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $\mathbf{Z}^{-1} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{s}}, \overline{\mathbf{r}}, \widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{s}}, \widetilde{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^n$, $1 > \varepsilon > 0$.

过程 INITIALIZE($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b \alpha, \varepsilon$)

根据输入设置 A、 $\varepsilon$、 $n$ 和 $d$

设置 $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y}$ , $\overline{\mathbf{s}} = \mathbf{s}$ , $\overline{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$ , $\widetilde{\mathbf{r}} = \widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{s}} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$, and $T = \varnothing$

Set

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{d \times d} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^\top & \overline{\mathbf{S}}\overline{\mathbf{X}}^{-1} \end{bmatrix}$$

计算矩阵 $\mathbf{Z}$ 使得 $\left\|\mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{M}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon$ // 例如使用以下方法 [DDH07, DDHK07]

Set $\widehat{\mathbf{Z}} = \overline{\mathbf{S}}\overline{\mathbf{X}}^{-1}(\widetilde{\mathbf{Z}} - \overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{S}}^{-1})\overline{\mathbf{X}}^{-1}\overline{\mathbf{S}}$, where $\widetilde{\mathbf{Z}}$ is the $n \times n$ bottom right block of $\mathbf{Z}$

Set $\widetilde{\mathbf{w}} = \widehat{\mathbf{Z}}\overline{\mathbf{S}}^{-1} f(\overline{\mathbf{r}})$

过程 UPDATE($S \subseteq [n]$, $\mathbf{x}^{(u)} \in \mathbb{R}^{|S|}$, $\mathbf{s}^{(u)} \in \mathbb{R}^{|S|}$, $\mathbf{r}^{(u)} \in \mathbb{R}^{|S|}$)

令 $\mathbf{ex}_S = \mathbf{x}^{(u)} - \overline{\mathbf{x}}_S$、 $\mathbf{es}_S = \mathbf{s}^{(u)} - \overline{\mathbf{s}}_S$、 $\mathbf{er}_S = \mathbf{r}^{(u)} - \overline{\mathbf{r}}_S$

令 $T = T \cup S$

如果 $|T| > \widehat{n}$ 则

Let $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{d \times d} & \mathbf{I}_T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times (n+d)}$

Update $\mathbf{Z}$ using Woodbury identity

$$\mathbf{Z} \leftarrow \mathbf{Z} - \mathbf{Z}\mathbf{U}^\top \mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{Z}, \tag{9}$$

where $\mathbf{D}^{-1} \in \mathbb{R}^{|T| \times |T|}$ is a matrix such that $\left\|\mathbf{D}^{-1} - \left(\widetilde{\mathbf{X}}_{T,T}^{-1}\widetilde{\mathbf{S}}_{T,T} + \mathbf{U}\mathbf{Z}\mathbf{U}^\top\right)^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon$,

Set $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{s}} = \overline{\mathbf{s}} + \widetilde{\mathbf{s}}$, $\overline{\mathbf{r}} = \overline{\mathbf{r}} + \widetilde{\mathbf{r}}$, and $\widetilde{\mathbf{r}} = \widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{s}} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$, $T = \varnothing$

Round entries of $\mathbf{Z}$ to numbers with $\lceil \log(100(n+d)^2 \cdot \kappa^5/\varepsilon) \rceil$ bits

Set $\widehat{\mathbf{Z}} = \overline{\mathbf{S}}\overline{\mathbf{X}}^{-1}(\widetilde{\mathbf{Z}} - \overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{S}}^{-1})\overline{\mathbf{X}}^{-1}\overline{\mathbf{S}}$, where $\widetilde{\mathbf{Z}}$ is the $n \times n$ bottom right block of $\mathbf{Z}$

Set $\widetilde{\mathbf{w}} = \widehat{\mathbf{Z}}\overline{\mathbf{S}}^{-1} f(\overline{\mathbf{r}})$

**Procedure** QUERY()

Let $\widetilde{\mathbf{Z}}$ be the $n \times n$ bottom right block of $\mathbf{Z}$

Compute $\mathbf{D}^{-1} \in \mathbb{R}^{|T| \times |T|}$ such that

$$\left\|\mathbf{D}^{-1} - \left(\mathbf{ex}_T^{-1}\mathbf{es}_{T,T} + (\overline{\mathbf{S}}\overline{\mathbf{X}}^{-1})_{T,T}(\mathbf{eZ}_{T,T} - (\overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{S}}^{-1})_{T,T})(\overline{\mathbf{S}}\overline{\mathbf{X}}^{-1})_{T,T}\right)^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon$$

Compute

$$\mathbf{h}^{(1)} = \overline{\mathbf{S}}\overline{\mathbf{X}}^{-1}\left((\mathbf{eZ}(\mathbf{X}_T^{-1})^\top) f(\mathbf{er}_T) - (\mathbf{S}_T^{-1})^\top f(\mathbf{er}_T)\right)$$、以及

$$\mathbf{h}^{(2)} = \mathbf{D}^{-1}\left((\overline{\mathbf{S}}\overline{\mathbf{X}}^{-1})_{T,T}\left(\mathbf{eZ}_T\overline{\mathbf{X}}^{-1} f(\overline{\mathbf{r}} + \mathbf{er}) - (\overline{\mathbf{S}}^{-1})_T f(\overline{\mathbf{r}} + \mathbf{er})\right)\right)$$,和

$$\mathbf{h}^{(3)} = \overline{\mathbf{S}}\overline{\mathbf{X}}^{-1}\left((\mathbf{eZ}_T)^\top\left(\left(\overline{\mathbf{S}}\overline{\mathbf{X}}^{-1}\right)_{T,T}\mathbf{h}^{(2)}\right) - (\mathbf{I}_T)^\top\mathbf{h}^{(2)}\right)$$

Compute and return $\widetilde{\mathbf{w}} + \mathbf{h}^{(1)} - \mathbf{h}^{(3)}$

$$\leq \frac{1}{20\lambda} + \frac{\varepsilon \cdot \max_{i \in [n]} \sqrt{\overline{\mathbf{x}}_i \overline{\mathbf{s}}_i}}{\min_{i \in [n]} \sqrt{\overline{\mathbf{x}}_i \overline{\mathbf{s}}_i}} \left\|\frac{\mathbf{I}}{\sqrt{\overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{S}}}}\mathbf{u}\right\|_2 = \frac{1}{20\lambda} + \frac{\varepsilon \cdot \max_{i \in [n]} \sqrt{\overline{\mathbf{x}}_i \overline{\mathbf{s}}_i}}{\min_{i \in [n]} \sqrt{\overline{\mathbf{x}}_i \overline{\mathbf{s}}_i}} \left\|\frac{\delta_{\mathbf{s}}}{\overline{\mathbf{s}}}\right\|_2$$

**Algorithm 5:** Robust interior point method (IPM)

**Input:** Full column rank matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times d}$, initial feasible point $\mathbf{x}^{(0)}$, slack $\mathbf{s}^{(0)}$, centrality parameter $t^{(0)}$, final centrality parameter $t^{(\mathrm{end})}$ all with bit complexity $\ell$, and condition number of $\mathbf{A}$ less than $\kappa$. Error parameter $0 < \epsilon_2 < 1$

**Output:** $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{Q}^n_{\geq 0}$ such that $\mathbf{A}^\top \widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ and $\mathbf{c}^\top \widehat{\mathbf{x}} \leq \min_{\mathbf{x}:\mathbf{A}^\top \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + 1.1\sqrt{n} \cdot t^{(\mathrm{end})}$.

Set $\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)}$, $\overline{\mathbf{s}}^{(1)} = \mathbf{s}^{(0)}$, $\overline{\mathbf{r}}^{(1)} = \mathbf{r}^{(0)} = \textsc{Round}(\frac{\mathbf{x}^{(0)} \odot \mathbf{s}^{(0)} - \vec{t}^{(0)}}{t^{(0)}}, \frac{1}{n})$, $\lambda = 16 \log 40n$, $h = 1/(128\lambda\sqrt{n})$, and $k = 1$

$\textsc{pds.Initialize}(\mathbf{A}, \overline{\mathbf{x}}^{(1)}, \overline{\mathbf{s}}^{(1)}, \overline{\mathbf{r}}^{(1)}, \nabla\Phi_\lambda, \min\{\alpha, 2/3\}, \frac{\epsilon_2}{10^6 \cdot (\kappa \cdot n)^{30} \cdot \log(t^{(0)}/t^{(\mathrm{end})})})$

**while** $t^{(k-1)} \geq t^{(end)}$ **do**

  Set $\widetilde{\delta}_{\mathbf{s}}^{(k)} = -\frac{t}{32\lambda \cdot \|\nabla\Phi_\lambda(\overline{\mathbf{r}})\|_2} \cdot \textsc{pds.Query}()$ // $\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \overline{\mathbf{X}}^{(k)} (\overline{\mathbf{S}}^{(k)})^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top (\overline{\mathbf{S}}^{(k)})^{-1} \widetilde{\delta}_\mu^{(k)}$

  Compute $\widetilde{\delta}_{\mathbf{x}}^{(k)} = -\frac{t}{32\lambda \cdot \|\nabla\Phi_\lambda(\overline{\mathbf{r}})\|_2} \cdot (\overline{\mathbf{S}}^{(k)})^{-1} \nabla\Phi_\lambda(\overline{\mathbf{r}}) - \overline{\mathbf{X}}(\overline{\mathbf{S}}^{(k)})^{-1} \widetilde{\delta}_{\mathbf{s}}^{(k)}$

  Update $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \widetilde{\delta}_{\mathbf{x}}^{(k)}$, $\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{s}^{(k-1)} + \widetilde{\delta}_{\mathbf{s}}^{(k)}$, and $t^{(k)} = t^{(k-1)}/(1+h)$

  Update $\mathbf{r}^{(k)} = \frac{\mathbf{x}^{(k)} \odot \mathbf{x}^{(k)} - \vec{t}^{(k)}}{t^{(k)}}$

  Let

$$S = \{i \in [n] : \left|\log \overline{\mathbf{x}}_i^{(k)} - \log \mathbf{x}_i^{(k)}\right| > \tfrac{1}{48} \text{ or } \left|\log \overline{\mathbf{s}}_i^{(k)} - \log \mathbf{s}_i^{(k)}\right| > \tfrac{1}{48} \text{ or } \left|\log \overline{\mathbf{r}}_i^{(k)} - \log \mathbf{r}_i^{(k)}\right| > \tfrac{1}{48\lambda}\}$$

  $\textsc{pds.Update}(S, \mathbf{x}_S^{(k)}, \mathbf{s}_S^{(k)}, \mathbf{r}_S^{(k)})$

  Set $k = k + 1$

  Set $\overline{\mathbf{x}}_S^{(k)} = \mathbf{x}_S^{(k-1)}$, $\overline{\mathbf{s}}_S^{(k)} = \mathbf{s}_S^{(k-1)}$, and $\overline{\mathbf{r}}_S^{(k)} = \mathbf{r}_S^{(k-1)}$

  Set $\overline{\mathbf{x}}_{[n]\setminus S}^{(k)} = \overline{\mathbf{x}}_{[n]\setminus S}^{(k-1)}$, $\overline{\mathbf{s}}_{[n]\setminus S}^{(k)} = \overline{\mathbf{s}}_{[n]\setminus S}^{(k-1)}$, and $\overline{\mathbf{r}}_{[n]\setminus S}^{(k)} = \overline{\mathbf{r}}_{[n]\setminus S}^{(k-1)}$

**return** $(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{s}^{(k-1)})$

$$\leq \frac{1}{20\lambda} + \frac{\varepsilon \cdot \max_{i \in [n]} \sqrt{\overline{\mathbf{x}}_i \overline{\mathbf{s}}_i}}{20\lambda \cdot \min_{i \in [n]} \sqrt{\overline{\mathbf{x}}_i \overline{\mathbf{s}}_i}}.$$

类似的论证对 $\left\|\mathrm{e}\delta_{\mathrm{s}}/\mathrm{s}\right\|_2$ 给出了相同的界。注意，由于 $\mathrm{y} \odot \mathrm{s}$ 的条目接近 $t$，并且 y 和 s 分别接近 y和s，我们可以取 $\varepsilon = \Omega(t^{(0)}/t^{(end)})$，从而 $\left\|\mathrm{e}\delta_{\mathrm{s}}/\mathrm{s}\right\|_2 \leq \frac{1}{16\lambda}$ 以及 $\left\|\mathrm{e}\delta_{\mathrm{x}}/\mathrm{y}\right\|_2 \leq \frac{1}{16\lambda}$。

注记4.7。注意，尽管我们计算一个向量 $\widetilde{\mathbf{u}}$ 使用推论 2.5 并使用它来计算 $\delta_{\mathrm{x}}$ 和 $\mathrm{e}\delta_{\mathrm{s}}$，而不是使用 $\mathrm{u} = \mathrm{P}\,\mathrm{r}\sqrt{\mathrm{x}}\mathrm{s}\mathrm{e}\delta_\mu$ 来计算它们，我们仍有 $\mathrm{S}\mathrm{e}\delta_{\mathrm{x}} + \mathrm{X}\mathrm{e}\delta_{\mathrm{s}} = \mathrm{e}\delta_\mu$，因为

$$\overline{\mathbf{S}}\widetilde{\delta}_{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{X}}\widetilde{\delta}_{\mathbf{s}} = \widetilde{\delta}_\mu - \sqrt{\overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{S}}}\widetilde{\mathbf{u}} + \sqrt{\overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{S}}}\widetilde{\mathbf{u}} = \widetilde{\delta}_\mu$$

以下是[LV21] 中引理16和18的组合，其基本上可由备注4.6和4.7 通过相同的证明得到。

引理4.8([LV21])。令 $\lambda = 16 \log 40n$、$\mathrm{t}^{(0)} \in \mathbb{R}_{>0}$ 和 $\mathrm{y}^{(0)}$、$\mathrm{s}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\Phi_\lambda(\mathrm{y}^{(0)} \odot \mathrm{s}^{(0)} - t^{(0)}\,t^{(0)}) \leq 16n$。此外，对于 $k \in \mathbb{N}$，令 $\mathrm{y}^{(k)} = \mathrm{y}^{(k-1)} + \mathrm{e}_\delta(k)\mathrm{y}$和$\mathrm{s}^{(k)} = \mathrm{s}^{(k-1)} + \mathrm{e}\delta_{\mathrm{s}}^{(k)}$通过鲁棒内点法（算法 5）的一次迭代计算得到，使得 $\left\|\mathrm{e}\delta_{\mathrm{s}}^{(k)}/\mathrm{s}^{(k-1)}\right\|_2 \leq \frac{1}{16\lambda}$和 $\left\|\mathrm{e}\delta_{\mathrm{x}}^{(k)}/\mathrm{y}^{(k-1)}\right\|_2 \leq \frac{1}{16\lambda}$，其中$\mathrm{y}^{(k)}$、$\mathrm{s}^{(k)}$ 是满足$\left\|\log \mathrm{y}^{(k)} - \log \overline{\mathrm{y}}^{(k)}\right\|_\infty \leq \frac{1}{48}$、$\left\|\log \mathrm{s}^{(k)} - \log \mathrm{s}^{(k)}\right\|_\infty \leq \frac{1}{48}$ 的向量。则对于 $\mathrm{r}^{(k)}$：$= \mathrm{y}^{(0)} \odot \mathrm{s}^{(0)} - t^{(0)}\,t^{(0)}$，$\left\|\mathrm{r}^{(k+1)} - \mathrm{r}^{(k)}\right\|_2 \leq \frac{1}{16\lambda}$。此外，$\left\|\log \mathrm{y}^{(k+1)} - \log \mathrm{y}^{(k)}\right\|_2$、$\left\|\log \mathrm{s}^{(k+1)} - \log \mathrm{s}^{(k)}\right\|_2 \leq \frac{1}{8\lambda}$。另外，$\Phi_\lambda(\mathrm{r}^{(k+1)}) \leq 12n$若 $\Phi_\lambda(\mathrm{r}^{(k)}) \leq 8n$，且 $\Phi_\lambda(\mathrm{r}^{(k+1)}) \leq \Phi_\lambda(\mathrm{r}^{(k)})$，否则。

The next lemma is useful for bounding the running time of inverse maintenance in Algorithm 5.

引理4.9（[LV21]）。令 $\mathrm{v}^{(0)}$、$\mathrm{v}^{(1)}$、$\mathrm{v}^{(2)}$、.....为 $\mathbb{R}^n$中以流式方式到达的向量，且对于所有 $k$都有 $\left\|\mathrm{v}^{(k+1)} - \mathrm{v}^{(k)}\right\|_2 \leq \beta$。那么对于 $0 < C < 0.5$，我们可以选取$\overline{\mathrm{v}}^{(0)}$、$\overline{\mathrm{v}}^{(1)}$、$\mathrm{v}^{(2)}$、.....，使得（参见 [LV21]上的算法 4）

- $\left\|\overline{\nabla}^{(k)}-\nabla^{(k)}\right\|_\infty \le C$ 对所有 $k$.
- $\left\|\overline{\nabla}^{(k)}-\overline{\nabla}^{(k-1)}\right\|_0 \le O(2^{2q_k}(\beta/C)^2\log^2(n))$ 其中 $q_k$ 是满足 $k=0 \bmod 2^{q_k}$ 的最大整数。

We are now equipped to prove our main result regarding the bit complexity of solving LPs.

定理的证明 1.2。 我们证明算法 5 收敛并输出一个近似可行解，并分析该算法的运行时间和位复杂度。然后将其与算法 3 和引理 4.2 （用于寻找初始可行解）结合起来，得到所需结果。

Note that by Lemmas 4.5 and 4.8, we have

$$\left\|\frac{\widehat{\mathbf{x}}\odot\widehat{\mathbf{s}}-\widehat{t}}{\widehat{t}}\right\|_\infty \le \frac{1}{16},$$

where $\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{s}}$ are the output of Algorithm 5 and $\widehat{t}>0$ is a number smaller than $t^{(\mathrm{end})}$. Therefore

$$\mathbf{c}^\top\widehat{\mathbf{x}} \le \min_{\mathbf{x}:\mathbf{A}^\top\mathbf{x}=\mathbf{b},\mathbf{x}\ge 0}\mathbf{c}^\top\mathbf{x}+\frac{n\cdot\widehat{t}}{16}.$$

取 $t^{(\mathrm{end})}$ 足够小，我们可以保证误差的上界。我们现在讨论返回的解的可行性。首先，注意 $\widehat{\mathbf{y}} \ge 0$ 通过归纳法经由备注的保证 4.6.此外，在算法的每次迭代中 5，我们计算 $\delta_{\mathbf{x}}$ 为

$$\widetilde{\delta}_{\mathbf{x}}=\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{S}}\widetilde{\delta}_\mu-\frac{\mathbf{X}}{\sqrt{\mathbf{XS}}}\widetilde{\mathbf{u}},$$

其中 $\widetilde{\mathbf{u}}$ 是一个向量，具有 $\|\widetilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u}\|_2 \le \varepsilon\|\mathbf{u}\|_2$ 以及 $\mathbf{u}=\mathbf{P}_{\sqrt{\mathbf{XS}}}\widetilde{\delta}_\mu$。因此根据推论 2.5以及关于 $\mathbf{A}/\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{A}$的条件数界，

$$\left\|\mathbf{A}^\top\widetilde{\delta}_{\mathbf{x}}\right\|_2 \le \varepsilon\cdot\kappa\cdot\frac{R}{r}\|\mathbf{u}\|_2 \le \varepsilon\cdot\kappa\cdot\frac{R}{r}\left\|\frac{\mathbf{I}}{\sqrt{\mathbf{XS}}}\widetilde{\delta}_\mu\right\|_2,$$

其中，最后一个不等式成立是因为P 是投影矩阵。现在，由于 $\mathrm{e}_{\delta_\mu}=-\frac{t}{32\lambda}\cdot\nabla\Phi_\lambda(\mathrm{r})\cdot\mathrm{k}\nabla\Phi_\lambda(\mathrm{r})\mathrm{k}$。且根据引理4.5 $\|\mathrm{r}-\mathrm{y}\odot\mathrm{s}_t^{-t}\|_\infty \le \frac{1}{48\lambda}$，以及 $\|\mathrm{y}\odot\mathrm{s}_t^{-t}\|_\infty \le \frac{1}{16}$，$\left\|\mathrm{I}\sqrt{\mathrm{XS}}\mathrm{e}_{\delta_\mu}\right\|_2$ 被 poly$(n)$有界。因此，令 $\varepsilon=T\kappa-\frac{R}{r}\left\|\mathrm{I}\sqrt{\mathrm{XS}}\mathrm{e}_{\delta_\mu}\right\|_2$，其中 $T$ 是算法的迭代次数，根据三角不等式，我们可以得到保证 $\mathrm{kA}^\top\mathrm{by}-\mathrm{bk}_2\le\epsilon$。

现在我们来界定该算法的运行时间。根据上文讨论的误差以及推论2.5 和备注2.4，我们需要使逆的位复杂度达到 $\tilde{O}(\log(\kappa\frac{R}{\epsilon\cdot r}))$。根据引理1.7选取合适的常数后，我们可以保证逆矩阵维护以及算法5所用数据结构的稳定性。根据定理4.4，该数据结构的初始化时间为 $\tilde{O}(n^\omega\log(\kappa\frac{R}{\epsilon\cdot r}))$。

根据算法3和算法5的构造，我们的内点法需要 $\tilde{O}(n^{0.5}\log(\frac{R}{\epsilon\cdot r}))$次迭代。根据引理4.8和引理4.9，对于每个 $q_k$，有 $\tilde{O}(\frac{n^{0.5}}{2^{q_k}}\log(\frac{R}{\epsilon\cdot r}))$次迭代，其中我们的向量y、s、r有 $\tilde{O}(2^{2q_k})$个条目发生变化。于是根据定理4.4，逆矩阵维护的运行时间上界为

$$\sum_{q_k:2^{2q_k}>n^{\widehat{\alpha}}}\tilde{O}\left(\frac{n^{0.5}}{2^{q_k}}\log(\frac{R}{\epsilon\cdot r})\cdot\mathrm{MM}(n,n,2^{2q_k})\log(\frac{\kappa\cdot R}{\epsilon\cdot r})\right),$$

其中 $\widehat{\alpha}=\min\{\alpha,2/3\}$ 而 $\alpha$ 是矩阵乘法指数的对偶。根据引理 1.9，这等于

$$\sum_{q_k:2^{2q_k}>n^{\widehat{\alpha}}}\tilde{O}\left(\frac{n^{0.5}}{2^{q_k}}\log(\frac{R}{\epsilon\cdot r})\cdot\left(n^2+(2^{q_k})^{2(\omega-2)/(1-\alpha)}n^{2-\alpha\cdot(\omega-2)/(1-\alpha)}\right)\log(\frac{\kappa\cdot R}{\epsilon\cdot r})\right),$$

由于 $2^{2q_k} > n^{\widehat{\alpha}}$, $\frac{n^{2.5}}{2^{q_k}} \leq \max\{n^{2.5-\alpha/2}, n^{2+1/6}\}$。此外，该项

$$n^{2.5-\alpha\cdot(\omega-2)/(1-\alpha)} \cdot (2^{q_k})^{2(\omega-2)/(1-\alpha)-1}$$

在 $q_k$ 中是递增的或递减的，这取决于$2(\omega-2)/(1-\alpha) - 1$ 是正数还是负数。如果 $2(\omega-2)/(1-\alpha) - 1 > 0$，最大值在 $2^{q_k} = n^{0.5}$ 时取得，在这种情况下

$$n^{2.5-\alpha\cdot(\omega-2)/(1-\alpha)} \cdot (2^{q_k})^{2(\omega-2)/(1-\alpha)-1} = n^{\omega}.$$

If $2(\omega-2)/(1-\alpha) - 1 \leq 0$, the maximum happens for $2^{q_k} = n^{\widehat{\alpha}/2}$ in which case

$$n^{2.5-\alpha\cdot(\omega-2)/(1-\alpha)} \cdot (2^{q_k})^{2(\omega-2)/(1-\alpha)-1} = n^{2.5-\frac{\alpha\cdot(\omega-2)}{1-\alpha}+\frac{\widehat{\alpha}\cdot(\omega-2)}{1-\alpha}-\frac{\widehat{\alpha}}{2}}.$$

如果 $\widehat{\alpha} = \alpha$，那么这由 $n^{2.5-\alpha/2}$界定。否则，$\widehat{\alpha} < \alpha$ 并且这由 $n^{2+1/6}$界定。最后，我们需要界定查询数据结构的运行时间，根据定理4.4 可知。

$$\tilde{O}(n^{0.5}\log(\frac{R}{\epsilon\cdot r})(n^{1+\widehat{\alpha}} + n^{\widehat{\alpha}\cdot\omega})\cdot\log(\frac{\kappa\cdot R}{\epsilon\cdot r})),$$

which since $\widehat{\alpha} \leq \frac{2}{3}$ is bounded by

$$\tilde{O}((n^{2+1/6} + n^{0.5+2\omega/3})\cdot\log(\frac{R}{\epsilon\cdot r})\cdot\log(\frac{\kappa\cdot R}{\epsilon\cdot r})).$$

现在，由于 $\omega \geq 2$，$0.5 \leq \omega/4$，因此 $0.5 + 2\omega/3 \leq 11\omega/12 < \omega$。合并上述运行时间即可得到所需结果。□

## 4.3 逆自由路径跟踪内点法

本节的主要结果是以下定理，通过替换算法6 在步骤7 和 9 的算法 3中实现。为此，我们使用一种使用2-范数势函数的内点法版本，使用$\tilde{\mathbf{y}}$，和 $\mathbf{s}$ 其相对误差为0.01相比于 $\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{s}$，并使用一个 $\delta_\mu$ 其相对误差为0.001相比于 $\delta_\mu$。

定理 1.3（无逆内点法）。给定满列秩的$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$，$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$，$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ 均具有位复杂度$l$，以及误差参数 $0 < \epsilon < 1$，假设线性规划$\min_{\mathbf{A}^\top\mathbf{y}=\mathbf{b},\ \mathbf{y}\geq 0}\mathbf{c}^\top\mathbf{y}$的内半径和外半径分别为 $r$ 和 $R$。然后存在一种算法找到$\mathbf{by} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\mathbf{c}^\top\widehat{\mathbf{x}} \leq \min_{\mathbf{A}^\top\mathbf{x}=\mathbf{b},\mathbf{x}\geq 0}\mathbf{c}^\top\mathbf{x} + \epsilon \quad , and \quad \left\|\mathbf{A}^\top\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\right\|_2 \leq \epsilon,$$

时间为 $\tilde{O}\left(n^{\omega+0.5}\cdot\left(l + \log(\frac{R}{\epsilon\cdot r})\right)\cdot\log(\frac{R}{\epsilon\cdot r})\right)$。

为求解内点法每次迭代对应的线性方程组，我们使用以下结果：该结果能够以矩阵乘法时间乘以输入的位复杂度来求解整数线性方程组（运行时间无需额外付出 $\log(\kappa)$）。

定理 4.10([Sto05])。设 $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ 为可逆矩阵，$\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$。存在一种拉斯维加斯算法，以 $O(n^\omega\cdot(\log n)\cdot(\log \|\mathbf{M}\|_\infty + \log\|\mathbf{b}\|_{n^\infty} + \log n)\cdot C^2)$ 的期望成本返回 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \in \mathbb{Q}^n$，其中 $C = \log((\log \|\mathbf{M}\|_\infty + \log\|\mathbf{b}\|_{n^\infty} + \log n))$。

The above theorem uses Cramer's rule to compute the solution of a linear system.

事实 4.11（克拉默法则）。设 $\mathbf{M}$ 是一个非奇异的 $n\times n$ 矩阵，$\mathbf{b}$ 是一个 $n$ 维向量，$\mathbf{x}$ 是线性方程组 $\mathbf{Mx} = \mathbf{b}$ 的解。那么 $\mathbf{x}_i = \det(\mathbf{M}_i)\ \det(\mathbf{M})$，其中 $\mathbf{M}_i$ 是将 $\mathbf{M}$ 的第 $i$ 列替换为 $\mathbf{b}$ 后得到的矩阵。

因此，给定一个整数线性方程组，定理 4.10 的算法会将 $\mathbf{Mx} = \mathbf{b}$ 的解作为一个有理数返回，其中分母的位复杂度为 $O(n \log \|\mathbf{M}\|_\infty)$，分子的位复杂度为 $O(n \log \|\mathbf{M}\|_\infty + \log \|\mathbf{b}\|_\infty)$。注意，由于 $\mathbf{x}$ 的各条目具有相同的分母 $\det(\mathbf{M})$，因此向量 $\det(\mathbf{M})\mathbf{x}$ 是一个整数向量，且其位复杂度（相差常数因子）与 $\mathbf{x}$ 的位复杂度相同，即 $O(n \log \|\mathbf{M}\|_\infty + \log \|\mathbf{b}\|_\infty)$。因此，$\mathbf{Mx} = \mathbf{b}$ 的解可以用作另一个线性方程组的右端项，而不会增加求解该线性方程组的运行时间——注意，在定理 4.10 中，$\mathbf{b}$ 的位复杂度在运行时间中以 $1/n$ 为因子出现。

如果线性方程组的右端项没有公分母，那么将右端项转换为整数向量可能会使位复杂度增加 $n$ 倍分母的位复杂度。因此，如果分母的位复杂度为 $n$，这将导致位复杂度为 $n^2$，从而使求解线性方程组的运行时间增加到 $n^{\omega+1}$。为避免这种情况，我们确保所求解的线性方程组的右端项具有公分母。这是通过将$\mathbf{e}$向量 $\mathbf{y}, \mathbf{s}, \delta_\mu$ 舍入为接近它们的有理向量$\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{\delta}_\mu$ 来实现的。

为保证我们求解的线性方程组的右端项具有公分母，在每次$\mathbf{e}$迭代中，我们不使用内点法步骤中的$\mathbf{y}$，$\mathbf{s}$ 和 $\delta_\mu$，而使用 $\bar{\mathbf{y}}$，$\bar{\mathbf{s}}$，$\bar{\delta}_\mu$，其中$\bar{\mathbf{y}}$，$\bar{\mathbf{s}}$ 的条目是最接近 $\mathbf{y}$，$\mathbf{s}$ 中各条目的$1011\,100$ 次幂，而 $\bar{\mathbf{e}}$ $\bar{\delta}_\mu$ 的条目是最接近 $\delta_\mu$ 中各条目的 $1001\,1000$ 次幂。在本节中，我们将证明，使用这些向量时，内点法仍然收敛。因此，我们通过求解以下线性方程组来进行更新

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}}\widetilde{\delta}_\mathbf{s} + \bar{\mathbf{S}}\widetilde{\delta}_\mathbf{x} &= \widetilde{\delta}_\mu, \\ \mathbf{A}^\top \widetilde{\delta}_\mathbf{x} &= 0, \\ \mathbf{A}\widetilde{\delta}_\mathbf{y} + \widetilde{\delta}_\mathbf{s} &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

**Lemma 4.12.** *The solution of* (10) *is*

$$\widetilde{\delta}_\mathbf{s} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top \bar{\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\delta}_\mu \quad , \textit{and} \quad \widetilde{\delta}_\mathbf{x} = \bar{\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\delta}_\mu - \bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\delta}_\mathbf{s}.$$

证明。首先注意，由于 $\mathbf{X}\mathbf{e}\delta_\mathbf{s} + \mathbf{S}\mathbf{e}\delta_\mathbf{x} = \mathbf{e}\delta_\mu$，$\mathbf{S}\mathbf{e}\delta_\mathbf{x} = \mathbf{e}\delta_\mu - \mathbf{X}\mathbf{e}\delta_\mathbf{s}$。因此从左侧乘以 $\bar{\mathbf{S}}^{-1}$，并利用对角矩阵彼此可交换这一事实，

$$\widetilde{\delta}_\mathbf{x} = \bar{\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\delta}_\mu - \bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\delta}_\mathbf{s}.$$

Therefore since $\mathbf{A}^\top \widetilde{\delta}_\mathbf{x} = 0$,

$$\mathbf{A}^\top \bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\delta}_\mathbf{s} = \mathbf{A}^\top \bar{\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\delta}_\mu.$$

Now since $\mathbf{A}\widetilde{\delta}_\mathbf{y} + \widetilde{\delta}_\mathbf{s} = 0$,

$$-\mathbf{A}^\top \bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{A}\widetilde{\delta}_\mathbf{y} = \mathbf{A}^\top \bar{\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\delta}_\mu.$$

Now multiplying $\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{A})^{-1}$ from left, we have

$$-\mathbf{A}\widetilde{\delta}_\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top \bar{\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\delta}_\mu.$$

Finally the result follows by noting that $\widetilde{\delta}_\mathbf{s} = -\mathbf{A}\widetilde{\delta}_\mathbf{y}$. □

注 4.13。对于 $i \in [n]$，我们将 $\bar{\mathbf{y}}_i$ 和 $\bar{\mathbf{s}}_i$ 定义为分别最接近 $\mathbf{y}_i$ 和 $\mathbf{s}_i$ 的 $101\,100$ 的幂。然后 $\left\|\frac{\bar{\mathbf{x}}-\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\right\|_\infty, \left\|\mathbf{s}-\bar{\mathbf{s}}\right\|_\infty \le 0.01$。

对于本节的其余部分，我们证明当使用近似值进行步进时内点法的收敛性。这通过证明以下内容实现：1) $\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{s}$ 在算法的整个过程中保持为正（见引理 4.14）；以及 2) $\left\|(\mathbf{y} \odot \mathbf{s} - \vec{t})/t\right\|$ 保持小于或等于 0.01（见引理 4.16）。后者意味着当 $t$ 足够小时，我们接近最优目标值。

算法 6： InverseFreeL2IPM - 逆矩阵自由路径跟踪内点法（内点法）

输入：满列秩矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$、初始可行点 $\mathbf{y}^{(0)}$、松弛变量 $\mathbf{s}^{(0)}$、中心性参数 $t^{(0)}$、最终中心性参数 $t^{(\mathrm{end})}$，所有量的位复杂度均为 $l$。

输出：$\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^n_{\geq 0}$ 使得 $\mathbf{A}^\top \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 且 $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \min_{\mathbf{x}:\mathbf{A}^\top \mathbf{y}=\mathbf{b},\ \mathbf{y}\geq 0} \mathbf{c}^\top \mathbf{y} + 1$。$1\sqrt{n}\cdot\ t$(结束)。

设定 $\mu^{(0)} = \mathbf{x}^{(0)}\mathbf{s}^{(0)}$, $\beta = 10^4$，以及 $k = 1$

当 $t(k-1) \geq t^{(end)}$ 时

  Set $\delta_\mu^{(k)} = -0.5(\mu^{(k-1)} - \vec{t}^{(k-1)})$

  集合 $\mathbf{x}^{(k)} = \textsc{QRound}(\mathbf{x}^{(k)}, 101\,100)$, $\mathbf{s}^{(k)} = \textsc{QRound}(\mathbf{s}^{(k)}, 101\,100)$, $\widetilde{\delta}_\mu^{(k)} = \textsc{QRound}(\delta(k)\mu, 1001\,1000)$

  计算 $\widetilde{\delta}_\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{X}^{(k)} (\mathbf{S}^{(k)})^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top (\mathbf{S}^{(k)})^{-1} \widetilde{\delta}(k)\mu$ 使用定理 4.10

  计算 $\mathrm{e}\delta_\mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{S}^{(k)})^{-1}\mathrm{e}\delta_\mu - \overline{\mathbf{X}}^{(k)} (\overline{\mathbf{S}}^{(k)})^{-1} \widetilde{\delta}_\mathbf{s}^{(k)}$

  更新 $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{y}^{(k-1)} + \textsc{Round}(\mathrm{e}\delta_\mathbf{x}^{(k)}, \exp(-4n))$, $\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{s}^{(k-1)} + \textsc{Round}(\mathrm{e}\delta_\mathbf{s}^{(k)}, \exp(-4n))$, 和 $t^{(k)} = \textsc{Round}((1 - \frac{1}{\beta\sqrt{n}})t^{(k-1)}, \exp(-4n))$

  For all $i \in [n]$ such that $\mathbf{x}_i^{(k)} \leq \exp(-3n)$, set $\mathbf{x}_i^{(k)} = 0$, remove its corresponding entry in $\mathbf{c}$ and corresponding row in $\mathbf{A}$

  Set $k = k + 1$

**return** $(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{s}^{(k-1)})$

引理 4.14. 令 $t > 0$, $\mu = \mathbf{y} \odot \mathbf{s}$, $\delta_\mu = -h(\mu - t)$, $\left\|\frac{\mathbf{y}-\mathbf{y}}{\mathbf{y}}\right\|_\infty \leq 0.01$, $\left\|\frac{\overline{\mathbf{s}}-\mathbf{s}}{\mathbf{s}}\right\|_\infty \leq 0.01$, $\left\|\frac{-\delta_\mu - \delta_\mu}{\delta_\mu}\right\|_\infty \leq 0.01$ 且

$$\widetilde{\delta}_\mathbf{s} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top \overline{\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\delta}_\mu \quad , \textit{and} \quad \widetilde{\delta}_\mathbf{x} = \overline{\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\delta}_\mu - \overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\delta}_\mathbf{s}.$$

此外，假设 $\left\|\frac{\mu - \vec{t}}{t}\right\|_2 \leq 0.01$。然后 $\left\|\mathbf{X}^{-1}\mathrm{e}\delta_\mathbf{x}\right\|_2, \left\|\mathbf{S}^{-1}\mathrm{e}\delta_\mathbf{s}\right\|_2 \leq 0.15h$。

*Proof.* First note that

$$\left\|(\mathbf{x}\odot\mathbf{s} - \vec{t})/t\right\|_\infty \leq \left\|(\mathbf{x}\odot\mathbf{s} - \vec{t})/t\right\|_2 \leq 0.01.$$

因此 $0.99\cdot t \leq \mathbf{y}\odot\mathbf{s}_\infty \leq 1.01\cdot t$。此外，由于 $\left\|\frac{\mathbf{y}-\mathbf{y}}{\mathbf{y}}\right\|_\infty, \left\|\frac{\overline{\mathbf{s}}-\mathbf{s}}{\mathbf{s}}\right\|_\infty \leq 0.01$，对所有 $i \in [n]$，$0.99\mathbf{y}_i \leq \overline{\mathbf{y}}_i \leq 1.01\mathbf{y}_i$，以及 $0.99\overline{\mathbf{s}}_i \leq \mathbf{s}_i \leq 1.01\mathbf{s}_i$。因此

$$\frac{99^3}{100^3}t \leq \|\overline{\mathbf{x}}\odot\overline{\mathbf{s}}\|_\infty \leq \frac{101^3}{100^3}t.$$

Denoting $\overline{\mathbf{P}} := \overline{\mathbf{X}}^{1/2}\overline{\mathbf{S}}^{-1/2}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\overline{\mathbf{S}}^{-1/2}\overline{\mathbf{X}}^{1/2}$, we have

$$\overline{\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\delta}_\mathbf{s} = \overline{\mathbf{X}}^{-1/2}\overline{\mathbf{S}}^{-1/2}\overline{\mathbf{P}}\overline{\mathbf{X}}^{-1/2}\overline{\mathbf{S}}^{-1/2}\widetilde{\delta}_\mu.$$

Now since $\overline{\mathbf{P}}$ is an orthogonal projection matrix, we have

$$\begin{aligned}
\left\|\overline{\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\delta}_\mathbf{s}\right\|_2 &= \left\|\overline{\mathbf{X}}^{-1/2}\overline{\mathbf{S}}^{-1/2}\overline{\mathbf{P}}\overline{\mathbf{X}}^{-1/2}\overline{\mathbf{S}}^{-1/2}\widetilde{\delta}_\mu\right\|_2 \\
&\leq \left\|\overline{\mathbf{x}}^{-1/2}\odot\overline{\mathbf{s}}^{-1/2}\right\|_\infty \left\|\overline{\mathbf{P}}\overline{\mathbf{X}}^{-1/2}\overline{\mathbf{S}}^{-1/2}\widetilde{\delta}_\mu\right\|_2 \\
&\leq \frac{100^{1.5}}{99^{1.5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\left\|\overline{\mathbf{P}}\overline{\mathbf{X}}^{-1/2}\overline{\mathbf{S}}^{-1/2}\widetilde{\delta}_\mu\right\|_2 \\
&\leq \frac{100^{1.5}}{99^{1.5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\left\|\overline{\mathbf{X}}^{-1/2}\overline{\mathbf{S}}^{-1/2}\widetilde{\delta}_\mu\right\|_2 \\
&\leq \frac{100^3}{99^3}\cdot\frac{1}{t}\left\|\widetilde{\delta}_\mu\right\|_2.
\end{aligned}$$

Now we have

$$\left\|\mathbf{S}^{-1}\widetilde{\delta}_\mathbf{s}\right\|_2 \leq \frac{100}{99}\left\|\overline{\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\delta}_\mathbf{s}\right\|_2 \leq \frac{100^4}{99^4}\cdot\frac{1}{t}\left\|\widetilde{\delta}_\mu\right\|_2 \leq \frac{100^4}{99^4}\cdot\frac{101}{100}\cdot\frac{1}{t}\left\|\delta_\mu\right\|_2$$

现在由于e $\delta_\mu = -h(\mu - \mathbb{R}t)$ 和 $\|(\mu - \mathbb{R}t)/t\|_2 \le 0.1$，我们有 $\left\|S^{-1}e\delta_s\right\|_2 \le 0.05h$。对于 $X^{-1}\delta_x$，我们同样有

$$\overline{\mathbf{X}}^{-1}\widetilde{\delta}_x = \overline{\mathbf{X}}^{-1/2}\overline{\mathbf{S}}^{-1/2}(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{P}})\overline{\mathbf{X}}^{-1/2}\overline{\mathbf{S}}^{-1/2}\widetilde{\delta}_\mu$$

Since $(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{P}})$ is also a projection matrix, by a similar argument as above, we have

$$\left\|\mathbf{X}^{-1}\widetilde{\delta}_x\right\|_2 \le 0.05h.$$

□

备注 4.15.令 $h \le 1$。则由于 $\left\|X^{-1}e\delta_x\right\|_\infty \le \left\|X^{-1}e\delta_x\right\|_2 \le 0.15$，对于任意条目 $i \in [n]$，e e e$|\delta_x(i)/x(i)| \le 0.05$。因此，$x(i) + \delta_x(i) \ge 0.95x(i) > 0$。类似的论证可得 $s(i) + \delta_s(i) > 0$。因此，更新后 x 和 s 的各条目仍保持为正。

引理 4.16. 设 A 为一个整数矩阵，$\|y-y\,y\|_{\infty,} \frac{-\|\overline{s}-s}{s}\|_\infty \le 0$。01，$\delta_\mu = -h(\mu_1 - \mathbb{R}t_1)$，且 $\mu_1 = y \odot s$，使得 $h = 0$。1。此外，令 e $\delta_\mu \in \mathbb{R}^n$ 使得 且 $\left\|\frac{\widetilde{\delta}_\mu - \delta_\mu}{\delta_\mu}\right\|_\infty \le 0$。001。令

$$\widetilde{\delta}_s = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\overline{\mathbf{X}\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\overline{\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\delta}_\mu \quad , \textit{and} \quad \widetilde{\delta}_x = \overline{\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\delta}_\mu - \overline{\mathbf{X}\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\delta}_s.$$

此外，假设 $\left\|\mu_1 - \frac{t_1}{t_1}\right\|_2 \le 0.01$。令 $\mu_2 = (y + e\delta_x) \odot (s + e\delta_s)$ 且 $t_2 = (1 - 1/(\beta\sqrt{n}))t_1$，其中 $\beta = 10^4$。则 $\left\|\mu_2 - \frac{t_2}{t_2}\right\|_2 \le 0.01$。

*Proof.* By triangle inequality,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\mu_2 - \vec{t_2}}{t_2}\right\|_2 &= \left\|\frac{(\mathbf{x} + \widetilde{\delta}_x) \odot (\mathbf{s} + \widetilde{\delta}_s) - \vec{t_2}}{t_2}\right\|_2 \\ &\le \left\|\frac{\mathbf{x} \odot \mathbf{s} - \vec{t_2} + \overline{\mathbf{x}} \odot \widetilde{\delta}_s + \overline{\mathbf{s}} \odot \widetilde{\delta}_x}{t_2}\right\|_2 + \left\|\frac{(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}) \odot \widetilde{\delta}_s}{t_2}\right\|_2 + \left\|\frac{(\mathbf{s} - \overline{\mathbf{s}}) \odot \widetilde{\delta}_x}{t_2}\right\|_2 + \left\|\frac{\widetilde{\delta}_x \odot \widetilde{\delta}_s}{t_2}\right\|_2.\end{aligned}$$

Now by Lemma 4.17,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\widetilde{\delta}_x \odot \widetilde{\delta}_s}{t_2}\right\|_2 &= \left\|\mathbf{X}\mathbf{S}\frac{\mathbf{X}^{-1}\widetilde{\delta}_x \odot \mathbf{S}^{-1}\widetilde{\delta}_s}{t_2}\right\|_2 \\ &\le \left\|\frac{\mathbf{x} \odot \mathbf{s}}{t_2}\right\|_\infty \left\|\mathbf{X}^{-1}\widetilde{\delta}_x\right\|_\infty \left\|\mathbf{S}^{-1}\widetilde{\delta}_s\right\|_2 \\ &\le \frac{1.01}{1 - 1/(\beta\sqrt{n})}(0.05h)^2 \\ &\le 0.00003.\end{aligned}$$

现记 P:=$Y^{1/2}S^{-1/2}A(\overline{A}^\top YS^{-1}A)^{-1}A^\top S^{-1/2}Y^{1/2}$，我们有

$$\overline{\mathbf{x}} \odot \widetilde{\delta}_s + \overline{\mathbf{s}} \odot \widetilde{\delta}_x = \overline{\mathbf{X}}^{1/2}\overline{\mathbf{S}}^{1/2}(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{P}})\overline{\mathbf{X}}^{-1/2}\overline{\mathbf{S}}^{-1/2}\widetilde{\delta}_\mu + \overline{\mathbf{X}}^{1/2}\overline{\mathbf{S}}^{1/2}\overline{\mathbf{P}\mathbf{X}}^{-1/2}\overline{\mathbf{S}}^{-1/2}\widetilde{\delta}_\mu = \widetilde{\delta}_\mu = -h(\mu_1 - \vec{t}_1).$$

Therefore

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\mathbf{x} \odot \mathbf{s} - \vec{t_2} + \overline{\mathbf{x}} \odot \widetilde{\delta}_s + \overline{\mathbf{s}} \odot \widetilde{\delta}_x}{t_2}\right\|_2 &\le \frac{1}{1 - 1/(\beta\sqrt{n})}\left\|\frac{\mathbf{x} \odot \mathbf{s} - \vec{t_1} + \overline{\mathbf{x}} \odot \widetilde{\delta}_s + \overline{\mathbf{s}} \odot \widetilde{\delta}_x}{t_1}\right\|_2 + \frac{1}{1 - 1/(\beta\sqrt{n})}\left\|\frac{1}{\beta\sqrt{n}}\right\|_2 \\ &\le \frac{1}{1 - 1/(\beta\sqrt{n})}\left\|\frac{\mathbf{x} \odot \mathbf{s} - \vec{t_1} + \delta_\mu}{t_1}\right\|_2 + \frac{1}{1 - 1/(\beta\sqrt{n})}\left\|\frac{\widetilde{\delta}_\mu - \delta_\mu}{t_1}\right\|_2 + 0.0002\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{1-1/(\beta\sqrt{n})}\left\|\frac{\mathbf{x}\odot\mathbf{s}-\vec{t}_1+\delta_\mu}{t_1}\right\|_2+\frac{0.001}{1-1/(\beta\sqrt{n})}\left\|\frac{\delta_\mu}{t_1}\right\|_2+0.0002\\
&\le \frac{1}{1-1/(\beta\sqrt{n})}\cdot\left\|\frac{(1-h)(\mu_1-\vec{t}_1)}{\vec{t}_1}\right\|_2+0.0004\\
&\le 0.9001\cdot\left\|\frac{\mu_1-\vec{t}_1}{\vec{t}_1}\right\|_2+0.0004.
\end{aligned}
$$

Moreover we have

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})\odot\widetilde{\delta}_\mathbf{s}}{t_2}\right\|_2 &\le \frac{0.01}{1-1/(\beta\sqrt{n})}\cdot\left\|\frac{\mathbf{x}\odot\widetilde{\delta}_\mathbf{s}}{t_1}\right\|_2\\
&= \frac{0.01}{1-1/(\beta\sqrt{n})}\cdot\left\|\frac{\mathbf{XSS}^{-1}\widetilde{\delta}_\mathbf{s}}{t_1}\right\|_2\\
&\le \frac{0.01\cdot 1.01}{1-1/(\beta\sqrt{n})}\cdot\left\|\mathbf{S}^{-1}\widetilde{\delta}_\mathbf{s}\right\|_2\le 0.0002,
\end{aligned}
$$

其中最后一个不等式由引理 4.14. 类似地，我们可以证明 $\left\|\frac{(\mathbf{s}-\overline{\mathbf{s}})\odot\delta_\mathbf{x}}{t_2}\right\|_2\le 0.0002$. 结合以上所有内容，并且由于 $\left\|\frac{\mu_1-\vec{t}_1}{t_1}\right\|_2\le 0.01$, 我们有

$$
\left\|\frac{\mu_2-\vec{t}_2}{\vec{t}_2}\right\|_2\le 0.01.
$$

□

We are now equipped to prove the main result of this section.

定理 1.3的证明。为便于记号表示，在本证明中我们省略表示迭代编号的上标 y、S以及 $\delta_\mu$。首先注意，在内点法的每次迭代中（算法 6），我们首先计算

$$
\widetilde{\delta}_\mathbf{s}=\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\overline{\mathbf{XS}}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\overline{\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\delta}_\mu,
$$

然后使用这个来计算 $\mathrm{e}\delta_\mathrm{x}^{(k)}=\mathrm{S}^{-1}\mathrm{e}\delta_\mu-\mathrm{X}^{(k)}\mathrm{S}^{-1}\mathrm{e}\delta_\mathrm{s}$。注意，根据构造 X,S,e $\delta_\mu$是有理矩阵和向量。

现在不失一般性地假设 A 是一个整数矩阵。否则，如果 A 的位复杂度为 $l$，我们将 A 乘以 $2^\ell$。这样可将该矩阵转换为整数矩阵。注意，这不会改变该矩阵的位复杂度，之后我们再将线性方程组 $(\mathrm{A}^\top\mathrm{XS}^{-1}\mathrm{A})\mathrm{z}=\mathrm{A}^\top\mathrm{S}^{-1}\mathrm{e}\delta_\mu$ 的解除以 $2^{2\ell}$。为了求出 $(\mathrm{A}^\top\mathrm{XS}^{-1}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^\top\mathrm{S}^{-1}\mathrm{e}\delta_\mu$ 的值，在每次迭代中，我们求出满足 $\mathrm{z}\in\mathbb{Q}^d$ such that $101^{s_1}\cdot 100^{s_2}(\mathrm{A}^\top\mathrm{XS}^{-1}\mathrm{A})\mathrm{z}=101^{s_1}\cdot 1000^{s_3}\mathrm{A}^\top\mathrm{S}^{-1}\cdot\mathrm{e}\,\delta_\mu$ 的 z，其中 $101^{s_1}$ 是 1/s 的最小元素的分母，$100^{s_2}$ 是 y 的最小元素的分母，而 $1000^{s_3}$ 是 $\delta_\mu$ 中最小元素 e e e 的分母。然后我们利用它求出 $\delta_x,\delta_s$，将这些值舍入到相对误差为 $\exp(-O(n))$，并将其加到 y 和 s 上。这种舍入会在 $\mathrm{A}^\top\mathrm{y}=\mathrm{b}$ 中引入大小为 $\exp(-O(n))\kappa(\mathrm{A})$ 的误差。通过选取足够大的常数，我们可以确保在整个算法过程中由这种舍入造成的累积误差是指数级小的。

Note that $s_1,s_2,s_3$ determine the bit complexity of the matrix and the vector of the corresponding int

我们求解的整数线性方程组，并且这些数取决于 y,s, $\delta_\mu$ 的最小和最大条目的大小。首先注意，根据定义 $\delta_\mu=-0.5(\mu-\vec{t})$。因此，由引理 4.16 可知，在算法执行过程中始终保持 $\|(\mu-\vec{t})/t\|_2\le 0.01$，对所有 $i\in[n]$,

$$
\frac{0.99}{2}t\le\left|(\delta_\mu)_i\right|\le\frac{1.01}{2}t.
$$

Therefore over the whole course of the algorithm

$$\frac{0.99}{2}t^{(\mathrm{end})} \le \left|(\delta_\mu)_i\right| \le \frac{1.01}{2}t^{(0)}.$$

现在注意到，由于对于所有满足$A^\top x = b$ 且$x \ge 0$的x，都有$\|x\|_2 \le R$；对于所有满足 $\|A^\top x - b\| \le \exp(-Cn)$ 且 $x \ge 0$的 x，都有 $\|x\|_2 \le R + \exp(-(C-2)n) \le 2R$。此外，由于 $\mu = x \odot s$ 且 $\left\|(\mu - \mathbb{E}t)/t\right\|_2 \le 0.01$，$s_i \ge 0.99\frac{t^{(\mathrm{end})}}{2R}$。现在注意到，根据构造，$x_i$ 总是大于或等于 $\exp(-3n)$，或者为零。因此$s_i \le \exp(3n)\cdot 1.01\cdot t^{(0)}$。

现在我们需要界定算法3 的步骤7 和 9中的这些值。对于步骤7，我们有 $t^{(0)} = 2^{16}\varepsilon^{-3}n^2\frac{R}{r}\cdot\|c\|_\infty R$ and $t^{(\mathrm{end})} = \|c\|_\infty R$。因此注意到 $\varepsilon = 1/(100\sqrt{n})$，迭代次数为 $O(n^{0.5}\cdot\log(n\cdot\frac{R}{r}))$。此外，修改后的线性规划的外半径小于$200(n+1)\sqrt{n}\cdot R$。因此，根据上述论证，我们为算法 3 的步骤 7 所求解的线性方程组的右端项的位复杂度上界为

$$O(n + \log(n\,\|c\|_\infty R/r)).$$

Combining this with number of iterations and Theorem 4.10, bounds the running time of Step 7 of Algorithm 3.

对于算法3的步骤9，$t(0) \le \frac{7}{6}\|c\|_\infty R$，且 $t^{(\mathrm{end})}$为 $\epsilon/2n$。因此，迭代次数为$O(\sqrt{n}\log(n\|c\|_\infty R/\epsilon))$。这给出了算法3 的步骤9 中所求解线性方程组的右端项的位复杂度 $O(n + \log(n\|c\|_\infty R/\epsilon))$，结合迭代次数和定理 4.10 可得该步骤的运行时间上界。□

## 4.4 Solving Sparse LP faster than Matrix Multiplication for $\omega > 2.5$

The main result of this section is the following theorem achieved by Algorithm 7.

定理 4.1. *[$l_2$-内点法适用于稀疏矩阵]* 设矩阵乘法指数为 $\omega > 2.5$。给定具有满列秩的 $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$、$b \in \mathbb{R}^d$、$c \in \mathbb{R}^n$、$1 \le m \le n^{1/4}$ 误差参数 $0 < \epsilon < 1$，以及线性规划 $\min_{A^\top y = b, y \ge 0} c^\top y$，其内半径为 $r$、外半径为 $R$，存在一种算法，可以找到 $y \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$c^\top \widehat{x} \le \min_{A^\top x = b, x \ge 0} c^\top x + \epsilon\cdot\|c\|_\infty R \quad , \textit{and} \quad \left\|A^\top \widehat{x} - b\right\|_2 \le \epsilon\cdot\|b\|_2,$$

以高概率 $1 - 1/n$ 时间 $\tilde{O}\left(\left(\mathrm{NNZ}(A) + m^2 + \frac{n^\omega}{m^{\omega-2.5}} + n^{2.5}\right)\cdot\log^2\left(\frac{\kappa + \|b\|_\mathcal{E}}{\epsilon}\right)\cdot\log\left(\frac{n\cdot R}{\epsilon\, r}\right)\right)$.

我们定义向量 $\mu^{(k)} := x^{(k)} \odot s^{(k)}$。我们希望维护 $\left\|\mu^{(k)} - \mathbb{E}t^{(k)}\right\|_2 = O(t^{(k)})$。更新是通过取 $\left\|\mu^{(k)} - \mathbb{E}t^{(k)}\right\|_2$ 的梯度，即 $\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)} + \delta_\mu^{(k)}$ 其中 $\delta_\mu^{(k)} = -h(\mu^{(k)} - \mathbb{E}t^{(k)})$。我们稍后证明可以设置 $t^{(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)t^{(k)}$。设 $x, s \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\left\|x - \frac{x}{t}\right\|_2, \left\|s - \frac{s}{t}\right\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{n}}$。

我们需要证明以下内容。

1. $x + \delta_x$ 和 $s + \delta_s$ 保持非负。2. 给定 $\left\|\mu^{(k)} - \mathbb{E}t^{(k)}\right\|_2 = O(t^{(k)})$，我们有 $\left\|\mu^{(k+1)} - \mathbb{E}t^{(k+1)}\right\|_2 = O(t^{(k+1)})$。

引理 4.17。设

$$\|X\|_F, \left\|X^{-1}\right\|_F, \|S\|_F, \left\|S^{-1}\right\|_F, \|A\|_F \le \kappa. \tag{11}$$

*Let*

$$\delta_x = X^{1/2}S^{-1/2}(I - \widetilde{P})X^{-1/2}S^{-1/2}\delta_\mu \quad , \textit{and} \quad \delta_s = X^{-1/2}S^{1/2}\widetilde{P}X^{-1/2}S^{-1/2}\delta_\mu,$$

其中$\widetilde{P} := X^{1/2}S^{-1/2}AD^{-1}A^\top S^{-1/2}X^{1/2}$，$\delta_\mu = -h(\mu - \mathbb{E}t)$，且 $\mu = y \odot s$使得 $\left\|(A^\top XS^{-1}A)^{-1} - D^{-1}\right\|_F \le \varepsilon$使得 $\kappa^4\varepsilon \le 0.1$。此外，假设 $\left\|\frac{\mu - \vec{t}}{t}\right\|_2 \le 0.1$。那么 $\left\|X^{-1}\delta_x\right\|_2$，$\left\|S^{-1}\delta_s\right\|_2 \le 0.15h$。

算法 7: 路径跟踪内点法 (内点法) 1 输入: 满列秩矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ $(n > d)$, $b \in \mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^n$, $0 < \epsilon_1, \epsilon_2 < 1$ 使得 $\|A^\top A\|_F$, $\left\|(A^\top A)^{-1}\right\|_F$, $\|b\|_2$, $\|c\|_2 \le \kappa$, 对于 $\kappa > 1$. 2 输出: $x \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$ 使得 $\|Ax - b\|_2 \le \epsilon_1$ 和 $c^\top x \le \min_{x:A^\top y=b, y\ge 0} c^\top y + \epsilon_2$. 3 计算初始可行原始解 $y^{(0)}$ 和松弛变量 $s^{(0)}$ 并改变矩阵. 4 设置 $t(0) = 1$, $\mu^{(0)} = X^{(0)}s^{(0)}$, 和 $w^{(0)} = (S^{(0)})^{-1}y^{(0)}$5 设置 $T = \sqrt{n}\cdot\log(\kappa/\epsilon_2)$ 和 $k = 1$6 设置 DS 为逆维护数据结构 // 要么稠密数据结构DDS 要么稀疏数据结构 SDSc7 DS.Initialize(A, W, $10^6$ $\kappa$ $n$ $\epsilon_1$ $(\cdot\cdot\log(1/\epsilon_2))^{30}$) 8 while $k < T$ do 9 设置 $\delta_\mu^{(k)} = -0.5(\mu^{(k-1)} - \mathbb{R}t(k-1))$ 10 计算 $u^{(k)} = X^{1/2}S^{-1/2}A(A^\top XS^{-1}A)^{-1}A^\top S^{-1}\delta_\mu$ 使用 DS.Query 和 Richardson 迭代 11 计算 $\delta_s^{(k)} = X^{-1/2}S^{1/2}u$ 和 $\delta(k)s = S^{-1}\delta_\mu - X^{1/2}S^{-1/2}u$ 12 更新 $y^{(k)} = y^{(k-1)} + \delta_x^k$, $s^{(k)} = s^{(k-1)} + \delta_s^k$, $w^{(k)} = (S^{(k)})^{-1}y^{(k)}$, 和 $t(k) = (1 - \frac{1}{1000\sqrt{n}})t(k-1)$ 13 令 $Q = \{i : |w_i^{(k-1)} - w_i^{(k)}| / w_i^{(k)} > 0.5\}$ ~~14 设置 $w_Q^{(k)} = w_Q^{(k)}$, $w_{[n]\setminus Q}^{(k)} = w_{[n]\setminus Q}^{(k-1)}$, 并调用 DS.Update($Q$, $w_Q^{(k)}$)~~ 15 设置 $k = k + 1$16 返回 $y^{(T)}$

证明。首先注意到

$$\left\|(x \odot s - \vec{t})/t\right\|_\infty \le \left\|(x \odot s - \vec{t})/t\right\|_2 \le 0.1.$$

因此 $0.9 \cdot t \le y \odot s_k \le 1.1 \cdot t$。我们有

$$\begin{aligned}\left\|S^{-1}\delta_s\right\|_2 &= \left\|X^{-1/2}S^{-1/2}\widetilde{P}X^{-1/2}S^{-1/2}\delta_\mu\right\|_2 \\ &\le \left\|X^{-1/2}S^{-1/2}\right\|_\infty \left\|\widetilde{P}X^{-1/2}S^{-1/2}\delta_\mu\right\|_2 \\ &\le \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\left\|\widetilde{P}X^{-1/2}S^{-1/2}\delta_\mu\right\|_2.\end{aligned}$$

现在记 $P := X^{1/2}S^{-1/2}A(A^\top XS^{-1}A)^{-1}A^\top S^{-1/2}X^{1/2}$, 由于 $\left\|(A^\top XS^{-1}A)^{-1} - D^{-1}\right\|_F \le \varepsilon$, 由 (11) 得, $\left\|eP - P\right\|_F \le \kappa^4\varepsilon$。现在根据三角不等式, 并且由于 P 是一个正交投影矩阵,

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{P}X^{-1/2}S^{-1/2}\delta_\mu\right\|_2 &\le \left\|PX^{-1/2}S^{-1/2}\delta_\mu\right\|_2 + \left\|(\widetilde{P} - P)X^{-1/2}S^{-1/2}\delta_\mu\right\|_2 \\ &\le (1 + \kappa^4\varepsilon)\left\|X^{-1/2}S^{-1/2}\delta_\mu\right\|_2.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\left\|S^{-1}\delta_s\right\|_2 &\le \frac{11}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\left\|X^{-1/2}S^{-1/2}\delta_\mu\right\|_2 \\ &\le \frac{11}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\left\|X^{-1/2}S^{-1/2}\right\|_\infty\|\delta_\mu\|_2 \\ &\le \frac{110}{81}\cdot\frac{1}{t}\|\delta_\mu\|_2\end{aligned}$$

现在由于 $\delta_\mu = -h(\mu - \mathbb{R}t)$ 和 $\left\|(\mu - \mathbb{R}t)/t\right\|_2 \le 0.1$, 我们有 $\left\|S^{-1}\delta_s\right\|_2 \le 0.15h$。对于 $X^{-1}\delta_x$, 我们类似地有

$$\left\|X^{-1}\delta_x\right\|_2 = \left\|X^{-1/2}S^{-1/2}(I - \widetilde{P})X^{-1/2}S^{-1/2}\delta_\mu\right\|_2$$

$$\leq \left\|\mathbf{X}^{-1/2}\mathbf{S}^{-1/2}\right\|_\infty \left\|(\mathbf{I}-\widetilde{\mathbf{P}})\mathbf{X}^{-1/2}\mathbf{S}^{-1/2}\delta_\mu\right\|_2$$
$$\leq \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\left\|(\mathbf{I}-\widetilde{\mathbf{P}})\mathbf{X}^{-1/2}\mathbf{S}^{-1/2}\delta_\mu\right\|_2.$$

然后一个类似的三角不等式，以及对 $\|(\mu - \mathbb{R}t)/t\|_2 \leq 0.1$ 的界，给出

$$\left\|\mathbf{X}^{-1}\delta_{\mathrm{x}}\right\|_2 \leq \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}(1+\kappa^4\varepsilon)\left\|\mathbf{X}^{-1/2}\mathbf{S}^{-1/2}\right\|_\infty \|\delta_\mu\|_2 \leq 0.15h.$$

□

注 4.18. 令 $h \leq 1$。因此，由于 $\left\|\mathrm{X}^{-1}\delta_{\mathrm{x}}\right\|_\infty \leq \left\|\mathrm{X}^{-1}\delta_{\mathrm{x}}\right\|_2 \leq 0$。15，对于任意条目 $i \in [n]$, $|\delta_{\mathrm{x}}(i)/\mathrm{x}(i)| \leq$0。15。因此，$\mathrm{x}(i) + \delta_{\mathrm{x}}(i) \geq 0$。85$\mathrm{x}(i) > 0$。类似的论证可得 $\mathrm{s}(i) + \delta_{\mathrm{s}}(i) > 0$。因此，更新后，x 和 s 的条目仍保持非负。

引理 4.19. 令

$$\|\mathbf{X}\|_{\mathrm{F}}, \left\|\mathbf{X}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}, \|\mathbf{S}\|_{\mathrm{F}}, \left\|\mathbf{S}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}, \|\mathbf{A}\|_{\mathrm{F}} \leq \kappa. \tag{12}$$

*Let*

$$\delta_{\mathrm{x}} = \mathbf{X}^{1/2}\mathbf{S}^{-1/2}(\mathbf{I}-\widetilde{\mathbf{P}})\mathbf{X}^{-1/2}\mathbf{S}^{-1/2}\delta_\mu \quad , \textit{and} \quad \delta_{\mathrm{s}} = \mathbf{X}^{-1/2}\mathbf{S}^{1/2}\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{X}^{-1/2}\mathbf{S}^{-1/2}\delta_\mu,$$

其中 $\mathrm{eP} := \mathrm{X}^{1/2}\mathrm{S}^{-1/2}\mathrm{AD}^{-1}\mathrm{A}^\top\mathrm{S}^{-1/2}\mathrm{X}^{1/2}$, $\delta_\mu = -\mathrm{h}(\mu_1 - \mathbb{R}t_1)$，且 $\mu_1 = \mathrm{x}\odot\mathrm{s}$ 满足 $\mathrm{h} \leq 0.5$, $\left\|(\mathrm{A}^\top\mathrm{XS}^{-1}\mathrm{A})^{-1} - \mathrm{D}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq\varepsilon$，以及 $\kappa^4\varepsilon \leq 0.1$。此外，假设 $\left\|\mu_1 - \mathbb{R}_{t_1}\right\|_2 \leq 0.1$。令 $\mu_2 = (\mathrm{x} + \delta_{\mathrm{x}}) \odot (\mathrm{s} + \delta_{\mathrm{s}})$，且 $t_2 = (1 - 1/(1000\sqrt{n}))t_1$，并令 $n \geq 10$。则 $\left\|\mu_2 - \mathbb{R}_{t_2}\right\|_2 \leq 0.1$。

*Proof.* By triangle inequality,

$$\left\|\frac{\mu_2 - \vec{t_2}}{t_2}\right\|_2 = \left\|\frac{(\mathbf{x}+\delta_{\mathrm{x}})\odot(\mathbf{s}+\delta_{\mathrm{s}}) - \vec{t_2}}{t_2}\right\|_2$$
$$\leq \left\|\frac{\mathbf{x}\odot\mathbf{s} - \vec{t_2}}{t_2} + \frac{\mathbf{x}\odot\delta_{\mathrm{s}} + \mathbf{s}\odot\delta_{\mathrm{x}}}{t_2}\right\|_2 + \left\|\frac{\delta_{\mathrm{x}}\odot\delta_{\mathrm{s}}}{t_2}\right\|_2.$$

Now by Lemma 4.17,

$$\left\|\frac{\delta_{\mathrm{x}}\odot\delta_{\mathrm{s}}}{t_2}\right\|_2 = \left\|\mathbf{XS}\frac{\mathbf{X}^{-1}\delta_{\mathrm{x}}\odot\mathbf{S}^{-1}\delta_{\mathrm{s}}}{t_2}\right\|_2$$
$$\leq \left\|\frac{\mathbf{x}\odot\mathbf{s}}{t_2}\right\|_\infty \left\|\mathbf{X}^{-1}\delta_{\mathrm{x}}\right\|_\infty \left\|\mathbf{S}^{-1}\delta_{\mathrm{s}}\right\|_2$$
$$\leq \frac{1.1}{1-1/\sqrt{n}}(0.15h)^2$$
$$\leq 0.0125.$$

Now denoting $\mathbf{P} := \mathbf{X}^{1/2}\mathbf{S}^{-1/2}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{XS}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{S}^{-1/2}\mathbf{X}^{1/2}$,

$$\mathbf{x}\odot\delta_{\mathrm{s}} + \mathbf{s}\odot\delta_{\mathrm{x}} = \delta_\mu + \mathbf{X}^{1/2}\mathbf{S}^{1/2}(\mathbf{P}-\widetilde{\mathbf{P}})\mathbf{X}^{-1/2}\mathbf{S}^{-1/2}\delta_\mu + \mathbf{X}^{1/2}\mathbf{S}^{1/2}(\widetilde{\mathbf{P}}-\mathbf{P})\mathbf{X}^{-1/2}\mathbf{S}^{-1/2}\delta_\mu = \delta_\mu = -h(\mu_1 - \vec{t}_1).$$

Therefore

$$\left\|\frac{\mathbf{x}\odot\mathbf{s} - \vec{t_2}}{t_2} + \frac{\mathbf{x}\odot\delta_{\mathrm{s}} + \mathbf{s}\odot\delta_{\mathrm{x}}}{t_2}\right\|_2 = \frac{1}{1-1/\sqrt{n}}\cdot\left\|\frac{(1-h)(\mu_1 - \vec{t}_1)}{\vec{t}_1}\right\|_2 + \frac{1}{1-1/\sqrt{n}}\left\|\frac{1}{1000\sqrt{n}}\right\|_2$$
$$\leq 0.75\cdot\left\|\frac{\mu_1 - \vec{t}_1}{\vec{t}_1}\right\|_2 + 0.002.$$

结合以上内容并使用 $\left\|\mu_1 - \mathbb{R}_{t_1}\right\|_2 \leq 0.1$，我们有 $\left\|\mu_2 - \mathbb{R}_{t_2}\right\|_2 \leq 0.1$。 □

引理 4.20。设

$$\|\mathbf{X}\|_{\mathrm{F}}, \left\|\mathbf{X}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}, \|\mathbf{S}\|_{\mathrm{F}}, \left\|\mathbf{S}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}, \|\mathbf{A}\|_{\mathrm{F}} \leq \kappa. \tag{13}$$

*Let*

$$\delta_{\mathrm{x}} = \mathbf{X}^{1/2}\mathbf{S}^{-1/2}(\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{P}})\mathbf{X}^{-1/2}\mathbf{S}^{-1/2}\delta_{\mu} \quad , \textit{and} \quad \delta_{\mathrm{s}} = \mathbf{X}^{-1/2}\mathbf{S}^{1/2}\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{X}^{-1/2}\mathbf{S}^{-1/2}\delta_{\mu},$$

其中 eP :=$\mathrm{X}^{1/2}\mathrm{S}^{-1/2}\mathrm{AD}^{-1}\mathrm{A}^{\top}\mathrm{S}^{-1/2}\mathrm{X}^{1/2}$, $\delta_{\mu} = -h(\mu - ®t)$, 且 $\mu = \mathrm{y} \odot \mathrm{s}$ 使得 $\left\|(\mathrm{A}^{\top}\mathrm{XS}^{-1}\mathrm{A})^{-1} - \mathrm{D}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon_{1}$。此外假设初始可行解满足 $\left\|\mathrm{A}^{\top}\mathrm{y}^{(0)} - \mathrm{b}\right\|_{2} \leq \varepsilon_{2}$。然后在 $k$ 更新之后，我们有$\left\|\mathrm{A}^{\top}\mathrm{y}^{(k)} - \mathrm{b}\right\|_{2} \leq k\kappa^{7}\varepsilon_{1} + \varepsilon_{2}$。

证明。根据三角不等式，有

$$\left\|\mathbf{A}^{\top}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}\right\|_{2} \leq \left\|\mathbf{A}^{\top}\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}\right\|_{2} + \sum_{j=1}^{k}\left\|\mathbf{A}^{\top}\delta_{\mathrm{x}}^{(k)}\right\|_{2} \leq \varepsilon_{2} + k\kappa^{7}\varepsilon_{1}.$$

□

引理 4.21。 在 $k$ 次迭代期间，算法 7至多进行 $O$（$k^{2}\log n$） 次更改，作用于 ~w。证明。

□

引理 4.22。 假设某算法使用定理 *3.6* 的稀疏数据结构。此外，假设该算法运行 $n^{1/2}$ 次迭代，并且每经过 $k$ 次迭代，至多有 $k^{2}$ 个条目被更新。那么对于 $\omega > 2$。5，该算法的总运行时间为

$$\tilde{O}\left(\left(\mathrm{NNZ}(\mathbf{A}) \cdot m^{2} \cdot n + \frac{n^{\omega}}{m^{\omega-2.5}}\right) \cdot \log^{2}((\kappa + \|\mathbf{b}\|_{2})/\varepsilon)\right).$$

证明。首先注意，更新中形如 $\mathrm{NNZ}(\mathbf{A})\cdot m^{2}\cdot|S|$ 的项的总贡献为 $\mathrm{NNZ}(\mathbf{A})\cdot m^{2}\cdot n$，因为在整个算法过程中至多有 $n$ 次更新。因此，下文中我们省略这些项的贡献。此外，查询在整个算法过程中的总运行时间为

$$\tilde{O}(\mathrm{NNZ}(\mathbf{A}) \cdot m^{2} \cdot n^{0.5} + n^{2.5} \cdot \log^{2}(\kappa/\varepsilon))$$

现在注意，秩大于 $n/m$ 的初始化和更新的总成本为

$$\tilde{O}\left(\left(d \cdot \mathrm{NNZ}\left(\mathbf{A}\right) \cdot m^{1.5} + \left(\frac{d}{m}\right)^{\omega} m^{2.5}\right)\log^{2}\left(\kappa/\varepsilon\right)\right)$$

因为此类更新的数量至多为 $m^{0.5}$。现在注意到，秩小于 $n^{\alpha}$ 的一次更新的成本为 $O(n^{2})$。因此，在算法运行过程中，此类更新的总成本为 $O(n^{2.5})$。对于 $k = 2^{j}$，秩至多为 $k^{2}$ （模 $\log^{2}(\kappa/\varepsilon)$）的更新的总成本为

$$\left(n^{2} \cdot (k^{2})^{\omega-2} + \mathrm{MM}(n, k^{2}, k^{2}) + k^{2\omega}\right) \cdot \frac{n^{0.5}}{k} = n^{2.5} \cdot k^{2\omega-5} + \mathrm{MM}(n, k^{2}, k^{2}) \cdot \frac{n^{0.5}}{k} + n^{0.5} \cdot k^{2\omega-1}$$

Moreover since $\omega > 2.5$ and $k^{2} \leq n/m$, we have

$$n^{2.5} \cdot k^{2\omega-5} \leq n^{2.5}\left(\frac{n}{m}\right)^{(2\omega-5)/2} \leq \frac{n^{\omega}}{m^{\omega-2.5}}.$$

Now since $3\omega - 1 > 0$, and $k^{2} \leq n/m$,

$$n^{0.5} \cdot k^{2\omega-1} \leq n^{0.5} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{(2\omega-1)/2} = \frac{n^{\omega}}{m^{\omega-0.5}}.$$

We also have

$$\mathrm{MM}(n, k^{2}, k^{2}) \cdot \frac{n^{0.5}}{k} \leq n^{\omega-2+0.5} \cdot k^{3} \leq \frac{n^{\omega}}{m^{1.5}}.$$

Moreover since $3 \geq \omega > 2.5$,

$$\frac{n^{\omega}}{m^{\omega-0.5}} \leq \frac{n^{\omega}}{m^{1.5}} \leq \frac{n^{\omega}}{m^{\omega-2.5}}.$$

We can finally bound the cost of all updates by considering all powers of two between 1 and $(n/m)^{1/2}$ for $k$. □

# 5 $p$-Norm Regression

In this section, we consider the problems of the following form.

$$\min_{\mathbf{x}:\mathbf{A}^\top\mathbf{x}=\mathbf{b}} \|\mathbf{x}\|_p^p, \tag{14}$$

其中 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$、$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ 和 $p > 1$。我们采用 [AKPS19] 的方法。我们首先在第 5.1 节讨论式 (14) 的残差问题。我们证明，可以通过求解 $O_p(\alpha \log(n/\epsilon))$ 个残差问题的 $\alpha$-近似解来求解式 (14)。我们在第 5.2 节讨论如何将此残差问题转化为一个带额外线性约束的混合 $(2,p)$-范数最小化问题。我们可以直接优化这个混合 $(2,p)$-范数问题（第 5.5 节），也可以使用混合 $(2,\infty)$-范数问题作为代理（第 5.4 节）。后一种方法会使运行时间额外增加一个 $n^{2/p}$ 因子。不过，由于这种方法更简单，我们先重点讨论它。此外，计算混合 $(2,\infty)$-范数的常数因子近似解本身也很有意义。这两种方法都需要求解一系列加权线性回归问题。因此，在深入讨论这两种方法之前，我们先在第 5.3 节讨论这个加权线性回归问题的位复杂度。本节会大量使用以下不等式。

**Fact 5.1**（霍尔德不等式）。设 $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 和 $p, q \in [1,\infty]$ 使得 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。则

$$\|\mathbf{x}\odot\mathbf{y}\|_1 \le \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q.$$

## 5.1 残差问题

我们首先在本节中定义平滑 $p$-范数函数，该函数最初在 [BCLL18] 中引入，并已在 $p$-范数最小化文献 [AKPS19、APS19、AS20] 中被广泛使用。我们也将此函数称为混合$(2,p)$-范数函数，因为在某个阈值以下它是二次函数，而在阈值以上它是幂 $p$ 函数。

定义 9. 对于 $p \ge 1$ 和阈值 $t \in \mathbb{R}_{\ge 0}$，我们定义（二次）平滑 $p$-范数函数$\gamma_p(t,\cdot): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为

$$\gamma_p(t,x) := \begin{cases} \frac{p}{2}t^{p-2}x^2 & \text{if } |x| \le t, \\ |x|^p + (\frac{p}{2}-1)t^p & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{15}$$

重载记号，对于阈值向量 $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$，我们定义 $\gamma_p(\mathbf{t},\cdot): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为

$$\gamma_p(\mathbf{t},\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n \gamma_p(\mathbf{t}_i,\mathbf{x}_i). \tag{16}$$

平滑的 $p$-范数函数为 $p$-范数函数的布雷格曼散度提供了不错的近似解。一个重要的观察是，平滑的 $p$-范数函数是对称的（即，$\gamma_p(t,x) = \gamma_p(t,-x)$），而布雷格曼散度不一定是对称的。

**Lemma 5.2** ([AKPS19]). *Let $p > 1$. Then for any $\mathbf{x},\boldsymbol{\Delta} \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|\mathbf{x}\|_p^p - \mathbf{g}^\top\boldsymbol{\Delta} + \frac{p-1}{p\cdot 2^p}\gamma_p(|\mathbf{x}|,\boldsymbol{\Delta}) \le \|\mathbf{x}-\boldsymbol{\Delta}\|_p^p \le \|\mathbf{x}\|_p^p - \mathbf{g}^\top\boldsymbol{\Delta} + 2^p\cdot\gamma_p(|\mathbf{x}|,\boldsymbol{\Delta}),$$

*where $\mathbf{g}$ is the gradient of $p$-norm at $\mathbf{x}$, i.e., $\mathbf{g} = p\cdot|\mathbf{x}|^{p-2}\odot\mathbf{x}$.*

利用上述引理，一个自然的方法是根据平滑的 $p$-范数函数采取二阶牛顿步。换言之，我们根据以下残差问题采取步长。

**Definition 10** (Residual problem). *Given $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ and $p > 1$, we define the mixed $(2,p)$-norm residual problem at $\mathbf{x}$ as*

$$\arg\max_{\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\Delta}=0} \mathbf{g}^\top\boldsymbol{\Delta} - \frac{p-1}{p\cdot 2^p}\cdot\gamma_p(|\mathbf{x}|,\boldsymbol{\Delta}),$$

*where $\mathbf{g} = p\cdot|\mathbf{x}|^{p-2}\odot\mathbf{x}$ is the gradient of $\|\mathbf{x}\|_p^p$.*

要执行这种二阶牛顿法，我们需要一个相当接近最优解的初始点。下一个引理指出，二次问题的最优解接近 $p$-范数问题的最优解。这类似于 [AKPS19], 中的引理 4.8，但他们只考虑了 $p \geq 2$ 的情形以及二次问题的精确解。

引理5.3. 设 $p > 1$, $\epsilon > 0$,$\mathbf{y}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\left\|\mathbf{y}^{(0)}\right\|_2 \leq (1+\epsilon) \cdot \min_{\mathbf{x}:\mathbf{A}^\top \mathbf{y}=\mathbf{b}} \|\mathbf{x}\|_2$, 且 $\mathbf{y}^* = \arg\min_{\mathbf{x}:\mathbf{A}^\top \mathbf{y}=\mathbf{b}} \|\mathbf{x}\|_p$. 则

$$\left\|\mathbf{x}^{(0)}\right\|_p^p \leq (1+\epsilon)^p \cdot n^{|p-2|/2} \left\|\mathbf{x}^*\right\|_p^p .$$

证明。我们分两种情况。对于 $1 < p < 2$, 有 $\frac{|p-2|}{2} = \frac{2-p}{2}$。此外$\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_p$。通过取 $r = 2/p$ 和 $s = 2/(2-p)$, 分别对向量 $\mathbf{v} = [\mathbf{y}_i^p]_i, \mathbf{u} = [1]_i \in \mathbb{R}^n$应用霍尔德不等式，我们有 $r, s \geq 1$, 以及

$$\|\mathbf{x}\|_p^p = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^p \leq \|\mathbf{v}\|_{2/p} \|\mathbf{u}\|_{2/(2-p)} = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^2\right)^{p/2} n^{(2-p)/2} = n^{(2-p)/2} \|\mathbf{x}\|_2^p .$$

Therefore since by construction $\left\|\mathbf{x}^{(0)}\right\|_2 \leq \|\mathbf{x}^*\|_2$,

$$\left\|\mathbf{x}^{(0)}\right\|_p^p \leq n^{(2-p)/2} \left\|\mathbf{x}^{(0)}\right\|_2^p \leq n^{(2-p)/2} \cdot (1+\epsilon)^p \|\mathbf{x}^*\|_2^p \leq n^{(2-p)/2} \cdot (1+\epsilon)^p \|\mathbf{x}^*\|_p^p .$$

对于 $p \geq 2$、 $\frac{|p-2|}{2} = \frac{p-2}{2}$和 $\|\mathbf{x}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_2$。对向量$\mathbf{v} = [\mathbf{y}_i^p]_i$和$\mathbf{u} = [1]_i \in \mathbb{R}^n$ 分别应用霍尔德不等式，其中 $r = p/2$、 $s = p/p-2$ , 我们有 $r$, $s \geq 1$, 并且

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^2 \leq \|\mathbf{v}\|_{p/2} \|\mathbf{u}\|_{p/(p-2)} = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^p\right)^{2/p} n^{(p-2)/p} = n^{(p-2)/p} \|\mathbf{x}\|_p^2 .$$

Thus,

$$\left\|\mathbf{x}^{(0)}\right\|_p^p \leq \left\|\mathbf{x}^{(0)}\right\|_2^p \leq (1+\epsilon)^p \|\mathbf{x}^*\|_2^p \leq n^{(p-2)/2} \cdot (1+\epsilon)^p \|\mathbf{x}^*\|_p^p .$$

□

现在我们证明，通过求解残差问题的近似解，我们可以更接近最优解。以下引理由引理 5.2 导出，对此目的很有用。

引理 5.4 ([AKPS19])。设 $p > 1$ 且 $\lambda \leq \left(\frac{p-1}{p} \cdot 4^p\right)^{1/\min\{1,p-1\}}$。则对任意 $\mathbf{y}, \boldsymbol{\Delta} \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\mathbf{x}\|_p^p - f(\lambda \boldsymbol{\Delta}) \leq \|\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\Delta}\|_p^p \leq \|\mathbf{x}\|_p^p - \lambda f(\boldsymbol{\Delta}),$$

*where* $f(\boldsymbol{\Delta}) = \mathbf{g}^\top \boldsymbol{\Delta} - \frac{p-1}{p \cdot 2^p} \cdot \gamma_p(|\mathbf{x}|, \boldsymbol{\Delta})$.

Using this, we can prove the following lemma.

引理 5.5 ([AKPS19])。 设 $\alpha, p > 1, \mathbf{y}, \boldsymbol{\Delta} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\boldsymbol{\Delta}$ 是 $\alpha$-近似解，适用于 $(2,p)$-范数残差问题，在 $\mathbf{y}$ 处，即

$$\mathbf{g}^\top \widehat{\boldsymbol{\Delta}} - \frac{p-1}{p \cdot 2^p} \cdot \gamma_p(|\mathbf{x}|, \widehat{\boldsymbol{\Delta}}) \geq \frac{1}{\alpha} \cdot \max_{\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\Delta} = 0} \mathbf{g}^\top \boldsymbol{\Delta} - \frac{p-1}{p \cdot 2^p} \cdot \gamma_p(|\mathbf{x}|, \boldsymbol{\Delta}).$$

然后， $\lambda = \left(\frac{p-1}{p} \cdot 4^p\right)^{1/\min\{1,p-1\}}$ 且最优值为 $= \min_{\mathbf{x}:\mathbf{A}^\top \mathbf{x}=\mathbf{b}} \|\mathbf{x}\|_p^p$,

$$\left\|\mathbf{x} - \lambda \widehat{\boldsymbol{\Delta}}\right\|_p^p - \mathtt{opt} \leq \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right) \cdot \left(\|\mathbf{x}\|_p^p - \mathtt{opt}\right).$$

**Algorithm 8:** $p$-Norm Minimization by Approximately Solving a Series of Residual Problems

1 输入：满列秩矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ $(n > d)$，$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$，$p > 1$，$\epsilon > 0$，$\alpha > 1$，其中残差问题可求得 $\alpha$-近似解。 2 输出：$\mathbf{bx} \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\|\mathbf{Abx} - \mathbf{b}\|_2 \le \epsilon$ 且 $\|\mathbf{bx}\|_p^p \le (1+\epsilon)\min_{\mathbf{x}:\mathbf{A}^\top\mathbf{x}=\mathbf{b}} \|\mathbf{x}\|_p^p$。
3 设置 $\lambda = \left(\frac{p-1}{p}\cdot 4^p\right)^{1/\min\{1,p-1\}}$ 和 $T = 1\frac{\alpha}{\lambda}\cdot\log(\ ^{1}.1^p\cdot n^{|p-2|/2})$m 4 计算 $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$，使得 $\left\|\mathbf{x}^{(0)}\right\|_2 \le 1.1\cdot\|\mathbf{x}^*\|_2$ 且 $\left\|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^*\right\|_2 \le \frac{\epsilon}{2T}\cdot\|\mathbf{x}^*\|_2$，其中 $\mathbf{x}^* = \arg\min_{\mathbf{x}:\mathbf{A}^\top\mathbf{x}=\mathbf{b}} \|\mathbf{bx}\|_2$5 对于 t $= 1,\ldots,\mathrm{T}$，执行 6 计算 $\mathbf{\Delta}^{(t)} \in \mathbb{R}^n$，使得 $\left\|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{\Delta}^{(t)}\right\|_2 \le \frac{\epsilon}{2T}\cdot\lambda\cdot\|\mathbf{x}^*\|_2$ 且 $\mathbf{g}^\top\mathbf{\Delta}^{(t)} - \frac{p-1}{p}\cdot 2^p\gamma_p(|\mathbf{x}^{(t-1)}|, \mathbf{\Delta}^{(t)}) \le \alpha\cdot\max_{\mathbf{A}^\top\mathbf{\Delta}=0}\mathbf{g}^\top\mathbf{\Delta} - \frac{p-1}{p}\cdot 2^p\gamma_p(|\mathbf{x}^{(t-1)}|, \mathbf{\Delta})$ 7 设置 $\mathbf{x}^{(t)} = \mathbf{x}^{(t-1)} - \lambda\mathbf{\Delta}^{(t)}$8 返回 $\mathbf{bx} := \mathbf{x}^{(T)}$

证明。 我们定义 $f(\mathbf{\Delta}) = \mathbf{g}^\top\mathbf{\Delta} - \frac{p-1}{p\,2^p}\cdot\gamma_p(|\mathbf{y}|, \mathbf{\Delta})$ 以及 $\mathbf{\Delta}^* =$ 最大值点$_{\mathbf{A}^\top\mathbf{\Delta}=0} f(\mathbf{\Delta})$。然后根据引理 5.2。

$$f(\widehat{\mathbf{\Delta}}) \ge \frac{1}{\alpha}f(\mathbf{\Delta}^*) \ge \frac{1}{\alpha}f(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) \ge \frac{1}{\alpha}\left(\|\mathbf{x}\|_p^p - \|\mathbf{x}^*\|_p^p\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\|\mathbf{x}\|_p^p - \mathtt{opt}\right).$$

Moreover by Lemma 5.4,

$$\left\|\mathbf{x} - \lambda\widehat{\mathbf{\Delta}}\right\|_p^p - \mathtt{opt} \le \|\mathbf{x}\|_p^p - \lambda f(\widehat{\mathbf{\Delta}}) - \mathtt{opt} \le -\frac{\lambda}{\alpha}(\|\mathbf{x}\|_p^p - \mathtt{opt}) + \|\mathbf{x}\|_p^p - \mathtt{opt} \le (1-\frac{\lambda}{\alpha})\cdot(\|\mathbf{x}\|_p^p - \mathtt{opt}).$$

□

那么，引理 5.3 和 5.5 表明算法 8 能找到一个近似解。请注意，我们的算法考虑了解决子问题时可能出现的误差，例如，$\mathbf{A}^\top\mathbf{y} = \mathbf{b}$ 的解可能无法用定点算术有限表示，因此我们的输出必然会存在一些误差。

**Theorem 5.6** (Iterative refinement for $p$-norm minimization)**.** *Algorithm 8 computes* $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ *such that*

$$\|\widehat{\mathbf{x}}\|_p^p \le (1+\epsilon)\|\mathbf{x}^*\|_p^p, \quad \textit{and} \quad \|\pi_{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*\|_2 \le \epsilon\cdot\|\mathbf{x}^*\|_2,$$

在 $O_p(\alpha\cdot\log(n/\epsilon))$ 次迭代中，其中 $\mathbf{x}^* = \arg\min_{\mathbf{x}:\mathbf{A}^\top\mathbf{y}=\mathbf{b}}\|\mathbf{yk}\|_p^p$，且 $\alpha$ 是求解残差问题的近似因子。

证明。 迭代次数可直接由算法的第 3 行得出，并注意到 $\lambda$ 仅是 $p$的函数。现在，由于 $\widehat{\ }\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} - \lambda\sum_{t=1}^{T}\mathbf{\Delta}^{(t)}$，根据三角不等式，

$$\|\pi_{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*\|_2 \le \left\|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^*\right\|_2 + \lambda\sum_{t=1}^{T}\left\|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{\Delta}^{(t)}\right\|_2 \le \frac{\epsilon}{2T}\cdot\|\mathbf{x}^*\|_2 + \lambda\cdot T\cdot\frac{\epsilon}{2T\cdot\lambda}\cdot\|\mathbf{x}^*\|_2 \le \epsilon\cdot\|\mathbf{x}^*\|_2,$$

其中，第二个不等式由 $\mathbf{y}^{(0)}$ 和 $\mathbf{\Delta}^{(t)}$ 的构造得出（见算法8）。最后，由于$1 - \frac{\lambda}{\alpha} \le \exp(-\frac{\lambda}{\alpha})$，根据引理 5.5，

$$\|\widehat{\mathbf{x}}\|_p^p - \|\mathbf{x}^*\|_p^p \le \exp(-\frac{T\cdot\lambda}{\alpha})\left\|\mathbf{x}^{(0)}\right\|_p^p.$$

因此，由引理 5.3，$\left\|\mathbf{y}^{(0)}\right\|_p^p \le 1_{\circ}\ 1^p\cdot n^{|p-2|/2}\|\mathbf{y}^*\|_p^p$，$\|\widehat{\ }\mathbf{y}\|_p^p - \|\mathbf{y}^*\|_p^p \le \epsilon\cdot\|\mathbf{y}^*\|_p^p$，结论得证。□

The only remaining part of solving the $p$-norm minimization problem is to devise an algorithm for solving the residual problem. We focus on this for the rest of the section.

## 5.2 Solving The Residual Problem

残差问题的目标（定义 10）是线性函数与平滑 $p$-范数函数的线性组合。我们首先讨论如何将线性函数从目标中移除并作为约束之一添加。这本质上是通过"猜测"最优解的这个线性项的值来完成的。

引理 5.7 ([AKPS19])。设 $p > 1$、$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$、$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ 和 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，其中 $f(\boldsymbol{\Delta}) = \mathbf{g}^\top \boldsymbol{\Delta} - \frac{p-1}{p} \cdot 2^p \gamma_p(|\mathbf{y}|, \boldsymbol{\Delta})$，其中 $\mathbf{g} = p\,|\,|^{p-2} \odot$ $\boldsymbol{\Delta}^* =$ $\mathbf{x}:\mathbf{A}^\top = 0 f(\boldsymbol{\Delta})$ $f(\boldsymbol{\Delta}^*) \in \mathbf{y}\,\mathbf{y}$ 是 $\mathbf{k}\,\mathbf{y}\,\mathbf{k}$ 的梯度。此外，$[2^{j-1}, 2^j)$ $j \in \mathbb{Z}$ 假设 $\arg\max_{\mathbf{y}}(\,)$ 和 $(\,)$ 对某个 成立。令

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\Delta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\Delta}} \quad & \gamma_p(|\mathbf{x}|, \boldsymbol{\Delta}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{g}^\top \boldsymbol{\Delta} = 2^{j-1}, \\ & \mathbf{A}\boldsymbol{\Delta} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

对于 $\beta > 1$，令 $\mathbf{e}\boldsymbol{\Delta} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\gamma_p(|\mathbf{y}|, \mathbf{e}\boldsymbol{\Delta}) \le \beta \cdot \frac{p}{p-1} \cdot 2^{j+p}$ 且 $\mathbf{g}^\top \mathbf{e}\boldsymbol{\Delta} \ge 2^{j-2}$。然后

1. $\gamma_p(|\mathbf{x}|, \widehat{\boldsymbol{\Delta}}) \le \frac{p}{p-1} \cdot 2^{j+p}$.
2. $f(\mu\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}) \ge \frac{1}{8 \cdot (4\beta p)^{1/(\min\{p,2\}-1)}} \cdot \frac{p-1}{p} \cdot f(\boldsymbol{\Delta}^*)$ *for* $\mu = \left(\frac{1}{4\beta p}\right)^{1/(p-1)}$, *if* $1 < p \le 2$, *and* $\mu = \frac{1}{8\beta}$, *otherwise.*

引理 5.7在 [AKPS19] 中假设存在 $\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}$ 使得 $\mathbf{g}^\top \widetilde{\boldsymbol{\Delta}} = 2^{j-1}$，但由于我们无法保证定点算术中存在这样的向量，因此我们将其替换为假设 $\mathbf{g}^\top \widetilde{\boldsymbol{\Delta}} \ge 2^{j-2}$。不过，证明与 [AKPS19] 中的证明类似，只需调整常数即可。引理 5.7 意味着，我们无需近似求解残差问题，而可以猜测一个包含残差问题最优目标值的区间$[2^{j-1}, 2^j)$，并近似求解形如（17）的问题。因此，要解决残差问题，我们需要遍历这样的区间，分别计算每个区间对应的（17）的近似解，并选取使函数$f$取得最大值的那个解。现在的问题是，我们需要遍历多少个区间。下一个引理指出，我们只需尝试对数数量的区间。

引理 5.8 ([AKPS19])。设 $p > 1$ 且 $\mathbf{y}^{(0)} = \arg\min_{\mathbf{A}^\top \mathbf{y} = \mathbf{b}} \|\mathbf{y}\|_2$。此外，设 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\|\overline{\mathbf{x}}\|_p^p > (1+\epsilon) \min_{\mathbf{A}^\top \mathbf{x} = \mathbf{b}} \|\mathbf{x}\|_p^p .$$

令 $f(\boldsymbol{\Delta}) = \mathbf{g}^\top \boldsymbol{\Delta} - \frac{p-1}{p} \cdot 2^p \gamma_p(|\mathbf{y}|, \boldsymbol{\Delta})$ 以及 $\lambda = \left(\frac{p-1}{p} \cdot 4^p\right)^{1/\min\{1, p-1\}}$。那么

$$\min_{\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\Delta} = 0} f(\boldsymbol{\Delta}) \in \left[ \frac{\epsilon \left\|\mathbf{x}^{(0)}\right\|_p^p}{n^{|p-2|/2}}, \frac{\left\|\mathbf{x}^{(0)}\right\|_p^p}{\lambda} \right].$$

引理 5.8 断言，如果当前解不是一个 $(1+\epsilon)$-近似解，我们只需遍历 $\lceil \log(\lambda n^{|p-2|/2}/\epsilon) \rceil + 1$ 个区间，即可近似求解残差问题 (17)。此外，将引理 $\alpha = 16\beta \cdot \frac{p}{p-1}$ 中的内容代入算法 5.7，在算法 8中，我们有

$$T = \left\lceil \frac{16\beta \cdot p}{\lambda \cdot (p-1)} \cdot \log\left(\frac{1.1^p \cdot n^{|p-2|/2}}{\epsilon}\right) \right\rceil .$$

然后，算法 6 的第 8 行可以通过寻找一个 $\beta$-近似解，用于 $\lceil \log(\lambda n^{|p-2|/2}/\epsilon) \rceil + 1$ 个问题（17）的实例，并取最大值来完成。然而，请注意，仅搜索此类实例，只有在当前解不是一个 $(1+\epsilon)$-近似解时才会改进解（见引理 5.8）。因此，在这种方法中，我们需要在算法 8 的循环中添加一个条件语句，以便在满足条件时跳出并返回 $\mathbf{y}^{(t-1)}$ if $\left\|\mathbf{y}^{(t)}\right\|_p^p > \left\|\mathbf{y}^{(t-1)}\right\|_p^p$。

现在，我们需要近似求解形如 $(2,p)$-范数最小化问题（17）。在本节其余部分，我们聚焦于 $p \geq 2$的情形。我们的第一种方法是通过近似求解混合 $(2,\infty)$-范数最小化问题的实例来近似求解此类问题。

下一个引理将平滑的 $p$-范数函数与混合 $(2, \infty)$-范数函数联系起来，进而通过近似最小化混合 $(2, \infty)$-范数函数，实现对平滑 $p$-范数函数的近似最小化。

引理 5.9。设 $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{\overline{n}\times d}$、$\mathrm{b} \in \mathbb{R}^{\overline{d}}$、$\mathrm{t} \in \mathbb{R}^{n}_{\geq 0}$、$p \geq 2$、$\mathrm{b}j \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{\mathbf{\Delta}} = \underset{\mathbf{\Delta}:\overline{\mathbf{A}}^{\top}\mathbf{\Delta}=\overline{\mathbf{b}}}{\arg\min}\, \gamma_p(\mathbf{t}, \mathbf{\Delta}),$$

且 $\gamma_P(\mathrm{t},\ \mathrm{b}\mathbf{\Delta}) \in [2^{\widehat{j}-1}, 2^{\widehat{j}})$。令 $\mathrm{r}$，$\mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$，并令 $q \in \mathbb{Z}$ 满足 $q \leq -2$，$\mathrm{r}_i = \mathrm{t}_i^{p-2}/2^{\max\{\widehat{j},q\}+2}$，且 $\mathrm{s}_i = \left(\frac{1}{2^{\max\{\widehat{j},q+1\}+p+1}}\right)^{1/p}$。则

$$\min_{\mathbf{\Delta}:\overline{\mathbf{A}}^{\top}\mathbf{\Delta}=\overline{\mathbf{b}}} \|\mathbf{\Delta}\|_{\mathrm{r}}^2 + \|\mathrm{s}\odot\mathbf{\Delta}\|_{\infty} \leq 1,$$

并且若$\mathbf{\Delta}$ 使得 $\left\|\overline{\mathbf{\Delta}}\right\|_{\mathrm{r}}^2 + \left\|\mathrm{s}\odot\overline{\mathbf{\Delta}}\right\|_{\infty} \leq \theta$，则

$$\gamma_p(\mathbf{t}, n^{-1/p}\cdot\overline{\mathbf{\Delta}}) \leq p\cdot\left(4\theta + 2^{p+1}\theta^p\right)\cdot\max\{\gamma_p(\mathbf{t},\widehat{\mathbf{\Delta}}), 2^q\}.$$

证明。首先，注意到由于 $p \geq 2$，对于 $x$，$t\in\mathbb{R}$且 $t \geq 0$, $\gamma_P(t,\ x) \geq \max\{t^{p-2}x^2,\ |x|^p\}$。因此 e,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{t}_i^{p-2}\widehat{\mathbf{\Delta}}_i^2 + \left|\widehat{\mathbf{\Delta}}_i\right|^p \leq 2\gamma_p(\mathbf{t},\widehat{\mathbf{\Delta}}) < 2^{\widehat{j}+1}.$$

根据 $\mathrm{r}$，$\mathrm{s}$ 的构造，且由于 $\mathrm{t}_i^{p-2}\ \mathrm{b}\mathbf{\Delta}_i^2$ 和 $\left|\mathrm{b}\mathbf{\Delta}_i\right|^p$ 均为非负,

$$\left\|\widehat{\mathbf{\Delta}}\right\|_{\mathrm{r}}^2 \leq \frac{1}{2}\ \text{, and}\quad \left\|\mathrm{s}\odot\widehat{\mathbf{\Delta}}\right\|_{\infty} \leq \left\|\mathrm{s}\odot\widehat{\mathbf{\Delta}}\right\|_{p} \leq \frac{1}{2}.$$

因此

$$\min_{\mathbf{\Delta}:\overline{\mathbf{A}}^{\top}\mathbf{\Delta}=\overline{\mathbf{b}}} \|\mathbf{\Delta}\|_{\mathrm{r}}^2 + \|\mathrm{s}\odot\mathbf{\Delta}\|_{\infty} \leq \left\|\widehat{\mathbf{\Delta}}\right\|_{\mathrm{r}}^2 + \left\|\mathrm{s}\odot\widehat{\mathbf{\Delta}}\right\|_{\infty} \leq 1.$$

现在，由于对于 $x$，$t\in\mathbb{R}$ 且 $|x| > t \geq 0$, $\frac{p}{2}|\mathrm{x}|^p > |\mathrm{x}|^p + (\frac{p}{2}-1)t^p$, $\gamma_P(t,\ x) \leq \frac{p}{2}(t^{p-2}x^2 + |x|^p)$。因此,

$$\gamma_p(\mathbf{t}, n^{-1/p}\cdot\overline{\mathbf{\Delta}}) \leq \frac{p}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{t}_i^{p-2}(n^{-1/p}\cdot\overline{\mathbf{\Delta}}_i)^2 + \frac{p}{2}\sum_{i=1}^{n}\left|n^{-1/p}\cdot\overline{\mathbf{\Delta}}_i\right|^p.$$

现在我们对右端项中的各项进行界定。由于 $\left\|\overline{\mathbf{\Delta}}\right\|_{\mathrm{r}}^2 + \left\|\mathrm{s}\odot\overline{\mathbf{\Delta}}\right\|_{\infty} \leq \theta$,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^{p-2}}{2^{\max\{\widehat{j},q\}+2}}\cdot(n^{-1/p}\cdot\overline{\mathbf{\Delta}}_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^{p-2}}{2^{\max\{\widehat{j},q\}+2}}\cdot\overline{\mathbf{\Delta}}_i^2 = \left\|\overline{\mathbf{\Delta}}\right\|_{\mathrm{r}}^2 \leq \theta.$$

Moreover

$$\begin{aligned}\left\|n^{-1/p}\overline{\mathbf{\Delta}}\right\|_p &= 2^{(\max\{\widehat{j},q+1\}+p+1)/p}\left\|n^{-1/p}\cdot\mathrm{s}\odot\overline{\mathbf{\Delta}}\right\|_p \leq 2^{(\max\{\widehat{j},q+1\}+p+1)/p}\cdot n^{1/p}\left\|n^{-1/p}\cdot\mathrm{s}\odot\overline{\mathbf{\Delta}}\right\|_{\infty}\\ &\leq 2^{(\max\{\widehat{j},q+1\}+p+1)/p}\cdot\theta.\end{aligned}$$

Thus since $\max\{\gamma_p(t,\widehat{\mathbf{\Delta}}), 2^q\} \geq 2^{\max\{\widehat{j},q+1\}-1}$,

$$\gamma_p(\mathbf{t}, n^{-1/p}\cdot\overline{\mathbf{\Delta}}) \leq \frac{p}{2}\left(2^{\max\{\widehat{j},q\}+2}\theta + 2^{\max\{\widehat{j},q+1\}+p+1}\theta^p\right) \leq p\cdot\left(4\theta + 2^{p+1}\theta^p\right)\cdot\max\{\gamma_p(\mathbf{t},\widehat{\mathbf{\Delta}}), 2^q\}.$$

□

b引理 5.9 限制了 r 和 s 的取值，如果 $j$ 较小。结合引理 5.7 可知，如果$\arg\max_{\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\Delta}=0}\mathbf{g}^\top\boldsymbol{\Delta}-\frac{p-1}{p\,2^p}\cdot\gamma_p(|\mathbf{y}|,\boldsymbol{\Delta})<2^j$，其中 $\mathbf{A}=[\mathbf{A}|\mathbf{g}]$ 且 $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\ 2^{j-1}\end{bmatrix}$，我们只需尝试 $\overline{\gamma}+p-q+1+\log(\frac{p}{p-1})$ 个 r 和 s 的取值，即可找到一个 $\boldsymbol{\Delta}$ 值较小的向量。

尽管引理 5.9 表明，对混合 $(2,\infty)$-范数函数进行优化可得到一个向量 $\boldsymbol{\Delta}$，其$\gamma_p$ 函数的值较小。请注意，将 $\boldsymbol{\Delta}$ 乘以 $n^{-1/p}$ 后，$\mathbf{g}^\top\boldsymbol{\Delta}$ 的值会减小。因此，我们无法使用引理 5.7 来界定 $n^{-1/p}\overline{\boldsymbol{\Delta}}$的残差函数值。为得到这样的界，我们使用以下引理。

引理 5.10 ([AKPS19])。 设 $p>1$, $\lambda\geq 0$，且 $\mathbf{t},\boldsymbol{\Delta}\in\mathbb{R}^n$ 满足 $\mathbf{t}\geq 0$。则

$$\min\{\lambda^2,\lambda^p\}\gamma_p(\mathbf{t},\boldsymbol{\Delta})\leq\gamma_p(\mathbf{t},\lambda\boldsymbol{\Delta})\leq\max\{\lambda^2,\lambda^p\}\gamma_p(\mathbf{t},\boldsymbol{\Delta}).$$

现在，通过进一步缩放 $\overline{\boldsymbol{\Delta}}$，我们得到一个向量，它为残差问题给出常数因子近似。注意，根据引理 5.7 并在引理 $q=\min\{j+p,-2\}$ 中选取 5.9，我们有 $\gamma_p(\mathbf{t},\ n^{-1/p}\cdot\boldsymbol{\Delta})\leq p\cdot\left(4\theta+2^{p+1}\theta^p\right)\cdot\frac{p}{p-1}\cdot 2^{j+p}$ 假设残差函数的最优值属于 $[2^{j-1},2^j)$。此外，根据引理 5.8，残差函数的最优值有界。

引理 5.11. 设 $p\geq 2$, $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^d$，以及 $f\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 满足 $f(\boldsymbol{\Delta})=\mathbf{g}^\top\boldsymbol{\Delta}-\frac{p-1}{p}\cdot 2^p\,\gamma_p(|\mathbf{y}|,\boldsymbol{\Delta})$，其中 $\mathbf{g}=p\,|\mathbf{y}|^{p-2}\odot\mathbf{y}$ 是 $\|\mathbf{x}\|_p^p$的梯度。此外，假设 $\boldsymbol{\Delta}^*=\arg\max_{\mathbf{x}:\mathbf{A}^\top\mathbf{y}=\mathbf{b}}f(\boldsymbol{\Delta})$ 和 $f(\boldsymbol{\Delta}^*)\in\left[2^{j-1},2^j\right)$对于某个 $j\in\mathbb{Z}$成立。此外，设 $\boldsymbol{\Delta}\in\overline{\mathbb{R}}^n$和 $\theta\geq 1$使得 $\mathbf{g}^\top\boldsymbol{\Delta}\geq 2^{j-2}$和 $\gamma_p(\mathbf{t},\ n^{-1/p}\cdot\boldsymbol{\Delta})\leq p\cdot\left(4\overline{\theta}+2^{p+1}\theta^p\right)\cdot\frac{p}{p-1}\cdot 2^{j+p}$。那么对于 $\lambda=\frac{1}{8p\cdot(4\theta+2^{p+1}\theta^p)}$，

$$f(n^{-2/p}\lambda\overline{\boldsymbol{\Delta}})\geq\frac{n^{-2/p}}{64p\cdot(4\theta+2^{p+1}\theta^p)}f(\boldsymbol{\Delta}^*).$$

证明。根据引理5.10 由于 $p\geq 2$ 且 $\lambda<1$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^\top(n^{-2/p}\lambda\overline{\boldsymbol{\Delta}})-\frac{p-1}{p\cdot 2^p}\gamma_p(|\mathbf{x}|,n^{-2/p}\lambda\overline{\boldsymbol{\Delta}})&\geq n^{-2/p}\lambda\cdot 2^{j-2}-n^{-2/p}\lambda^2\cdot\frac{p-1}{p\cdot 2^p}\cdot\gamma_p(\mathbf{t},n^{-1/p}\overline{\boldsymbol{\Delta}})\\
&\geq n^{-2/p}\lambda\cdot 2^{j-2}-n^{-2/p}\lambda^2\cdot\frac{p-1}{p\cdot 2^p}p\cdot\left(4\theta+2^{p+1}\theta^p\right)\frac{p}{p-1}2^{j+p}\\
&=n^{-2/p}\lambda\cdot 2^{j-2}-n^{-2/p}\lambda^2\cdot p\cdot\left(4\theta+2^{p+1}\theta^p\right)2^j\\
&\geq\frac{n^{-2/p}}{8p\cdot(4\theta+2^{p+1}\theta^p)}(2^{j-2}-2^{j-3})\\
&\geq\frac{n^{-2/p}}{64p\cdot(4\theta+2^{p+1}\theta^p)}\left(\mathbf{g}^\top\boldsymbol{\Delta}^*-\frac{p-1}{p\cdot 2^p}\gamma_p(|\mathbf{x}|,\boldsymbol{\Delta}^*)\right).
\end{aligned}$$

□

既然我们已经证明，可以通过猜测残差函数中线性项的值，并直接近似求解混合 $(2,p)$-范数问题，或近似求解混合 $(2,\infty)$-范数问题，从而为残差问题找到一个常数因子近似解，接下来我们讨论添加线性约束会如何影响矩阵的条件数。这一点很重要，因为求逆和逆矩阵维护的位复杂度取决于矩阵的条件数。

我们证明，梯度项（由 $p$-范数的泰勒展开产生——见引理5.2）可以并入逆矩阵，因为如果当前解距离 $p$-范数问题的最优解不近，那么梯度向量在矩阵$\mathbf{A}$ 的核上的投影就很大，因此矩阵$\mathbf{A}:=[\mathbf{A}|\mathbf{g}]$的条件数不会很大。我们先证明该投影很大。

引理 5.12. 设 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^d$，且 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times d}$ 是一个满列秩矩阵。设 $p\geq 1$, $\mathbf{g}:=p\cdot|\mathbf{by}|^{p-2}\odot\mathbf{by}$，为 $\|\mathbf{by}\|_p^p$ 在 $\mathbf{by}$ 处的梯度，并且

$$\mathbf{x}^*=\arg\min_{\mathbf{x}:\mathbf{A}^\top\mathbf{x}=\mathbf{b}}\|\mathbf{x}\|_p^p.$$

设 $0 < \varepsilon < 1$，且 $\mathbf{by} \in \mathbb{R}^d$ 使得 $\|\mathbf{A}^\top \mathbf{by} - \mathbf{b}\|_2 \le \frac{\varepsilon}{2\kappa^{3.5}}$ 且 $\|\mathbf{by}\|_p^p > (1+\varepsilon)\|\mathbf{y}^*\|_p^p$。设 $\kappa > 1$，$\|\mathbf{y}^*\|_p^p \ge 1/\kappa$，并且

$$\left\|\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\right\|_{\mathrm{F}}, \left\|(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}, \|\mathbf{g}\|_2, \|\mathbf{x}^* - \widehat{\mathbf{x}}\|_2 \le \kappa.$$

然后 $\left\|(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top)\mathbf{g}\right\|_2 \ge \frac{\varepsilon}{2\kappa^2}$.

*Proof.* Since $\|\mathbf{x}\|_p^p$ is a convex function, we have

$$(1+\varepsilon)\|\mathbf{x}^*\|_p^p + \mathbf{g}^\top(\mathbf{x}^* - \widehat{\mathbf{x}}) < \|\widehat{\mathbf{x}}\|_p^p + \mathbf{g}^\top(\mathbf{x}^* - \widehat{\mathbf{x}}) \le \|\mathbf{x}^*\|_p^p.$$

Therefore

$$\varepsilon\|\mathbf{x}^*\|_p^p \le \mathbf{g}^\top(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*).$$

We have

$$(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top)(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*) + \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*)$$

Since $\mathbf{A}^\top \mathbf{y}^* = \mathbf{b}$，$\|\mathbf{A}^\top(\mathbf{by} - \mathbf{y}^*)\|_2 \le \frac{\varepsilon}{2\kappa^{3.5}}$。因此根据柯西-施瓦茨不等式和三角不等式，

$$\begin{aligned}
\varepsilon\frac{1}{\kappa} &\le \left\|\mathbf{g}^\top(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top)\right\|_2 \|\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*\|_2 + \left\|\mathbf{g}^\top\right\|_2 \left\|\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\right\|_2 \left\|\mathbf{A}^\top(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*)\right\|_2 \\
&\le \left\|\mathbf{g}^\top(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top)\right\|_2 \kappa + \kappa^{2.5} \cdot \frac{\varepsilon}{2\kappa^{3.5}}
\end{aligned}$$

Therefore

$$\left\|\mathbf{g}^\top(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top)\right\|_2 \ge \frac{\varepsilon}{2\kappa^2}.$$

□

下一个引理指出，如果我们将一个新的列$\mathbf{g}$添加到矩阵 $\mathbf{A}$ 中，形成矩阵$\mathbf{A} = [\mathbf{A}|\mathbf{g}]$，且 $\mathbf{g}$ 到 $\mathbf{A}$ 的核上的投影不小，那么 $\mathbf{A}$ 的条件数很小。

引理5.13。设$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$, $n > d$ 为一个满列秩矩阵。此外，令 $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$。假设 $\kappa > 1$，并且

$$\left\|\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\right\|_{\mathrm{F}}, \left\|(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}, \|\mathbf{g}\|_2, 1/\left\|(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top)\mathbf{g}\right\|_2 \le \kappa.$$

然后 $\left\|\overline{\mathbf{A}}^\top \overline{\mathbf{A}}\right\|_{\mathrm{F}}, \left\|(\overline{\mathbf{A}}^\top \overline{\mathbf{A}})^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \le 8\kappa^7$, 其中 $\overline{\mathbf{A}} = [\mathbf{A}|\mathbf{g}]$.

*Proof.* First note that $\mathbf{g}$ is not in the range of $\mathbf{A}$, since if $\mathbf{g} = \mathbf{Ay}$, then

$$\left\|(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top)\mathbf{g}\right\|_2 = \left\|\mathbf{Ay} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top \mathbf{Ay}\right\|_2 = 0,$$

which is in contrast with the assumption. Therefore $\overline{\mathbf{A}}$ has full column rank and $\overline{\mathbf{A}}^\top \overline{\mathbf{A}}$ is invertible. Now note that

$$\overline{\mathbf{A}}^\top \overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} & \mathbf{A}^\top \mathbf{g} \\ \mathbf{g}^\top \mathbf{A} & \mathbf{g}^\top \mathbf{g}. \end{bmatrix}$$

Therefore by triangle inequality and consistency of the Frobenius norm.

$$\left\|\overline{\mathbf{A}}^\top \overline{\mathbf{A}}\right\|_{\mathrm{F}} \le \left\|\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\right\|_{\mathrm{F}} + 2\left\|\mathbf{A}^\top \mathbf{g}\right\| + \|\mathbf{g}\|_2^2 \le 4\kappa^2 \le 8\kappa^7.$$

令 $s := \|\mathbf{g}\|_2^2 - \mathbf{g}^\top \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top \mathbf{g}$为 $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$的舒尔补。根据矩阵求逆引理，由于 $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ 可逆，$s$ 也可逆，且

$$(\overline{\mathbf{A}}^\top \overline{\mathbf{A}})^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} + \frac{(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top \mathbf{g}\mathbf{g}^\top \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}}{s} & -\frac{(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top \mathbf{g}}{s} \\ -\frac{\mathbf{g}^\top \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}}{s} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}.$$

现在请注意

$$\left\|(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top)\mathbf{g}\right\|_2^2 = \mathbf{g}^\top(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top)(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top)\mathbf{g}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|\mathbf{g}\|_2^2 - 2\cdot \mathbf{g}^\top \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{g} + \mathbf{g}^\top \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{g} \\
&= \|\mathbf{g}\|_2^2 - \mathbf{g}^\top \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{g} \\
&= s.
\end{aligned}
$$

Therefore by assumption $1/s \le \kappa^2$. Now by the triangle inequality and the consistency of the Frobenius norm, we have

$$
\begin{aligned}
\left\|(\overline{\mathbf{A}}^\top\overline{\mathbf{A}})^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} &\le \left\|(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1} + \frac{(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{g}\mathbf{g}^\top\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}}{s}\right\|_{\mathrm{F}} + 2\cdot\left\|\frac{(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{g}}{s}\right\|_{\mathrm{F}} + \frac{1}{s} \\
&\le \left\|(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} + \kappa^2\left(\left\|(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{g}\right\|_{\mathrm{F}}^2 + 2\cdot\left\|(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{g}\right\|_{\mathrm{F}} + 1\right) \\
&\le \kappa + \kappa^2\left(\left\|(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{g}\right\|_{\mathrm{F}} + 1\right)^2 \le \kappa + \kappa^2(\kappa^{2.5}+1)^2 \le 8\kappa^7.
\end{aligned}
$$

□

## 5.3 Weighted Linear Regression with Equality Constraints

在本节中，我们研究如何使用预条件器的带误差的逆来计算加权约束线性回归问题的高精度解。该逆存在误差，因为我们使用的是定点算术。为了近似求解混合$(2,p)$-范数最小化问题，或混合$(2,\infty)$-范数最小化问题，我们需要求解 $\tilde{O}_p(n^{1/3})$个这样的加权约束线性回归问题。我们稍后讨论，对于这些问题，使用逆维护技术，我们可以维护该逆的带误差的常数因子谱近似作为预条件器。

注意，在求解问题 $\arg\min_{\mathbf{x}:\mathbf{A}^\top\mathbf{y}=\mathbf{b}} \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|_{\mathbf{W}}^2$ 时，我们要求解的误差在两种不同的范数下都很小：定义在矩阵 $\mathbf{W}$ 和 $\pi_{\mathbf{A}}$ 上的范数。有趣的是，正如我们将在下一个引理中看到的，$\|\mathbf{y}^*\|_2$ 与 $\|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{y}^*\|_2$ 相差一个 $R$ 倍以内。因此，我们不需要进行 $\log(\kappa(\mathbf{A}))$ 次 Richardson 迭代即可达到这一目标。

引理 5.14。设 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times d}$ 满列秩，$\mathbf{b}\in\mathbb{R}^d$，$\mathbf{W}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是对角矩阵，满足 $R\mathbf{I}\succeq\mathbf{W}\succeq\mathbf{I}$，并且

$$
\mathbf{x}^* := \arg\min_{\mathbf{x}:\mathbf{A}^\top\mathbf{x}=\mathbf{b}} \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{W}}^2 .
$$

*Then*

$$
\|\mathbf{x}^*\|_2 \le R\cdot\|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{x}^*\|_2 .
$$

证明. 由引理 1.8, $\mathbf{y}^* = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$. 因此由于 $\mathbf{W}^{-1}\preceq\mathbf{I}$,

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{x}^*\|_2 &\le \mathbf{b}^\top(\mathbf{A}^\top\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{W}^{-2}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \\
&\le \mathbf{b}^\top(\mathbf{A}^\top\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \\
&= \mathbf{b}^\top(\mathbf{A}^\top\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}.
\end{aligned}
$$

Moreover

$$
\begin{aligned}
\|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{x}^*\|_2 &= \mathbf{x}^{*\top}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{x}^* \\
&= \mathbf{b}^\top(\mathbf{A}^\top\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \\
&= \mathbf{b}^\top(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}.
\end{aligned}
$$

Now note that si因此 $\frac{1}{R}\mathbf{I}\preceq\mathbf{W}^{-1}$，我们有 $\frac{1}{R}\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\preceq\mathbf{A}^\top\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}$。因此 $R(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\succeq(\mathbf{A}^\top\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1}$。因此 s

$$
R\cdot\|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{x}^*\|_2 = R\cdot\mathbf{b}^\top(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \ge \mathbf{b}^\top(\mathbf{A}^\top\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \ge \|\mathbf{x}^*\|_2 .
$$

□

我们现在已经具备证明本小节主要结果的条件，该结果是混合 $(2,\infty)$-范数最小化和混合 $(2,p)$-范数最小化的主要子程序。

引理 1.8 (约束加权线性回归的高精度解). 设 A $\in \mathbb{R}^{n\times d}$ 具有满列秩, b $\in \mathbb{R}^{d}$, 且 W $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为对角矩阵满足 $R\mathrm{I} \geq \mathrm{W} \geq \mathrm{I}$. 此外设 $\mathrm{y}^* = \arg\min_{\mathrm{x}:\mathrm{A}^\top \mathrm{y}=\mathrm{b}} \frac{1}{2}\|\mathrm{y}\|_{\mathrm{W}}^2$. 则

$$\mathrm{x}^* = \mathrm{W}^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{b}.$$

此外，给定一个矩阵$\mathrm{eM}^{-1}$ 使得存在矩阵M，满足 $\left\|\mathrm{eM}^{-1} - \mathrm{M}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \frac{\varepsilon}{d\lambda}$ 且$\mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{A} \preceq \mathrm{M} \preceq \lambda \mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{A}$，存在一个常数 $\lambda \geq 1$，有一个算法可以找到 by，使得

$$\|\widehat{\mathrm{x}} - \mathrm{x}^*\|_2 \leq \epsilon \cdot \|\mathrm{x}^*\|_2, \quad \|\widehat{\mathrm{x}}\|_{\mathrm{W}} \leq (1+\epsilon)\|\mathrm{x}^*\|_{\mathrm{W}}, \quad and \quad \|\pi_{\mathrm{A}}(\widehat{\mathrm{x}} - \mathrm{x}^*)\|_2 \leq \epsilon \|\pi_{\mathrm{A}}\mathrm{x}^*\|_2,$$

其中 $\pi_{\mathrm{A}}$ 是矩阵 A 的投影矩阵，在 $O((d^2 + \mathrm{NNZ}(\mathrm{A}))\cdot \log(\kappa(\mathrm{A})\cdot R)\cdot \log^2(\frac{R}{\epsilon}))$ 时间内。

证明。注意，$\frac{1}{2}\|\mathrm{y}\|_{\mathrm{W}}^2$ 的梯度为 Wy，并且对于 $\mathrm{A}^\top$ 的核中的任意y，都有 $\mathrm{A}^\top(\mathrm{y}^* + \mathrm{y}) = \mathrm{b}$。因此，$\mathrm{Wy}^*$ 应与 $\mathrm{A}^\top$ 的核正交。因此存在y，使得 $\mathrm{Ay} = \mathrm{Wy}^*$。因此$\mathrm{y}^* = \mathrm{W}^{-1}\mathrm{Ay}$，并且 $\mathrm{b} = \mathrm{A}^\top \mathrm{y}^* = \mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{Ay}$。解得 y，我们有$\mathrm{y} = (\mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{b}$。因此由$\mathrm{Ay} = \mathrm{Wy}^*$，我们有 $\mathrm{y}^* = \mathrm{W}^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{b}$。

由于 $\mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{A}$ 为满秩矩阵，$(\mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{b}$ 对应于形如 $(\mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{A})\mathrm{z} = \mathrm{b}$ 的线性方程组。因此，通过使用 Richardson 迭代（引理 2.2），令 $\mathrm{z}^{(k+1)} = \mathrm{z}^{(k)} - \mathrm{eM}^{-1}(\mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{Az}^{(k)} - \mathrm{b})$，其中 $\mathrm{z}^{(0)}$and $\left\|\mathrm{eM}^{-1} - \mathrm{M}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} \leq \frac{\varepsilon}{d\lambda}$ $\mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{Ak}_2$，我们可以保证 that

$$\left\|\mathrm{z}^{(k)} - \mathrm{z}^*\right\|_{\mathrm{M}} \leq (1 - \lambda^{-1} + \varepsilon)^k \|\mathrm{z}^*\|_{\mathrm{M}},$$

where $\mathrm{z}^* = (\mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{b}$. Since $\mathrm{x}^* = \mathrm{W}^{-1}\mathrm{Az}^*$, we have

$$\left\|\mathrm{z}^{(k)} - \mathrm{z}^*\right\|_{\mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{A}} \leq \lambda \cdot (1 - \lambda^{-1} + \varepsilon)^k \|\mathrm{z}^*\|_{\mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{A}}.$$

Setting $\mathrm{x}^{(k)} = \mathrm{W}^{-1}\mathrm{Az}^{(k)}$, we have

$$\begin{aligned}\left\|\mathrm{z}^{(k)} - \mathrm{z}^*\right\|_{\mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{A}}^2 &= (\mathrm{z}^{(k)} - \mathrm{z}^*)^\top \mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{z}^{(k)} - \mathrm{z}^*) \\ &= (\mathrm{z}^{(k)} - \mathrm{z}^*)^\top \mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{WW}^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{z}^{(k)} - \mathrm{z}^*) \\ &= \left\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}^*\right\|_{\mathrm{W}}^2.\end{aligned}$$

Similarly,

$$\|\mathrm{z}^*\|_{\mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{A}}^2 = (\mathrm{z}^*)^\top \mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{Az}^* = (\mathrm{z}^*)^\top \mathrm{A}^\top \mathrm{W}^{-1}\mathrm{WW}^{-1}\mathrm{Az}^* = \|\mathrm{x}^*\|_{\mathrm{W}}^2.$$

Thus

$$\left\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}^*\right\|_{\mathrm{W}} \leq \lambda \cdot (1 - \lambda^{-1} + \varepsilon)^k \|\mathrm{x}^*\|_{\mathrm{W}}. \tag{18}$$

Therefore, taking $k > \frac{1}{\lambda^{-1}-\varepsilon}\log(R^2 \cdot \lambda/\epsilon)$, since $R\mathbf{I} \succeq \mathbf{W} \succeq \mathbf{I}$, we have

$$\left\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}^*\right\|_2 \leq \left\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}^*\right\|_{\mathrm{W}} \leq \frac{\epsilon}{R^2}\cdot \|\mathrm{x}^*\|_{\mathrm{W}} \leq \frac{\epsilon}{R}\cdot \|\mathrm{x}^*\|_2.$$

Thus by triangle inequality,

$$\left\|\mathrm{x}^{(k)}\right\|_{\mathrm{W}} \leq (1+\epsilon)\|\mathrm{x}^*\|_{\mathrm{W}}.$$

Moreover, since projection only decreases the length of a vector and by Lemma 5.14, we have

$$\left\|\pi_{\mathrm{A}}(\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}^*)\right\|_2 \leq \left\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}^*\right\|_2 \leq \frac{\epsilon}{R}\cdot \|\mathrm{x}^*\|_2 \leq \epsilon \cdot \|\pi_{\mathrm{A}}\mathrm{x}^*\|_2.$$

□

我们在接下来两节中使用的乘法权重更新算法容易受到误差的影响（与内点法相反）。更具体地说，它们需要加权线性回归问题的高精度解，即如果我们输出$\widehat{\mathrm{y}} \in \mathbb{R}^n$ 对于问题 $\mathrm{y}^* = \arg\min_{\mathrm{x}:\mathrm{A}^\top \mathrm{y}=\mathrm{b}} \frac{1}{2}\|\mathrm{y}\|_{\mathrm{W}}^2$，我们需要 $\|\widehat{\mathrm{y}} - \mathrm{y}^*\|_2 \leq \frac{1}{\mathrm{poly}(n)}$。这是为了保证某些势函数快速增加所必需的，并且通过取适当的误差参数，由我们用于求解加权线性回归问题的带预条件的迭代方法所隐含（引理 1.8 的 Richardson 迭代）。

## 5.4 混合 $(2,\infty)$-范数最小化

本节讨论一种乘法权重更新方法，用于求加权混合 $(2,\infty)$-范数问题的常数因子近似解。该问题本身也很有研究价值，但如第 5.2 节所示，它也可用于求 $p$-范数最小化问题的高精度解。

定理 1.5（承接第 5 页）。设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 和 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$, $n \geq d$，使得 $\mathbf{A}$ 的条件数小于 $\kappa$，且 $\mathbf{r}$、$\mathbf{s}$ 和 $\mathbf{b}$ 的位复杂度均不超过 $\log(\kappa)$。对于 $0 < \epsilon < 1$，以及 $m \leq n^{(\omega-2)/(\omega-1)}$，存在一种算法，输出 $\mathbf{bx}$，使得 $\|\pi_{\mathbf{A}}(\mathbf{bx} - \mathbf{x}^*)\|_2 \leq \epsilon \|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{x}^*\|_2$，并且

$$\|\widehat{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{r}}^2 + \|\mathbf{s} \odot \widehat{\mathbf{x}}\|_\infty = O(1) \cdot (\|\mathbf{x}^*\|_{\mathbf{r}}^2 + \|\mathbf{s} \odot \mathbf{x}^*\|_\infty), \tag{19}$$

其中 $\mathbf{x}^* = \arg\min_{\mathbf{x}:\mathbf{A}^\top \mathbf{x}=\mathbf{b}} \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{r}}^2 + \|\mathbf{s} \odot \mathbf{x}\|_\infty$，所需时间为

$$\tilde{O}_p((n^\omega + n^{7/3} \cdot \log^2(1/\epsilon)) \log(\alpha_2 \kappa/\epsilon) \log(\alpha_1 \kappa) \log(\kappa/\epsilon)),$$

其中 $\alpha_1 = 1/(\min_{i\in[n]} \mathbf{r}_i + \mathbf{s}_i^2)$，且 $\alpha_2 = (\max_{i\in[n]} \mathbf{r}_i + \max_{i\in[n]} \mathbf{s}_i)/\min_{i\in[n]} \mathbf{r}_i$。此外，对于稀疏矩阵，存在一种算法，以至少 $1 - n^{-10} \cdot \log(\alpha_2)$ 的概率返回满足相同保证的结果，所需时间为

$$\tilde{O}\left(\left(n^\omega m^{7/3-\omega} + \mathrm{NNZ}(\mathbf{A}) \cdot m^{4/3} \cdot n \cdot \log^2(1/\epsilon) + n^{7/3} \cdot \log^2(1/\epsilon)\right) \cdot \log(\alpha_2 \kappa/\epsilon) \log(\alpha_1 \kappa) \log^2(\kappa/\epsilon))\right).$$

本节介绍用于求解混合$(2,\infty)$-范数问题的乘法权重更新算法——见算法9。

我们首先说明，某个加权线性回归问题与混合$(2,\infty)$-范数最小化有关；混合范数最优值的界可给出加权线性回归问题最优解的若干界。我们的乘法权重更新算法（算法 9）的每次迭代都会求解这类加权线性回归问题。

引理 5.15. 设 $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$, 且 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$。设 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$，并对所有 $i \in [n]$，定义 $\mathbf{ew}_i = \|\mathbf{w}\|_1 \cdot \mathbf{r}_i + (\mathbf{w}_i + \frac{1}{n}\|\mathbf{w}\|_1) \cdot \mathbf{s}_i^2$（类似于算法 9 的步骤 11）。令

$$\overline{\boldsymbol{\Delta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\Delta}:\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{b}} \|\boldsymbol{\Delta}\|_{\mathbf{r}}^2 + \|\mathbf{s} \odot \boldsymbol{\Delta}\|_\infty, \quad , \textit{and} \quad \widehat{\boldsymbol{\Delta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\Delta}:\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{b}} \|\boldsymbol{\Delta}\|_{\widetilde{\mathbf{w}}}^2,$$

并假设

$$\left\|\overline{\boldsymbol{\Delta}}\right\|_{\mathbf{r}}^2 + \left\|\mathbf{s} \odot \overline{\boldsymbol{\Delta}}\right\|_\infty \leq 1. \tag{20}$$

*Then*

1. $\left\|\widehat{\boldsymbol{\Delta}}\right\|_{\widetilde{\mathbf{w}}}^2 \leq 6 \cdot \|\mathbf{w}\|_1$.
2. $\left\|\widehat{\boldsymbol{\Delta}}\right\|_{\mathbf{r}}^2 \leq 6$.
3. $\sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i \left|\mathbf{s}_i \widehat{\boldsymbol{\Delta}}_i\right| \leq \sqrt{6}\|\mathbf{w}\|_1$.
4. *For all* $i \in [n]$, $\left|\mathbf{s}_i \widehat{\boldsymbol{\Delta}}_i\right| \leq \sqrt{6n}$.

*Proof.* By definition of $\widetilde{\mathbf{w}}$, we have

$$\left\|\widehat{\boldsymbol{\Delta}}\right\|_{\widetilde{\mathbf{w}}}^2 = \min_{\boldsymbol{\Delta}:\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{b}} \sum_{i=1}^n \left(\|\mathbf{w}\|_1 \cdot \mathbf{r}_i + (\mathbf{w}_i + \frac{1}{n}\|\mathbf{w}\|_1)\mathbf{s}_i^2\right) \boldsymbol{\Delta}_i^2 \tag{21}$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \left(\|\mathbf{w}\|_1 \cdot \mathbf{r}_i + (\mathbf{w}_i + \frac{1}{n}\|\mathbf{w}\|_1)\mathbf{s}_i^2\right) \overline{\boldsymbol{\Delta}}_i^2 \tag{22}$$

By assumption (20) and definition of $\overline{\boldsymbol{\Delta}}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{w}\|_1 \cdot \mathbf{r}_i \overline{\boldsymbol{\Delta}}_i^2 \le \|\mathbf{w}\|_1 . \tag{23}$$

此外

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{w}_i + \frac{1}{n}\|\mathbf{w}\|_1)\mathbf{s}_i^2 \cdot \overline{\boldsymbol{\Delta}}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{w}_i \mathbf{s}_i^2 \cdot \overline{\boldsymbol{\Delta}}_i^2 + \frac{1}{n}\|\mathbf{w}\|_1 \sum_{i=1}^{n} \mathbf{s}_i^2 \cdot \overline{\boldsymbol{\Delta}}_i^2$$

由于 $\left\|\mathbf{s} \odot \overline{\boldsymbol{\Delta}}\right\|_\infty \le 1$，每个 $\mathbf{s}_i^2 \cdot \overline{\boldsymbol{\Delta}}_i^2 \le 1$ 和

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{w}_i \mathbf{s}_i^2 \cdot \overline{\boldsymbol{\Delta}}_i^2 \le \|\mathbf{w}\|_1 . \tag{24}$$

此外 $\frac{1}{n}\left\|\mathbf{s} \odot \overline{\boldsymbol{\Delta}}\right\|_2^2 \le \left\|\mathbf{s} \odot \overline{\boldsymbol{\Delta}}\right\|_\infty^2 \le 1$。因此

$$\frac{1}{n}\|\mathbf{w}\|_1 \sum_{i=1}^{n} \mathbf{s}_i^2 \cdot \overline{\boldsymbol{\Delta}}_i^2 \le \|\mathbf{w}\|_1 . \tag{25}$$

结合（22）、（23）、（24）和（25），即可得出引理的第一部分。现在，由于 $\mathbf{r}$,$\mathbf{s}$ 非负，$\mathbf{ew}_i \ge \mathbf{kwk}_1 \cdot \mathbf{r}_i$。因此 $\left\|\mathbf{b}_{\boldsymbol{\Delta}}\right\|^2_{\sim \mathbf{w}} \ge \mathbf{kwk}_1 \left\|\mathbf{b}_{\boldsymbol{\Delta}}\right\|^2_{\mathbf{r}}$，引理的第二部分由第一部分得出。对向量 $[\sqrt{w_i}]_i$ 和 $[\sqrt{\mathbf{w}_i}\left|\mathbf{s}_i \mathbf{b}\boldsymbol{\Delta}_i\right|]_i$应用柯西-施瓦茨不等式，并根据 $\mathbf{ew}$ 的定义和引理的第一部分，即可得出第三部分，如下所示，

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{w}_i \left|\mathbf{s}_i \widehat{\boldsymbol{\Delta}}_i\right| \le \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{w}_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{w}_i \mathbf{s}_i^2 \widehat{\boldsymbol{\Delta}}_i^2\right)} \le \sqrt{\|\mathbf{w}\|_1 \cdot \left\|\widehat{\boldsymbol{\Delta}}\right\|^2_{\widetilde{\mathbf{w}}}} \le \sqrt{6} \cdot \|\mathbf{w}\|_1 .$$

Now by definition of $\widetilde{\mathbf{w}}$ and first part of the lemma as the following,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\|\mathbf{w}\|_1 \cdot \mathbf{s}_i^2 \cdot \widehat{\boldsymbol{\Delta}}_i^2 \le \left\|\widehat{\boldsymbol{\Delta}}\right\|^2_{\widetilde{\mathbf{w}}} \le 6 \cdot \|\mathbf{w}\|_1 .$$

Therefore the fourth part follows by

$$\left\|\mathbf{s} \odot \widehat{\boldsymbol{\Delta}}\right\|_\infty^2 \le \left\|\mathbf{s} \odot \widehat{\boldsymbol{\Delta}}\right\|_2^2 \le 6n.$$

□

对于证明的其余部分，我们使用两个势函数。第一个是 $\left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1$，我们将证明它在算法运行过程中只缓慢增长。第二势函数是 $\min_{\boldsymbol{\Delta}:\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{b}} \mathbf{k}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{k}_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k)}}$，我们将证明当发生宽度缩减步骤时它会显著增长。此外，由于引理 5.15保证 $\min_{\boldsymbol{\Delta}:\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{b}} \mathbf{k}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{k}_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k)}} = O(1) \cdot \left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1$，我们得到了宽度缩减步骤最大次数的上界。

引理 5.16。令 $t$，$k \ge 0$，并令 $\mathbf{w}$ 如算法 *9*（在步骤 *4* 初始化，并在步骤*22* 和*27*上更新）。则有

$$\left\|\mathbf{w}^{(t,k+1)}\right\|_1 \le \left(1 + \frac{\sqrt{6}+1}{\rho}\right)\left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1 \quad , \textit{and} \quad \left\|\mathbf{w}^{(t+1,k)}\right\|_1 \le \left(1 + \frac{\sqrt{6}+1}{\rho}\right)\left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1 .$$

*Moreover for* $\widehat{\mathbf{y}} := \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mathbf{y}^{(t)}$ *and* $K$ *equal to the number of width reduction steps, we have*

$$\|\widehat{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{r}}^2 + \|\mathbf{s} \odot \widehat{\mathbf{y}}\|_\infty \le 7 \cdot \frac{T+K}{T} + 13.$$

算法 9：乘法权重更新以求解混合 $(2,\infty)$-范数最小化

**输入：** 满列秩矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times(d+1)}$ $(n > d)$，$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{d+1}$，$\mathbf{r}$，$\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$，$0 < \varepsilon < 1$ 使得 $\|\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\|_F$，$\|(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\|_F$，$\|\mathbf{b}\|_2 \le \kappa$，对于 $\kappa > 1$。 **输出：** 通过 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\|\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{b}\|_2 \le \varepsilon$ 且 $\|\mathbf{y}\|_{\mathbf{r}^2} + \|\mathbf{s} \odot \mathbf{y}\|_\infty \le \alpha \min_{\mathbf{y}:\mathbf{A}^\top \mathbf{y}=\mathbf{b}} \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{r}^2} + \|\mathbf{s} \odot \mathbf{y}\|_\infty$。 设置 $\rho = 8 \cdot n^{1/3} \cdot \log\left( \frac{(18\sqrt{6}+18) n^2 \|\mathbf{r}\|_\infty \|\mathbf{b}\|_2^2}{\min_{i\in[n]} \{\mathbf{r}_i + \mathbf{s}_i^2\}} \right)$

设置 $T = \lceil 2\rho \cdot \log n \rceil$，$t = 0$，$k = 0$，并将 $\mathbf{w}^{(0,0)} \in \mathbb{R}^n$ 设为全 1 向量 对于 $i \in [n]$，$\eta \in \{0, \ldots, \lceil 16\rho \cdot \log(n) \rceil\}$，设置 $c_{i,\eta} = 0$ 令 $\mu = \|\mathbf{w}^{(t,k)}\|_1$ 和 $\mathbf{p}_i = \mathbf{w}_i^{(t,k)}$ 对所有 $i \in [n]$ 设置 $\mathrm{ew}_i^{(t,k)} = \mathbf{b}$ $\mathbf{w}_i^{(t,k)} = \mu \cdot \mathbf{r}_i + (\mathbf{p}_i + \frac{\mu}{n}) \cdot \mathbf{s}_i^2$ 将 DS 设置为逆维护数据结构 // 可以是稠密数据结构 `DDS` 或带参数 $m$ 的稀疏数据结构 `SDS`

DS.INITIALIZE($\mathbf{A}, \widehat{\mathbf{w}}^{(t,k)}, \frac{\epsilon}{10^6(\kappa \cdot n)^{30}}$)

当 $t < T$ 时执行

  设置 $\mathrm{ew}_i^{(t,k)} = \|\mathbf{w}^{(t,k)}\|_1 \cdot \mathbf{r}_i + \left( \mathbf{w}_i^{(t,k)} + \frac{1}{n} \|\mathbf{w}^{(t,k)}\|_1 \right) \cdot \mathbf{s}_i^2$

  **if** $\|\mathbf{w}^{(t,k)}\|_1 > 2\mu$ *or (DS is sparse and* $\lfloor (n/m)^{1/3} \rfloor$ *divides* $t + k$*)* **then**

    设置 $S = [n]$，$\mu = \|\mathbf{w}^{(t,k)}\|_1$，$\mathbf{p}_i = \mathbf{w}_i^{(t,k)}$，以及 $\mathrm{bw}_i^{(t,k)} = \mu \cdot \mathbf{r}_i + (\mathbf{p}_i + \frac{\mu}{n}) \cdot \mathbf{s}_i^2$

    For $i \in [n]$, $\eta \in \{0, \ldots, \lceil 16\rho \cdot \log(n) \rceil\}$, set $c_{i,\eta} = 0$

  **else**

    Set $S \leftarrow \bigcup_{\eta : t+k+1 \bmod 2^\eta \equiv 0} \{i \in [n] : c_{i,\eta} \ge \frac{2^\eta}{\lceil \log_2(16\rho \cdot \log n) \rceil \cdot \log(2)}\}$ // this 保证如果 $i \notin S$，那么 $\mathbf{w}_i^{(t,k)} \le 2\mathbf{p}_i$

    令 $\mathbf{p}_i = \mathbf{w}_i^{(t,k)}$ 且 $\mathrm{bw}_i^{(t,k)} = \mu \cdot \mathbf{r}_i + (\mathbf{p}_i + \frac{\mu}{n}) \cdot \mathbf{s}_i^2$，对所有 $i \in S$

    对于 $i \in S$, $\eta \in \{0, \ldots, \lceil 16\rho \cdot \log(n) \rceil\}$，设 $c_{i,\eta} = 0$

  DS.UPDATE($S, \widehat{\mathbf{w}}_S^{(t,k)}$)

  令 $\boldsymbol{\Delta}^{(t,k)} \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\left\| \pi_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\Delta}^{(t,k)} - \boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)}) \right\|_2 \le \frac{\epsilon}{16\rho \cdot \log n} \left\| \pi_{\mathbf{A}} \boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)} \right\|_2$ and $\left\| \boldsymbol{\Delta}^{(t,k)} - \boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)} \right\|_2 \le \frac{\epsilon}{2\kappa^6} \cdot \left\| \boldsymbol{\Delta}^{*(i,k)} \right\|_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k)}}$ where $\boldsymbol{\Delta}^{*(i,k)} = \arg\min_{\Delta : \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\Delta} = \mathbf{b}} \|\boldsymbol{\Delta}\|_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k)}}^2$ // see Lemma 1.8

  **if** $\|\mathbf{s} \odot \boldsymbol{\Delta}^{(t,k)}\|_3 \le \rho$ **then** // regular step

    Set $\mathbf{w}_i^{(t+1,k)} = \mathbf{w}_i^{(t,k)} \cdot \left( 1 + \frac{\mathbf{s}_i \cdot \boldsymbol{\Delta}_i^{(t,k)}}{\rho} \right)$ ! 对所有 $i \in [n]$

    设置 $\mathbf{y}^{(t+1)} = \boldsymbol{\Delta}^{(t,k)}$

    增加 $t = t + 1$

  否则// 宽度缩减步

    设置向量 $\mathbf{u}^{(k)} = \frac{\rho}{\|\mathbf{s} \odot \boldsymbol{\Delta}^{(t,k)}\|} \cdot \mathbf{s} \odot \boldsymbol{\Delta}^{(t,k)}$

    Set $\mathbf{w}_i^{(t,k+1)} = \mathbf{w}_i^{(t,k)} \cdot \left( 1 + \frac{|\mathbf{u}_i^{(k)}|}{\rho} \right)$ ! 对所有 $i \in [n]$

    Set $k = k + 1$

  对于所有 $i \in [n]$，增加 $c_{i,\eta}$ 一 其中 $\eta \in \{0, \ldots, \lceil 16\rho \cdot \log n \rceil\}$ 使得 $\frac{\mathbf{w}_i^{(t,k)} - \mathbf{w}_i^{(\mathrm{old})}}{\mathbf{w}_i^{(\mathrm{old})}} \in (2^{-\eta-1}, 2^{-\eta}]$, where $\mathbf{w}_i^{(\mathrm{old})}$ is $\mathbf{w}_i^{(t-1,k)}$ or $\mathbf{w}_i^{(t,k-1)}$ depending on type of the step.

**return** $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}^{(t)}$

证明。首先注意，$\mathbf{w}^{(t+1,k)}$ 的更新发生在常规步中，而 $\mathbf{w}^{(t,k+1)}$ 的更新只发生在宽度缩减步骤中。然而，这两种更新是相同的。因此，在本证明中，我们将 $\mathbf{w}^{(t+1,k)}$ 或

$\mathbf{w}^{(t,k+1)}$ 和 $\mathbf{w}^{(\text{new})}$ 均记作 $\mathbf{w}^{(\text{new})}$，并证明 $\mathbf{w}^{(\text{new})}$的界。令

$$\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)} = \arg\min_{\boldsymbol{\Delta}:\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{b}} \|\boldsymbol{\Delta}\|^2_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k)}},$$

and $\boldsymbol{\Delta}^{(t,k)}$ be as defined on Step 20 of Algorithm 9. By triangle inequality

$$\left\|\mathbf{w}^{(\text{new})}\right\|_1 = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i^{(t,k)} + \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i^{(t,k)} \left|\mathbf{s}_i \cdot \boldsymbol{\Delta}_i^{(t,k)}\right| \tag{26}$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i^{(t,k)} + \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i^{(t,k)} \left|\mathbf{s}_i \cdot \boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)}_i\right| + \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i^{(t,k)} \left|\mathbf{s}_i \cdot (\boldsymbol{\Delta}_i^{(t,k)} - \boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)}_i)\right| \tag{27}$$

Therefore by Part 3 of Lemma 5.15,

$$\left\|\mathbf{w}^{(\text{new})}\right\|_1 \leq (1 + \frac{\sqrt{6} + \left\|\mathbf{s} \odot (\boldsymbol{\Delta}^{(t,k)} - \boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)})\right\|_\infty}{\rho}) \left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1.$$

根据引理 1.8，我们有 $\left\|\mathbf{s} \odot (\boldsymbol{\Delta}^{(t,k)} - \boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)})\right\|_\infty \leq \left\|\mathbf{s} \odot (\boldsymbol{\Delta}^{(t,k)} - \boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)})\right\|_2 \leq 2\kappa^6\varepsilon$。因此

$$\left\|\mathbf{w}^{(\text{new})}\right\|_1 \leq (1 + \frac{\sqrt{6}+1}{\rho}) \left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1.$$

将此应用于所有迭代，记宽度缩减步骤的数量为 $K$，并注意到$\left\|\mathbf{w}^{(0,0)}\right\| = n$,

$$\left\|\mathbf{w}^{(T,K)}\right\|_1 \leq \left(1 + \frac{\sqrt{6}+1}{\rho}\right)^{T+K} n \leq \exp\left((T+K)\cdot\frac{\sqrt{6}+1}{\rho}\right)\cdot n. \tag{28}$$

Moreover denoting the set of all pairs $(t,k)$, for which $\boldsymbol{\Delta}^{(t,k)}$ is computed, by $S$, we have

$$\mathbf{w}_i^{(T,K)} = \prod_{(t,k)\in S}\left(1 + \frac{\left|\mathbf{s}_i \cdot \boldsymbol{\Delta}_i^{(t,k)}\right|}{\rho}\right) \geq \prod_{t=1}^T \left(1 + \frac{\left|\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{y}_i^{(t)}\right|}{\rho}\right). \tag{29}$$

现在注意，根据构造 $\left|\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{y}_i^{(t)}\right| \leq \rho$。因此

$$\mathbf{w}_i^{(T,K)} \geq \prod_{t=1}^T \exp\left(\frac{\left|\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{y}_i^{(t)}\right|}{2\rho}\right) \tag{30}$$

Combining (28) and (30), taking the logarithm, and using triangle inequality, we have

$$(T+K)\cdot\left(\frac{\sqrt{6}+1}{\rho}\right) + \log n \geq \sum_{t=1}^T \left(\frac{\left|\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{y}_i^{(t)}\right|}{2\rho}\right) \geq T \cdot \left(\frac{\left|\mathbf{s}_i \cdot \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \mathbf{y}_i^{(t)}\right|}{2\rho}\right) = T \cdot \left(\frac{|\mathbf{s}_i \cdot \widehat{\mathbf{y}}_i|}{2\rho}\right)$$

Therefore by definition of $T$ (Step 4 of Algorithm 9), we have

$$|\mathbf{s}_i \cdot \widehat{\mathbf{y}}_i| \leq 7 \cdot \frac{T+K}{T} + \frac{2\rho}{T}\log(n) \leq 7 \cdot \frac{T+K}{T} + 1$$

最后根据柯西-施瓦茨不等式

$$\|\widehat{\mathbf{y}}\|^2_{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \mathbf{y}_i^{(t)}\right)^2 \leq \frac{1}{T}\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \sum_{t=1}^T (\mathbf{y}_i^{(t)})^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \left\|\mathbf{y}^{(t)}\right\|^2_{\mathbf{r}}$$

这直接源于 2-范数的凸性以及引理 2 的第二部分。5.15。设 $(t,\ k_t)$ 是与 $\mathbf{y}^{(t)}$对应的一对。根据引理 1.8 和引理 5.15，我们有

$$\left\|\mathbf{y}^{(t)}\right\|_{\mathbf{r}} \leq \left\|\mathbf{y}^{(t)}-\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k_t)}\right\|_{\mathbf{r}}+\left\|\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k_t)}\right\|_{\mathbf{r}} \leq 2\kappa^6\varepsilon+\left\|\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k_t)}\right\|_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k_t)}} \leq 1+\sqrt{6}$$

因此 $\mathrm{kbyk}^2{}_{\mathbf{r}} \leq 12.$ □

现在我们使用引理 5.15，来证明如果权重有大幅增加，则宽度缩减步骤会显著增加第二势函数。

引理 5.17. 设 $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$, $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^d$, 以及 $\mathrm{w}^{(1)},\mathrm{w}^{(2)} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ 使得 $\mathrm{w}^{(2)}-\mathrm{w}^{(1)} \geq 0$. 此外对于 $j=1,2$, 设

$$\boldsymbol{\Delta}^{(j)} = \operatorname*{arg\,min}_{\boldsymbol{\Delta}:\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{b}} \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\Delta}\|^2_{\mathbf{w}^{(j)}}.$$

*Then*

$$\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\Delta}^{(2)}\right\|^2_{\mathbf{w}^{(2)}} \geq \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\Delta}^{(1)}\right\|^2_{\mathbf{w}^{(1)}}+\frac{1}{4}\left\|\boldsymbol{\Delta}^{(1)}\right\|^2_{\frac{\mathbf{w}^{(2)}-\mathbf{w}^{(1)}}{\mathbf{w}^{(2)}}\cdot\mathbf{w}^{(1)}}$$

证明. 在整个证明中设 $j \in \{1,2\}$. 我们考虑如下问题的对偶

$$\min_{\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{b}} \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\Delta}\|^2_{\mathbf{w}^{(j)}},$$

即

$$\max_{\mathbf{z}} -\mathbf{b}^\top\mathbf{z}-\frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{z}\|^2_{(\mathbf{w}^{(j)})^{-1}}.$$

设 $\mathrm{z}^{(j)}$为 $\mathrm{w}^{(j)}$的对偶问题的最优解。$\mathrm{k}\boldsymbol{\Delta}\mathrm{k}^2{}_{\mathrm{w}^{(j)}}$在 $\boldsymbol{\Delta}^{(j)}$处的梯度正交于 $\mathrm{A}^\top$的核。因此存在 $\mathrm{u}^{(j)} \in \mathbb{R}^d$ 使得

$$\mathbf{W}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}^{(j)} = \mathbf{A}\mathbf{u}^{(j)}.$$

因此 $\boldsymbol{\Delta}^{(j)}=(\mathrm{W}^{(j)})^{-1}\mathrm{Au}^{(j)}$，且由于 $\mathrm{A}^\top\boldsymbol{\Delta}^{(j)}=\mathrm{b}$，我们有

$$\mathbf{u}^{(j)} = (\mathbf{A}^\top(\mathbf{W}^{(j)})^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \quad \text{, and} \quad \boldsymbol{\Delta}^{(j)} = (\mathbf{W}^{(j)})^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top(\mathbf{W}^{(j)})^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$$

对于对偶解，我们有，$-\mathrm{b}^\top\mathrm{z}-\frac{1}{2}\mathrm{kAzk}^2{}_{(\mathrm{w}^{(j)})^{-1}}$ 在 $\mathrm{z}^{(j)}$处的梯度为零。因此

$$-\mathbf{b}-\mathbf{A}^\top(\mathbf{W}^{(j)})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{z}^{(j)} = 0.$$

因此 $\mathrm{z}^{(j)}=-(\mathrm{A}^\top(\mathrm{W}^{(j)})^{-1}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{b}$，且

$$(\mathbf{A}\mathbf{z}^{(j)})_i^2 = \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top(\mathbf{W}^{(j)})^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\right)_i^2 \quad \text{, and } (\boldsymbol{\Delta}_i^{(j)})^2 = (\mathbf{w}_i^{(j)})^{-2}\left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top(\mathbf{W}^{(j)})^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\right)_i^2.$$

因此,

$$(\mathbf{w}_i^{(j)})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{z}^{(j)})_i^2 = \mathbf{w}_i^{(j)}(\boldsymbol{\Delta}_i^{(j)})^2 \quad \text{, and } \left\|\boldsymbol{\Delta}^{(j)}\right\|^2_{\mathbf{W}^{(j)}} = \left\|\mathbf{A}\mathbf{z}^{(j)}\right\|^2_{\mathbf{W}^{(j)}} = \mathbf{b}^\top(\mathbf{A}^\top(\mathbf{W}^{(j)})^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}, \tag{31}$$

其中，最后一个等式是将 $\mathrm{z}^{(j)}$ 的值代入后得到的。我们有

$$-\frac{1}{\mathbf{w}_i^{(2)}} = -\frac{1}{\mathbf{w}_i^{(1)}}+\frac{\mathbf{w}_i^{(2)}-\mathbf{w}_i^{(1)}}{\mathbf{w}_i^{(2)}\cdot\mathbf{w}_i^{(1)}}.$$

Therefore,

$$\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\Delta}^{(2)}\right\|^2_{\mathbf{W}^{(2)}} = -\mathbf{b}^\top\mathbf{z}^{(2)}-\frac{1}{2}\left\|\mathbf{A}\mathbf{z}^{(2)}\right\|^2_{(\mathbf{W}^{(2)})^{-1}}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq -\mathbf{b}^\top \mathbf{z}^{(1)} - \frac{1}{2}\left\|\mathbf{A}\mathbf{z}^{(1)}\right\|^2_{(\mathbf{W}^{(2)})^{-1}} \\
&= -\mathbf{b}^\top \mathbf{z}^{(1)} - \frac{1}{2}\sum_{i\in[n]} (\mathbf{w}_i^{(2)})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{z}^{(1)})_i^2 \\
&= -\mathbf{b}^\top \mathbf{z}^{(1)} - \frac{1}{2}\sum_{i\in[n]} (\mathbf{w}_i^{(1)})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{z}^{(1)})_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\in[n]} \frac{(\mathbf{w}_i^{(2)} - \mathbf{w}_i^{(1)})}{\mathbf{w}_i^{(2)}\cdot\mathbf{w}_i^{(1)}}(\mathbf{w}_i^{(1)})^2(\boldsymbol{\Delta}_i^{(j)})^2 \\
&= \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\Delta}^{(1)}\right\|^2_{\mathbf{W}^{(1)}} + \frac{1}{2}\sum_{i\in[n]} \frac{(\mathbf{w}_i^{(2)} - \mathbf{w}_i^{(1)})}{\mathbf{w}_i^{(2)}}\cdot(\mathbf{w}_i^{(1)})(\boldsymbol{\Delta}_i^{(1)})^2.
\end{aligned}
$$

□

We are now equipped to show that in a width reduction step, the value of the second potential function increases significantly. This combined with Lemma 5.16 implies that the number of width reduction steps is at most $\tilde{O}(\rho)$.

引理 5.18. 设

$$
\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)} = \arg\min_{\boldsymbol{\Delta}:\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{b}} \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\Delta}\|^2_{\widetilde{\mathbf{W}}^{(t,k)}},
$$

其中 $\widetilde{\mathbf{W}}^{(t,k)}$ 定义为算法 9的第 11 步。则在宽度缩减步之后

$$
\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k+1)}\right\|^2_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k+1)}} \geq \left(1 + \frac{\rho^2}{72\cdot n}\right)\cdot\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)}\right\|^2_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k)}},
$$

其中 $\rho$ 定义为算法9的第 3 步。

证明. 首先注意，对于正数 $a$、$b$、$c$ 和 $r \geq 1$，且 $b \geq a$,

$$
\frac{a+c}{b+rc} \geq \frac{1}{r}\cdot\frac{a}{b}. \tag{32}
$$

这通过将以下两边同时除以 $r$成立

$$
\frac{ra+rc}{b+rc} \geq \frac{ra}{b} \geq \frac{a}{b}.
$$

由引理 5.17，在宽度约简步骤中,

$$
\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k+1)}\right\|^2_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k+1)}} \geq \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)}\right\|^2_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k)}} + \frac{1}{2}\sum_{i\in[n]} \frac{\widetilde{\mathbf{w}}_i^{(t,k+1)} - \widetilde{\mathbf{w}}_i^{(t,k)}}{\widetilde{\mathbf{w}}_i^{(t,k+1)}}\cdot\widetilde{\mathbf{w}}_i^{(t,k)}(\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)}_i)^2
$$

现在根据构造和引理 5.16, $\left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1 \leq \left\|\mathbf{w}^{(t,k+1)}\right\|_1 \leq (1+\frac{12}{\rho})\left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1 \leq 2\left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1$, 并且由于$\mathbf{w}_i^{(t,k+1)} \geq 1$ 和 $\left\|\mathbf{w}^{(t,k+1)}\right\|_1 \leq 6n$ 在算法过程中,

$$
\mathbf{w}_i^{(t,k+1)} + \frac{1}{n}\left\|\mathbf{w}^{(t,k+1)}\right\|_1 \leq \mathbf{w}_i^{(t,k+1)} + 6 = (1+\frac{\mathbf{u}_i^{(k)}}{\rho})\cdot\mathbf{w}_i^{(t,k)} + 6\mathbf{w}_i^{(t,k)} \leq 8\cdot\mathbf{w}_i^{(t,k)},
$$

其中最后一个不等式由$\mathbf{u}^{(k)}$的构造得出。然后由（32），

$$
\begin{aligned}
\frac{\widetilde{\mathbf{w}}_i^{(t,k)}}{\widetilde{\mathbf{w}}_i^{(t,k+1)}} &= \frac{\left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1\cdot\mathbf{r}_i + \left(\mathbf{w}_i^{(t,k)} + \frac{1}{n}\left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1\right)\cdot\mathbf{s}_i^2}{\left\|\mathbf{w}^{(t,k+1)}\right\|_1\cdot\mathbf{r}_i + \left(\mathbf{w}_i^{(t,k+1)} + \frac{1}{n}\left\|\mathbf{w}^{(t,k+1)}\right\|_1\right)\cdot\mathbf{s}_i^2} \\
&\geq \frac{\left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1\cdot\mathbf{r}_i + \mathbf{w}_i^{(t,k)}\cdot\mathbf{s}_i^2 + \frac{1}{n}\left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1\cdot\mathbf{s}_i^2}{2\cdot\left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1\cdot\mathbf{r}_i + 2\cdot\mathbf{w}_i^{(t,k)}\cdot\mathbf{s}_i^2 + 6\cdot\mathbf{w}_i^{(t,k)}\cdot\mathbf{s}_i^2}
\end{aligned}
$$

$$\geq \frac{1}{12} \cdot \frac{\frac{1}{n}\left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1 \cdot \mathbf{s}_i^2}{\mathbf{w}_i^{(t,k)} \cdot \mathbf{s}_i^2}.$$

此外，由于 $\left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1 \leq \left\|\mathbf{w}^{(t,k+1)}\right\|_1$,

$$\widetilde{\mathbf{w}}_i^{(t,k+1)} - \widetilde{\mathbf{w}}_i^{(t,k)} \geq (\mathbf{w}_i^{(t,k+1)} - \mathbf{w}_i^{(t,k)}) \cdot \mathbf{s}_i^2.$$

Therefore

$$\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k+1)}\right\|_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k+1)}}^2 \geq \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)}\right\|_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k)}}^2 + \frac{1}{24}\sum_{i\in[n]} \frac{(\mathbf{w}_i^{(t,k+1)} - \mathbf{w}_i^{(t,k)}) \cdot \mathbf{s}_i^2}{\mathbf{w}_i^{(t,k)} \cdot \mathbf{s}_i^2} \cdot \frac{1}{n}\left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1 \cdot \mathbf{s}_i^2 (\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)}_i)^2$$

现在，根据$\mathbf{u}^{(k)}$ 的构造（因为 $\left\|\mathbf{s} \odot \boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)}\right\|_3 > \rho$），以及 $\mathbf{w}^{(t,k+1)}$ 的构造，我们有

$$\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k+1)}\right\|_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k+1)}}^2 \geq \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)}\right\|_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k)}}^2 + \frac{\left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1}{24 \cdot n}\sum_{i\in[n]} \frac{\mathbf{u}_i^{(k)}}{\rho} \cdot (\mathbf{u}_i^{(k)})^2 \geq \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)}\right\|_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k)}}^2 + \frac{\left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1 \cdot \rho^2}{24 \cdot n}.$$

最后，根据引理 5.15, $\left\|\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)}\right\|^{2}{}_{\sim_{\mathbf{w}^{(t,k)}}} \leq 6 \cdot \left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1$. 因此，

$$\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k+1)}\right\|_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k+1)}}^2 \geq \left(1 + \frac{\rho^2}{72 \cdot n}\right) \cdot \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)}\right\|_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k)}}^2.$$

□

We finally bound the number of changes to $\widehat{\mathbf{w}}$. This is the main factor in the running time of the inverse maintenance procedure.

b b b 引理5.19。设 $T := T + K$ 为算法 9的迭代次数，且 $k \in [T]$。对于 $t \in T$ 并且$\eta \in \{0,\ldots,\mathrm{l}\log_2(\mathrm{b}T)\mathrm{m}\}$，设 $c_{t,\eta}$ 为w 中变化倍数位于$(2^{-\eta-1}, 2^{-\eta}]$区间内的条目数。然后

$$\sum_{t=1}^{\widehat{T}} c_{t,\eta} \leq \widehat{T} 2^{3(\eta+1)}.$$

证明。注意，在常规步中，每个条目的相对变化（即，$(\mathrm{w}_i^{(t+1,k)} - \mathrm{w}_i^{(t,k)})/\mathrm{w}_i^{(t,k)}$）至多为$\left|\mathrm{s}_i \cdot \boldsymbol{\Delta}_i^{(t,k)}\right|/\rho < 1$。此外，根据常规步中 $\left\|\mathrm{s} \odot \boldsymbol{\Delta}^{(t,k)}\right\|_3$的上界以及宽度缩减步骤中 $\mathrm{u}^{(k)}$ 的构造，我们有

$$\left\|\frac{\mathbf{w}^{(\mathrm{new})} - \mathbf{w}^{(t,k)}}{\mathbf{w}^{(t,k)}}\right\|_3 \leq 1, \tag{33}$$

其中 $\mathrm{w}^{(\mathrm{new})}$ 根据步骤的类型，可以是 $\mathrm{w}^{(t+1,k)}$ 或 $\mathrm{w}^{(t,k+1)}$。因此，在一步中，$(2^{-\eta-1}, 2^{-\eta}]$ 中因子的变化次数至多为 $2^{3\eta+3}$，而在算法的整个过程中，此类变化的次数为 $\mathrm{b}T \cdot 2^{3\eta+3}$。□

*Proof of Theorem 1.5.* We show that Algorithm 9 achieves the desired result if

$$0.5 \leq \min_{\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{b}} \|\boldsymbol{\Delta}\|_{\mathbf{r}}^2 + \|\mathbf{s} \odot \boldsymbol{\Delta}\|_\infty < 1. \tag{34}$$

我们需要这一假设，才能使用本节中推导出的结果，例如引理 5.15。注意，如果我们将 $r$ 和 $s$ 都乘以一个数 $\alpha$，最小值也会乘以 $\alpha$。因此，我们只需将正确的缩放因子猜为 2 的幂。这意味着我们会使用不同的缩放因子，尝试最小化目标函数，然后取这些不同缩放因子所返回向量中的最小值。注意，这只会影响算法的运行时间。稍后在

证明中讨论运行时间时，我们会将需要尝试的缩放因子数量考虑在内。

我们首先需要界定迭代次数。常规迭代的次数由$\lceil 2\rho \cdot \log n \rceil$根据构造界定。设 $K$ 为算法的宽度缩减步骤数。然后由于 $\mathbf{w}^{(0,0)} = \vec{1}$，由引理 5.16 对于算法的所有步骤 $(t,k)$，

$$\left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1 \leq \exp\left(\frac{\sqrt{6}+1}{\rho}(T+K)\right) n \leq \exp\left(\frac{\sqrt{6}+1}{\rho}\cdot K\right)\cdot\left(3\sqrt{6}+3\right)n^2 \tag{35}$$

现在设 $\mathbf{b}\boldsymbol{\Delta}^{(t,k)} := \arg\min_{\boldsymbol{\Delta}:\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{b}} \mathbf{k}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{k}^{2\sim_{\mathbf{w}^{(t,k)}}}$。由于 $\mathbf{w}^{(t,k)} = \mathbb{R}\mathbf{1}$ 且 $\mathbf{e}\mathbf{w}_i^{(t,k)} = \left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1 \cdot \mathbf{r}_i + \left(\mathbf{w}_i^{(t,k)} + \frac{1}{n}\left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1\right)\cdot \mathbf{s}_i^2$，将 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ 定义为 $\mathbf{u} = \mathbb{R}\mathbf{1}\cdot \min_{i\in[n]}\{n\cdot\mathbf{r}_i + 2\cdot\mathbf{s}_i^2\}$，我们有

$$\mathbf{u} \leq \widetilde{\mathbf{w}}^{(0,0)}.$$

因此，由引理 5.17，

$$\left\|\widehat{\boldsymbol{\Delta}}^{(0,0)}\right\|^2_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k)}} \geq \min_{i\in[n]}\{\mathbf{r}_i + \mathbf{s}_i^2\}\cdot \min_{\boldsymbol{\Delta}:\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{b}} \|\boldsymbol{\Delta}\|_2^2$$

由于对于线性方程组，伪逆与向量的乘积给出最小 2-范数解，且 A 满列秩，

$$\arg\min_{\boldsymbol{\Delta}:\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{b}} \|\boldsymbol{\Delta}\|_2^2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{b}.$$

由引理 5.18 可知，对于每个宽度缩减步骤，

$$\left\|\widehat{\boldsymbol{\Delta}}^{(t,k+1)}\right\|^2_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k+1)}} \geq \left(1+\frac{\rho^2}{72\cdot n}\right)\cdot\left\|\widehat{\boldsymbol{\Delta}}^{(t,k)}\right\|^2_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(t,k)}},$$

我们有

$$\left\|\widehat{\boldsymbol{\Delta}}^{(T,K)}\right\|^2_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(T,K)}} \geq \exp(\frac{K\cdot\rho^2}{144\cdot n})\cdot\|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{b}\|_2^2\cdot\min_{i\in[n]}\{\mathbf{r}_i+\mathbf{s}_i^2\}$$

此外，由（35）和引理 5.15，

$$\left\|\widehat{\boldsymbol{\Delta}}^{(T,K)}\right\|^2_{\widetilde{\mathbf{w}}^{(T,K)}} \leq 6\cdot\left\|\mathbf{w}^{(t,k)}\right\|_1 \leq \exp\left(\frac{\sqrt{6}+1}{\rho}\cdot K\right)\cdot\left(18\sqrt{6}+18\right)n^2.$$

因此

$$\frac{K\cdot\rho^2}{144\cdot n} + \log\left(\|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{b}\|_2^2\cdot\min_{i\in[n]}\{\mathbf{r}_i+\mathbf{s}_i^2\}\right) \leq \frac{\sqrt{6}+1}{\rho}\cdot K + \log\left(\left(18\sqrt{6}+18\right)n^2\right).$$

Therefore

$$K \leq \frac{144\cdot n\rho}{\rho^3 - 144\cdot(\sqrt{6}+1)n}\log\left(\frac{\left(18\sqrt{6}+18\right)n^2}{\|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{b}\|_2^2\cdot\min_{i\in[n]}\{\mathbf{r}_i+\mathbf{s}_i^2\}}\right). \tag{36}$$

Since $144\cdot(\sqrt{6}+1) < 500$ and $\rho \geq 8\cdot n^{1/3}$, $\rho^3 - 144\cdot(\sqrt{6}+1)n$ is positive, and

$$\frac{144\cdot n\rho}{\rho^3 - 144\cdot(\sqrt{6}+1)n} \leq \frac{144\cdot n\rho}{12\cdot n} = 96n^{1/3}. \tag{37}$$

Therefore $K$ and the number of iterations of the algorithm are

$$K = \tilde{O}\left(n^{1/3}\log\left(\frac{1}{\|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{b}\|_2\cdot\min_{i\in[n]}\{\mathbf{r}_i+\mathbf{s}_i^2\}}\right)\right), \tag{38}$$

根据备注 1。 10 (since if $\|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{b}\|_2$ is too small, we can return the vector of all zeros as the solution) is

$$K = \tilde{O}\left(n^{1/3}\log\left(\frac{\kappa}{\min_{i\in[n]}\{\mathbf{r}_i + \mathbf{s}_i^2\}}\right)\right). \tag{39}$$

因此，根据（36）、（37）和引理 5.16，对于算法 $\widehat{\mathbf{y}} := \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{y}^{(t)}$，我们有

$$\|\widehat{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{r}}^2 + \|\mathbf{s}\odot\widehat{\mathbf{y}}\|_\infty \le 7\cdot(1+6)+13 \le 62.$$

由于根据（34），最优目标值至少为二分之一，因此我们实现了常数因子近似。注意，对于所有 $\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)}$，以及 $\mathbf{x}^*$，

$$\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{x}^* = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{x}^* = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)} = \pi_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)}$$

因此，由于对于所有 $(t,\ k)$，$\left\|\pi_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\Delta}^{(t,k)} - \boldsymbol{\Delta}^{*(t,k)})\right\| \le \varepsilon\left\|\pi_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Delta}^{*(t,\ k)}\right\|$，对于所有 $t\in[T]$, $\left\|\pi_{\mathbf{A}}(\mathbf{y}^{(t)} - \mathbf{x}^*)\right\| \le \varepsilon\mathrm{k}\pi_{\mathbf{A}}$ $\mathbf{x}^*\mathrm{k}$。因此根据三角不等式，

$$\|\pi_{\mathbf{A}}(\widehat{\mathbf{y}} - \mathbf{x}^*)\| \le \varepsilon\|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{x}^*\|.$$

Finally, we need to bound the running time. The number of different scaling factors we need to try to guarantee (34). Note that for any $\boldsymbol{\Delta}\in\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{r}_{\min}\cdot\|\boldsymbol{\Delta}\|_2^2 \le \|\boldsymbol{\Delta}\|_{\mathbf{r}}^2 + \|\mathbf{s}\odot\boldsymbol{\Delta}\|_\infty \le 2\cdot\max\{\mathbf{r}_{\max},\mathbf{s}_{\max}\}\cdot\max\{\|\boldsymbol{\Delta}\|_2^2, \|\boldsymbol{\Delta}\|_2\},$$

where $\mathbf{r}_{\min} = \min_{i\in[n]}\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_{\max} = \max_{i\in[n]}\mathbf{r}_i$, and $\mathbf{s}_{\max}\max_{i\in[n]}\mathbf{s}_i$. Therefore

$$\mathbf{r}_{\min}\cdot\|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{x}^*\|_2^2 \le \min_{\mathbf{A}\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{b}}\|\boldsymbol{\Delta}\|_{\mathbf{r}}^2 + \|\mathbf{s}\odot\boldsymbol{\Delta}\|_\infty \le 2\cdot\max\{\mathbf{r}_{\max},\mathbf{s}_{\max}\}\cdot\max\{\|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{x}^*\|_2^2, \|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{x}^*\|_2\}.$$

Therefore the number of scaling factors we need to try to have the guarantee of (34) is at most

$$\log(2(\mathbf{r}_{\max}+\mathbf{s}_{\max})\max\{1, 1/\|\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{x}^*\|_2\}/\mathbf{r}_{\min}) = O(\log(\kappa(\mathbf{r}_{\max}+\mathbf{s}_{\max})/(\mathbf{r}_{\min}\cdot\epsilon))),$$

其中等式由注 1.10得出。现在我们界定稠密情形下算法9 的运行时间。我们首先界定逆矩阵维护的运行时间。注意，逆矩阵要么通过算法的步骤 13更新，要么通过步骤 17 更新。前者在权重的1-范数改变两倍时触发，根据(35)、(38) 以及 $\mathrm{w}^{(0,0)} = \mathbb{R}1$，这种情况仅发生 $O(\log\ n)$ 次。因此，˜此类更新的成本被界定为 $O(n^\omega$ $\log(\kappa/\epsilon))$。现在考虑通过算法的步骤17进行的更新。对于一个索引 $i\in[n]$，假设 bw 的条目 $i$ 在迭代 $s$ 和 $e$ 中发生了变化，并且在这两次迭代之间保持不变。此外，假设 $1+q_t$ 表示在步骤 $t$ 时w 的条目 $i$ 的相对变化。由于 bw 的某个条目只有在 w 中对应条目的变化超过两倍时才会发生变化，因此我们有

$$\exp(\sum_{t=e}^{s-1} q_t) \ge \prod_{t=e}^{s-1}(1+q_t) \ge 2.$$

现在，如果对于所有 $\eta\in\{0,\ldots,\mathrm{l}\log_2(\mathrm{b}T)\mathrm{m}\}$，其中 $\mathrm{b}T\mathrm{:=}\ T+K$是算法的迭代次数，对于 $t\in\{e,\ldots,\ s-1\}$ 的 $q_t$'s 数量小于 $2^\eta\mathrm{l}\log_2(\mathrm{b}T)\mathrm{m}\cdot\log(2)$，那么 $\exp(\acute{\mathrm{I}}\ \sum_{t=e}^{s-1}q_t)\ <2$。因此，至少对于某一个 $\eta$'s，此类 $q_t$'s 的数量至少为 $2^\eta\mathrm{l}\log_2(\mathrm{b}T)\mathrm{m}\cdot\log(2)$。因此，~~根据引理~~ 5.19，由 $(2^{-\eta-1}, 2^\eta]$ 之间的变化以及算法步骤 17 所导致的更新的秩之和至多为

$$\widehat{T}2^{2\eta+3}\cdot\left\lceil\log_2(\widehat{T})\right\rceil\cdot\log(2) = \tilde{O}\left(\widehat{T}2^{2\eta}\right). \tag{40}$$

由于 $(\cdot)$ 的凹性$^{\omega-2}$，并且我们只添加因$(2^{-\eta-1}, 2^\eta]$ 中变化的累积而发生变化的条目，每 $2^\eta$ 次迭代一次，因此此类更新的成本是

$$\tilde{O}\left(\frac{\widehat{T}}{2^\eta}n^2(\frac{\widehat{T}2^{2\eta}}{\widehat{T}/2^\eta})^{\omega-2}\right) = \tilde{O}\left(\widehat{T}\cdot n^2\cdot 2^{\eta(3(\omega-2)-1)}\cdot\log(\kappa/\epsilon)\right).$$

由于 $3(\omega-2)-1>0$ 对于 $\omega$ 的当前值，其随 $\eta$ 增加，因此该算法截至第 17 步的更新总成本为

$$\tilde{O}\left(\widehat{T}^{3(\omega-2)}\cdot n^2\cdot\log(\widehat{T})\cdot\log(\kappa/\epsilon)\right),$$

根据 (39) 和 $T$ 的定义可知

$$\tilde{O}\left(n^{\omega}\log\left(\frac{\kappa}{\min_{i\in[n]}\{\mathbf{r}_i+\mathbf{s}_i^2\}}\right)\cdot\log(\kappa/\epsilon)\right).$$

根据引理1.8，求解约束加权线性回归问题的总成本为 s

$$\tilde{O}\left(\widehat{T}\cdot n^2\log(\kappa)\log^2(1/\epsilon)\right)=\tilde{O}\left(n^{7/3}\log\left(\frac{\kappa}{\min_{i\in[n]}\{\mathbf{r}_i+\mathbf{s}_i^2\}}\right)\log(\kappa)\log^2(1/\epsilon)\right).$$

现在考虑稀疏情形。首先注意，唯一的随机化来自稀疏逆矩阵的构造和重构。应用并集界，并用算法的迭代总数作为重构次数的上界，即可得到概率界。现在我们来界定运行时间。首先注意，由于w的 1-范数变化了两倍而触发算法的步骤 13 时，稀疏逆矩阵的重构次数仅为 $O(\log n)$，如上文所述。此外，步骤13 每隔 $(n/m)^{1/3}$ 次迭代触发一次。因此，步骤 13 的总成本为

$$\tilde{O}\left(\left(\mathrm{NNZ}(\mathbf{A})\cdot m\cdot n+n^{\omega}m^{2-\omega}\right)\log^2(\kappa/\epsilon)\cdot m^{1/3}\log\left(\frac{\kappa}{\min_{i\in[n]}\{\mathbf{r}_i+\mathbf{s}_i^2\}}\right)\right),$$

即

$$\tilde{O}\left(\left(\mathrm{NNZ}(\mathbf{A})\cdot m^{4/3}\cdot n+n^{\omega}m^{7/3-\omega}\right)\log^2(\kappa/\epsilon)\cdot\log(\alpha_1\kappa)\right).$$

现在注意，只有那些 $\eta$ 能够导致通过步骤 17 将索引添加到集合 $S$ 中，其满足$\lceil {}_2 16\rho^{2^{\eta}}\log(\cdot\log n)\rceil\cdot\log(2)\le(n/m)^{1/3}$。否则，在通过步骤 13 触发稀疏逆矩阵的总重构之前，这些变化太小，无法在（$n/m$）$^{1/3}$次迭代中累积到足够的程度。现在考虑由步骤 17 触发的逆矩阵重构。对于一个 $\eta$，根据上面对变化次数的界定，式（40）为 b$T2^{2\eta+3}$。因此，此类重构的成本为

$$\tilde{O}\left(\left(\mathrm{NNZ}(\mathbf{A})\cdot m\cdot n+n^{\omega}m^{2-\omega}\right)\log^2(\kappa/\epsilon)\cdot\frac{\widehat{T}2^{2\eta}}{n/m}\right).$$

Since this is increasing in $\eta$, taking the large possible $\eta$ and replacing $\widehat{T}$ by its value, this is

$$\tilde{O}\left(\left(\mathrm{NNZ}(\mathbf{A})\cdot m\cdot n+n^{\omega}m^{2-\omega}\right)\log^2(\kappa/\epsilon)\cdot\frac{n^{1/3}\log(\alpha_1\kappa)(n/m)^{2/3}}{n/m}\right),$$

which is

$$\tilde{O}\left(\left(\mathrm{NNZ}(\mathbf{A})\cdot m^{4/3}\cdot n+n^{\omega}m^{7/3-\omega}\right)\log^2(\kappa/\epsilon)\cdot\log(\alpha_1\kappa)\right).$$

我们现在通过 Woodbury 恒等式界定对逆的更新成本。在这种情况下，由定理 3.6，并且由于 $(\cdot)^{\omega-2}$ 是一个凹函数，对于任意 $\eta$，成本为

$$\tilde{O}\left(\left(\mathrm{NNZ}(\mathbf{A})\cdot m^2\cdot\widehat{T}2^{2\eta}+n^2\cdot\frac{\widehat{T}}{2^{\eta}}\cdot\left(\frac{\widehat{T}2^{2\eta}}{\widehat{T}/2^{\eta}}\right)^{\omega-2}\right)\log^2(\kappa/\epsilon)\right).$$

由于我们只需考虑满足$\lceil {}_2 16\rho^{2^{\eta}}\log(\cdot\log n)\rceil\cdot\log(2)\le(n/m)^{1/3}$ 的 $\eta$，且该式随 $\eta$ 增大而增大，因此这些更新的总成本为

$$\tilde{O}\left(\left(\mathrm{NNZ}(\mathbf{A})\cdot m^{4/3}\cdot n+n^{\omega}m^{7/3-\omega}\right)\log^2(\kappa/\epsilon)\cdot\log(\alpha_1\kappa)\right).$$

最后，根据定理 3.6 和引理 1.8，求解约束加权回归问题的成本为

$$\tilde{O}\left(\left(\text{NNZ}(\mathbf{A})\cdot m^2+n^2\right)\log^2(\kappa/\epsilon)\cdot\widehat{T}\right),$$

which since $m<n$ is

$$\tilde{O}\left(\left(\text{NNZ}(\mathbf{A})\cdot m^{4/3}\cdot n+n^{\omega}m^{7/3-\omega}\right)\log^2(\kappa/\epsilon)\cdot\log(\alpha_1\kappa)\log^2(1/\epsilon)\right).$$

Combining these with the number of scaling factors we need to try to guarantee (34) gives the running time. □

## 5.5 Mixed $(2,p)$-Norm Minimization

本节中，我们直接考虑混合 $(2,p)$-范数最小化（17）。类似于混合 $(2,\infty)$-范数最小化，我们利用乘法权重更新算法、宽度约简和逆维护技术。本节的主要定理如下，该定理还可以通过定理 3.6 的数据结构，在稀疏矩阵上超越（当前的）矩阵乘法时间。

定理 5.20。设 $p>1$、$1>\varepsilon>0$、$z\in\mathbb{R}$，$\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times d}$，$\mathbf{g}\in\mathbb{R}^n$，以及$\mathbf{t}\in\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ 使得 $n^{-1/p}\leq\mathbf{t}_i\leq 1$，对于所有 $i\in[n]$。此外，假设 $\mathbf{k}\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{k}_F$，$\left\|(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\right\|_F\leq\kappa$，并且

$$\left\|(\mathbf{I}-\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top)\mathbf{g}\right\|_2\geq\frac{\varepsilon}{\kappa}.$$

*Moreover, suppose the optimal value of the following problem is at most one.*

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{\Delta}\in\mathbb{R}^n}\quad & \gamma_p(t,\mathbf{\Delta})\\ s.t.\quad & \mathbf{g}^\top\mathbf{\Delta}=z,\\ & \mathbf{A}\mathbf{\Delta}=0.\end{aligned}\tag{41}$$

*Then there exists an algorithm that computes a constant factor approximation to this problem in time* $\tilde{O}_p((n^\omega+n^{7/3})\cdot\log(\kappa/\varepsilon))$.

我们首先调整向量$\mathbf{t}$和数值 $z$，使得 $\mathbf{t}$ 的所有条目都处于一个（关于 $n$的）多项式界内，相应的问题的最优值小于或等于一，并且调整后问题的近似解能够给出原始混合$(2,p)$-范数问题的近似解。

引理 5.21。设 $p\geq 2$、$\mathbf{t},\mathbf{g}\in\mathbb{R}^n$、$\mathbf{t}\geq 0$ 和 $j\in\mathbb{Z}$，使得对于某个 $\mathbf{\Delta}\in\mathbb{R}^n$，以下条件是可行的。

$$\begin{aligned}\gamma_p(\mathbf{t},\mathbf{\Delta})&\leq\frac{p}{p-1}2^{j+p},\\ \mathbf{g}^\top\mathbf{\Delta}&=2^j,\\ \mathbf{A}^\top\mathbf{\Delta}&=0.\end{aligned}\tag{42}$$

此外，对于所有 $i\in[n]$，令 $\widehat{z}=\left(\frac{2}{p}\right)^{1/2}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{1/p}2^{j(1-1/p)-2}$

$$\widehat{\mathbf{t}}_i=\min\left\{\max\left\{\left(\frac{p-1}{p}\right)^{1/p}\frac{1}{2^{1+j/p}}\mathbf{t}_i,n^{-1/p}\right\},1\right\}.$$

另令

$$\mathbf{\Delta}^*=\operatorname*{arg\,min}_{\mathbf{\Delta}:\mathbf{A}^\top\mathbf{\Delta}=0,\mathbf{g}^\top\mathbf{\Delta}=\widehat{z}}\gamma_p(\widehat{\mathbf{t}},\mathbf{\Delta})\leq 1.$$

b b b b 则 $\gamma_p(\mathbf{t},\ \mathbf{\Delta}^*)\leq 1$，且对于满足 $\gamma_p(\mathbf{t},\ \mathbf{\Delta})\leq\beta$ 的 $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^n$，

$$\gamma_p(\mathbf{t},\widetilde{\mathbf{\Delta}})\leq\left(\frac{p}{2}\right)^{p/2}\cdot\frac{p\cdot 2^{p+j}}{p-1}\cdot(\beta+1),$$

其中 $\mathbf{e}\mathbf{\Delta}=\left(\frac{p}{2}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p}\cdot 2^{1+j/p}\cdot(\beta+1)$。

算法 10：用于调整后的混合 $(2,\ p)$-范数问题的算法。

输入：一个 $\in \mathbb{R}^{n\times d}$，$\mathrm{t} \in \mathbb{R}^n$，$\mathrm{g} \in \mathbb{R}^n$，$z \in \mathbb{R}$，$p \in (1,\ \infty)$

设置 $\overline{\mathbf{A}} = [\mathrm{A}|\mathrm{g}]$ 和 $\mathrm{b} = \begin{bmatrix} \mathbb{0}_d \\ z \end{bmatrix}$

设置 $\rho = \tilde{\Theta}_p(n^{\frac{p^2-4p+2}{p(3p-2)}})$，$\beta = \tilde{\Theta}_p(n^{\frac{p-2}{3p-2}})$，$\alpha = \tilde{\Theta}_p\left(n^{-\frac{p^2-5p+2}{p(3p-2)}} \left(\log(n\left\|\overline{\mathrm{A}}\right\|_2^2/\left\|\overline{\mathrm{b}}\right\|_2^2)\right)^{-\frac{p}{(3p-2)}}\right)$，and $\tau = \tilde{\Theta}_p\left(n^{\frac{(p-1)(p-2)}{(3p-2)}} \left(\log(n\left\|\overline{\mathrm{A}}\right\|_2^2/\left\|\overline{\mathrm{b}}\right\|_2^2)\right)^{\frac{p(p-1)}{(3p-2)}}\right)$ // $\rho$ is width parameter, $\beta$ is threshold for $\mathbf{r}$, $\alpha$ is step size, $\tau$ is threshold for $p$-norm. The constants are picked so the relations in Lemmas 5.23 and 5.25 are satisfied.

Set $T = \alpha^{-1}n^{1/p}$, $i = k = 0$, $\mathbf{w}^{(i,k)} = \vec{0}$ and $\mathbf{x} = \vec{0}$

$\widehat{\mathbf{r}}_j^{(i,k)} \leftarrow (n^{1/p}\mathbf{t}_j)^{p-2}, \forall j \in [n]$

Set DS to be the inverse maintenance data structure // either the dense data structure DDS or the sparse data structure SDS with parameter $m$

DS.INITIALIZE($\overline{\mathbf{A}}, \widehat{\mathbf{r}}^{(i,k)}, \frac{\epsilon}{10^6(\kappa\cdot n)^{30}}$)

**while** $i < T$ **do**

  **(1) Find the significant buckets and update the preconditioner.**

  $\mathbf{r}^{(i,k)} \leftarrow (n^{1/p}\mathbf{t})^{p-2} + (\mathbf{w}^{(i,k)})^{p-2}$

  For all $j \in [n]$ find the least non-negative integer $\eta_j$ such that $\frac{1}{2^{\eta_j}} \le \frac{\mathbf{r}_j^{(i,k)} - \mathbf{r}_j^{(\mathrm{old})}}{\widehat{\mathbf{r}}_j}$

  $\mathbf{r}^{(\mathrm{old})} \leftarrow \mathbf{r}^{(i,k)}$

  For all $j \in [n]$, $c_{j,\eta_j} \leftarrow c_{j,\eta_j} + 1$

  **if** DS *is sparse and* $\lfloor n^{(p-2)/(3p-2)}/m^{1/3} \rfloor$ *divides* $i$ **then**

    $S \leftarrow [n]$

  **else**

    $S \leftarrow \bigcup_{\eta: i+1 \text{ 模 } 2^\eta \equiv 0} \{j : c_{j,\eta} \ge 2^\eta\}$

  $\widehat{\mathbf{r}}_j^{(i,k)} \leftarrow \mathbf{r}_j^{(i,k)}$, $\forall j \in S$

  $c_{j,\eta} \leftarrow 0$ 对于所有 $(j,\eta)$ 使得 $j \in S$.

  DS.UPDATE($S, \widehat{\mathbf{r}}_S^{(i,k)}$)

  (2) 通过 Richardson 迭代求解加权线性回归，并预条件（引理 1.8）。设 $\overline{\boldsymbol{\Delta}}^{(i,k)} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\left\| \pi_{\overline{\mathbf{A}}}(\overline{\boldsymbol{\Delta}}^{(i,k)} - \boldsymbol{\Delta}^{*(i,k)}) \right\|_2 \le \frac{\epsilon}{T}\left\|\pi_{\overline{\mathbf{A}}}\boldsymbol{\Delta}^{*(i,k)}\right\|_2$ and $\left\|\overline{\boldsymbol{\Delta}}^{(i,k)} - \boldsymbol{\Delta}^{*(i,k)}\right\|_2 \le \frac{\epsilon}{2\kappa^6}\cdot\left\|\boldsymbol{\Delta}^{*(i,k)}\right\|_{\mathbf{r}^{(i,k)}}$ 其中 $\boldsymbol{\Delta}^{*(i,k)} = \arg\min_{\Delta:\overline{\mathbf{A}}^\top\boldsymbol{\Delta}=\overline{\mathbf{b}}} \|\boldsymbol{\Delta}\|_{\mathbf{r}^{(i,k)}}^2$

  (3) 更新权重。

  **if** $\left\|\overline{\boldsymbol{\Delta}}\right\|_p^p \le \tau$ 则 // 常规步

    $\mathbf{w}_j^{(i+1,k)} \leftarrow \mathbf{w}_j^{(i,k)} + \alpha|\overline{\boldsymbol{\Delta}}_j|, \forall j \in [n]$

    $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \alpha\overline{\boldsymbol{\Delta}}$

    Set $i = i + 1$

  **else** // width-reduction step

    对于所有 $j \in [n]$ 满足 $|\boldsymbol{\Delta}_j| \ge \rho$ 且 $\mathbf{r}_j \le \beta$，设 $\mathbf{w}_j^{(i,k+1)} = 4^{1/(p-2)}\max\{n^{1/p}\mathrm{t}_j, \mathbf{w}_j^{(i,k)}\}$.

    For rest of $j \in [n]$, set $\mathbf{w}_j^{(i,k+1)} = \mathbf{w}_j^{(i,k)}$.

    Set $k = k + 1$

**return** $n^{-1/p}\mathbf{x}$

请注意，上述引理中bt的构造保证了 $n^{-1/p} \le \mathrm{bt} \le 1$ 有了上述内容，我们在本节其余部分聚焦于以下问题。

定义 11（调整后的混合$(2,p)$-范数问题）。设 $p \ge 2$、$\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$、$\mathrm{b} \in \mathbb{R}^{d}$ 且$\mathrm{t} \in \mathbb{R}^{n}$ 满足 $n^{-1/p} \le \mathrm{t} \le 1$，使得以下问题的最优值至多为一。

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma_p(\mathbf{t}, \boldsymbol{\Delta}), \\ \text{s.t.} \quad & \overline{\mathbf{A}}^\top \boldsymbol{\Delta} = \overline{\mathbf{b}}. \end{aligned}$$

*Then we call this problem an adjusted mixed $(2,p)$-norm problem.*

注意，在我们的情况下，$\overline{\mathrm{A}}$是矩阵A 与梯度向量 g 拼接而成的，而b 是向量零与针对最优解的值 $\mathrm{g}^\top\overline{\boldsymbol{\Delta}}$ 对于的调整版本拼接而成的。然后，我们的目标是针对上述问题，对于某个常数 $\beta > 1$，找到一个满足$\gamma_p(\mathrm{t}, \boldsymbol{\Delta}) < \beta$ 的解。

类似于混合 $(2,\infty)$-范数最小化，我们求解一系列形式如第 5.3节所述的加权线性回归问题。我们的主要贡献有两点。我们证明，[AKPS19] 的算法在定点算术下，以适当的位复杂度输出一个近似且几乎可行的解。此外，我们证明，通过为稀疏求解器使用我们的逆矩阵维护技术，针对多项式条件数稀疏矩阵，运行时间超越了当前的矩阵乘法时间。

引理 5.22 ([AKPS19])**.** 设 $p \ge 2$，$\mathbf{t}$，$\mathbf{w}$，$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{n}_{\ge 0}$ 满足 $\mathbf{t}_j \ge n^{-1/p}$，$\mathbf{r}_j = (n^{1/p}\mathbf{t}_j)^{p-2} + \mathbf{w}_j^{p-2}$，对所有 $j \in [n]$。设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$，$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{d}$，以及

$$\widehat{\boldsymbol{\Delta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\Delta}:\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{b}} \|\boldsymbol{\Delta}\|_{\mathbf{r}}^2 .$$

*Moreover, suppose* $\min_{\boldsymbol{\Delta}:\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\Delta}\mathbf{b}} \gamma_p(\mathbf{t}, \boldsymbol{\Delta}) \le 1$. *Then*

1. $\left\|\widehat{\boldsymbol{\Delta}}\right\|_2^2 \le \left\|\widehat{\boldsymbol{\Delta}}\right\|_{\mathbf{r}}^2 \le n^{(p-2)/p} + \|\mathbf{w}\|_p^{p-2}$
2. $\left|\widehat{\boldsymbol{\Delta}}\right|^\top \left|\nabla\gamma(n^{1/p}\mathbf{t}, \mathbf{w})\right| \le p\gamma(n^{1/p}\mathbf{t}, \mathbf{w})^{(p-1)/p} + p \cdot n^{(p-2)/2p}\gamma(n^{1/p}\mathbf{t}, \mathbf{w})^{1/2}.$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$注意，如果我们将 $\boldsymbol{\Delta}$ 替换为 $\widehat{\boldsymbol{\Delta}}$，且它接近 $\boldsymbol{\Delta}$ 根据引理 1.8，那么只需在右端乘以适当的常数，即可得到这些界。

与 [AKPS19] 相似的证明$\gamma_p$ 表明，势函数$n^{1/p}(\mathrm{t}^{(i,k)}\mathrm{w})$的增长满足以下性质。请注意，我们的结果与[AKPS19] 的结果之间的主要区别在于，我们对加权线性回归问题的解存在一些误差。

引理 5.23 ([AKPS19])。令 $p \ge 2$ 和 $i$，$k$ 为非负整数。令 $\varepsilon$ 为解决加权线性回归问题的误差。给定 $\alpha^{p-1}\tau \le n^{(p-1)/p}$ 和 $k \le n^{2/p}\beta^{-2/(p-2)}\rho^2$，

$$\gamma_p(n^{1/p}\mathbf{t}, \mathbf{w}^{(i,k)}) \le (1+\varepsilon)^p \left(p^2 2^p \alpha i + n^{1/p}\right)^p \exp\left(\frac{\zeta k}{n^{2/p}\beta^{-2/(p-2)}\rho^2}\right),$$

其中 $\zeta := \frac{p}{2}4^{p/(p-2)}((p^2 2^p + 1)^{p-2}\exp(\frac{p-2}{p}) + 1)$ 只是 $p$ 的函数。

A direct applicati引理 5.22并注意到 $\left\|\mathbf{w}^{(i,k)}\right\|_p \le \gamma_p(n^{1/p}\mathbf{t}, \mathbf{w}^{(i,k)})^{1/p}$可推出以下结论 g.

**Lemma 5.24** ([AKPS19])**.** *Let*

$$\boldsymbol{\Delta}^{*(i,k)} = \arg\min_{\overline{\mathbf{A}}^\top\boldsymbol{\Delta}=\overline{\mathbf{b}}} \|\boldsymbol{\Delta}\|_{\mathbf{r}^{(i,k)}}^2 .$$

然后 $\left\|\boldsymbol{\Delta}^{*(0,0)}\right\|_{\mathbf{r}_{(0,0)}}^2 \ge \|\mathrm{b}\|^2 \underline{\mathrm{k}\overline{\mathrm{A}}\mathrm{k}_2^2}$，和

$$\left\|\boldsymbol{\Delta}^{*(i,k)}\right\|_{\mathbf{r}^{(i,k)}}^2 \le n^{(p-2)/p} + \gamma_p(n^{1/p}\mathbf{t}, \mathbf{w}^{(i,k)})^{(p-2)/p}.$$

由于引理 5.23 和 5.24 给出了函数 $\left\|\Delta^{*(i,k)}\right\|^2_{\mathbf{r}^{(i,k)}}$ 增长的上界，如果我们证明它在宽度缩减步骤中会变大，就能得到宽度缩减步骤最大次数的上界。下面将证明该函数在宽度缩减步骤中会变大。

引理 5.25 ([AKPS19])。考虑算法 *10* 中的一个宽度缩减步骤，即 $\left\|\overline{\Delta}^{(i,k)}\right\|_p > \tau$。令 $q \geq 1\gamma_p(n^{1/p}\mathrm{t}, \mathrm{w}^{(i,k)})$ $\leq qn$, $\tau^{2/p} \geq 2q \cdot n^{(p-2)/p}\beta^{-1}$，以及 $\tau \geq 10q \cdot \rho^{p-2}n^{(p-2)/p}$。此外令

$$\Delta^{*(i,k)} = \arg\min_{\overline{\mathbf{A}}^\top \Delta = \overline{\mathbf{b}}} \|\Delta\|^2_{\mathbf{r}^{(i,k)}}.$$

*Then*

$$\left\|\Delta^{*(i,k+1)}\right\|^2_{\mathbf{r}^{(i,k+1)}} \geq \left\|\Delta^{*(i,k)}\right\|^2_{\mathbf{r}^{(i,k)}} \cdot (1 + q\frac{\tau^{2/p}}{n^{(p-2)/p}}).$$

此外，对于常规步，$\left\|\Delta^{*(i+1,k)}\right\|^2_{\mathbf{r}^{(i+1,k)}} \geq \left\|\Delta^{*(i,k)}\right\|^2_{\mathbf{r}^{(i,k)}}$。

注意，在上述引理中，$q$ 仅是 $p$ 的函数，并且来自引理5.23。现在直接结合引理5.23 至5.25 ，可得算法10的迭代次数满足以下界。

$$O_p\left(n^{(p-2)/(3p-2)} \log^{p/(3p-2)}\left(n\left\|\overline{\mathbf{A}}\right\|_2^2 / \left\|\overline{\mathbf{b}}\right\|_2^2\right)\right).$$

最后一步是界定向量$\widehat{\mathbf{r}}$中变化的次数及其分布。然后，我们可以利用数据结构方面的结果，给出稀疏情形和稠密情形下所需的运行时间界。注意，尽管 [AKPS19] 的以下结果针对加权线性回归问题的精确解，但由于我们保证 $\left\|\overline{\Delta} - \widehat{\Delta}\right\|_2 \leq \epsilon\left\|\widehat{\Delta}\right\|_{\mathbf{r}}$，对于$\widehat{\Delta} = \mathrm{argmin}_{\overline{\mathbf{A}}^\top \Delta = \mathbf{b}} \|\Delta\|_{\mathbf{r}}$，根据引理1.8，我们可以确保误差足够小，因此在算法执行过程中，回归解的误差不会导致任何常数因子级别的变化。

定理 5.26([AKPS19]). $\mathrm{l}_{e,\eta}$ 表示在算法 10中，由于$2^{-\eta}$和 $2^{-\eta+1}$ 之间的变化，在第 $e$ 次迭代中添加到 $S$ 的索引 $j$ 的数量：$= i + k$（其中 $i$ 和 $k$ 分别是常规步和宽度缩减步骤的数量）。令 $T + K = \tilde{\Theta}_p(n^{\frac{p-2}{3p-2}}\log^{p/(3p-2)}\left(n\left\|\mathbf{A}\right\|_2^2 / \left\|\mathbf{b}\right\|_2^2\right)$ 表示迭代次数（由 $T$ 常规步和 $K$ 宽度缩减步骤组成）。那么

$$\sum_{e=1}^{T+K} \ell_{e,\eta} = \begin{cases} 0 & \text{if } 2^\eta > T + K \\ \tilde{O}_p\left(n^{\frac{p+2}{3p-2}} \log^{p/(3p-2)}\left(n\left\|\overline{\mathbf{A}}\right\|_2^2 / \left\|\overline{\mathbf{b}}\right\|_2^2\right) 2^{2\eta}\right) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{43}$$

Now note that for $q$ iterations, only $\eta$ with $2^{\eta+1} < q$ can cause an index to be added to the set $S$.

定理 1.4（续 自第4页）。设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 为一个条件数不超过 $\kappa$ 的矩阵，且 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ 为一个位复杂度不超过 $\log(\kappa)$ 的向量。令 $\mathbf{x}^* = \arg\min_{\mathbf{A}^\top \mathbf{y}=\mathbf{b}} \mathbf{kxk}_p^p$。令 $m \leq n^{(\omega-2)/(\omega-1)}$为稀疏线性系统求解器所用块 Krylov 矩阵中的块数。对于 $2 \geq p$，存在一种算法，可求得 $\mathbf{bx}$，使得 $\mathbf{k}\pi_{\mathbf{A}}(\mathbf{bx} - \mathbf{x}^*)\mathbf{k}_2 \leq \epsilon\mathbf{k}\pi_{\mathbf{A}}\mathbf{x}^*\mathbf{k}_2$ 且

$$\|\widehat{\mathbf{x}}\|_p^p \leq (1+\epsilon)\|\mathbf{x}^*\|_p^p$$

用时

$$\tilde{O}_p\left(\left(n^\omega + n^{7/3}\log(1/\epsilon)\right)\log^2(1/\epsilon)\log^{1.5}(\kappa/\epsilon)\right).$$

此外，对于稀疏矩阵，存在一种算法，能以至少 $1 - n^{-10}$ 的概率返回具有相同保证的输出，时间为

$$\tilde{O}_p\left(\left(n^\omega m^{7/3-\omega} + \mathrm{NNZ}(\mathbf{A}) \cdot m^{4/3} \cdot n \cdot \log(1/\epsilon) + n^{7/3} \cdot \log(1/\epsilon)\right)\log^{2.5}(\kappa/\epsilon)\log^2(1/\epsilon)\right).$$

证明。首先，根据引理 5.3，线性回归问题的解与 $p$-范数问题的解多项式接近。因此根据引理 5.5，我们只需要将 $O_p(\log(n/\epsilon))$ 个残差问题的实例求解到常数近似解。为此，根据引理 5.7 和 5.8，我们只需要将 $O_p(\log(n/\epsilon)\log(n/\epsilon))$ 个平滑 $p$-范数最小化问题的实例求解到常数因子近似。然后引理 5.21 表明，要近似求解每个这样的实例，我们只需要将一个调整后的平滑 $p$-范数最小化问题求解到常数因子近似。

现在注意到，根据引理 5.23 至 5.25，在算法 10 中，宽度缩减步骤的数量至多为 $\tilde{O}_p(n^{2/p}\beta^{-2/(p-2)}\rho^2)$。因此，根据构造和引理 5.23，算法 10 输出一个向量 $\mathbf{y}$ 使得

$$\gamma_p(n^{1/p}\mathbf{t},\mathbf{x}) \le \gamma_p(n^{1/p}\mathbf{t},\mathbf{w}^{(T,K)}) = O_p(1)\cdot n,$$

where $T$ and $K$ are the numbers of regular steps and width-reduction steps, respectively. Therefore

$$\gamma_p(\mathbf{t}, n^{-1/p}\mathbf{x}) = n^{-1/p}\gamma_p(n^{1/p}\mathbf{t},\mathbf{x}) = O_p(1).$$

Thus the output of the algorithm is a constant-factor approximation to the smoothed $p$-norm problem.

现在，我们分别对稠密情形和稀疏情形下算法 10 的时间复杂度进行界定。我们先考虑稠密情形。根据引理 5.23 至引理 5.25，该算法的迭代次数为 $\tilde{O}_p\left(n^{(p-2)/(3p-2)}\log^{p/(3p-2)}\left(n\left\|\mathbf{A}\right\|_2^2/\left\|\mathbf{b}\right\|_2^2\right)\right)$，由于 $p/(3p-2) \le 0.5$ 对于 $p \ge 2$，因此为 $\tilde{O}_p\left(n^{(p-2)/(3p-2)}\log^{0.5}(\frac{\kappa}{\epsilon})\right)$。在每次迭代中，我们通过访问一个预条件子，迭代求解一个受约束的加权回归问题。由于 $\mathrm{kwk}_\infty^p \le \mathrm{kwk}_p^p \le \gamma_p(n^{1/p}\mathbf{t},\mathbf{w})$，根据引理 5.23，$\mathrm{krk}_\infty \le \mathrm{poly}(n^p)$。因此，根据引理 1.8，每个受约束的加权回归问题可在 $\tilde{O}_p(n^2\log(1/\epsilon)\log(\kappa/\epsilon))$ 时间内求解。由于 $\frac{p-2}{3p-2} < 1/3$，总运行时间为

$$\tilde{O}_p(n^{7/3}\log^3(1/\epsilon)\log^{1.5}(\kappa/\epsilon)),$$

for solving the constrained weighted regression problems given the preconditioner.

现在我们界定逆矩阵维护的运行时间。考虑由介于 $2^{-\eta}$ 和 $2^{-\eta+1}$之间的变化所产生的更新的逆矩阵维护成本。根据定理 3.2，秩为 $r$的更新成本为 $O(\mathrm{MM}(n,n,r)\log(\kappa/\epsilon))$。因此根据定理 5.26，并且由于我们只需考虑 $\eta$ 满足 $(T+K)2^{-\eta} > 2$ 的情形（较大的 $\eta$在算法运行过程中不会导致常数因子的变化），算法运行过程中的逆矩阵维护总成本为

$$\sum_{\eta=0}^{\frac{p-2}{3p-2}\log(n)}\sum_{e=0}^{T+K}\tilde{O}_p(\mathrm{MM}(n,n,\ell_{e,\eta})\log(\kappa/\epsilon)).$$

Since

$\mathrm{MM}(n,n,\ell_{e,\eta}) = \tilde{O}(n^2\ell_{e,\eta}^{\omega-2})$, $(\cdot)^{\omega-2}$函数是凹的，迭代次数为 $\tilde{O}_p\left(n^{(p-2)/(3p-2)}\log^{p/(3p-2)}\left(n\left\|\mathbf{A}\right\|_2^2/\left\|\mathbf{b}\right\|_2^2\right)\right)$，并且由于我们只执行由 $2^{-\eta}$ 和 $2^{-\eta+1}$ 之间的变化产生的逆矩阵维护更新，每隔 $2^\eta$ 次迭代，根据定理5.26，逆矩阵维护的总成本为

$$\begin{aligned}
&n^2\log^{1/2}(\kappa)\cdot\log(\kappa/\epsilon)\cdot\sum_{\eta=0}^{\frac{p-2}{3p-2}\log(n)}\tilde{O}_p\left(n^{(p-2)/(3p-2)}2^{-\eta}\left(n^{4/(3p-2)}2^{3\eta}\right)^{\omega-2}\right)\\
&=n^2\log^{1/2}(\kappa)\cdot\log(\kappa/\epsilon)\cdot\sum_{\eta=0}^{\frac{p-2}{3p-2}\log(n)}\tilde{O}_p\left(n^{\frac{p-2+4(\omega-2)}{3p-2}}2^{\eta(3(\omega-2)-1)}\right)
\end{aligned}$$

由于对于 $\omega$ 的当前值，$3(\omega-2)-1>0$ $2^{\eta(3(\omega-2)-1)}$ 随 $\eta$ 增大。由于不同的 $\eta$ 只有 $O(\log(n))$ 个，逆矩阵维护（上述过程）的总成本为

$$n^2\log^{1/2}(\kappa)\cdot\log(\kappa/\epsilon)\cdot\log(n)\cdot\tilde{O}_p\left(n^{\frac{p-2+4(\omega-2)}{3p-2}}n^{\frac{p-2}{3p-2}(3(\omega-2)-1)}\right) = \tilde{O}_p(n^\omega\log(\kappa/\epsilon)\cdot\log^{1/2}(\kappa/\epsilon)).$$

将其与求解约束加权回归问题的成本结合起来，并考虑我们所求解的残差问题数量和光滑的 $p$-范数问题数量，即可得到稠密情形下的最终运行时间。

现在我们分析稀疏情形。首先注意，对于稀疏情形，随机性仅来自定理 3.5 中逆算子的失效概率。注意，即使这种重构在每次迭代中都发生，根据上述关于迭代次数的讨论，失效概率也小于

$$\tilde{O}_p(n^{-20}n^{(p-2)/(3p-2)}\log^2(1/\epsilon)\log^{0.5}(\kappa/\epsilon)).$$

Since $1/\epsilon$ and $\kappa$ are at most exponential in $n$, this implies that the total failure probability is bounded by $n^{-10}$ for large enough $n$.

我们每隔 $\lfloor n^{(p-2)/(3p-2)}/m^{1/3}\rfloor$ 次迭代，就触发一次逆算子的重构，算法 10 因此，根据定理3.6，此类重构的总成本为

$$\tilde{O}_p\left(\left(\text{NNZ}(\mathbf{A})\cdot m\cdot n+n^\omega m^{2-\omega}\right)\log^2(\kappa/\epsilon)\cdot m^{1/3}\log^{p/(3p-2)}\left(n\left\|\overline{\mathbf{A}}\right\|_2^2/\left\|\overline{\mathbf{b}}\right\|_2^2\right)\right),$$

which is

$$\tilde{O}_p\left(\left(\text{NNZ}(\mathbf{A})\cdot m^{4/3}\cdot n+n^\omega m^{7/3-\omega}\right)\log^{2.5}(\kappa/\epsilon)\right).$$

算法10 可能触发逆算子重构的另一种方式是，稀疏数据结构（定理3.6）接收到秩大于 $n/m$ 的更新。注意，由于我们每经过 $\lfloor n^{(p-2}{}_{)/(3p-2)}/m^{1/3}\rfloor$ 次迭代就强制进行一次重构，因此，唯一能够触发这种第二类构造的 $\eta$ 应满足 $2^\eta < \lfloor n^{(p-2}{}_{)/(3p-2)}/m^{1/3}\rfloor$。此类重构的代价于是为

$$\tilde{O}_p\left(\left(\text{NNZ}(\mathbf{A})\cdot m\cdot n+n^\omega m^{2-\omega}\right)\log^2(\kappa/\epsilon)\cdot\frac{n^{(p+2)/(3p-2)}2^{2\eta}}{n/m}\log^{p/(3p-2)}\left(n\left\|\overline{\mathbf{A}}\right\|_2^2/\left\|\overline{\mathbf{b}}\right\|_2^2\right)\right).$$

Since this is increasing in $\eta$, and

$$\frac{n^{(p+2)/(3p-2)}n^{2(p-2)/(3p-2)}/m^{2/3}}{n/m}=m^{1/3},$$

the total cost of this kind of reconstruction is also

$$\tilde{O}_p\left(\left(\text{NNZ}(\mathbf{A})\cdot m^{4/3}\cdot n+n^\omega m^{7/3-\omega}\right)\log^{2.5}(\kappa/\epsilon)\right).$$

逆矩阵维护在稀疏情形下运行时间的最后一部分，是发生 Woodbury 型更新时的情形，这只会在更新的秩小于 $n/m$。请注意，在这种情况下，根据定理 3.6，由于 $(\cdot)^{\omega-2}$ 是凹函数且 $p/(3p-2) < 0.5$，对于任意 $\eta$，成本为

$$\tilde{O}_p\left(\left(\text{NNZ}(\mathbf{A})\cdot m^2\cdot n^{(p+2)/(3p-2)}2^{2\eta}+n^2n^{(p-2)/(3p-2)}2^{-\eta}\left(n^{4/(3p-2)2^{3\eta}}\right)^{\omega-2}\right)\log^{1/2}(\kappa/\epsilon)\log^2(\kappa/\epsilon)\right).$$

由于我们只需要考虑 $\eta$ 满足 $2^\eta < \lfloor n^{(p-2}{}_{)/(3p-2)}/m^{1/3}\rfloor$，且这随 $\eta$ 增大而增大，因此总 cost of these updates is

$$\tilde{O}_p\left(\left(\text{NNZ}(\mathbf{A})\cdot m^{4/3}\cdot n+n^\omega m^{7/3-\omega}\right)\log^{2.5}(\kappa/\epsilon)\right).$$

Finally, by Theorem 3.6 and Lemma 1.8, the cost of solving constrained weighted regression problems is

$$\tilde{O}_p\left(\left(\text{NNZ}(\mathbf{A})\cdot m^2+n^2\right)\log^2(\kappa/\epsilon)\cdot\log(1/\epsilon)\cdot n^{(p-2)/(3p-2)}\log^{p/(3p-2)}\left(n\left\|\overline{\mathbf{A}}\right\|_2^2/\left\|\overline{\mathbf{b}}\right\|_2^2\right)\right).$$

Now note that since $(p-2)/(3p-2) < 1/3$, and $m < n$, this is

$$\tilde{O}_p\left(\left(\text{NNZ}(\mathbf{A})\cdot m^{4/3}\cdot n+n^{7/3}\right)\log^2(\kappa/\epsilon)\cdot\log(1/\epsilon)\cdot\log^{1/2}(\kappa/\epsilon)\right).$$

Combining these running times with the number of residual problems and smoothed $p$-norm problems we have to solve gives the desired result. □

定理 1.4表明，对于 $\text{NNZ}(A) = O(n)$、多项式有界的 $\kappa/\epsilon$ 以及当前的 $\omega$ 值，运行时间为 $\tilde{O}_p(n^{2.363})$。

# 6 Open Problems

在本文中，我们讨论了现代方法求解线性回归、 $p$-范数回归以及高精度线性规划的位复杂度，从而确定了这些算法的实际运行时间。接下来，我们将讨论一些改进这些问题及其他问题运行时间的方向和开放问题。

高瘦情形。[LS13] 已证明，对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$ 满足 $d \leq n$的情形，线性规划问题可以在$\tilde{O}(\sqrt{d})$次迭代内求解，而不是在 $\tilde{O}(\sqrt{n})$次迭代内求解。这促成了许多令人振奋的研究，其中最新的一项研究实现了一种算法，只需 $\tilde{O}((nd + d^{2.5}) \cdot \log(W/\epsilon))$ 次算术运算 [LS15、BLSS20、BLL+21]，其中$W$ 是一个参数，用于界定问题中所有数的绝对值。更近期的是[JLS21] 证明， $p$-范数最小化问题可以在 $\tilde{O}_p(d^{(p-2)/(3p-2)})$次迭代内求解，而不是在$\tilde{O}_p(n^{(p-2)/(3p-2)})$次迭代内求解。然而，他们没有分析其算法所需的算术运算次数。确定这些算法的位复杂度和运行时间非常有意义。我们相信，我们的技术和结果将对这些问题有所帮助，但由于这些问题中的逆矩阵维护具有更复杂的性质，因此还需要进一步的工具。

矩阵乘法时间内的加权线性回归。关于移位数 [Sto05]~ ~的研究表明，线性方程组可以在时间 $O(n^\omega \cdot \mathrm{l})$ 内求解，而非 $O(n^\omega \cdot \log(\kappa/\epsilon))$。正如我们在第 1.1 节所讨论的，这种方法带来了一种算法（定理 1.3），在某些情形下比源自 [CLS19, Bra20] 方法的算法（定理 1.2）更快。然而，若考虑最坏情况，后一种方法更快。主要原因是，我们必须在内点法的每次迭代中求解形如 $A^\top WAx = g$ 的线性方程组。基于移位数的方法，其运行时间对矩阵的位复杂度呈线性依赖，但对向量 g 的位复杂度的依赖为 $\mathrm{l}_g/n$，其中 $\mathrm{l}_g$ 是 g 的位复杂度。不过请注意，与 W 相乘会改变矩阵的位复杂度，而我们对 W 的条目所能得到的唯一界来自线性规划的内半径和外半径。因此，一个重要的问题是，能否在时间 $\tilde{O}(n^\omega \cdot (\mathrm{l}_A + \mathrm{l}_{\frac{W}{n}} + \mathrm{l}_{\frac{g}{n}}))$ 内求解形如 $A^\top WAx = g$ 的线性方程组。这个结果的直接推论是，存在一种在最坏情况下比 [CLS19, Bra20] 方法更快的线性规划求解算法。此外，这还可能带来更快的精确线性规划求解器算法。

使用移位数进行逆矩阵维护。 移位数方法的一个缺点是，它无法与当前的逆矩阵维护技术配合使用，因为它不会生成一个单一的显式矩阵形式的逆矩阵。开发使用移位数求解动态变化的线性方程组的逆维护技术，将改善定理 1.3中的运行时间。

使用稀疏求解器进行逆矩阵维护。我们展示了，对于稀疏多重条件数矩阵， $p$-范数最小化问题可以在当前值为 $\omega \approx 2$。372 时以快于矩阵乘法时间的速度求解。然而，对于线性规划，我们只能对 $\omega > 2$。5的值展示这样的结果。这主要是由于稀疏求解器的位复杂度导致其无法在少于矩阵乘法时间内求解一个大型批量（大小接近 $n$）的线性方程组，从而阻碍了在线性规划中针对当前值为 $\omega$的情况进行逆矩阵维护。一种解决方法是，在稀疏~逆求解器中找到一种位复杂度为 $O(1)$ 的逆矩阵表示。这样便可以求解一个大型批量的线性方程组。

通用矩阵数据结构的位复杂度。就在最近 [Bra21] 提出了一种维护通用矩阵公式的方法。其总体思路是，可以将任何矩阵公式视为某个更大矩阵的逆矩阵中的一个分块。这与我们为线性规划维护$\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{X}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top$ 所采用的方法类似。探究这种一般形式下的位复杂度界将很有意思。这里的主要问题是，所需误差和条件数界如何依赖于输入矩阵及其数量。

# References

[ABS21] Deeksha Adil、Brian Bullins 和 Sushant Sachdeva。《面向准自和谐优化的宽度缩减方法统一化》。神经信息处理系统进展，34:19122–19133，2021年。[AKPS19] Deeksha Adil、Rasmus Kyng、Richard Peng 和 Sushant Sachdeva。《l$_p$-范数回归的迭代精炼》。载于 Timothy M. Chan 编，《第三十届 ACM-SIAM离散算法研讨会论文集》，SODA 2019，美国加利福尼亚州圣地亚哥，2019年1月6日至9日，第1405–1424页。SIAM，2019年。[AKPS22] Deeksha Adil、Rasmus Kyng、Richard Peng 和 Sushant Sachdeva。《l$_p$-回归的快速算法》。arXiv预印本 arXiv:2211.03963，2022年。[APS19] Deeksha Adil、Richard Peng 和 Sushant Sachdeva。《用于p范数线性回归的快速且可证明收敛的IRLS算法》。载于 Hanna M. Wallach、Hugo Larochelle、Alina Beygelzimer、Florence d'Alch´e-Buc、Emily B. Fox 和 Roman Garnett 编，《神经信息处理系统进展 32：2019年神经信息处理系统年会》，NeurIPS 2019，加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华，2019年12月8日至14日，第14166–14177页，2019年。[AS20] Deeksha Adil 和 Sushant Sachdeva。《通过平滑q范数问题更快地求解p范数最小化流》。载于 Shuchi Chawla 编，《2020年 ACM-SIAM离散算法研讨会论文集》，SODA 2020，美国犹他州盐湖城，2020年1月5日至8日，第892–910页。SIAM，2020年。[AW21] Josh Alman 和 Virginia Vassilevska Williams。《改进的激光方法与更快的矩阵乘法》。载于 D´aniel Marx 编，《2021年 ACM-SIAM离散算法研讨会论文集》，SODA 2021，线上会议，2021年1月10日至13日，第522–539页。SIAM，2021年。可查阅：https://arxiv.org/abs/2010.05846。[BCLL18] S´ebastien Bubeck、Michael B Cohen、Yin Tat Lee 和 Yuanzhi Li。《一种超越自和谐性且达到输入稀疏时间的lp回归同伦方法》。载于第五十届 ACM SIGACT计算理论研讨会论文集，第1130–1137页，2018年。[BD02] Avrim Blum 和 John Dunagan。《线性规划感知机算法的平滑分析》。载于第十三届 ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，第905–914页，2002年。[BFN22] Jan van den Brand、Sebastian Forster 和 Yasamin Nazari。《快速确定性全动态距离近似》。载于 FOCS，2022年。[BLL+21] Jan van den Brand、Yin Tat Lee、Yang P. Liu、Thatchaphol Saranurak、Aaron Sidford、Zhao Song 和 Di Wang。《面向稠密实例的最小费用流、马尔可夫决策过程和l$_1$-回归：近线性时间算法》。载于 Samir Khuller 和 Virginia Vassilevska Williams 编，STOC '21：第五十三届 ACM SIGACT计算理论研讨会，线上会议（意大利），2021年6月21日至25日，第859–869页。ACM，2021年。[BLSS20] Jan van den Brand、Yin Tat Lee、Aaron Sidford 和 Zhao Song。《近线性时间求解高稠密线性规划》。载于第五十二届 ACM SIGACT计算理论研讨会论文集，STOC 2020，美国伊利诺伊州芝加哥，2020年6月22日至26日，第775–788页。ACM，2020年。[BN19] Jan van den Brand 和 Danupon Nanongkai。《动态近似最短路径及其拓展：次二次且最坏情况下的更新时间》。载于2019年 IEEE 第六十届计算机科学基础年会（FOCS），第436–455页。IEEE，2019年。[BNS19] Jan van den Brand、Danupon Nanongkai 和 Thatchaphol Saranurak。《动态矩阵求逆：改进算法与匹配的条件下界》。载于2019年 IEEE 第六十届计算机科学基础年会（FOCS），第456–480页。IEEE，2019年。

[Bra20] Jan vanden Brand。基于当前矩阵乘法时间的确定性线性规划求解器。载于Shuchi Chawla编，2020年ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，SODA2020，美国犹他州盐湖城，2020年1月5日至8日，第259–278页。SIAM，2020年。[Bra21] Jan van denBrand。统一矩阵数据结构：简化并加速迭代算法。载于算法简洁性研讨会（SOSA），第1–13页。SIAM，2021年。[CLM+15] Michael B.Cohen、Yin Tat Lee、Cameron Musco、Christopher Musco、RichardPeng 和 Aaron Sidford。矩阵近似的均匀采样。载于 Tim Roughgarden 编，2015年理论计算机科学创新会议论文集，ITCS 2015，以色列雷霍沃特，2015年1月11日至13日，第181–190页。ACM，2015年。[CLS19] Michael B. Cohen、YinTat Lee 和 Zhao Song。在当前矩阵乘法时间内求解线性规划。载于 Moses Charikar 和 EdithCohen 编，第51届年度ACMSIGACT计算理论研讨会论文集，STOC 2019，美国亚利桑那州菲尼克斯，2019年6月23日至26日，第938–942页。ACM，2019年。[CLS21] Michael B. Cohen、YinTat Lee 和Zhao Song。在当前矩阵乘法时间内求解线性规划。《ACM杂志》，68(1):3:1–3:39，2021年。[CW14] KennethLClarkson和 DavidP Woodruff。M估计量的草图化：稳健回归的统一方法。载于第二十六届年度 ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，第921–939页。SIAM，2014年。[DDH07] James Demmel、Ioana Dumitriu 和 Olga Holtz。快速线性代数具有稳定性。《数值数学》，108(1):59–91，2007年。[DDHK07] James Demmel、Ioana Dumitriu、Olga Holtz 和Robert Kleinberg。快速矩阵乘法具有稳定性。《数值数学》，106(2):199–224，2007年。[Ede88] Alan Edelman。随机矩阵的特征值和条件数。《SIAM矩阵分析与应用杂志》，9(4):543–560，1988年。[Ede89] Alan Edelman。随机矩阵的特征值和条件数。博士论文，麻省理工学院，1989年。[EGG+06] Wayne Eberly、Mark Giesbrecht、Pascal Giorgi、ArneStorjohann 和Gilles Villard。求解稀疏有理线性系统。载于2006年符号与代数计算国际研讨会论文集，第63–70页，2006年。[EGG+07] Wayne Eberly、Mark Giesbrecht、Pascal Giorgi、ArneStorjohann和 Gilles Villard。利用高效分块投影进行更快的求逆及其他黑箱矩阵计算。载于2007年符号与代数计算国际研讨会论文集，第143–150页，2007年。[FFG22] Matthew Fahrbach、GangFu和Mehrdad Ghadiri。具有张量分解应用的次二次克罗内克回归。载于神经信息处理系统进展，2022年。[GLS12] Martin Gr¨otschel、L´aszl´o Lov´asz 和Alexander Schrijver。几何算法与组合优化，第2卷。SpringerScience& Business Media，2012年。[GPV21] Mehrdad Ghadiri、Richard Peng和 SantoshS Vempala。利用稀疏性进行更快速的 $p$-范数回归。arXiv预印本arXiv:2109.11537，2021年。[GU18] Fran¸cois Le Gall 和 FlorentUrrutia。利用Coppersmith-Winograd张量的幂改进矩形矩阵乘法。载于第二十九届年度 ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，第1029–1046页。SIAM，2018年。

[HJS+22] Baihe Huang、Shunhua Jiang、ZhaoSong、RunzhouTao和RuizheZhang。更快地求解半正定规划：鲁棒内点法框架与高效实现。载于 2022年 IEEE 第 63 届 Annual Symposium onFoundationsof Computer Science（FOCS），第233–244 页。IEEE，2022年。[JKL+20] Haotian Jiang、Tarun Kathuria、Yin Tat Lee、SwatiPadmanabhan 和 Zhao Song。半定规划的更快内点法。载于 2020 IEEE 第 61 届 Annual Symposium onFoundationsof Computer Science（FOCS），第910–918 页。IEEE，2020年。[JLS21] Arun Jambulapati、Yang P.Liu和Aaron Sidford。过约束 $p$-范数回归的改进迭代复杂度，2021年。[JNW22] Shunhua Jiang、BentoNatura和 Omri Weinstein。平方和优化的更快内点法。载于第 49 届国际自动机、语言与编程理论研讨会（ICALP 2022）。Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum für Informatik，2022年。[JPW22] Shunhua Jiang、Binghui Peng和OmriWeinstein。动态最小二乘回归。arXiv预印本arXiv:2201.00228，2022年。[JSWZ21] Shunhua Jiang、Zhao Song、OmriWeinstein和Hengjie Zhang。求解一般线性规划的更快算法。载于第53 届 ACM SIGACT计算理论研讨会论文集，第 823–832 页，2021年。[Kar84] N. Karmarkar。线性规划的一种新的多项式时间算法。Combinatorica，4(4)：373–396，1984年。[KN14] Daniel M Kane 和 Jelani Nelson。更稀疏的 Johnson-Lindenstrauss变换。JournaloftheACM（JACM），61(1)：1–23，2014年。[LS13] Yin TatLee 和Aaron Sidford。路径寻找I：使用 $\tilde{O}(\sqrt{秩})$次线性方程组求解来求解线性规划。arXiv 预印本 arXiv:1312.6677，2013年。[LS15] Yin TatLee 和 Aaron Sidford。高效的逆矩阵维护与更快的线性规划算法。载于 2015 IEEE 第 56 届 Annual Symposium on Foundationsof ComputerScience，第 230–249 页。IEEE，2015年。[LV21] YinTatLee 和Santosh SVempala。鲁棒内点法教程。arXiv预印本arXiv:2108.04734，2021年。[Nie22] Zipei Nie。矩阵反集中不等式及其应用。载于第54 届 ACM SIGACT计算理论研讨会论文集，第 568–581 页，2022年。[NN13] JelaniNelson和HuyL.Nguyen。OSNAP：通过更稀疏的子空间嵌入实现更快的数值线性代数算法。载于第 54 ~~届 I~~EEE Annual Symposium onFoundations of Computer Science，FOCS2013，2013 年 10 月26–29 日，美国加利福尼亚州伯克利，第117–126页。IEEEComputer Society，2013年。[Pla79] M Planitz。线性方程组的不相容性。《The MathematicalGazette》，63(425)：181–185，1979年。[PV21] RichardPeng和Santosh S.Vempala。比矩阵乘法更快地求解稀疏线性方程组。载于 D´anielMarx（编），2021 ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，SODA 2021，线上会议，2021 年 1月10–13 日，第 504–521 页。SIAM，2021年。[Ren88] James Renegar。一种基于 Newton 方法的线性规划多项式时间算法。Math. Program.，40(1-3)：59–93，1988年。[Ren96] James Renegar。条件数、障碍法与共轭梯度法。SIAM Journal onOptimization，6(4)：879–912，1996年。

[S+69] Volker Strassen 等。高斯消元并非最优。《数值数学》，13(4)：354–356，1969年。[Sto05] Arne Storjohann。整数矩阵上快速线性代数的移位数系。《复杂性杂志》，21(4)：609–650，2005年。[SY21] Zhao Song 和 Zheng Yu。用于线性规划的基于无偏草图的中心路径法。载于 International Conference on Machine Learning，第 9835–9847 页。PMLR，2021年。[TBI97] Lloyd N Trefethen 和 David Bau III。《数值线性代数》，第 50 卷。SIAM，1997 年。[TV05] Terence Tao 和 Van Vu。关于随机 ±1 矩阵：奇异性与行列式。载于第三十七届 ACM symposium on Theory of computing 会议论文集，第 431–440 页，2005年。[Vai89] Pravin M. Vaidya。使用快速矩阵乘法加速线性规划（扩展摘要）。载于第 30 届 Annual Symposium on Foundations of Computer Science，Research Triangle Park，北卡罗来纳州，美国，1989年10月30日至11月1日，第 332–337 页，1989年。[Woo50] Max A Woodbury。求修正矩阵的逆。Statistical Research Group，1950年。[Yip86] Elizabeth L Yip。关于使用 Sherman–Morrison–Woodbury 公式求解线性系统的秩-p 修正时稳定性的注记。SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing，7(2)：507–513，1986年。

# A Low-Rank Matrices

在本节中，我们首先讨论使用低秩矩阵进行 $p$-范数最小化的问题。我们证明，可以将该矩阵与单位矩阵的一个较小倍数进行拼接，而这只会使解发生轻微变化。

引理1.11。令 $p \geq 2$，$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times d}$，$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{d}$，$n \geq d$，使得A的最小非零奇异值等于 $\sigma > 0$。此外，令 $0 < \varepsilon_1 < 1$ 和 $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cdot \sigma \cdot d^{(p-2)/2p}$。令

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \varepsilon_2 \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

*Moreover let* $0 < \varepsilon_3 < 1$, $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ *and* $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n+d}$ *such that*

$$\mathbf{x}^* = \arg\min_{\mathbf{x}:\mathbf{A}^\top \mathbf{x} = \mathbf{b}} \|\mathbf{x}\|_p^p \quad , \quad \|\widehat{\mathbf{x}}\|_p^p \leq (1+\varepsilon_3) \min_{\mathbf{x}:\overline{\mathbf{A}}^\top \mathbf{x} = \mathbf{b}} \|\mathbf{x}\|_p^p \quad , \textit{ and } \quad \left\|\overline{\mathbf{A}}^\top \widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\right\|_2 \leq \varepsilon_3.$$

*Let* $\widetilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^d$ *be a vector with entries equal to the first* $n$ *entries of* $\widehat{\mathbf{x}}$. *Then*

$$\left\|\mathbf{A}^\top \widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\right\|_2 \leq \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \cdot \|\mathbf{b}\|_2 \quad , \textit{ and } \quad \|\widetilde{\mathbf{x}}\|_p^p \leq (1+\varepsilon_3) \|\mathbf{x}^*\|_p^p .$$

证明。首先注意，对于任意满足 $\mathbf{A}^\top \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，将 $\mathbf{x}$ 补零得到的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+d}$ 满足 $\overline{\mathbf{A}}^\top \mathbf{x} = \mathbf{b}$。此外，$\|\mathbf{x}\|_p^p = \|\mathbf{x}\|_p^p$。因此

$$\min_{\mathbf{x}:\overline{\mathbf{A}}^\top \mathbf{x} = \mathbf{b}} \|\mathbf{x}\|_p^p \leq \|\mathbf{x}^*\|_p^p .$$

Therefore

$$\|\widetilde{\mathbf{x}}\|_p^p \leq \|\widehat{\mathbf{x}}\|_p^p \leq (1+\varepsilon_3) \min_{\mathbf{x}:\overline{\mathbf{A}}^\top \mathbf{x} = \mathbf{b}} \|\mathbf{x}\|_p^p \leq (1+\varepsilon_3) \|\mathbf{x}^*\|_p^p .$$

现在令

$$\mathbf{y}^* = \arg\min_{\mathbf{y}:\mathbf{A}^\top \mathbf{y} = \mathbf{b}} \|\mathbf{y}\|_2^2 .$$

令 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$ 为一个向量，其条目等于 $\mathbf{x}$ 的最后 $d$ 个条目。我们有

$$\overline{\mathbf{A}}^\top \widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top \widetilde{\mathbf{x}} + \varepsilon_2 \mathbf{z}.$$

因此，由于 $\left\|\mathbf{A}^\top \widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\right\|_2 \leq \varepsilon_3$，根据三角不等式

$$\left\|\mathbf{A}^\top \widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\right\|_2 = \left\|\mathbf{A}^\top \widetilde{\mathbf{x}} + \varepsilon_2 \mathbf{z} - \mathbf{b} - \varepsilon_2 \mathbf{z}\right\|_2 \leq \varepsilon_3 + \|\varepsilon_2 \mathbf{z}\|_2$$

此外，注意到 $\|\mathbf{x}\|_p^p = \|\mathbf{x}\|_p^p + \|\mathbf{z}\|_p^p$。因此 $\|\mathbf{z}\|_p^p \leq (1+\varepsilon_3) \|\mathbf{x}^*\|_p^p$。根据霍尔德不等式以及 $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$ 的定义，我们有

$$\|\mathbf{z}\|_2^p \leq d^{(p-2)/2} \|\mathbf{z}\|_p^p \leq d^{(p-2)/2} \cdot (1+\varepsilon_3) \cdot \|\mathbf{x}^*\|_p^p \leq d^{(p-2)/2} \cdot (1+\varepsilon_3) \cdot \|\mathbf{y}^*\|_p^p \leq d^{(p-2)/2} \cdot (1+\varepsilon_3) \cdot \|\mathbf{y}^*\|_2^p .$$

现在注意到 $\mathbf{y}^* = (\mathbf{A}^\top)^\dagger \mathbf{b}$，因为 $(\mathbf{A}^\top)^\dagger \mathbf{b}$ 是满足最小 2-范数的 $\mathbf{y}$ 解[Pla79]。此外，由于 $0 < \varepsilon_3 < 1$，且 $p \geq 2$，$(1+\varepsilon_3)^{1/p} < 2$。因此

$$\|\mathbf{z}\|_2 \leq 2 \cdot d^{(p-2)/2p} \|\mathbf{y}^*\|_2 \leq 2 \cdot d^{(p-2)/2p} \left\|(\mathbf{A}^\top)^\dagger\right\|_2 \|\mathbf{b}\|_2 \leq 2 \cdot d^{(p-2)/2p} \frac{\|\mathbf{b}\|_2}{\sigma}.$$

Thus

$$\left\|\mathbf{A}^\top \widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\right\|_2 \leq \varepsilon_3 + \|\varepsilon_2 \mathbf{z}\|_2 \leq \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \cdot \|\mathbf{b}\|_2 .$$

□