arXiv:2304.02132v1 [math.LO] 4 Apr 2023

窄系统再探

CHRIS LAMBIE-HANSON

Abstract. 受两个关于双基数树性质的未解决问题启发，我们引入并研究广义窄系统性质。第一个问题是：正则基数$\kappa \geq \omega_2$ 上的强树性质是否意味着 κ以上成立奇异基数假设（SCH）。我们在此证明， κ 上的某种窄系统性质与强树性质密切相关，并且在所有已知具有强树性质的模型中均成立；这一性质足以推出 κ以上成立SCH。第二个问题是：强树性质能否一致地同时在所有正则基数 $\kappa \geq \omega_2$上成立。我们在此证明，关于广义窄系统性质的类似问题有肯定答案。我们还指出了广义窄系统性质与某些强无界次可加着色的存在性之间的一些联系。

1. Introduction

现代组合集合论中的一个重要研究方向，是考察在大基数上成立（有时甚至刻画大基数）的紧致性原理，探究这些紧致性原理能在多大程度上适用于较小的基数，以及这些原理在多大程度上能够体现相应大基数的“本质”。举一个经典例子：在强不可达基数中，树性质刻画了弱紧基数；而 Mitchell [14] 证明了在 $\aleph_2$ 上成立树性质，与弱紧基数的存在等一致。尽管如此，关于树性质在较小基数上能够成立到何种程度，仍有不少未解决问题。最著名的问题由 Magidor 提出：树性质能否在所有大于或等于 $\aleph_2$的正则基数上同时成立?

树性质的推广统称为双基数树性质，由 Jech [4] 和 Magidor [10] 于 20 世纪 70 年代提出，用于对强紧致基数和超紧基数作组合刻画。现在让我们回顾一些重要定义的现代表述。

定义 1.1. 设 $\kappa \leq \lambda$ 为不可数基数，且 κ 正则。(κ, λ)-树是满足以下条件的结构 $\mathcal{T} = \langle T_x \mid x \in \mathscr{P}_\kappa\lambda \rangle$：

- 对于所有 $x \in \mathscr{P}_\kappa\lambda$， T_x 都是 x的非空子集族；
- 对于所有 $x \subseteq y \in \mathscr{P}_\kappa\lambda$ 和所有 $t \in T_y$，都有 $t \cap x \in T_x$。

(κ, λ)-树 $\mathcal{T}$若满足以下条件，则称为薄： $|T_x| < \kappa$ 对所有 $x \in \mathscr{P}_\kappa\lambda$均成立。穿过 $\mathcal{T}$ 的共尾分支是一个集合 $b \subseteq \lambda$，满足 $b \cap x \in T_x$ 对所有 $x \in \mathscr{P}_\kappa\lambda$均成立。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 03E05、03E35、03E55、03E04。

Key words and phrases. 窄系统，奇异基数假设，Shelah 的强假设，树性质，大基数，次可加着色。

作者的研究获得捷克科学院（RVO 67985840）和 GAˇCR 项目 23-04683S 的支持。

(κ,λ)-树性质，记作 TP(κ,λ)，断言每棵薄的 (κ,λ)-树都有一条共尾分支。不可言说的(κ,λ)-树性质，记作 ITP(κ,λ)，断言对于每棵薄的 (κ,λ)-树 $\mathcal{T}=\langle T_x \mid x\in\mathscr{P}_\kappa\lambda\rangle$ 以及每个选择函数 $d\in\prod_{x\in\mathscr{P}_\kappa\lambda}T_x$，都存在一个集合 $b\subseteq\lambda$，使得该集合

$$\{x\in\mathscr{P}_\kappa\lambda \mid b\cap x=d(x)\}$$

在 $\mathscr{P}_\kappa\lambda$中是平稳集。

在 强树性质 于 κ，记作 TP$_\kappa$，指的是对所有 TP$(\kappa,\ \lambda)$ 都成立 $\lambda\geq\kappa$。[1] 在 超树性质 于 κ，记作 不可言说树性质$_\kappa$，指的是不可言说树性质 $(\kappa,\ \lambda)$ 对所有 $\lambda\geq\kappa$ 都成立。

事实 1.2。 假设 κ 是一个不可达基数。

- (Jech [4]) κ 是强紧致的，当且仅当 TP$_\kappa$ 成立。
- (Magidor [10]) κ 是超紧致的，当且仅当不可言说树性质$_\kappa$ 成立。

直到21世纪初，人们才开始现代意义上研究可达基数上的双基数树性质；当时，Weiß [23]明确提出了相关定义（例如上文介绍的 薄(κ,λ)-树的概念）。此后，这些性质成为大量研究的焦点，其中相当一部分研究致力于探讨它们对基数算术的影响。最值得注意的是，Viale [22] 和 Krueger [5] 的结果共同表明，对于正则基数 $\kappa\geq\omega_2$，由 Weiß 在[23], 提出、且强于 ITP$_\kappa$ 的 ISP$_\kappa$蕴含上述 κ的奇异基数假设（SCH）。在 [9, 定理 A],中，作者与 Stejskalov´a 证明，上述 κ 的 SCH（事实上，还包括比 SCH 更强的 Shelah 强假设（SSH）） κ已可由 ISP$_\kappa$ 的一个显著弱化版本推出；例如，当 κ 是强紧致的，或者当 $\kappa=\omega_2$ 且我们处于从一个强紧致基数出发、经 Mitchell 强迫得到的扩张中时，该弱化版本成立。

我们还注意到 Solovay 的开创性结果 [18] ，该结果指出，若 κ 是强紧致基数，则在 κ之上奇异基数假设成立。回顾一下，在不可达基数中，TP$_\kappa$ 刻画强紧致基数，而不可言说树性质$_\kappa$ 刻画超紧致基数；这一点连同上一段提到的结果，自然引出了下面的问题，这个问题此前已在例如 [3] 和[2]中提出：

问题 1.3. 假设 $\kappa\geq\omega_2$ 是正则基数。不可言说树性质$_\kappa$ （或 TP$_\kappa$）是否蕴含奇异基数假设 在 κ之上成立？

关于这两个双基数树性质，Magidor 问题的类似问题也值得关注（关于此问题的更多讨论，见 [2]）：

问题 1.4. 是否存在一种一致性情形，使得对所有正则基数$\kappa\geq\omega_2$，不可言说树性质$_\kappa$ （或 TP$_\kappa$）都成立？

问题 1.3和 1.4 之间存在紧密联系：根据 Specker 的一个定理 [19], 若μ 是一个基数且 $2^\mu=\mu^+$，则树性质在 μ^{++} 处失效，因此，更不用说，TP$_{\mu^{++}}$ 也会失效。因此，若 μ 是一个奇异强极限基数，且奇异基数假设 在 μ处成立，则 TP$_{\mu^{++}}$ 会失效，所以对问题 1.3 作肯定回答，将意味着对问题1.4作否定回答。

受这些问题的启发，我们在此证明了一些结果；我们认为，这些结果暗示了问题 1.3 可能有一个肯定的答案，或者至少表明，要确立否定答案，

[1]为避免可能的混淆，我们指出，TP$_\kappa$ 强于 κ处的经典树性质，该性质通常记作 TP(κ)，在我们的记号中等价于 TP$(\kappa,\ \kappa)$。

还需要真正的新思路。这项工作将涉及引入并分析经典概念窄 κ系统的推广形式。该概念由 Magidor 和 Shelah 提出 [12] ，旨在促进对树性质的研究，尤其是在奇异基数的后继处。窄系统在树性质研究中持续发挥着核心作用；在基数 κ 处验证树性质（尤其当 κ 是奇异基数的后继时），通常至少隐含地包含以下两个步骤：

(1) 证明每个 κ-树都含有一个窄的 κ-子系统。(2) 证明每个窄 κ-系统都有一条共尾分支。随后，步骤 (1) 中确定的子系统上的共尾分支便会生成一条穿过给定 κ-树的分支。

本文将窄系统的概念从基数的情形推广到 κ 任意有向偏序 Λ，并表明这些广义系统在研究广义树性质时，可以发挥与窄κ系统在研究 κ上的经典树性质时相同的作用。我们引入广义窄系统性质NSP(Λ)，其断言每个窄 Λ-系统都有一条共尾分支，并研究这些性质，尤其关注它们与问题1.3 和1.4之间的联系。

在第 2 节中，在全面介绍窄系统之前，我们先定义一种特定类型的系统，称为具体 $\mathscr{P}_\kappa\lambda$-系统，它与研究 TP($\kappa,\lambda$) 尤为相关。窄系统性质 cNSP($\mathscr{P}_\kappa\lambda$) 断言每个窄的具体 $\mathscr{P}_\kappa\lambda$-系统都有一条共尾分支，而 cNSP$_\kappa$表示对所有 $\lambda \geq \kappa$，cNSP($\mathscr{P}_\kappa\lambda$) 均成立。所有已知的 TP$_\kappa$模型中，cNSP$_\kappa$ 都成立；在验证给定模型中 TP$_\kappa$ 成立时，往往会（至少隐含地）用到这一性质，尤其是在 κ 是奇异基数的后继时。与此同时，我们证明，这一窄系统性质足够强，能够推出 SSH 的一些实例：

定理 A. 假设 $\kappa \geq \omega_2$ 是一个正则基数，且cNSP$_\kappa$ 成立。那么SSH 在 κ之上成立。

接着，在第 3 节中，我们介绍任意有向偏序上的窄 Λ-系统和窄Λ-系统性质（NSP(Λ)的概念，并以此说明它们的用途：我们用它们证明，在强紧基数的奇异极限的后继处，广义树性质成立（定理 3.11）。

在第 4 节中，我们将窄 Λ-系统与强无界次可加着色联系起来，证明NSPNSP(Λ)的成立意味着这类函数在 $\Lambda^{[2]}$ 上不存在；反过来，这类函数在（$\mathscr{P}_\kappa\lambda$）$^{[2]}$上不存在，也可在定理 A 的假设中替代cNSP$_\kappa$ （分别参见推论 4.3 和 4.9）。

本文余下部分致力于证明一个全局一致性结果，表明若将双基数树性质替换为广义窄系统性质，则问题 1.4 有肯定答案：

定理 B. 假设存在真类超紧基数。那么存在一个（类）强迫扩张，使得对于每个有向偏序 Λ，NSP(Λ) 都成立。

第 5 节给出了一个关于广义窄系统的技术性分支保持引理的证明，随后第6节应用该引理来证明定理 B。

1.1. **记号约定**。 除非另有说明，我们遵循标准的集合论记号约定。On 表示所有序数构成的类。给定一个无限基数 κ 和一个集合 X，$\mathscr{P}(X)$ 表示 X的幂集，而 $\mathscr{P}_\kappa X$表示 $\{x \subseteq X \mid |x| < \kappa\}$。如果 x 是一个序数集合，那么x 的强上确界 是序数 $\mathrm{ssup}(x) := \sup\{\alpha + 1 \mid \alpha \in x\}$，即 $\mathrm{ssup}(x)$ 是满足对所有 $\alpha \in x$都有 $\alpha < \beta$ 的最小序数β 。给定一个偏序 Λ，我们令 $\Lambda^{[2]}$ 表示由满足 $u <_\Lambda v$的 Λ 中的有序对 (u, v) 构成的集合。形如 $\mathscr{P}_\kappa X$ 的集合将被视为偏序，其序关系由 $\subsetneq$给出。特别地，$(\mathscr{P}_\kappa X)^{[2]}$ 表示由 $\mathscr{P}_\kappa X$ 中满足 $x \subsetneq y$的元素对 (x, y) 构成的集合。

2. Concrete systems

在介绍任意有向序 Λ 上一般的（窄） Λ-系统概念之前，为了帮助说明更抽象的一般定义的动机，我们先考察一个重要的特殊情形。

定义 2.1。设 $\kappa \leq \lambda$ 是不可数基数，且 κ 正则。具体 $\mathscr{P}_\kappa\lambda$-系统是满足以下条件的结构 $\mathcal{S} = \langle S_x \mid x \in A\rangle$：

(1) A 是 $\mathscr{P}_\kappa\lambda$ 的 $\subseteq$-共尾子集；(2) 对所有 $x \in A$，$\emptyset \neq S_x \subseteq \mathscr{P}(x)$；

(3) 对所有 $x \subseteq y$（均属于 A），存在 $t \in S_y$ 使得 $t \cap x \in S_x$。

$\mathcal{S}$ 的宽度定义为 $\mathrm{width}(\mathcal{S}) := \sup\{|S_x| \mid x \in A\}$。若 $\mathrm{width}(\mathcal{S})^+ < \kappa$，则称 $\mathcal{S}$ 为窄具体 $\mathscr{P}_\kappa\lambda$-系统。穿过 $\mathcal{S}$ 的共尾分支是一个集合 $b \subseteq \lambda$，使得集合 $\{x \in A \mid b \cap x \in S_x\}$ 在 $\mathscr{P}_\kappa\lambda$ 中是 $\subseteq$-共尾的。

经典窄系统（其层由序数索引）由 Magidor 和 Shelah 在 [12]中引入，作为研究树性质的核心工具，尤其用于奇异基数的后继。事实上，所有已知的在奇异基数的后继处验证树性质的方法 μ 至少都隐含地采用以下两步：

(1) 证明每个 μ^+-树 $\mathcal{T}$都有一个高度为 μ^+ 的窄子系统 $\mathcal{S}$。(2) 证明每个高度为 μ^+ 的窄系统都有共尾分支；特别地，$\mathcal{S}$ 有共尾分支，由此可在$\mathcal{T}$中得到一条共尾分支。

本文的一个动机性观察是，窄具体 $\mathscr{P}_\kappa\lambda$-系统在（$\kappa$，$\lambda$）-树中发挥着类似的作用。例如，通过上述两步论证的类似方法，我们可以证明双基数树性质TP_κ 成立，只要 κ 是强紧致基数的奇异极限的后继。由于这一陈述的更一般版本成立，我们将其证明推迟到引入“窄系统”的更一般定义之后；它是下文定理3.11 的一个特例。

现在我们转而证明：某些窄具体系统中存在共尾分支，意味着奇异基数假设（以及 SSH）的某些情形成立。为简洁地陈述这些结果，我们引入以下术语。

定义 2.2. 设 κ 是一个正则不可数基数。对于一个基数 $\lambda \geq \kappa$，我们称具体窄 $\mathscr{P}_\kappa\lambda$-系统性质 成立（记作 $\mathrm{cNSP}(\mathscr{P}_\kappa\lambda)$），如果每个窄具体 $\mathscr{P}_\kappa\lambda$-系统都有一个共尾分支。若对所有 $\lambda \geq \kappa$，$\mathrm{cNSP}(\mathscr{P}_\kappa\lambda)$ 都成立，则称 cNSP_κ 成立。

注 2.3. 值得花些时间比较定义 2.1 与定义2.2 和定义 1.1，因为窄具体 $\mathscr{P}_\kappa\lambda$-系统与薄（$\kappa$，$\lambda$）-树的定义非常相似。两者之间有两个显著差异：

- 窄具体 $\mathscr{P}_\kappa\lambda$-系统的定义对每一层的大小有更严格的限制，要求宽度$(\mathcal{S})^+ < \kappa$；而薄（κ，λ）树 $\mathcal{T}$只需满足：对所有 $x \in \mathscr{P}_\kappa\lambda$，$|T_x| < \kappa$。
- 另一方面，薄（κ，λ）树的定义对结构的相干性要求更严格，要求对所有 $x \subseteq y$ 和所有 $t \in T_y$，都有 $t \cap x \in T_x$；而窄具体 $\mathscr{P}_\kappa\lambda$-系统定义中的类似要求，只需存在一个这样的 t。

因此，尚不能立即看出TP_κ 或cNSP_κ 是否蕴含另一个，不过我们将看到，在实际中，cNSP_κ 比TP_κ 更容易安排，且并不蕴含后者（参见下文注6.3 ）。TP_κ 是否蕴含cNSP_κ 仍是一个开放且备受关注的问题。

我们对 SSH 的验证将借助 Viale 引入的覆盖矩阵理论；他在证明适当迫使公理[20]蕴含 SCH 时用到了这一理论。

定义 2.4。设 $\theta < \lambda$ 为正则基数。称 θ-覆盖矩阵，其对应于 λ，是一个满足以下条件的矩阵 $\mathcal{D} = \langle D(i,\beta) \mid i < \theta,\ \beta < \lambda\rangle$：
(1) 对所有 $\beta < \lambda$, $\langle D(i,\beta),\ \mid i < \theta\rangle$ 是一个 $\subseteq$-递增序列，且 $\bigcup_{i<\theta} D(i,\beta) = \beta$；
(2) 对所有 $\beta < \gamma < \lambda$ 和 $i < \theta$，存在 $j < \theta$，使得 $D(i,\beta) \subseteq D(j,\gamma)$。

我们将特别关注满足某些附加性质的覆盖矩阵。

定义 2.5。设 $\theta < \lambda$ 为正则基数，且 $\mathcal{D}$ 是对应于 λ的 θ-覆盖矩阵。

(1) $\mathcal{D}$ 是传递的，如果对于所有 $\beta < \gamma < \lambda$ 和所有 $i < \theta$，若 $\beta \in D(i,\gamma)$，则$D(i,\beta) \subseteq D(i,\gamma)$。(2) $\mathcal{D}$ 是一致的，如果对于每个极限序数 $\beta < \lambda$，都存在 $i < \theta$ 使得$D(i,\beta)$ 在 β 中包含一个闭无界集。(3) 若存在一个无界的 $A \subseteq \lambda$，使得 $[A]^\theta$ 被 $\mathcal{D}$ 覆盖，即对于所有 $X \in [A]^\theta$，都存在 $\beta < \lambda$ 和 $i < \theta$，使得 $X \subseteq D(i,\beta)$，则 $\mathsf{CP}(\mathcal{D})$ 成立。

以下定理在 [9] 中得到证明（此前已知 μ 是强极限的情形；参见 [21, 引理 6]）。

定理 2.6 ([9])**.** 假设 μ 是一个奇异基数，$\theta = \mathrm{cf}(\mu)$，且 $\mathcal{D}$ 是一个关于 μ^+ 的一致、传递的 θ-覆盖矩阵。那么，对于每个 $x \in \mathscr{P}_\mu\mu^+$，都存在$\gamma_x < \mu^+$，使得对于所有 $\beta \in [\gamma_x, \mu^+)$，都存在 $i < \theta$，使得对于所有 $j \in [i,\theta)$，有 $x \cap D(j,\beta) = x \cap D(j,\gamma_x)$。

我们还需要回顾 Shelah 强假设的一些基本背景。SSH 是指：对于每个奇异基数 μ，$\mathrm{pp}(\mu) = \mu^+$。其中，$\mathrm{pp}(\mu)$ 表示 μ 的伪幂。对于基数 κ，我们称 SSH 在 κ 之上成立，如果对于每个奇异基数 $\mu > \kappa$，$\mathrm{pp}(\mu) = \mu^+$。就我们的目的而言，无需回顾 $\mathrm{pp}(\mu)$ 的定义；以下事实已经足够：

事实 2.7。 在下文中，若 $\vec{\mu} = \langle \mu_i \mid i < \theta \rangle$ 是正则基数序列，则 $\prod \vec{\mu}$ 表示满足以下条件的函数集合 f：$\mathrm{dom}(f) = \theta$ 且 $f(i) < \mu_i$ 对所有 $i < \theta$ 均成立。给定 f，$g \in \prod \vec{\mu}$，若存在 $i < \theta$ 使得 $f(j) < g(j)$ 对所有 $j \in [i, \theta)$ 均成立，我们就称 $f <^* g$。下面的第二和第三个事实都隐含于 [16]；所引文献对此提供了更明确的说明。

(1) [16, §2，断言 2。4]如果 μ 是具有不可数共尾性的奇异基数，且 $\{\nu < \mu \mid \mathrm{pp}(\nu) = \nu^+\}$ 在 μ 中是平稳集，那么 $\mathrm{pp}(\mu) = \mu^+$。(2) [13, 观察 4。4] 假设 μ 是奇异基数且 $\mathrm{pp}(\mu) > \mu^+$。那么存在一个递增的正则基数序列 $\vec{\mu} = \langle \mu_i \mid i < \mathrm{cf}(\mu) \rangle$，趋近于 μ，使得 $\mathrm{cf}(\prod \vec{\mu}, <^*) > \mu^+$。(3) [9, 命题 4。18]设 κ 为一个无限基数，且 SSH 在 κ 以上成立。那么 SCH 在 κ 以上成立。

覆盖矩阵与 SSH 之间的联系源自以下结果。

定理 2.8。 [9, 定理 4。19] 假设 μ 是一个奇异基数，$\theta = \mathrm{cf}(\mu)$，且 $\vec{\mu} = \langle \mu_i \mid i < \theta \rangle$ 是一个趋近于 μ 的递增正则基数序列。此外，假设 $\mathcal{D} = \langle D(i, \beta) \mid i < \theta, \beta < \mu^+ \rangle$ 是一个针对 μ^+ 的 θ-覆盖矩阵，满足

(1) 对所有 $i < \theta$ 和 $\beta < \mu^+$，都有 $|D(i, \beta)| < \mu_i$；
(2) $\mathsf{CP}(\mathcal{D})$ 成立。于是 $\mathrm{cf}(\prod \vec{\mu}, <^*) = \mu^+$。

现在我们可以给出本节的主要结果，由此将推出定理 A。

定理 2.9. 设 μ 是一个奇异基数，$\theta = \mathrm{cf}(\mu)$，且存在一个正则基数 $\kappa \in [\theta^{++}, \mu)$ 使得 $\mathsf{cNSP}(\mathscr{P}_\kappa \mu^+)$ 成立。那么，对于每个关于 μ^+ 的一致、传递的 θ-覆盖矩阵 $\mathcal{D}$，$\mathsf{CP}(\mathcal{D})$ 都成立。

证明。令 $\lambda := \mu^+$。固定一个关于 λ 的一致、传递的 θ-覆盖矩阵 $\mathcal{D} = \langle D(i, \beta) \mid i < \theta, \beta < \lambda \rangle$，并令 $A := \{x \in \mathscr{P}_\kappa \lambda \mid \mathrm{cf}(\mathrm{ssup}(x)) > \theta\}$。由于 $\kappa > \theta^+$ 是一个正则基数，A 在 $\mathscr{P}_\kappa \lambda$ 中共尾；注意，对于 $x \in A$，有 $\sup(x) = \mathrm{ssup}(x)$。对于每个 $x \in A$，令 $\gamma_x < \mu^+$ 为满足定理 2.6 结论的最小序数；也就是说，对于所有 $\beta \in [\gamma_x, \lambda)$ 以及所有充分大的 $j < \theta$，都有 $x \cap D(j, \beta) = x \cap D(j, \gamma_x)$。注意，必有 $\gamma_x \geq \sup(x)$，并且如果 $x \subseteq y$ 都属于 A，那么 $\gamma_x \leq \gamma_y$。

对于每个 $x \in A$，令

$$S_x := \{x \cap D(i, \gamma_x) \mid i < \theta \text{ and } \sup(x \cap D(i, \gamma_x)) = \sup(x)\}.$$

由于 $\mathrm{cf}(\sup(x)) > \theta$ 和 $x = \bigcup_{i<\theta}(x \cap D(i, \gamma_x))$，因此对于所有充分大的 $i < \theta$，必有 $x \cap D(i, \gamma_x) \in S_x$。

我们声称 $\mathcal{S} = \langle S_x \mid x \in A \rangle$ 是一个具体的 $\mathscr{P}_\kappa \lambda$-系统。唯一需要验证的非平凡条件是定义 2.1 的第 (3) 条。为此，固定 $x \subseteq y$，二者均属于 A。我们知道，对于所有充分大的 $i < \theta$，都有

- $\sup(x \cap D(i, \gamma_x)) = \sup(x)$；
- $\sup(y \cap D(i, \gamma_y)) = \sup(y)$；
- 要么 $\gamma_x = \gamma_y$，要么 $\gamma_x \in D(i, \gamma_y)$；无论哪种情况，由于 $\mathcal{D}$ 是传递的，我们有 $D(i, \gamma_x) \subseteq D(i, \gamma_y)$。

因此，取 $i<\theta$ 充分大，我们有 $y\cap D(i,\ \gamma_y)\in S_y$ 并且

$$(y\cap D(i,\gamma_y))\cap x=D(i,\gamma_y)\cap x=D(i,\gamma_x)\cap x\in S_x,$$

第二个等式由 γ_x 的选择得出。因此，我们找到了 $t\in S_y$，使得 $t\cap x\in S_x$，正如所需。

此外，对所有 $x\in A$，我们都有 $|S_x|\leq\theta$，因此 $\mathcal{S}$ 是一个窄具体的 $\mathscr{P}_\kappa\lambda$-系统。因此，我们可以应用 cNSP($\mathscr{P}_\kappa\lambda$)，找到一条经过 $\mathcal{S}$ 的共尾分支 b。

断言 2.10. b 在 λ 中无界。

证明。固定 $\alpha<\lambda$；我们将证明 $b\setminus\alpha$ 非空。找到 $x\in A$，使得 $\alpha\in x$ 且 $b\cap x\in S_x$。根据 S_x 的定义，可得 $\sup(b\cap x)=\sup(x)>\alpha$。□

因此，只要证明 $[b]^\theta$ 被 $\mathcal{D}$ 覆盖，我们就完成了，因为这样一来，b 就可以见证 CP($\mathcal{D}$)。为此，固定 $z\in[b]^\theta$。由于 b 是经过 $\mathcal{S}$ 的一条共尾分支，我们可以找到 $x\in A$，使得 $z\subseteq x$ 且 $b\cap x\in S_x$。于是 $z\subseteq b\cap x$，并且存在 $i<\theta$，使得 $b\cap x=x\cap D(i,\ \gamma_x)$；因此，$z\subseteq D(i,\ \gamma_x)$，正如所需。□

我们现在可以证明定理 A：对于正则基数$\kappa\geq\omega_2$，cNSP$_\kappa$ 蕴含 κ以上的 SSH。

定理 A 的证明。根据事实 2.7(1)，要证明 κ以上的 SSH，只需证明对于每个具有可数共尾性的奇异基数 $\mu>\kappa$，$\mathrm{pp}(\mu)=\mu^+$。固定这样一个 μ。接下来，根据事实 2.7(2)，要证明 $\mathrm{pp}(\mu)=\mu^+$，只需证明对于每个收敛到 μ的正则基数递增序列 $\vec{\mu}=\langle\mu_i\mid i<\omega\rangle$，$\mathrm{cf}(\prod\vec{\mu},<^*)=\mu^+$。固定这样一个序列 $\vec{\mu}$。根据引理 2.4] 的证明（另见引理 4.4]），存在一个一致、传递的 ω-覆盖矩阵 $\mathcal{D}=\langle D(i,\beta)\mid i<\omega,\ \beta<\mu^+\rangle$，它适用于 μ^+，并且对所有 $i<\omega$ 和 $\beta<\mu^+$，都有 $|D(i,\beta)|<\mu_i$。根据定理 2.9 以及 cNSP$_\kappa$ 成立这一假设，我们知道 CP($\mathcal{D}$) 成立；于是根据定理 2.8，$\mathrm{cf}(\prod\vec{\mu},<^*)=\mu^+$，证毕。□

3. General systems

现在我们转向更一般的情形，即由任意有向偏序索引的系统。给定一个偏序 $(\Lambda,\ \leq_\Lambda)$，我们有时会滥用记号，用符号 Λ 表示该偏序。如果一个偏序记作 Λ，则应理解为其序关系记作 $\leq_\Lambda$。$\leq_\Lambda$ 的严格部分记作 $<_\Lambda$。给定 $u\in\Lambda$，令 $u^\uparrow$ 表示 $\{v\in\Lambda\mid u<_\Lambda v\}$。

定义 3.1. 设 Λ是一个偏序，且 κ 是一个无限基数。若 Λ 的每个基数小于 κ的子集 都有上界，即对每个 $x\in\mathscr{P}_\kappa\Lambda$，都存在 $v\in\Lambda$，使得对所有 $u\in x$都有 $u\leq_\Lambda v$，则称 Λ 是 κ-有向的。若 Λ 是有向的，则称其为 $\aleph_0$-有向的；等价地，对所有 u、$v\in\Lambda$，都存在 $w\in\Lambda$，使得u、$v\leq_\Lambda w$。

定义 3.2. 假设 Λ 是有向偏序。Λ 的有向性 记作 d_Λ，是使得 Λ 为 κ-有向的最大基数 κ。容易验证该定义是良定义的，并且对于每个有向偏序 Λ，d_Λ 都是正则基数。

定义 3.3. 设 R 是集合 X 上的二元关系。对于 $x,\ y\in X$，我们通常记 $x<_R y$ 表示 $(x,\ y)\in R$，并记 $x\leq_R y$ 表示命题

$$(x,y)\in R\text{ or }x=y.$$

若两个元素 x 和 y 属于 X，则称它们是 R-可比的，如果 $x \leq_R y$ 或 $y \leq_R x$。否则，x 和 y 是 R-不可比的。

定义 3.4。设 Λ 为一个有向偏序。Λ-系统 是满足以下

$$\mathcal{S} = \langle \langle S_u \mid u \in \Lambda \rangle, \mathcal{R} \rangle$$

条件的结构。

(1) $\langle S_u \mid u \in \Lambda \rangle$ 是一个由两两不相交的非空集合组成的序列。我们有时将 $\bigcup_{u\in\Lambda} S_u$ 称为 $\mathcal{S}$的底层集合，有时也直接用 S表示它。对于每个 $x \in S$，令 $\ell(x)$ 表示满足 $x \in S_u$的唯一 $u \in \Lambda$。(2) $\mathcal{R}$ 是 S上的一个非空二元传递关系集合。(3) 对所有的 x、$y \in S$ 和 $R \in \mathcal{R}$，若 $x <_R y$，则 $\ell(x) <_\Lambda \ell(y)$。(4) 对所有的 x、y、$z \in S$和 $R \in \mathcal{R}$，若 x、$y <_R z$ 且 $\ell(x) \leq_\Lambda \ell(y)$，则 $x \leq_R y$。(5) 对所有 $(u, v) \in \Lambda^{[2]}$，存在 $x \in S_u$、$y \in S_v$和 $R \in \mathcal{R}$，使得 $x <_R y$。

若 $\mathcal{S}$ 是一个 Λ-系统，则定义 width($\mathcal{S}$) 为 $\max\{\sup\{|S_u| \mid u \in \Lambda\}, |\mathcal{R}|\}$。若 width($\mathcal{S}$) $^+ < d_\Lambda$，则称 $\mathcal{S}$ 为一个窄 Λ-系统。

若 $\mathcal{S} = \langle \langle S_u \mid u \in \Lambda \rangle, \mathcal{R} \rangle$ 是一个 Λ-系统，x、$y \in S$ 和 $R \in \mathcal{R}$，则称 x与 y 是 R-相容的，记作 $x \parallel_R y$，若存在 $z \in S$ 使得 x、$y \leq_R z$。若不存在这样的 z，则称 x 与 y 是 R-不相容的，记作 $x \perp_R y$。注意，若 $x \parallel_R y$ 和 $\ell(x) \leq_\Lambda \ell(y)$，则上文的条件 4 蕴含 $x \leq_R y$。

给定 $R \in \mathcal{R}$，$\mathcal{S}$ 中一条经过 R 的 分支是一个集合 $b \subseteq S$，使得对所有 x, $y \in b$，都有 $x \parallel_R y$（注意，这意味着对所有 $u \in \Lambda$都有 $|b \cap S_u| \leq 1$）。我们有时会说 b 是 $\mathcal{S}$ 中的一条分支，意即存在 $R \in \mathcal{R}$ 使得 b 是 $\mathcal{S}$中经过 R 的一条分支。若 $\{u \in \Lambda \mid b \cap S_u \neq \emptyset\}$ 在 Λ中共尾，则称分支 b 为共尾 。

注 3.5。第 2 节中的具体 $\mathscr{P}_\kappa\lambda$-系统确实是定义 3.4 的特例：设 $\mathcal{S} = \langle S_x \mid x \in A \rangle$ 是一个具体的 $\mathscr{P}_\kappa\lambda$-系统。那么，可以用一种自然的方式将 $\mathcal{S}$ 视为定义 3.4 意义下的一个 $(A, \subsetneq)$-系统。具体而言，对每个 $x \in A$，令 $S'_x := \{x\} \times S_x$，并在 $\bigcup_{x\in A} S'_x$ 上定义二元关系 R：规定 $(x, t) <_R (y, s)$ 当且仅当 $x \subsetneq y$ 且 $y \cap t = x$。由此容易验证，$\mathcal{S}' := \langle \langle S'_x \mid x \in A \rangle, \{R\} \rangle$ 是定义 3.4 意义下的一个 $(A, \subsetneq)$-系统；而定义 2.1 意义下经过 $\mathcal{S}$ 的共尾分支，自然对应于定义 3.4 意义下经过 $\mathcal{S}'$ 的共尾分支。

定义 3.6。设 Λ 是一个有向偏序。若每个窄 Λ系统都有一个共尾分支，则称 Λ-窄系统性质 成立（记作 NSP(Λ）。

由于本文讨论的所有问题，在处理以具有极大元的偏序为指标的系统时都会变得平凡，因此，在研究任意 Λ系统时，我们总是假设 Λ 没有极大元，即使没有明确说明这一假设。

为简化记号，我们通常倾向于研究只有一个关系的系统。下述命题表明，在讨论不存在共尾分支的窄 Λ系统是否存在时，这样做并不会失去一般性。

命题 3.7。设 Λ 是一个有向偏序，并且

$$\mathcal{S} = \langle \langle S_u \mid u \in \Lambda \rangle, \mathcal{R} \rangle$$

是一个 Λ-系统。那么存在一个 Λ-系统 $\mathcal{S}' = \langle \langle S'_u \mid u \in \Lambda \rangle, \mathcal{R}' \rangle$，使得

- $|\mathcal{R}'| = 1$;
- 宽度($\mathcal{S}'$) =宽度($\mathcal{S}$);
- $\mathcal{S}'$ 有共尾分支，当且仅当 $\mathcal{S}$ 有共尾分支。

证明。对于每个 $u \in \Lambda$，令 $S'_u := S_u \times \mathcal{R}$，并令 $\mathcal{R}'$ 由单个二元关系 $<'$构成。对于所有 $x_0, x_1 \in S$和 $R_0, R_1 \in \mathcal{R}$，当且仅当 $R_0 = R_1$ 且 $x_0 <_{R_0} x_1$ （在 $\mathcal{S}$中）时，令 $(x_0, R_0) <' (x_1, R_1)$。容易验证，如此定义的 $\mathcal{S}'$ 是一个 Λ-系统，且宽度($\mathcal{S}'$) = 宽度($\mathcal{S}$)。如果 $R \in \mathcal{R}$ 且 $b \subseteq S$ 是 $\mathcal{S}$中穿过 R 的一条共尾分支，那么 $b' := \{(x, R) \mid x \in b\}$ 是 $\mathcal{S}'$中的一条共尾分支。反过来，如果 d' 是 $\mathcal{S}'$中的一条共尾分支，那么必定存在单个 $R \in \mathcal{R}$，使得 d' 中的每个元素都可表示为某个 $x \in S$对应的 (x, R)。于是 $d := \{x \in S \mid (x, R) \in d'\}$是 $\mathcal{S}$中穿过 R 的一条共尾分支。□

下面这个基本命题令人想起 K¨onig 的无穷引理，该引理断言每棵无限的有限分支树都有一条无限分支。

命题 3.8. 设 Λ 是一个有向偏序，且 $\mathcal{S}$ 是一个宽度有限的 Λ-系统。那么 $\mathcal{S}$ 有一条共尾分支。

证明。 根据命题3.7，我们可以假设 $\mathcal{S}$ 只有一个关系，我们将其记为 R。由于 width($\mathcal{S}$) 是有限的，我们可以固定一个 $n < \omega$，使得 $|S_u| \leq n$对所有 $u \in \Lambda$都成立。将每个 S_u 枚举为 $\langle x_{u,k} \mid k < n \rangle$，必要时允许重复（即当 $|S_u| < n$ 时）。由于 Λ 是有向的，$\mathcal{F} := \{u^{\uparrow} \mid u \in \Lambda\}$ 是 Λ上的一个滤子。设 $\mathcal{U}$是 Λ 上的一个超滤子，并且扩张了 $\mathcal{F}$。

暂时固定 $u \in \Lambda$。由于 $\mathcal{S}$ 是一个 Λ-系统，因此对于每个 $v \in u^{\uparrow}$，我们都可以找到（不一定唯一的） $j(u, v)$ $k(u, v) < n$，使得 $x_{u,\, j(u,v)} <_R x_{v,\, k(u,v)}$。由于 $\mathcal{U}$ 是扩张 $\mathcal{F}$ 的超滤子，我们接着可以找到固定数 $j(u)$ $k(u) < n$，使得集合

$$X_u := \{v \in u^{\uparrow} \mid (j(u, v), k(u, v)) = (j(u), k(u))\}$$

属于 $\mathcal{U}$。[2] 于是我们可以找到固定数 $j^*, k^* < n$，使得集合

$$Y := \{u \in \Lambda \mid (j(u), k(u)) = (j^*, k^*)\}$$

属于 $\mathcal{U}$。特别地，Y 在 Λ 中共尾。令 $b := \{x_{u,j^*} \mid u \in Y\}$。由于 Y 在 Λ 中共尾，为了证明 b 是 $\mathcal{S}$ 中的一个共尾分支，只需证明对于所有 u_0、$u_1 \in Y$，都有 x_{u_0}、$_{j^*} \parallel_R x_{u_1}$、$_{j^*}$。为此，固定这样的 u_0、u_1。由于 X_{u_0}、$X_{u_1} \in \mathcal{U}$，我们可以固定 $v \in X_{u_0} \cap X_{u_1}$。于是 x_{u_0}、$_{j^*}$、 x_{u_1}、$_{j^*}$、 $<_R x_v$、$_{k^*}$，因此 x_{u_0}、$_{j^*} \parallel_R x_{u_1}$、$_{j^*}$，如所需。□

强紧基数处也有类似的结果:

命题 3.9。 假设 κ 是一个强紧致基数， Λ 是一个满足 $d_\Lambda \geq \kappa$ 的有向偏序，并且 $\mathcal{S}$ 是一个 Λ-系统，使得 宽度($\mathcal{S}$) $< \kappa$。那么 $\mathcal{S}$ 有一个共尾分支。

证明。 该证明与命题3.8的证明基本相同，因此大部分留给读者完成。我们只指出，由于 $d_\Lambda \geq \kappa$，滤子 $\mathcal{F} := \{u^{\uparrow} \mid u \in \Lambda\}$ 是 κ-完备的，并且由于 κ 是强紧致的，它可以扩展为一个定义在 Λ上的 κ-完备超滤子 。证明的其余部分与命题3.8完全相同。□

[2]我们使用了一个隐含假设，即 Λ 没有极大元，以确保我们能够找到这样的 j（u）和 k（u）。

如前所述，Magidor 和 Shelah 在研究奇异基数的后继处的树性质时引入了经典窄系统；它们的首次应用出现在如下证明中：若 μ 是强紧基数的奇异极限，则树性质在 μ^+ [12, 定理 3。1] 处成立。为了帮助理解窄 Λ-系统的用途，我们在此给出更一般情形下的类似结果。首先需要回顾任意有向偏序 Λ-Λ-树的概念。

定义 3.10 ([8])。设 Λ 是一个有向偏序。若一个结构$\mathcal{T} = (\langle T_u \mid u \in \Lambda\rangle, <_{\mathcal{T}})$ 满足以下所有条件，则称其为 Λ-树 。

(i) $\langle T_u \mid u \in \Lambda\rangle$ 是一列非空且两两不相交的集合。(ii) $<_{\mathcal{T}}$ 是 $\bigcup_{u\in\Lambda} T_u$ 上的传递偏序。(iii) 对所有 $u, v \in \Lambda$、所有 $s \in T_u$ 和所有 $t \in T_v$，若 $s <_{\mathcal{T}} t$，则 $u <_\Lambda v$。(iv) $<_{\mathcal{T}}$ 是 树状的，即对所有 $u <_\Lambda v <_\Lambda w$、所有 $r \in T_u$、所有 $s \in T_v$ 和所有 $t \in T_w$，若 $r, s <_{\mathcal{T}} t$，则 $r <_{\mathcal{T}} s$。(v) 对于 Λ 中的所有 $u \leq_\Lambda v$ 以及所有 $t \in T_v$，存在唯一的 $s \in T_u$，记作 $t \restriction u$，使得 $s \leq_{\mathcal{T}} t$。

对于基数 κ，我们称 $\mathcal{T}$为 κ-Λ-树，如果除满足上述要求外，还有 $|T_u| < \kappa$ 对所有 $u \in \Lambda$都成立。

假设 $\mathcal{T}$是一个 Λ-树。穿过 $\mathcal{T}$的共尾分支是一个函数 $b \in \prod_{u\in\Lambda} T_u$，满足对于 Λ中的所有 $u <_\Lambda v$，都有 $b(u) <_{\mathcal{T}} b(v)$。($\kappa$, Λ)-树性质，记作 $\mathrm{TP}_\kappa(\Lambda)$，断言每个 κ-Λ-树都有一条共尾分支。我们用 $\mathrm{TP}(\Lambda)$ 表示 $\mathrm{TP}_{d_\Lambda}(\Lambda)$。

定理 3.11. 假设 μ 是强紧基数的一个奇异极限，且 Λ 是一个 μ^+-有向偏序。那么$\mathrm{TP}_{\mu^+}(\Lambda)$ 成立。

证明. 令 $\theta := \mathrm{cf}(\mu)$，并令 $\langle \mu_i \mid i < \theta\rangle$ 为一个递增的强紧基数序列，收敛于 μ，且满足 $\mu_0 > \theta$。令 $\mathcal{T} = \langle\langle T_u \mid u \in \Lambda\rangle, <_{\mathcal{T}}\rangle$ 为一个Λ-树，对所有 $u \in \Lambda$都有 $|T_u| \leq \mu$ 。我们首先证明， $\mathcal{T}$有一个由共尾子集索引的窄子系统，该子集取自 Λ。

命题 3.12. 存在一个共尾的 $\Gamma \subseteq \Lambda$ ，并且对每个 $u \in \Gamma$，都有一个非空的 $S_u \subseteq T_u$ ，使得 $\mathcal{S} := \langle\langle S_u \mid u \in \Gamma\rangle, \{<_{\mathcal{S}}\}\rangle$ 是一个窄 Γ-系统，其中 $<_{\mathcal{S}}$ 是 $<_{\mathcal{T}}$ 在$\bigcup_{u\in\Gamma} S_u$ 上的限制。

证明。对所有 $u \in \Lambda$，将 T_u 枚举为 $\langle t^u_\eta \mid \eta < \mu\rangle$ （必要时允许重复）。固定一个初等嵌入 $j : V \to M$，它见证了 μ_0 是 $|\Lambda|^+$-强紧致的。特别地，我们有

- 临界值$(j) = \mu_0$;
- $j(\mu_0) > |\Lambda|$;
- 存在 $W \in M$ 使得 $W \subseteq j(\Lambda)$， $|W|^M < j(\mu_0)$，且 $j``\Lambda \subseteq W$。

令 $j(\mathcal{T}) = \mathcal{T}' = \langle T'_v \mid v \in j(\Lambda)\rangle$。由于 $|W|^M < j(\mu_0) < j(\mu^+)$，且 $j(\Lambda)$ 在 M 中是$j(\mu^+)$-有向的，我们可以找到 $z \in j(\Lambda)$，使得 $w <_{j(\Lambda)} z$对所有 $w \in W$都成立；特别地， $j(u) <_{j(\Lambda)} z$ 对所有 $u \in \Lambda$都成立。任取一个 $t \in T'_z$。对于每个$u \in \Lambda$，将 $T'_{j(u)}$ 枚举为 $\langle (t')^{j(u)}_\eta \mid \eta < j(\mu)\rangle$。对于每个 $u \in \Lambda$，存在 $i_u < \theta$ 和 $\eta_u < j(\mu_{i_u})$，使得 $(t')^{j(u)}_{\eta_u} <_{j(\mathcal{T})} t$。由于 Λ 是 μ^+-有向的，我们可以找到一个固定的$i < \theta$ 和一个共尾的 $\Gamma \subseteq \Lambda$ ，使得 $i_u = i$ 对所有 $u \in \Gamma$都成立。于是，对于所有同时属于 Γ 的 $u <_\Lambda v$，我们有 $(t')^{j(u)}_{\eta_u}$、$(t')^{j(v)}_{\eta_v} <_{j(\mathcal{T})} t$，因此 $(t')^{j(u)}_{\eta_u} <_{j(\mathcal{T})} (t')^{j(v)}_{\eta_v}$。特别是，

$$M \models \exists \eta, \xi < j(\mu_i) \left[(t')^{j(u)}_\eta <_{j(\mathcal{T})} (t')^{j(v)}_\xi \right],$$

正如 $\eta = \eta_u$ 和 $\xi = \xi_v$所证明的那样。根据初等性，我们有

$$V \models \exists \eta, \xi < \mu_i \left[t^u_\eta <_T t^v_\xi \right].$$

现在很容易验证，若令 $S_u := \{t^u_\eta \mid \eta < \mu_i\}$ 对所有 $u \in \Gamma$，则$\mathcal{S}$ 如命题所述的确是一个窄 Γ-系统：定义 3.4 的条款 (1)–(4) 显然成立，而条款 (5) 则由上一段中的初等性论证得出。□

令 $\mathcal{S}$ 为命题所给出的对象，并令 $i < \theta$ 满足 $\mathrm{width}(\mathcal{S}) < \mu_i$。那么，我们可以在命题 3.9 中分别用 μ_i 和 Γ 替换 κ 和 Λ，从而得出 $\mathcal{S}$ 有一个共尾分支 $b \subseteq S$。由此很容易得到一条经过 T的共尾分支 $b' \in \prod_{u\in\Lambda} T_u$：对每个 $u \in \Lambda$，找出 $v \in \Gamma$ 使得 $u \leq_\Lambda v$ 和$b \cap S_v \neq \emptyset$。令 s 为 $b \cap S_v$中的唯一元素，然后令 $b'(u) := s \restriction u$。□

4. 次可加着色

在本节简短的讨论中，我们将指出上一节引入的窄系统性质与任意有向偏序上某些强无界次可加着色的存在性之间的联系。序数上的这类着色已得到广泛研究，并证明在多种情境中都很有用（参见 [7]）。这里我们将这一概念推广到任意有向序，说明窄系统性质的若干实例蕴含某些强无界次可加着色不存在；随后还将说明，在定理 A 的陈述中，可以用某些强无界次可加着色不存在这一假设替代窄系统性质假设。

定义 4.1. 设 Λ 是一个有向偏序，且 θ 是一个无限正则基数。令 $c\colon \Lambda^{[2]} \to \theta$ 是一个函数。

(1) 若对 Λ 中所有三元组 $u <_\Lambda v <_\Lambda w$，均有 (a) $c(u, w) \leq \max\{c(u, v), c(v, w)\}$；且 (b) $c(u, v) \leq \max\{c(u, w), c(v, w)\}$，则称 c 为次可加的。

(2) 若对每个共尾子集 $\Gamma \subseteq \Lambda$，c“$\Gamma^{[2]}$ 在 θ 中无界，则称 c 为强无界的。

命题 4.2。假设 Λ 是一个有向偏序，θ 是一个无限正则基数，且 $c\colon \Lambda^{[2]} \to \theta$ 是一个强无界次可加函数。那么存在一个宽度为 θ 且没有共尾分支的 Λ-系统。

证明。我们将定义一个 Λ-系统 $\mathcal{S} = \langle \langle S_u \mid u \in \Lambda \rangle, \mathcal{R} \rangle$。首先，对每个 $u \in \Lambda$，令 $S_u := \{u\} \times \theta$，并令 $\mathcal{R} = \{R\}$ 仅包含一个关系。现在，对于 $(u, v) \in \Lambda^{[2]}$和 i, $j < \theta$，当且仅当 $i = j$且 $c(u, v) \leq i$时，令 $(u, i) <_R (v, j)$。由 c的次可加性可知，$\mathcal{S}$ 是一个 Λ-系统；显然，$\mathrm{width}(\mathcal{S}) = \theta$。现在反设 $\mathcal{S}$ 有一个共尾分支，b。那么 b 必然具有形式 $\{(u, i) \mid u \in \Gamma\}$，其中某个固定的 $i < \theta$ 和某个共尾的 $\Gamma \subseteq \Lambda$。但这样一来，c“$\Gamma^{[2]} \subseteq i + 1$，这与 c 是强无界的事实相矛盾。□

推论 4.3. 假设 Λ 是一个有向偏序，并且$\mathrm{NSP}(\Lambda)$ 成立。那么，对于每个满足 $\theta^+ < d_\Lambda$的无限正则基数 θ，都不存在强无界次可加着色 $c\colon \Lambda^{[2]} \to \theta$。□

现在我们证明，从（$\mathscr{P}_\kappa\mu^+$）$^{[2]}$ 到 $\mathrm{cf}(\mu)$ 不存在强无界次可加着色，这一事实可以替代 $\mathrm{cNSP}(\mathscr{P}_\kappa\mu^+)$，从而得到定理 2.9。

定理 4.4. 假设 $\kappa < \mu$ 是满足以下条件的无限基数：

- $\mathrm{cf}(\mu) < \kappa$；并且
- 不存在强无界次可加着色

$$c : (\mathscr{P}_\kappa\mu^+)^{[2]} \to \mathrm{cf}(\mu).$$

那么，对每个以 μ^+ 为底集的一致、传递的 $\mathrm{cf}(\mu)$-覆盖矩阵，$\mathrm{CP}(\mathcal{D})$ 都成立。

证明。令 $\theta := \mathrm{cf}(\mu)$ 且 $\lambda := \mu^+$，并设 $\mathcal{D} = \langle D(i,\beta) \mid i < \theta,\ \beta < \lambda^+\rangle$ 是一个以 λ 为底集的 θ-覆盖矩阵，它是一致且传递的。由定理 2.6，$\mathcal{D}$ 具有如下性质：对每个 $x \in \mathscr{P}_\kappa\lambda$，存在 $\gamma_x < \lambda$，使得对所有 $\beta \in [\gamma_x, \lambda)$，都存在 $i < \theta$，使得对所有 $j \in [i,\theta)$，有 $x \cap D(j,\beta) = x \cap D(j,\gamma_x)$。对每个 $x \in \mathscr{P}_\kappa\lambda$ 和每个 $j < \theta$，令 $x_j := x \cap D(j,\gamma_x)$。注意到 $x = \bigcup_{j<\theta} x_j$。

断言 4.5. 对于所有 $(x,y) \in (\mathscr{P}_\kappa\lambda)^{[2]}$，，存在 $i < \theta$，使得对于所有 $j \in [i,\theta)$，都有 $x_j = y_j \cap x$。

证明。固定 $(x,y) \in (\mathscr{P}_\kappa\lambda)^{[2]}$，，并令 $\gamma := \max\{\gamma_x, \gamma_y\}$。那么，根据 x_j 和 y_j 的定义，以及 γ_x 和 γ_y 的选取，存在 $i < \theta$，使得对于所有 $j \in [i,\theta)$，都有 $x_j = x \cap D(j,\gamma)$ 和 $y_j = y \cap D(j,\gamma)$。但于是，对于所有 $j \in [i,\theta)$，都有$y_j \cap x = D(j,\gamma) \cap x = x_j$，如所需。□

现在定义一个函数 $c : (\mathscr{P}_\kappa\lambda)^{[2]} \to \theta$ 令 $c(x,y)$ 为 $i < \theta$ 如断言 4.5 对于所有 $(x,y) \in (\mathscr{P}_\kappa\lambda)^{[2]}$。

断言 4.6。 c是次可加的。

证明。在 $\mathscr{P}_\kappa\lambda$ 中固定 $x \subsetneq y \subsetneq z$，并固定 $j < \theta$。首先，如果 $j \geq \max\{c(x,y),\ c(y,z)\}$，那么 $z_j \cap y = y_j$ 且 $y_j \cap x = x_j$。由此可得 $z_j \cap x = x_j$，进而可以推出 $c(x,z) \leq \max\{c(x,y),\ c(y,z)\}$。

其次，如果 $j \geq \max\{c(x,z),\ c(y,z)\}$，那么 $z_j \cap y = y_j$ 且 $z_j \cap x = x_j$。于是可得 $y_j \cap x = (z_j \cap y) \cap x = z_j \cap x = x_j$，再次可以推出 $c(x,y) \leq \max\{c(x,z),\ c(y,z)\}$。因此，$c$是次可加的。□

根据假设，c 不能是强无界的。因此，存在一个 $\subseteq$-共尾$X \subseteq \mathscr{P}_\kappa\lambda$ 以及一个 $i < \theta$，使得对于 X中的所有 $x \subsetneq y$，都有 $c(x,\ y) \leq i$。

断言 4.7. 对于所有 $j \in [i,\theta)$ 以及所有 x、$y \in X$，都有 $x_j \cap y = y_j \cap x$。

证明。固定这样的 j、x和 y，并找出满足 $x \cup y \subseteq z$的 $z \in X$。于是 $x_j = z_j \cap x$且 $y_j = z_j \cap y$，因此 $x_j \cap y = (z_j \cap x) \cap y = (z_j \cap y) \cap x = y_j \cap x$。□

对于所有 $j \in [i,\theta)$，令 $A_j = \bigcup_{x\in X} x_j$。由前一个断言立即可得，对于所有 $x \in X$，都有 $A_j \cap x = x_j$。

命题 4.8。 存在 $j \in [i,\theta)$，使得 A_j 在 λ中无界。

证明。否则，对于每个 $j \in [i,\theta)$，都会有 $\beta_j < \lambda$ 使得 $A_j \subseteq \beta_j$。令 $\beta := \sup\{\beta_j \mid j \in [i,\theta)\} < \lambda$，并找到满足 $\beta \in x$ 的 $x \in X$。那么，对于所有足够大的 $j < \theta$，必有 $\beta \in x_j$，从而 $\beta \in A_j$，这与 $A_j \subseteq \beta_j \subseteq \beta$ 矛盾。□

固定 $j \in [i, \theta)$，使得 A_j 在 λ中无界。我们断言 A_j 是 CP($\mathcal{D}$) 的见证。为此，固定 $w \in [A_j]^\theta$。令 $x \in X$ 满足 $w \subseteq x$。那么 $w \subseteq A_j \cap x = x_j \subseteq D(j, \gamma_x)$，因此 $[A_j]^\theta$ 确实被 $\mathcal{D}$ 覆盖，如所需。□

推论 4.9。假设 $\kappa \geq \omega_2$ 是一个正则基数，并且对于每个具有可数共尾性的奇异基数 $\mu > \kappa$，都不存在强无界次可加着色 $c\colon (\mathscr{P}_\kappa \mu^+)^{[2]} \to \omega$。那么，在 κ之上，SSH 成立。

证明。由定理 4.4可知，该假设意味着，对于每个具有可数共尾性的奇异基数 $\mu > \kappa$ 以及每个针对 ω的一致传递覆盖矩阵 $\mathcal{D}$，μ^+都有 CP($\mathcal{D}$)。于是，SSH 在 κ 之上成立，这与第 2节末尾定理 A 的证明完全相同。□

5. 保持引理

本文余下部分将证明定理 B，即我们的全局一致性结果。本节将证明一个技术性的保持引理：它表明，如果一个充分闭的强迫为一个窄Λ-系统添加了丰富的分支集，那么该系统在基模型中必然有一个共尾分支。该引理将 [6, 引理 4.3]（它本身稍微改进了 Sinapova 先前的一项结果 [17, 定理 14]）从经典的（以序数为指标的）窄系统推广到任意有向序 Λ上的窄 Λ-系统。我们首先需要给出一个预备定义。

定义 5.1. 设 Λ 是一个有向偏序，并且

$$\mathcal{S} = \langle \langle S_u \mid u \in \Lambda \rangle, \mathcal{R} \rangle$$

是一个宽度为 width($\mathcal{S}$) $= \theta$ 的 Λ-系统。那么，$\mathcal{S}$ 中的全分支集是一个集合 $\{b_i \mid i < \theta\}$，满足

- 对于所有 $i < \theta$，b_i 都是 $\mathcal{S}$中的一个分支；
- 对于所有 $u \in \Lambda$，存在 $i < \theta$，使得 $b_i \cap S_u \neq \emptyset$。

命题 5.2. 设 Λ 是一个有向偏序，

$$\mathcal{S} = \langle \langle S_u \mid u \in \Lambda \rangle, \mathcal{R} \rangle$$

是一个 Λ-系统，其宽度($\mathcal{S}$) $= \theta < d_\Lambda$，并且 $\{b_i \mid i < \theta\}$ 是$\mathcal{S}$中的全分支集。那么存在 $i < \theta$，使得 b_i 是 $\mathcal{S}$中的共尾分支。

证明。假设结论不成立。那么，对于每个 $i < \theta$，都存在 $u_i \in \Lambda$，使得对所有 $v \in u_i^\uparrow$，$b_i \cap S_v = \emptyset$。由于 $d_\Lambda > \theta$，我们可以找到 $u^* \in \Lambda$，使得对所有 $i < \theta$，$u_i \leq_\Lambda u^*$。由于 Λ 没有极大元，$(u^*)^\uparrow \neq \emptyset$。然而，对于所有 $v \in (u^*)^\uparrow$，以及所有$i < \theta$，都有 $b_i \cap S_v = \emptyset$，这与 $\{b_i \mid i < \theta\}$ 是全分支集这一事实矛盾。□

现在我们可以陈述主要的保保持引理了。

引理 5.3。假设 Λ 是一个有向偏序，$\mathcal{S}$ 是一个窄 Λ-系统，$\theta =$宽度(S)，$\mathbb{P}$ 是一个 θ^+-闭强迫偏序集，并且

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\textit{there is a full set of branches in } \mathcal{S}\text{”}.$$

那么，在 V 中，$\mathcal{S}$ 中存在一个共尾分支。

证明。为导出矛盾，假设 $\mathcal{S}$ 中不存在共尾分支。根据假设，我们可以固定 $\mathbb{P}$-名称 $\{\dot{b}_i \mid i<\theta\}$，使得

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\{\dot{b}_i \mid i<\theta\} \text{ is a full set of branches in } \mathcal{S}\text{”}.$$

利用 $\mathbb{P}$ 的 θ^+-闭性，构造 $\mathbb{P}$ 中条件的递减序列 $\langle p_i \mid i<\theta\rangle$，使得对每个 $i<\theta$:

- 存在 $R_i \in \mathcal{R}$，使得 $p_i \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\dot{b}_i$ 是穿过 R_i 的分支”；.
- p_i 决定陈述“$\dot{b}_i$ 是 $\mathcal{S}$ 中的共尾分支”的真值；.
- 如果 $p_i \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\dot{b}_i$ 不是共尾分支”，那么存在 $u_i \in \Lambda$，使得 $p_i \Vdash_{\mathbb{P}}$“$\forall v \in u^{\uparrow}$ ($\dot{b}_i \cap S_v = \emptyset$)”。

再次利用 $\mathbb{P}$ 的 θ^+-闭性，令 p^* 为 $\langle p_i \mid i<\theta\rangle$ 的一个下界。令

$$A := \{i<\theta \mid p_i \Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\dot{b}_i \text{ is a cofinal branch”}\}$$

并利用以下事实 $d_\Lambda > \theta$，找到一个 $u^* \in \Lambda$ 使得 $u_i \leq_\Lambda u^*$ 对所有 $i \in \theta \setminus A$。注意，根据命题 5.2，必然有 $A \neq \emptyset$。

断言 5.4。假设 $p \leq_{\mathbb{P}} p^*$ 且 $i \in A$。那么存在 q_0、$q_1 \leq_{\mathbb{P}} p$ 和x_0、$x_1 \in S$，使得

(1) for $\varepsilon<2$, $q_\varepsilon \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$x_\varepsilon \in \dot{b}_i$”;
(2) $x_0 \perp_{R_i} x_1$.

证明。反设不成立，并令 p 和 i 构成一个反例。令

$$b := \{x \in S \mid \exists q \leq_{\mathbb{P}} p \ (q \Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}x \in \dot{b}_i\text{”})\}.$$

我们断言，b 是 $\mathcal{S}$中穿过 R_i 的一条共尾分支。由于 $i \in A$ 和 $p \leq_{\mathbb{P}} p_i$，显然 $\{u \in \Lambda \mid b \cap S_u \neq \emptyset\}$ 在 Λ中共尾。此外，对所有 x，$y \in b$，我们的假设—— p 和 i 构成该断言的一个反例——意味着 $x \parallel_{R_i} y$。因此，b 是 $\mathcal{S}$中的一条共尾分支，这与我们关于不存在此类分支的假设矛盾。□

断言 5.5. 假设 p_0、$p_1 \leq_{\mathbb{P}} p^*$ 和 $i \in A$。那么存在 $q_0 \leq_{\mathbb{P}} p_0$、$q_1 \leq_{\mathbb{P}} p_1$ 和 x_0、$x_1 \in S$，使得

(1) for $\varepsilon<2$, $q_\varepsilon \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$x_\varepsilon \in \dot{b}_i$”;
(2) $x_0 \perp_{R_i} x_1$.

证明。首先应用断言 5.4，得到 $q_{0,0}$,$q_{0,1} \leq_{\mathbb{P}} p_0$ 和 $x_{0,0}$,$x_{0,1} \in S$，使得$q_{0,\varepsilon} \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$x_{0,\varepsilon} \in b_i$” 对于 $\varepsilon<2$ 和 $x_{0,0} \perp_{R_i} x_{0,1}$ 成立。然后找出 $q_1 \leq_{\mathbb{P}} p_1$ 和 $x_1 \in S$，使得 $\dot{}$ 满足 $\ell(x_0, 0)$ $\ell(x_0,1)$ $\leq_\Lambda \ell(x_1)$ 以及 $q_1 \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$x_1 \in b_i$”。 x_1 不可能同时与 $x_{0,0}$ 和 $x_{0,1}$ R_i-相容，否则 x_1 就能证明 $x_{0,0}$ 和 $x_{0,1}$ 相容于 R_i。因此，我们可以固定 $\varepsilon<2$，使得 $x_{0,\varepsilon} \perp_{R_i} x_{1-\varepsilon}$。令$q_0 := q_{0,\varepsilon}$ 和 $x_0 := x_{0,\varepsilon}$。那么 q_0、q_1、x_0 和 x_1 就如所需。□

断言 5.6。假设 $p \leq p^*$。那么存在 q_0、$q_1 \leq_{\mathbb{P}} p$ 和 $\{x^i_\varepsilon \mid i \in A,\ \varepsilon<2\} \subseteq S$，使得

(1) 对于任意 $i \in A$ 和 $\varepsilon<2$，都有 $q_\varepsilon \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$x^i_\varepsilon \in \dot{b}_i$”;
(2) 对于任意 $i \in A$，都有 $x^i_0 \perp_{R_i} x^i_1$。

证明。我们从 $\mathbb{P}$ 递归地构造两个递减序列 $\langle q_{0,i} \mid i<\theta\rangle$ 和 $\langle q_{1,i} \mid i<\theta\rangle$，以及元素 $\{x^i_\varepsilon \mid i \in A,\ \varepsilon<2\}$，如下所示。

首先，令 $q_{0,\,0} = q_{1,\,0} = p$。若 $j<\theta$ 是极限序数，$\varepsilon<2$，且我们已定义$\langle q_{\varepsilon,i} \mid i<j\rangle$，则令 $q_{\varepsilon,\,j}$ 为 $\langle q_{\varepsilon,i} \mid i<j\rangle$的任意下界。若 $i \in \theta \setminus A$, $\varepsilon<2$,

并且 $q_{\varepsilon,\,i}$ 已定义，则只需令 $q_{\varepsilon,\,i+1}=q_{\varepsilon,\,i}$。最后，假设 $i\in A$，且我们已定义 $\langle q_{0,j}\mid j\le i\rangle$ 和 $\langle q_{1,j}\mid j\le i\rangle$。那么将断言 5.5 应用于 $q_{0,\,i}$,$q_{1,\,i}$ 和 i，得到 $q_{0,\,i+1}\le_{\mathbb{P}} q_{0,\,i}$，$q_{1,\,i+1}\le_{\mathbb{P}} q_{1,\,i}$，以及 $x_0^i,\ x_1^i\in S$，使得

- for $\varepsilon<2$, $q_{\varepsilon,i+1}\Vdash_{\mathbb{P}}$ “$x_\varepsilon^i\in\dot b_i$”;
- $x_0^i\perp_{R_i}x_1^i$.

在构造结束时，对每个 $\varepsilon<2$，令 q_ε 为 $\langle q_{\varepsilon,i}\mid i<\theta\rangle$ 的下界。于是，q_0、q_1 和 $\{x_\varepsilon^i\mid i\in A,\ \varepsilon<2\}$ 满足所需条件。□

现在使用命题 5.6 以及 $\mathbb{P}$ 的闭性，递归地构造一个条件树$\{p_\sigma\mid\sigma\in{}^{<\theta}2\}$ 和元素 $\{x_\varepsilon^{\sigma,i}\mid\sigma\in{}^{<\theta}2,\ i\in A,\ \varepsilon<2\}$，它们属于 S，如下所示。我们将保持这样的假设：对于所有 $\tau,\ \sigma\in{}^{<\theta}2$，如果 τ 是 σ的初始段，那么 $p_\sigma\le_{\mathbb{P}}p_\tau$。

令 $p_\emptyset:=p^*$。若 $\eta<\theta$ 是极限序数，且 $\sigma\in{}^{\eta}2$，并且 $p_{\sigma\restriction\xi}$ 已对每个 $\xi<\eta$ 定义，则令 p_σ 为 $\langle p_{\sigma\restriction\xi}\mid\xi<\eta\rangle$的任意下界。若 $\sigma\in{}^{<\theta}2$且 p_σ 已定义，则应用命题 5.6 来找到 $p_{\sigma^\frown\langle0\rangle},\ p_{\sigma^\frown\langle1\rangle}\le p_\sigma$，以及$\{x_\varepsilon^{\sigma,i}\mid i\in A,\ \varepsilon<2\}\subseteq S$，使得

(1) 对每个 $i\in A$ 和 $\varepsilon<2$，都有 $p_{\sigma^\frown\langle\varepsilon\rangle}\Vdash_{\mathbb{P}}$ “$x^{\sigma,\ i}_{\ \varepsilon}\in\dot b_i$”;

(2) 对每个 $i\in A$，都有 $x^{\sigma,\ i}_{\ 0}\perp_{R_i}x^{\sigma,\ i}_{\ 1}$。

对于每个 $f\in{}^{\theta}2$，令 p_f 为 $\langle p_{f\restriction\eta}\mid\eta<\theta\rangle$的下界。选取满足$|B|=\theta^+$的 $B\subseteq{}^{\theta}2$，并利用 $d_\Lambda>\theta^+$ 这一事实，找到 $v\in\Lambda$，使得对于所有 $f\in B$、$\eta<\theta$、$i\in A$和 $\varepsilon<2$，都有 $\ell(x^{f\restriction\eta,\ i}_{\ \varepsilon})<_\Lambda v$。我们还可以假设 $u^*<_\Lambda v$。

对于每个 $f\in B$，必须是利用 S 中这个事实，以找到一个 $q_f\le_{\mathbb{P}}p_f$、一个 $i_f<\theta$和一个 $x_f\in S_v$，使得 $q_f\Vdash_{\mathbb{P}}$“$x_f\in b_{i_f}$”。由于 $u^*<_\Lambda v$，且每个 q_f 都扩展了 p^*，因此对所有 $f\in B$，必有 $i_f\in A$。由于 $|B|=\theta^+>\mathrm{width}(\mathcal{S})$，我们可以找到互不相同的 f、$g\in B$、$i\in A$和 $x\in S$，使得 $i_f=i_g=i$ 且 $x_f=x_g=x$。令 $\eta^*<\theta$ 为满足 $f(\eta)\neq g(\eta)$的最小 η，并令 $\sigma:=f\restriction\eta^*=g\restriction\eta^*$。不失一般性，假设 $f(\eta^*)=0$且 $g(\eta^*)=1$。那么 $q_f\le_{\mathbb{P}}q_{\sigma^\frown\langle0\rangle}$，因此 $q_f\Vdash_{\mathbb{P}}$“$x^{\sigma,\ i}_{\ 0}\in\dot b_i$”。类似地，$q_g\Vdash_{\mathbb{P}}$“$x^{\sigma,\ i}_{\ 1}\in\dot b_i$”。由于 q_f 和 q_g 都扩展了 p_i，并强制 x 属于 $\dot b_i$，而且$\ell(x^{\sigma,\ i}_{\ 0})\ \ell(x^{\sigma,\ i}_{\ 1})<_\Lambda v=\ell(x)$，因此必有 $x^{\sigma,\ i}_{\ 0}<_{R_i}x$ 以及 $x^{\sigma,\ i}_{\ 1}<_{R_i}x$，这与 $x^{\sigma,\ i}_{\ 0}\perp_{R_i}x^{\sigma,\ i}_{\ 1}$ 这一事实矛盾。□

6. A global consistency result

我们终于可以证明一致性结果了。出于组织安排的考虑，以下定义将很有用。

定义 6.1. 对于每个无限正则基数 κ，若 κ 具有强窄系统性质，记为 SNSP_κ，则表示：对于每个满足$d_\Lambda\ge\kappa$的有向偏序 Λ，每个宽度为 $<\kappa$ 的 Λ-系统 $\mathcal{S}$（其中 $\mathrm{width}(\mathcal{S})$）都有一条共尾分支。

定理 6.2. 设 $\mu<\kappa$ 是正则不可数基数，κ 是超紧致基数，并令 $\mathbb{P}:=\mathrm{Coll}(\mu,<\kappa)$。那么，在 $V^{\mathbb{P}}$ 中，SNSP_κ 成立，而且在 κ-有向闭集合强迫下不可摧毁。

证明。设 G 在 V 上是 $\mathbb{P}$-泛型的。由于平凡强迫是 κ-有向闭的，只需证明：若 $\mathbb{Q}$ 是 $V[G]$ 中的 κ-有向闭集合强迫，且 H 在 $V[G]$ 上是$\mathbb{Q}$-泛型的，则 SNSP_κ 在 $V[G][H]$中成立。

为此，固定一个 κ-有向闭 $\mathbb{Q}\in V[G]$，以及一个在 $V[G]$上的 $\mathbb{Q}$-泛滤子 H。在 $V[G][H]$中，令 Λ 为一个 κ-有向偏序，并令 $\mathcal{S}=\langle\langle S_u\mid u\in\Lambda\rangle,\mathcal{R}\rangle$ 为一个

Λ-系统，其宽度为$(\mathcal{S}) < \mu$。具体而言，假设 $\mathbb{Q}$ 和 Λ 的底层集合都是序数。我们将证明，在 $V[G][H]$ 中，存在 $\mathcal{S}$ 的一个共尾分支。根据命题 3.7，我们可以假设 $\mathcal{S}$ 只有一个关系，我们将其记为 R。

在$\mathbb{Q}$-名称，$\dot{\mathbb{Q}}$表示一个。$\mathbb{P}$固定一个基数，并设 $\dot{\Lambda}$ 是一个 $\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}$-名称，使得 $\Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\dot{\Lambda}$ 是一个 $\delta > \kappa$，使得 $|\mathscr{P}(\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}})| < \delta$ 且 $\Vdash_{\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}} \text{“}|\dot{\Lambda}| < \delta$”，并设 $j\colon V \to M$ 是一个初等嵌入，见证了 κ 是 δ-超紧致的，也就是说，$\mathrm{crit}(j) = \kappa$，$j(\kappa) > \delta$，且 ${}^{\delta}M \subseteq M$。我们有 $j(\mathbb{P}) = \mathrm{Coll}(\mu, <j(\kappa))$，因此，根据 [11, 引理 3]（另见 [1, 事实 6.11]），可以将 ι 从 $\mathbb{P}$ 到 $j(\mathbb{P})$ 的自然完备嵌入延拓为 ι' 从 $\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}$ 到 $j(\mathbb{P})$ 的完备嵌入，使得商迫使 $j(\mathbb{P})/\iota'[\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}]$ 是 μ-闭的。设 $\dot{\mathbb{R}}$ 是这个商迫使的一个 $\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}$-名称。于是我们有 $j(\mathbb{P}) \cong \mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}*\dot{\mathbb{R}}$，并且 $\dot{\mathbb{R}}$ 被 $\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}$ 强迫为 μ-闭的。

令 G 在 V 为 $\mathbb{P}$ 上的 V-泛滤子，令 H 为 $V[G]$ 中 $\dot{\mathbb{Q}}^G$ 上的 $V[G]$-泛滤子，并令 K 为 $V[G][H]$ 上的 $\dot{\mathbb{R}}^{G*H}$-泛滤子。由于对所有 $p \in \mathbb{P}$，$j(p) = p$，它自然地与 $(p, 1_{\dot{\mathbb{Q}}}, 1_{\dot{\mathbb{R}}})$ 在 $\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}*\dot{\mathbb{R}}$ 中相对应，因此我们有 $j\text{“}G \subseteq G*H*K$，所以在 $V[G][H][K]$ 中，我们可以将 j 扩展为 $j\colon V[G] \to M[G][H][K]$。

由 M 的闭性，我们知道 $j\text{“}H \in M[G][H][K]$。此外，在该模型中，$j\text{“}H$ 是 $j(\mathbb{Q})$ 的有向子集，且 $|j\text{“}H| < \delta < j(\kappa)$，而 $j(\mathbb{Q})$ 是 $j(\kappa)$-有向闭的。因此，我们可以找到 $q^* \in j(\mathbb{Q})$，使得对所有 $q \in H$ 都有 $q^* \leq_{j(\mathbb{Q})} j(q)$。令 H^+ 为在 $V[G][H][K]$ 上与 $q^* \in H^+$ 相容的 $j(\mathbb{Q})$-泛滤子。于是 $j\text{“}H \subseteq H^+$，所以在 $V[G][H][K][H^+]$ 中，我们可以最后一次将 j 扩展为 $j\colon V[G][H] \to M[G][H][K][H^+]$。

再次，由 M 的闭包可知，$j\text{“}\Lambda \in M[G][H][K][H^+]$。此外，在该模型中，$j\text{“}\Lambda$ 是 $j(\Lambda)$ 的子集，且 $|j\text{“}\Lambda| < \delta < j(\kappa)$，而 $j(\Lambda)$ 是 $j(\kappa)$-有向的。因此，我们可以找到 $v^* \in j(\Lambda)$，使得对所有 $u \in \Lambda$，$j(u) <_{j(\Lambda)} v^*$。令 $\theta := \mathrm{width}(\mathcal{S})$。由于 $\theta < \mu$，我们有 $\theta = j(\theta) = \mathrm{width}(j(\mathcal{S}))$。将 $j(\mathcal{S})$ 写作 $\langle \langle S'_v \mid v \in j(\Lambda) \rangle, \{j(R)\} \rangle$。将 S'_{v^*} 枚举为 $\langle y_i \mid i < \theta \rangle$，若$|S'_{v^*}| < \theta$则允许重复。对于每个 $i < \theta$，令 $b_i := \{x \in S \mid j(x) <_{j(R)} y_i\}$。

我们声称，$\{b_i \mid i < \theta\}$ 是 $\mathcal{S}$中的全分支集。首先验证每个 b_i 都是 $\mathcal{S}$中的分支。为此，固定 $i < \theta$ 和 x，$y \in b_i$。那么，在 $j(\mathcal{S})$中，我们有$j(x)$ $j(y) <_{j(R)} y_i$，因此 $j(x) \parallel_{j(R)} j(y)$。由初等性，我们有 $x \parallel_R y$，正如所要求的。

接下来验证，对于所有 $u \in \Lambda$，存在 $i < \theta$ 使得 $b_i \cap S_u \neq \emptyset$。为此，固定 $u \in \Lambda$。由于 $j(u) <_{j(\Lambda)} v^*$，定义 3.4 的第 5 条蕴含存在 $i < \theta$ 和 $w \in S'_{j(u)}$ 使得 $w <_{j(R)} y_i$。由于 $|S_u| \leq \theta < \kappa$，我们有$S'_{j(u)} = j\text{“}S_u$，因此可以找到 $x \in S_u$ 使得 $j(x) = w$。于是 $x \in b_i \cap S_u$。

由此我们已经证明，$\{b_i \mid i < \theta\} \in V[G][H][K][H^+]$ 是 $\mathcal{S}$中的全分支集。因此，由于 $\theta^+ \leq \mu$，我们可以在5.3 中的引理 $V[G][H]$ 应用于 $\mathcal{S}$ 和μ-闭偏序集 $\mathbb{R}*j(\mathbb{Q})$，从而得出在 $V[G][H]$中存在一条共尾分支$\mathcal{S}$，至此定理的证明完成。□

注 6.3. 定理 6.2 提供了一种验证我们在注 2.3 中先前所作论断的方法：一般而言，cNSP_κ 并不蕴含 TP_κ。例如，若 κ 是超紧致的，且 $\mathbb{P} = \mathrm{Coll}(\omega_1, <\kappa)$，那么在 $V^{\mathbb{P}}$中，我们有 $\kappa = \aleph_2$，而定理 6.2 蕴含 cNSP_κ 成立。另一方面，CH 在 $V^{\mathbb{P}}$中成立，因此存在一棵 $\aleph_2$-阿隆佐树，所以甚至 $\mathrm{TP}(\kappa, \kappa)$也不成立。

注意，断言“SNSP_κ 对每个无限正则基数 κ都成立”等价于断言“$\mathrm{NSP}(\Lambda)$ 对每个有向偏序 Λ都成立”。因此，下面的结果给出了定理 B。

定理 6.4. 假设存在真类超紧基数。则存在一个类迫使扩张，使得 SNSP$_\kappa$ 对每个无限正则基数 κ都成立。

证明。 令 $\langle \kappa_\eta \mid \eta \in \mathrm{On}\rangle$ 为基数的递增连续序列，使得

- $\kappa_0 = \aleph_0$;
- 若 η 是极限序数（包括 0），则 $\kappa_{\eta+1} = \kappa_\eta^+$;
- 若 η 是后继序数，则 $\kappa_{\eta+1}$ 是超紧致的。

我们可以假设，对于每个非零极限序数 η，κ_η 都是奇异基数；否则，只需将宇宙截断在最小的非零极限序数 η 所对应的 κ_η 以下，使得 κ_η 是正则的（因而是强不可达基数）。

现在，我们通过类长迭代的 L´evy 崩塌，将每个 κ_η 变成$\aleph_\eta$。更正式地说，递归定义偏序集 $\langle \mathbb{P}_\eta \mid \eta \in \mathrm{On}\rangle$ 如下:

- $\mathbb{P}_0$ 和 $\mathbb{P}_1$ 是平凡迫使；.
- 若 η 是后继序数，则令 $\mathbb{P}_{\eta+1} = \mathbb{P}_\eta * \mathrm{Coll}(\kappa_\eta, <\kappa_{\eta+1})$;
- 若 η 是非零极限序数，则 $\mathbb{P}_\eta$ 是 $\langle \mathbb{P}_\xi \mid \xi < \eta\rangle$的逆（即全支撑）极限。

. 对于序数 $\xi < \eta$，令 $\mathbb{P}_{\xi\eta}$ 为商 $\mathbb{P}_\eta/\mathbb{P}_\xi$的一个 $\mathbb{P}_\xi$-名称。那么 $\mathbb{P}_{\xi\eta}$ 是一个名称，表示 L´evy 崩塌的全支撑迭代，其中每一步都被迫为 κ_ξ-有向闭。因此， $\mathbb{P}_{\xi\eta}$ 被迫为 κ_ξ-闭。特别地，$(H(\kappa_\xi))^{V^{\mathbb{P}_\xi}} = (H(\kappa_\xi))^{V^{\mathbb{P}_\eta}}$，所以 $V^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\eta\in\mathrm{On}} V^{\mathbb{P}_\eta}$ 是 ZFC 的一个模型。此外，标准论证表明，在 $V^{\mathbb{P}}$ 中，对所有 $\eta \in \mathrm{On}$，都有 $\kappa_\eta = \aleph_\eta$。

我们断言SNSP$_\kappa$ 在 $V^{\mathbb{P}}$ 中对每个无限正则基数 κ都成立。注意， $V^{\mathbb{P}}$ 中的无限正则基数恰好是那些κ_η 满足 η 为 0 或后继序数的基数。如果 $\eta \leq 1$，那么每个满足 (width($\mathcal{S}$))$\mathcal{S}$ 的系统 $^+ < \kappa_\eta$ 都具有有限宽度。因此，由命题 3.8 可知，SNSP$\aleph_0$ 和SNSP$\aleph_1$在ZFC中成立。

接下来注意，若 η 是非零极限序数，且 $\mathcal{S}$ 是满足 (width($\mathcal{S}$))$^+ < \kappa_{\eta+1}$的系统，则必存在一个 $\xi < \eta$ ，使得 (width($\mathcal{S}$))$^+ < \kappa_\xi$。因此，对所有 $\xi < \eta$，SNSP$^{\kappa_{\eta+1}}$ 都将由 SNSP$^{\kappa_\xi}$ 推出。

因此，我们接下来要验证对所有后继序数η，SNSP$^{\kappa_{\eta+1}}$ 都成立。为此，固定一个后继序数 η ，并在 $V^{\mathbb{P}}$ 中固定一个满足 $d_\Lambda \geq \kappa_{\eta+1}$ 的有向偏序 Λ，以及一个宽度满足 width($\mathcal{S}$)$^+ < \kappa_{\eta+1}$的 Λ-系统 $\mathcal{S}$。

在 V^{P_η} 中，我们有 $\kappa_\eta = \aleph_\eta$，并且由于 $|\mathbb{P}_\eta| < \kappa_{\eta+1}$，我们知道 $\kappa_{\eta+1}$ 仍然是超紧致的。此外，$\mathbb{P}_{\eta,\ \eta+1} = \mathrm{Coll}(\kappa_\eta,\ <\kappa_{\eta+1})$，因此根据定理 6.2，SNSP$^{\kappa_{\eta+1}}$ 在 $V^{\mathbb{P}_{\eta+1}}$ 以及其任何 $\kappa_{\eta+1}$-有向闭集迫扩张中都成立。令$\zeta > \eta + 1$ 足够大，使得 Λ 和 $\mathcal{S}$ 都属于 $V^{\mathbb{P}_\zeta}$。在 $V^{\mathbb{P}_{\eta+1}}$ 中， $\mathbb{P}_{\eta+1,\ \zeta}$ 是 $\kappa_{\eta+1}$- 有向闭的，因此 SNSP$^{\kappa_{\eta+1}}$ 在 $V^{\mathbb{P}_\zeta}$ 中成立。特别地， $\mathcal{S}$ 在$V^{\mathbb{P}_\zeta}$ 中有一个共尾分支，因此在 $V^{\mathbb{P}}$ 中也有一个。□

本文最后讨论我们认为目前最重要的几个未解决问题。

问题 6.5。 假设 $\kappa \geq \omega_2$ 是一个正则基数。TP$_\kappa$ 是否蕴含cNSP$_\kappa$? 更具体地说，若 $\lambda \geq \kappa$ 是一个基数，TP(κ, λ) 是否蕴含cNSP$(\mathscr{P}_\kappa\lambda)$? 更一般地说，假设 Λ 是一个有向偏序，且满足 $d_\Lambda \geq \aleph_2$。TP(Λ)是否蕴含NSP(Λ)?

根据定理 A，对问题 6.5第一部分的肯定回答，将会导致问题 1.3 得到肯定回答，因此也会使问题 1.4得到否定回答。另一方面，对问题 6.5 给出否定回答，似乎需要真正全新的思路，因为实践中已知的验证 $\mathsf{TP}(\kappa, \lambda)$ 的方法，必然也会得到 $\mathsf{cNSP}(\mathscr{P}_\kappa\lambda)$。

References

[1] James Cummings、Matthew Foreman 和 Menachem Magidor。平方序列、标度与平稳反射。 *J. Math. Log.*，1(1):35–98，2001。[2] James Cummings、Yair Hayut、Menachem Magidor、Itay Neeman、Dima Sinapova 和 Spencer Unger。不可言说树性质与奇异基数假设的失败。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，373(8):5937–5955，2020。[3] Sherwood Hachtman 和 Dima Sinapova。ITP、ISP 与奇异基数假设。 *J. Symb. Log.*，84 725，2019 2 713( ): – 。[4] Thomas Jech。关于不可数基数的一些组合问题。 *Ann. Math.* , : – / 。

Logic 5 165 198, 1972 73

[5] John Krueger。猜测模型蕴含奇异基数假设。

Proc. Amer. Math. , ( ): – 。[6]

Soc. 147 12 5427 5434, 2019

Chris Lambie-Hanson。平方序列与窄系统。 *J. Symb. Log.*，82(3):834–859，2017。[7] Chris Lambie-Hanson 和 Assaf Rinot。Knaster 及其相关概念 III：次可加着色。

J. 。即将出版。[8]

Symbolic Logic 2023

Chris Lambie-Hanson 和 ˇS´arka Stejskalov´a。强树性质、Kurepa 树与猜测模型。2022年。预印本。[9] Chris Lambie-Hanson 和 ˇS´arka Stejskalov´a。猜测模型、树与基数算术。2023年。预印本。[10] Menachem Magidor。超紧基数的组合刻画。

Proc. Amer. , : – 。[11]

Math. Soc. 42 279 285, 1974

Menachem Magidor。反射平稳集。 *J. Symbolic Logic*，47(4):755–771 (1983)，1982。[12] Menachem Magidor 和 Saharon Shelah。奇异基数后继处的树性质。*Arch. Math. Logic*，35(5-6):385–404，1996。[13] Pierre Matet。相交数与伪幂。 *MLQ Math. Log. Q.*，67(1):59–76，2021。[14] William Mitchell。Aronszajn 树与传递性质的独立性。

Ann. Math. , : – / 。[15]

Logic 5 21 46, 1972 73

Assaf Sharon 和 Matteo Viale。反射对可接近性理想的一些推论。*Trans. Amer. Math. Soc.*，362(8):4201–4212，2010。[16] Saharon Shelah。 *Cardinal arithmetic*，第29卷，载于 *Oxford Logic Guides*。Clarendon 出版社，牛津大学出版社，纽约，1994年。牛津科学出版物。[17] Dima Sinapova。 $\aleph_{\omega+1}$处的树性质。 *J. Symbolic Logic*，77(1):279–290，2012。[18] Robert M. Solovay。强紧基数与广义连续统假设。载于 *Proceedings of the Tarski Symposium (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXV, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971)* ，第365–372页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1974年。[19] E. Specker。关于 Sikorski 的一个问题。 *Colloq. Math.*，2:9–12，1949。[20] Matteo Viale。适当迫使公理与奇异基数假设。

J. Symbolic , ( ): – 。[21]

Logic 71 2 473 479, 2006

Matteo Viale。覆盖性质族。 *Math. Res. Lett.*，15(2):221–238，2008。[22] Matteo Viale。猜测模型与广义 Laver 钻石。 *Ann. Pure Appl. Logic*，163 11 1660( ): –1678，2012。[23] Christoph Weiß。超紧性的组合本质。 *Ann. Pure Appl. Logic*，163 11 1710 1717，2012 ( ): – 。

(Lambie-Hanson) Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences, Žitná 25,Prague 1, 115 67, Czech Republic*Email address*: lambiehanson@math.cas.cz*URL*: https://users.math.cas.cz/~lambiehanson/