arXiv:2304.02145v1 [cs.PL] 4 Apr 2023

Gradual Typing for Effect Handlers

Max S.New，密歇根大学，美国Eric Giovannini，
密歇根大学，美国Daniel R. Licata，卫斯理大学，美
国

我们介绍了一种渐进式类型语言GrEff，它具有支持从未经检查的效应类型标注迁移到经检查的效应类型标注的效应和处理器。这为将效应类型标注规约与一种现有的、不会追踪细粒度效应信息的具有效应的类型语言相结合提供了一个简单模型。我们的语言支持一种简单的模块系统，用于以 Typed Racket的风格对从未经检查的效应类型标注到经检查的效应类型标注的渐进式迁移编程模型进行建模。

表层语言 GrEff 通过 elaboration 到核心语言 Core GrEff 来赋予语义。我们为 Core GrEff 配备一个不等式理论，用于推理语义错误序，以及使用效应和处理器编程时所需的程序等价关系。我们从该理论中可证的等式推导出该语言的操作语义。随后，我们构造一个操作性逻辑关系模型来证明渐进性定理，从而表明该理论是可靠的。这将渐进式类型的嵌入-投影对模型的既有工作扩展到效应类型标注和子类型关系。

ACM 参考格式：
Max S. New、Eric Giovannini和 Daniel R. Licata。2018。《效应处理器的渐进类型》。载于 *Woodstock '18*：*ACM*神经凝视检测研讨会，*2018*年*6*月*3*日至*5*日，纽约州伍德斯托克。 ACM，美国纽约州纽约，89页。
https://doi.org/XXXXXXX.XXXXXXX。

1 引言

渐进式类型语言旨在支持从宽松的静态类型规范平滑迁移到严格的静态类型规范 [25, 31]。最常见的是，渐进式类型语言会为现有的动态类型语言添加静态类型系统，并允许：(1) 语言之间安全地互操作；(2) 提供语义保证，即为现有程序添加类型只会带来更严格的类型检查，而不会产生其他行为变化。更一般地说，渐进式类型已被应用于在其他类型标注规范中提供不同程度的精度，例如细化类型标注或效应类型标注 [2, 12],其中，“动态”一侧本身就是一种静态类型语言。

一种特定的效应和效应类型标注呈现方式正变得流行，即 **效应处理器** [22]。从操作上讲，效应处理器是 **可恢复异常**，代码可以“raise 操作”一个效应操作，然后它将被最近的包围处理器处理，该处理器除了异常数据外还将接收引发代码的续延，该续延可以被调用以在效应被引发的原始点恢复。效应处理器提供了一种直观的类型化接口到定界续延，并且可以类似地用于方便地实现回溯搜索、非确定性、可变状态，以及作为外部系统调用的便捷接口。效应处理器已在许多库和实验性语言中实现，并且

允许出于个人或课堂使用目的制作本作品的全部或部分数字或硬拷贝，无需付费，前提是这些拷贝不得用于盈利或商业优势，并且拷贝须带有本声明和首页的完整引用。必须尊重本作品中由ACM以外的其他人拥有的组件的版权。允许带有出处的摘要。否则复制、再版、在服务器上发布或重新分发到列表，需要事先获得特定许可和/或付费。请求许可请联系 permissions@acm.org。*Woodstock '18，2018*年*6*月*3*日至*5*日，纽约州伍德斯托克© 2018 计算机协会。ACM ISBN 978-1-4503-XXXX-X/18/06.. . $15.00https://doi.org/XXXXXXX.XXXXXXX

最近已作为内置功能纳入 OCaml 5，并被提议作为WASM 的扩展 [3, 5, 6, 11, 13, 14, 28]。

支持效应处理器的语言设计者，与设计带有异常机制的语言的设计者一样，都面临一个选择：类型系统是只验证效应操作的输入和输出类型是否得到遵守，还是采用一种效应类型标注系统，以确定只有在已知上下文实现了相应处理器时，才能触发特定效应。一方面，已检查效应使程序员能够轻松推理子程序可能触发哪些效应，并确保这些效应得到适当处理，而不是被运行时系统捕获并导致程序崩溃。另一方面，严格检查可能会导致在扩展代码以触发新的操作时需要进行大量代码修改；即使是 Java 这样同时支持检查异常和未检查异常的语言，在许多场景中也更倾向于使用未检查异常。此外，在不具备效应类型标注支持的语言中加入效应类型标注时，即使现有库是正确的，通常也无法通过必要的保守型静态类型检查器。重写大量现有库代码以精确追踪效应的使用情况，可能并不可行。渐进式类型为语言设计提供了一种框架，使程序员不必完全受限于某一种系统：他们可以在一个模块中使用未检查异常，在另一个模块中使用检查异常，同时支持明确定义的互操作；如果在未预期的上下文中触发了效应，运行时还会提供有用的错误消息。此外，渐进式类型语言为迁移代码提供了一条路径，可以逐步从较不精确的静态类型检查转向较精确的静态类型检查。Phil Wadler 在先前的工作中，对渐进式类型以这种方式将效应类型标注规程引入现有语言的潜力作了精彩论述 [32]。

在这项工作中，我们介绍 GrEff 的设计与语义。GrEff 是一种带有效应处理器的渐进式语言，支持从未检查效应逐步迁移到精确的效应类型标注。GrEff 的未跟踪子语言旨在与 SML 以及 Java 对异常的处理方式相似：声明新的效应操作时，需指定其输入和输出类型；这些操作可以导入到其他模块中使用，以引发并处理相应操作，但类型系统不会跟踪函数会引发哪些效应。此外，GrEff 支持已跟踪函数类型$A \to_\sigma B$，其中输入值必须属于类型 A，输出值属于类型 B，且函数可能引发集合 σ中的任意效应，也仅限于其中的效应。未跟踪函数类型因此被建模为类型 $A \to_? B$，具有“动态”效应类型，也就是说，它可能引发任意效应，其中可能包括在程序某个独立模块中声明的未知效应操作。由于本工作的主要重点是为使用效应类型扩展 OCaml 5 等现有静态类型语言奠定基础，我们选择不在 GrEff 的设计中支持完整的动态类型。不过，采用标准的渐进式类型技术，该设计很容易在动态效应类型之外进一步支持完全动态的值类型标注。我们注意到

在 GrEff 中，每个模块都可以声明新的效应操作，就像Java 和 ML风格语言中可以声明新的异常一样。当一个效应在模块中声明时，它会被赋予关联的 请求 和响应 类型。例如，用于读取布尔状态的效应可以是 get: Unit ~> Bool，用户提供一个平凡值作为请求，并接收一个布尔值作为响应；而用于写入布尔状态的效应可以是 set : Bool ~> Unit。与 ML 和 Java类似，GrEff 对效应操作采用名义型 方法：每个效应操作都有一个关联的请求类型和响应类型，用于确定何时正确地引发或处理效应。然而，从将未跟踪效应渐进式迁移到已跟踪效果的角度来看，将效应名称全局统一映射到请求/响应类型会带来问题。在完全名义型的效应类型标注形式中，如果一个效应操作在许多不同模块中以不精确的类型标注被使用，而其中一个模块被迁移为使用该效应操作更精确的版本，

效应的请求/响应类型，那么我们就需要迁移所有模块以使用更精确的类型。相反，渐进式迁移应当允许一次只迁移一个模块。为实现这一点，在GrEff中，我们对效应操作的类型采用局部名义型但全局结构型的方法。也就是说，局部地，在每个模块内，效应的请求和响应类型是固定的，并且所有 raise 和 handle构造都使用相同的类型进行检查。另一方面，全局地，程序中不同的模块可以将不同的类型关联到同一个效应操作。在模块边界处，即导入与导出之间，如果模块对它们共享的效应的精确类型部分达成一致，则在静态类型上允许它们互操作。如果一个模块比另一个模块更加精确，那么实现中会插入动态运行时监控，以确保运行时行为与静态类型一致；如果动态类型代码违反了施加的运行时类型约束，则会引发错误。

设计一个设计一个健全的渐进式类型语言涉及两个方面：设计表层语言的语法和渐进式类型检查，以及设计相应的核心语言和语义。语法应支持一个简单的过程，使程序能够从不精确风格迁移到精确风格，并满足静态渐进保证[24]。我们的设计目标是对从静态类型迁移到动态类型的程序迁移进行建模。出于这一原因，我们采用了Typed Racket 风格的简单模块系统 [31] ，从而能够表达程序的不同部分对效应操作类型的不同看法。基础语言设计完成后，渐进式类型检查基于此前关于定义满足静态渐进保证的渐进式类型系统的研究[9, 25]。

接下来，核心语言为运行时语义提供定义。该语义应当为精确类型代码提供有用的基于类型的推理原则，即使存在与不精确类型组件的交互也是如此。此外，上述迁移过程应当对程序语义产生可预测的影响：从到更精确的检查可能会导致识别出新的错误（静态地或动态地），但除此之外不应影响程序行为，这一性质被称为动态渐进保证或渐进性 [17, 24]。为了设计核心语言和运行时语义，我们遵循先前的工作（[17, 20]），该工作确立了一套设计新的渐进核心语言的方案，以满足渐进性定理并验证强大的基于类型的等式推理原则。他们的方法是将公理化基于类型的推理原则，将其表示为等式，并将渐进性定理表示为不等式；其中，强制转换并不是通过预先指定其操作行为先验地定义的，而是假设它们由最小上界/最大下界给出。然后，可以从不等式理论中推导出强制转换的操作行为。随后必须构造一个操作模型或指称模型，以证明该理论是一致的，这意味着渐进性定理成立。但由于操作语义是从不等式理论中推导出的，这也确立了一个更强的定理：强制转换的可观察行为由所期望的基于类型的推理和渐进性唯一确定，这表明任何在可观察层面不同的类型转换语义都必然违反一个或多个公理。

在设计名为 Core GrEff 的核心语言时，我们扩展了这一方案。此前，这一方案仅在简单类型上得到验证；我们将其扩展到值类型和效应类型的效应强制转换与子类型关系。随后，我们证明，操作语义的每条规则都可以从类型转换的最小上界／最大下界规范、同余规则以及处理器的效应转发原则推导出来。效应转发原则指出，如果某个处理程序子句只是用相同的续延重新引发它所处理的效应，那么无需改变系统的可观察行为，就可以移除该子句。这一原则既直观，也是一项非常理想的编译器优化。

在这项工作中，我们扩展了先前用于证明渐进性的步数索引逻辑关系模型，以处理效应和子类型关系，并证明运行时强制转换满足以下性质：

嵌入-投影对 [17]。通过这一过程，我们展示了如何在同一系统中结合效应嵌入-投影对和值嵌入-投影对，以及它们如何相互作用。此外，我们还确定了子类型关系与运行时强制转换之间交互作用的新语义原则。

The contributions of the paper are as follows:

(1) 我们定义了一种渐进式类型语言 GrEff，支持从未检查效应和处理器迁移到已检查效应和处理器。(2) 我们证明该语言满足静态渐进保证和动态渐进保证（渐进性）。(3) 我们通过将该语言elaboration到核心语言核心 GrEff，为其赋予语义。(4) 我们通过给出不等式理论，将核心语言所需的渐进性和程序等价关系性质公理化。随后，我们通过对该理论中的某些等式定向，从中推导出操作语义，并表明操作行为可以从渐进性和外延性原则中推导出来。(5) 我们构造了一个逻辑关系模型，扩展了先前关于嵌入-投影对语义的工作，使其涵盖效应和子类型关系，从而证明了类型可靠性和渐进性。

2 GrEff 概述

在讨论 GrEff 的语法和语义之前，我们先非正式地介绍其特性，以及它如何支持从未经检查的效应处理程序逐步迁移到经过检查的效应处理程序。举例来说，我们来看一个使用效应处理程序实现简单线程库的例子。我们从图 1 中使用 ASCII 语法和未经检查的效应类型的系统开始。我们将这个程序拆分为三个模块：首先，模块 `Operations` 定义了其他模块将使用的效应。这些是线程使用的效应：用于显示输出，以便我们观察线程交错执行情况的 `print`，将控制权交还给调度器的 `yield`，以及最重要的 `fork`，它允许线程创建新线程。每个效应声明`effect e : Req ~> Resp`都标注了两种类型：发送给环境处理器的请求类型，以及预期从环境处理器获得的响应类型。例如，print 的请求类型是要打印的 `string`，响应则是 unit。在更实际的场景中，响应类型可以是布尔值，用来表示打印是否成功；也可以是无符号整数，用来表示成功打印的字节数。对于 yield，请求和响应都是 unit。对于 fork，响应类型同样是 unit，而请求类型是一个延迟计算 `1 -[?]> 1`，其中 ? 是调用该函数时可能引发的效应的类型。在本例中，? 表示该延迟计算可能引发任意效应。

接下来，模块 Scheduler将轮询调度器定义为所提供效应的处理器。为简单起见，该实现依赖某些内置的队列实现，以及浅层处理器；浅层处理器是对我们形式化方法的简单扩展，其中使用了更复杂的深层处理器。最后，我们有 Main 模块，它使用 Scheduler模块中定义的调度器，以及一个使用 Operations中定义的效应的延迟计算，实现了一个使用线程打印简单消息的程序；其输出将取决于调度器的行为。

该程序中的效应类型标注不够精确，这意味着程序员从其他模块导入函数时，必须依赖文档或理解代码，才能弄清楚可能引发哪些效应。借助效应类型标注，可以使用函数自身的效应注解精确地表达这些信息。例如，在 fork 操作的声明中，请求是一个延迟计算；当它作为线程启动时，可能会进一步引发其他效应，例如操作共享状态、向其他线程执行 yield，或分叉出更多线程。然而，在效应跟踪不精确的情况下，调度器过程的类型是一个信息不足的类型（1

模块 Operations，其中效应 print：str ~> 1效应 yield： 1 ~> 1效应 fork：(1 -[?]> 1) ~> 1模块 Scheduler，其中导入 Operations.print：str ~> 1导入 Operations.yield： 1 ~> 1导入 Operations.fork：(1 -[?]> 1) ~> 1定义 sch-loop：Queue (1 -[?]> 1) -[?]> str -[?]> str = lambda q。将 q 与 empty 匹配 ->() dequeue(thunk, q') -> 使用 ret _ -> 浅层处理器处理 thunk()，sch-loop q' fork(new,k) -> sch-loop（enqueue（enqueue q new）k）yield(_, k) -> sch-loop（enqueue q k）print(s, k) -> lambda s'。k(s' ++ s) 定义 scheduler：(1 -[?]> 1) -[?]> str = lambda thunk。sch-loop（enqueue empty thunk）"" 模块 Main，其中导入 Operations.print：str ~> 1导入 Operations.yield： 1 ~> 1导入 Operations.fork：(1 -[?]> 1) ~> 1导入 Scheduler.scheduler：(1 -[?]> 1) -[?]> str 定义 letters：1 -[?]> 1 =print("a")；yield()；print("b")；() 定义 numbers：1 -[?]> 1 =print("1")；fork(letters)；print("2")；() 定义 main：1 -[?]> str =scheduler(numbers)

Fig. 1. GrEff Threading Program with Imprecise Types

-[?]> 1) -[?]> 1 so we cannot specify in the type which operations the scheduler will handle and which it will propagate forward.

GrEff 还允许引入精确的效应类型，以便在类型结构中表达这些选择。在图2中，我们展示了同一个线程程序的完全精确类型版本（实现保持不变，现已省略）。这样，我们便可以在 Scheduler模块中规定，调度器所接收的线程可以（1）print 一个字符串，（2）yield 给其他线程，以及（3）fork 出具有相同效应的更多线程。为表达这一点，调度器模块将类型更改为 1 -[fork,print,yield]> 1 -[]> str，表示调度器将接收一个可能fork、print 或yield的延迟计算，但其自身将返回一个字符串，且不会执行任何 raise 操作。此外，我们还可以表达*fork*出的线程也只能引发这三种效应。这通过为*import* 语句添加注解来表达，该语句将 fork 定义为一个递归的[1]效应类型，其响应类型为平凡类型，而请求类型则是能够引发所提供的三种效应的延迟计算的类型。随后，所有 fork 效应的出现都会使用这一类型信息，在

[1]though recursive effect types are natural here, we do not support them in our core language and leave this extension to future work

```
模块Operations 其中效应print : str  ~> 1效应 yield :  1 ~> 1效应fork :(1 -[
fork,print,yield]> 1)  ~> 1模块 Scheduler其中 导入 Operations.print:str  ~> 1导入
Operations.yield:  1 ~> 1导入 Operations.fork :(1-[fork,print,yield]> 1)  ~> 1定义
sch-loop: 队列 (1-[fork,print,yield]> 1) -[]> str -[]> str  = ... 定义 scheduler : (1-[
fork,print,yield]> 1)-[]> str  = ... 模块 Main 其中导入 Operations.print : str  ~> 1
导入 Operations.yield :  1 ~> 1导入Operations.fork : (1 -[fork,print,yield]> 1)  ~> 1
导入 Scheduler.scheduler : (1-[fork,print,yield]> 1) -[]> str 定义 letters :1 -[
print,yield]> 1  =print("a"); yield();print("b"); ()定义 numbers : 1 -[fork,print
]> 1  =print("1");fork(letters); print("2"); () 定义 main: str  =sc
heduler(numbers)
```

Fig. 2. GrEff Threading Program with Precise Typing

raise操作或处理器，在此模块中。类型在主模块中也有所改变，其中字母延迟计算可以被赋予一种类型，表示它只会 print和 yield，而数字延迟计算只会 fork 和print。借助一种允许使用较少效应的函数被用于能够处理更多效应的上下文中的效应子类型，这些类型与 Scheduler 中的类型兼容。

由于 GrEff 是一种渐进式效应语言，以不精确程序起步的程序员无需在运行程序前为整个程序完成完整的类型标注。相反，程序员可以逐步地从不精确风格迁移到更精确的风格，例如一次迁移一个模块。事实上，这里介绍的三个模块的不精确版本和精确版本的 $2^3 = 8$ 种组合中的任何一种，都能通过 GrEff 渐进式类型与效应检查器。例如，我们可以先为 Operations模块添加精确的效应类型标注，以指定 fork线程可能具有的效应。在非渐进式类型系统中，这需要修改使用者模块以采用更精确的类型标注；而在GrEff 中，导入语句允许模块内部的使用继续采用不精确的类型标注，并且在模块边界处会检查：所声明类型中fork 效应的精确组成部分是否与定义模块中声明的精确组成部分匹配。另一方面，我们也可以让 Operations 模块保持不精确的类型标注，而先为Scheduler 模块添加类型标注。与传统的类型语言相比，这同样不同寻常：我们在一个模块中声明了一个名义数据类型，却在客户端模块中以另一种类型使用它。导入语句允许在不更改原始库的情况下逐步迁移客户端代码。

模块系统在让程序员能够独立选择是否迁移名义型数据类型的声明位置及其使用处方面发挥着至关重要的作用。如果我们使用的是一种纯粹以表达式为中心的语言，那么对模块声明的任何更改，即使是在渐进式语言中，也会改变对该操作的使用进行的类型检查。在这里，我们采用

Typed Racket 风格的模块边界，作为一种形式化方式，用来指定代码库不同部分对名义型效应操作类型的不同预期。

3 表层与核心 GrEff

本节介绍 GrEff 的语法和类型规则，以及如何将其 elaboration 为核心语言 Core GrEff。GrEff 包含一个模块系统和名义效应操作，同时还包含一种渐进式类型检查算法，允许混合使用动态和静态效应跟踪。另一方面，Core GrEff 是一种更简单的表达式语言，具有声明式类型系统，其中所有渐进式类型转换（但不包括子类型关系）都在项中显式表示。GrEff 的高级特性会在 elaboration 到核心 GrEff 时被消除。由于 Core GrEff 更简单，我们先描述它的语法和类型规则，再介绍 GrEff 及其类型检查与 elaboration 算法。

3.1 核心 GrEff 的语法和类型规则

我们在图 3 中概述了核心 GrEff 的语法。核心 GrEff 的表达式语法包含 λ 演算中常见的变量、let 绑定、函数和布尔值语法。此外，还有一个项 $\mho$，表示类型转换失败所产生的运行时错误。接下来，它还包含用于引发效应操作的形式 raise $\varepsilon(M)$，以及用于处理效应操作的形式 handle $M\{\text{ret } x.N \mid \phi\}$。处理器包含一个 ret $x.N$子句，用于处理 M的返回值，以及用于处理效应的子句 ϕ。抽象掉语法细节后，ϕ被建模为一个有限支持的偏函数（记作 $\rightharpoonup_{\text{fin}}$），它将效应名称映射到项；这些项都有两个自由变量 x和 k，分别表示被引发效应的载荷及其续延。也就是说，如果语法上的处理器包含子句 $\varepsilon(x,k) \mapsto N_\varepsilon$，我们就将其建模为 $\phi(\varepsilon) = N_\varepsilon$。接下来，核心 GrEff 包含四种显式渐进式类型转换形式：针对值类型的向下转换（$\mathrm{h}A \quad B\mathrm{i}M$）和向上转换（$\mathrm{h}B \quad A\mathrm{i}M$），以及针对效应类型的对应转换（$\mathrm{h}\sigma \quad \tau\mathrm{i}M$ 和 $\mathrm{h}\tau \quad \sigma\mathrm{i}M$）。最后，我们加入一个项 $\mho$，表示运行时强制转换错误。

值类型 A, B, C 对运行时值进行分类：在这个简单演算中，就是布尔值和函数，其中函数的类型是相对于定义域、陪域以及效应类型 σ 来确定的，该效应类型对函数被调用时可能引发的效应进行分类。效应类型要么是 ? 以表示动态跟踪的效应，要么是具体效应类型。具体效应类型说明哪些效应名称 ε 可以被引发，以及当它们被引发时，引发方提供的请求 A 的类型是什么，处理方可以恢复的响应 B 的类型是什么。抽象掉句法细节，这被定义为从名称到值类型对的有限支持部分映射（即，笛卡尔积 $\text{ValueType}^2 = \text{ValueType} \times \text{ValueType}$ 的一个元素）。为了建模效应 ε 可以以请求类型 A 和响应类型 B 被引发，我们会定义 $\sigma_c(\varepsilon) = (A, B)$，我们会更暗示性地将其记为 $\varepsilon : A \rightsquigarrow B \in \sigma_c$。如第 2 节所示，程序声明哪些效应名称可以使用，以及关联的请求和响应类型。为了在类型检查核心 GrEff 表达式时跟踪此信息，我们针对签名 Σ 对所有 GrEff 表达式进行类型检查，该签名将一对非跟踪类型关联到每个名称。所谓非跟踪类型，是指仅使用 ? 效应类型的值类型。此外，表达式是相对于普通类型上下文 Γ 进行类型检查的。最后，我们定义值和求值上下文的典型概念，以编码按值调用、从左到右的求值顺序。最值得注意的是，所有强制转换都是求值上下文，而函数类型转换是值，即“代理”，它们延迟类型强制执行直到执行应用。

在签名中使用非跟踪类型是GrEff 语义中的一项设计决策：这意味着当模块中声明一个效应时，它只完整指定请求和响应类型中非效应类型标注的部分。当模块导入一个效应时，只会检查新的请求和响应类型是否与导出模块一致 。由于效应类型可以被重新导出，且一致性关系并不具有传递性，这意味着通常情况下，

项 $M, N ::= x \mid \lambda x.M \mid M\,M' \mid$真 $\mid$假 $\mid$如果 $M\{N\}\{N\}\mid$let $x = M$中 $N \mid$raise 操作 $\varepsilon(M) \mid$处理器 $M\{$返回 $x.N \mid \phi\}\mid \mathsf{h}B \quad A\mathsf{i}M \mid \mathsf{h}A \quad B\mathsf{i}M \mid \mathsf{h}\tau \quad \sigma\mathsf{i}M \mid \mathsf{h}\sigma \quad \tau\mathsf{i}$ $M \mid \mho$处理程序子句 $\phi \quad \in$名称 $\rightharpoonup_{\text{fin}}$项 值类型 $A, B, C ::= A \to_\sigma B \mid$布尔类型 效应类型 $\sigma, \tau ::= ? \mid \sigma_c$具体效应类型 $\sigma_c \quad \in$名称 $\rightharpoonup_{\text{fin}}$值类型^{2}签名 $\Sigma \quad \in$名称 $\rightharpoonup_{\text{fin}}$非跟踪类型^2 非跟踪类型 $A_? ::= A_? \to_? A_? \mid$布尔类型 类型上下文 $\Gamma ::= \cdot \mid \Gamma, x : A$值 $V ::= x \mid \lambda x : A.M \mid$真 $\mid$假$\mid \mathsf{h}A \to_\sigma B \quad A' \to_{\sigma'} B'\mathsf{i}V \mid \mathsf{h}A' \to_{\sigma'} B' \quad A \to_\sigma B\mathsf{i}V$求值上下文 $E ::= \bullet \mid \mathsf{h}B \quad A\mathsf{i}E \mid \mathsf{h}A \quad B\mathsf{i}E \mid \mathsf{h}\tau \quad \sigma\mathsf{i}E \mid \mathsf{h}\sigma \quad \tau\mathsf{i}E\mid$raise 操作 $\varepsilon(E) \mid$处理器 $E\{$返回 $x.N \mid \phi\} \mid E\,M \mid V\,E\mid$ 如果 $E\{N_t\}\{N_f\} \mid$let $x = E$ 中 N

Fig. 3. Core GrEff Syntax

一个模块中使用的类型将与最初声明该类型的模块中的类型不一致。然而，一致性的传递闭包确实确保这些类型具有相同的非跟踪部分，因此，将效应类型的有效实例定义为任何在类型的这一非跟踪部分上达成一致的实例是合理的。另一种做法是让签名具有一个完全指定的类型，并限制效应的所有使用，使其至少与原始声明一样精确。然而，我们认为这不符合渐进式类型的精神：例如，模块 P **p**提供效应声明，模块 I是一个**i**中间模块，重新导出该效应，而模块 C是 I的**c**客户端，它使用该效应但不直接与 P交互。设 P、I、C最初都使用未跟踪效应，但随后 C变为带类型的，因此为该效应指定了精确的效应类型。程序运行正常，最终又使 P变得更加精确，但其方式导致效应实现与 C中的使用不兼容。在 GrEff 中，这不会导致静态错误，因为 C和 P并不是通过精确类型标注的接口直接通信，而是通过使用不精确类型标注的中间模块 I进行通信。实际上，I可能在 C和 P之间以不同方式使用该效应，而且不会出现运行时类型错误。然而，如果 I变为精确类型标注，它就必须指定对该效应的解释，并且会与 C或 P产生静态错误。

接下来，我们在图 *4* 中给出声明式项的类型规则。主要判断式 $\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma M : A$表示，在假设 Γ, M 可以引发来自 σ 的效应，并产生一个类型为 A 的最终值。我们遵循这样的约定：每当构造判断式 $\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma M : A$ 时，必须先确定 Γ, A, σ 中的类型在签名 Σ 下是良构的。首先，我们加入一个针对值子类型关系和效应子类型的子类型规则，稍后会对其进行定义。值形式（变量、布尔值和 λ 抽象）的规则都具有任意效应类型 σ，因为它们本身不会引发任何效应。运行时强制转换错误 $\mho$ 可以具有任意值类型或效应类型。let、应用和条件规则只要求所有子项使用相同的效应类型，不过可以使用子类型规则来合并效应。raise 规则表示，被引发的效应必须包含在当前效应类型中，并且请求的载荷也必须具有相同的效应类型。

接下来，处理器的类型规则如下。首先，输出值类型为 B，输出效应类型为 τ，而对于判定项 M，相应的类型为 A 和 σ。首先，我们检查

$$\frac{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma M : A \qquad \Sigma \mid \Gamma \vdash A \leq B \qquad \Sigma \mid \Gamma \vdash \sigma \leq \tau}{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\tau M : B} \qquad \frac{\Gamma(x) = A}{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma x : A} \qquad \Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma \mho : A$$

$$\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma \texttt{true}, \texttt{false} : \texttt{bool} \qquad \frac{\Sigma \mid \Gamma, x : A \vdash_\tau M : B}{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma \lambda x.M : A \to_\tau B} \qquad \frac{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma M : A \quad \Sigma \mid \Gamma, x : A \vdash_\sigma N : B}{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma \mathsf{Let}\ \ x = M \mathsf{in}\ \ N :\ B}$$

$$\frac{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma M : A \to_\sigma B \quad \Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma N : A}{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma M N :\ B} \qquad \frac{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma M : \text{布尔类型} \qquad \Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma N_t : B \qquad \Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma N_f : B}{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma \texttt{if}\ M\{N_t\}\{N_f\} : B} \qquad \frac{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma M : A \qquad \epsilon @ A \rightsquigarrow B \in \sigma}{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma \texttt{raise}\ (\epsilon @ A \rightsquigarrow B)(M) : B}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma M : A \\ \Sigma \mid \Gamma, x : A \vdash_\tau N : B \\ (\forall(\varepsilon : A_\varepsilon \rightsquigarrow B_\varepsilon) \in \sigma.(\varepsilon \notin \text{定义域}(\phi)\ \wedge (\varepsilon :\ A_\varepsilon \rightsquigarrow B_\varepsilon)\ \in \tau) \\ \vee(\Sigma \mid \Gamma, x : A_\varepsilon, k : B_\varepsilon \to_\tau B \vdash_\tau \phi(\varepsilon) : B))\end{array}}{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\tau \texttt{handle}\ M\{\texttt{ret}\ x.N \mid \phi\} : B} \qquad \frac{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma M : A \qquad A \sqsubseteq B}{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma \langle B \quad A \mathrm{i} M : B}$$

$$\frac{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma M : B \qquad A \sqsubseteq B}{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma \langle A \quad B \mathrm{i} M : A} \qquad \frac{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma M : A \qquad \sigma \sqsubseteq \sigma'}{\Sigma \mid \Gamma \vdash_{\sigma'} \langle \sigma' \quad \sigma \mathrm{i} M : A} \qquad \frac{\Sigma \mid \Gamma \vdash_{\sigma'} M : A \qquad \sigma \sqsubseteq \sigma'}{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma \langle \sigma \quad \sigma' \mathrm{i} M :\ A}$$

Fig. 4. Core Greff Typing

返回子句 N 具有与处理器整体相同的输出类型，当其输入 x 具有 M 的输出类型时。接下来，对于由 M 引发的每个效应操作 $\varepsilon : A_\varepsilon \rightsquigarrow B_\varepsilon$，要么该效应未被 ϕ处理，在这种情况下它必须包含在最终效应类型中，要么它由ϕ处理。如果它由 ϕ 处理，则子句 $\phi(\varepsilon)$ 必须类型良好，具有请求值 $x : A_\varepsilon$ 以及一个接受响应的续延，其输出效应和值类型与整体项匹配$k : B_\varepsilon \to_\tau B$。最后，我们包含类型和效应向上强制转换和向下强制转换的规则。每当 类型精度 关系 $A \sqsubseteq B$ 成立（待定义）时，我们得到从更精确的类型 A 到更不精确的类型 B 的 向上强制转换，以及从 B 到 A 的相应向下强制转换。

最后，为了完成语法，在图 5中，我们定义了类型上的三个判断式：良构性、子类型关系和类型精度。良构性 $\Sigma \vdash A$和 $\Sigma \vdash \sigma$会检查效应操作中使用的类型擦除后，是否与签名中关联的类型一致。这里我们使用记号 $\lceil A \rceil$ 表示对效应类型标注信息进行擦除，即将任何效应类型子项替换为 σ 动态类型 ?。布尔值和函数的子类型关系遵循常规规则：函数类型在定义域上逆变，在陪域和效应上协变。效应类型的子类型关系同时包含宽度子类型关系方面：较小的类型可以引发更少的操作；还包含深度方面，它在请求类型上协变，在响应类型上逆变。从发出请求的一方的角度来看，这种变异性是合理的，也与函数类型的子类型关系相匹配。最后，类型精度 $A \sqsubseteq B$ 则追踪类型的“动态”或“不精确”程度。对于函数，它在每个参数上都协变；对于效应类型，动态效应是最不精确的，而对于两个具体效应集，深度规则在请求和响应位置上都是协变的。在更标准、具有完整动态类型的渐进式语言中，除了动态效应类型之外，我们还会有一个动态值类型 $?_v$，它同样是值类型中精度最低的。

$$\Sigma \vdash \texttt{bool} \qquad \frac{\Sigma \vdash A \qquad \Sigma \vdash \sigma \qquad \Sigma \vdash B}{\Sigma \vdash A \to_\sigma B} \qquad \Sigma \vdash ? \qquad \frac{\forall \varepsilon : A \rightsquigarrow B \in \sigma_c. \; (\varepsilon : |A| \rightsquigarrow |B| \in \Sigma). \wedge \Sigma \vdash A \wedge \Sigma \vdash B)}{\Sigma \vdash \sigma_c}$$

$$\texttt{bool} \leq \texttt{bool} \qquad \frac{A' \leq A \qquad \sigma \leq \sigma' \qquad B \leq B'}{A \to_\sigma B \leq A' \to_{\sigma'} B'} \qquad ? \leq ? \qquad \frac{\forall \varepsilon : A_\sigma \rightsquigarrow B_\sigma \in \sigma_c. \exists \varepsilon : A_\tau \rightsquigarrow B_\tau \in \tau_c. \; A_\sigma \leq A_\tau \wedge B_\tau \leq A_\tau}{\sigma_c \leq \tau_c}$$

$$\texttt{bool} \sqsubseteq \texttt{bool} \qquad \frac{A \sqsubseteq A' \qquad \sigma \sqsubseteq \sigma' \qquad B \sqsubseteq B'}{A \to_\sigma B \sqsubseteq A' \to_{\sigma'} B'} \qquad \sigma \sqsubseteq ? \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathrm{dom}(\sigma_c) = \mathrm{dom}(\sigma_c') \\ \forall \varepsilon : A \rightsquigarrow B \in \sigma_c. \exists \varepsilon : A' \rightsquigarrow B' \in \sigma_c'. \\ A \sqsubseteq A' \wedge B \sqsubseteq B'\end{array}}{\sigma_c \sqsubseteq \sigma_c'}$$

图 5. 良构类型与效应、类型与效应精确性

$$\begin{array}{rcl}
\text{Programs } P & ::= & L; \cdots L_{main} \\
\text{Value Types } A, B, C & ::= & A \to_\sigma B \mid \texttt{bool} \\
\text{Effect Types } \sigma, \tau & ::= & ? \mid \sigma_s \\
\text{Operation Set } \sigma_s, \tau_s & \in & \mathcal{P}_{\text{fin}}(\text{Name}) \\
\text{Values } V & ::= & x \mid \lambda x : A.M \mid \texttt{true} \mid \texttt{false} \\
\text{Terms } M, N & ::= & x \mid \texttt{raise}\ \varepsilon(M) \mid \texttt{handle}_{C\,!\,\sigma}\ M\,\{\texttt{ret}\ x.N \mid \phi\} \\
 & & \mid \lambda x.M \mid M\,M' \mid \texttt{true} \mid \texttt{false} \mid \texttt{if}\ M\{N\}\{N\} \\
 & & \mid M :: A \mid M :: \sigma \\
\text{Handler clauses } \phi & \in & \text{Name} \rightharpoonup_{\text{fin}} \text{Term} \\
\text{Modules } L & ::= & \texttt{module}\ m\ \{b\} \\
\text{Module Body } b & ::= & \cdot \mid D; b \\
\text{Main Module } L_{main} & ::= & \texttt{main}\ \{b; M\} \\
\text{Module reference } r & ::= & m.x \mid m.\varepsilon \\
\text{Declaration } D & ::= & \texttt{import-eff}\ r\,@\,A \rightsquigarrow B \mid \texttt{effect}\ \varepsilon : A \rightsquigarrow B \\
 & & \mid \texttt{define}\ x = V \mid \texttt{import-val}\ r\ \texttt{as}\ x\,@\,A \\
\text{Program Typing Contexts } \Delta & ::= & \cdot \mid \Delta, x \mapsto \Gamma_s \\
\text{Module Typing Contexts } \Gamma_s & ::= & \cdot \mid \Gamma_s, \varepsilon : A \rightsquigarrow B \mid \Gamma_s, x : A
\end{array}$$

图 6. GrEff 语法

3.2 GrEff 的语法与 elaboration

我们在图中展示了表层语言GrEff 的语法6。一个GrEff 程序 P 由一系列模块组成，并以单个“Main”模块结尾。每个模块 m 由两部分组成：首先是效应定义，然后是值定义，其类型注释可以使用该模块中先前定义的效应。效应定义可以是声明新的效应操作 $\texttt{effect}\ \varepsilon : A \rightsquigarrow B$，也可以是导入现有的效应操作 $\texttt{import-eff}\ m.\varepsilon\,@\,A \rightsquigarrow B$。在这两种情况下，声明都包含效应的请求类型 A 和响应类型 B。效应导入会将另一个模块中定义的效应引入当前作用域，但请求类型和响应类型可能不同。为了支持 渐进式 迁移，这些类型允许与原始类型具有不同的精度级别，但如果两者都具有精确精度，则必须匹配。

$$\frac{\Sigma \mid \Delta \mid \cdot \vdash b \Rightarrow \Sigma'; \gamma; \Gamma \quad \Gamma \vdash M_s \Rightarrow M : \sigma \,!\, A}{\Sigma \mid \Delta \vdash \texttt{main}\ b\ M_s \Rightarrow \Sigma' \vdash_\sigma \texttt{let}\ \Gamma = \gamma\ \texttt{in}\ M : A} \qquad \frac{\Sigma \mid \Delta \mid \cdot \vdash b \Rightarrow \Sigma'; \gamma; \Gamma \quad \Sigma, \Sigma' \mid \Delta, m \mapsto \Gamma \vdash P \Rightarrow \Sigma'' \vdash_\sigma M : A}{\Sigma \mid \Delta \vdash \text{模块}\ \ m\ b;\ \ P \Rightarrow \Sigma, \Sigma', \Sigma'' \vdash_\sigma \text{Let}\ \ \Gamma = \gamma\ \text{在}\ \ M\text{:}\ \ A}$$

$$\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma \vdash \cdot \ \Rightarrow \cdot; \cdot; \cdot \qquad \frac{\varepsilon \notin \Sigma \qquad \Gamma \vdash A_s \Rightarrow A \qquad \Gamma \vdash B_s \Rightarrow B}{\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma \vdash \text{效应}\ \ \varepsilon\text{:}\ \ A_s \rightsquigarrow B_s \Rightarrow (\varepsilon @ \lceil A \rceil \rightsquigarrow \lceil B \rceil); \cdot; \varepsilon @ A \rightsquigarrow B}$$

$$\frac{\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma \vdash D \Rightarrow \Sigma'; \gamma'; \Gamma' \quad \Sigma, \Sigma' \mid \Delta \mid \Gamma, \Gamma' \vdash b \Rightarrow \Sigma''; \gamma''; \Gamma''}{\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma \vdash D; b \Rightarrow \Sigma'\ \Sigma''; \gamma'\ \gamma''; \Gamma'\ \Gamma''} \qquad \frac{\Delta(m) \ni \varepsilon @ A' \rightsquigarrow B' \quad \Gamma \vdash A_s \Rightarrow A \quad \Gamma \vdash B_s \Rightarrow B \quad A \sim A' \quad B \sim B'}{\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma \vdash \texttt{import-eff}\ m.\varepsilon\ @\ A_s \rightsquigarrow B_s \Rightarrow \cdot; \cdot; \varepsilon @ A \rightsquigarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash V_s \Rightarrow V : \emptyset \,!\, A}{\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma \vdash \texttt{define}\ x = V_s \Rightarrow \cdot; V/x; x : A} \qquad \frac{\Delta(m) \ni x : A' \quad \Gamma \vdash A_s \Rightarrow A \quad A' \lesssim A}{\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma \vdash \texttt{import-val}\ m.x\ \texttt{as}\ y\ @\ A_s \Rightarrow \cdot; \langle A \Leftarrow A' \rangle x/y; y : A}$$

Fig. 7. GrEff Typing/Elaboration, Module Language

效应声明之后是值定义，它们也分为两种：定义一个新值 define $x = V$，或导入在另一个模块中声明的值（其类型可能不同）import-val r as $x@A$。为简单起见，所有效应和值都是公开的，后续模块均可导入。最后，程序以一个 Main 模块结尾，该模块包含同类的效应和值声明，后面再接一个最终的 main 表达式。

接下来，我们介绍从 GrEff 到核心 GrEff 的 elaborator，它也充当类型检查器。我们将 GrEff 程序视为本质上是效应签名的描述 Σ 以及在该签名下良类型的封闭表达式。模块系统是一种管理签名中新效应操作声明的方式，也是一种通过为请求和响应类型提供名义型关联来管理效应操作类型的方式，而不仅仅是核心 GrEff 中的结构型类型。我们在图 7 中描述模块语言的 elaboration。顶层判断式$\Sigma \mid \Delta \vdash P \Rightarrow \Sigma' \vdash_\sigma M\text{:}\ A$ 说，在起始签名 Σ 和先前定义的模块Δ下，我们可以将 P elaboration 为项 M，具有效应类型 σ 和值类型 A，该项在签名通过 Σ' 扩展后是良类型的。要 elaboration 一个完整程序，我们用空签名和模块类型初始化此判断式 $(\cdot \mid \cdot \vdash P \Rightarrow \Sigma \vdash_\sigma M\text{:}\ A)$。这表示程序不仅表示一个核心 GrEff 程序，而且还具有分配新效应名称 Σ' 的"副作用"。模块用判断式 $\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma \vdash b \Rightarrow \Sigma'; \gamma; \Gamma'$ 进行 elaboration。此判断式的输出是模块新分配的效应 Σ'、模块定义的效应操作名称和值的类型 Γ' 以及模块定义的所有值的定义，作为从 Γ' 中的名称到其关联类型的项的替换 γ'。然后，要 elaboration 由多个模块组成的程序，首先 elaboration 这些模块，然后 elaboration 程序的其余部分，最后通过 let 绑定模块中声明的所有名称将两者结合起来，我们将其简写为 let $\Gamma = \gamma$ in M。注意，尽管 Γ 包含变量和效应声明，但效应声明在 elaboration 的这部分中未使用。模块通过组合每个声明的 elaboration 结果来 elaboration。新的效应声明检查该名称先前未声明，然后递归 elaboration 为请求和响应声明的语法类型，然后将这些添加到分配的效应以及模块中声明的局部效应名称中。添加到签名时，我们取类型的擦除，因为签名使用未跟踪的类型。接下来，要从不同模块导入效应，检查为该效应给出的类型是否与其他模块中声明的类型兼容。

$$\langle A \Leftarrow B\rangle M = \langle A \quad \lceil A\rceil \mathrm{ih} \lceil B\rceil \quad B\rangle M \qquad \langle \sigma \Leftarrow \tau\rangle M = \langle \sigma \quad ?\rangle\langle ? \quad \tau\rangle M$$

$$\frac{\Gamma \ni x : A}{\Gamma \vdash x \Rightarrow x : \emptyset \,!\, A} \qquad \Gamma \vdash \mathtt{true} \Rightarrow \mathtt{true} : \emptyset \,!\, \mathtt{bool} \qquad \Gamma \vdash \mathtt{false} \Rightarrow \mathtt{false} : \emptyset \,!\, \mathtt{bool}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M_s \Rightarrow M : \sigma \,!\, A' \qquad \Gamma \vdash A_s \Rightarrow A \qquad A' \lesssim A}{\Gamma \vdash M_s :: A_s \Rightarrow \langle A \Leftarrow A'\rangle M : \sigma \,!\, A} \qquad \frac{\Gamma \vdash M_s \Rightarrow M : \sigma' \,!\, A \qquad \Gamma \vdash \sigma_s \Rightarrow \sigma \qquad \sigma' \lesssim \sigma}{\Gamma \vdash M_s :: \sigma_s \Rightarrow \langle \sigma \Leftarrow \sigma'\rangle M : \sigma \,!\, A}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash M_s \Rightarrow M : \sigma_m \,!\, \text{布尔类型} \qquad \Gamma \vdash N_s \Rightarrow N : \sigma_n \,!\, B \qquad \Gamma \vdash N'_s \Rightarrow N' : \sigma'_n \,!\, B' \\ C = B \mathbin{\tilde{\vee}} B' \qquad \sigma = \sigma_m \mathbin{\tilde{\vee}} \sigma_n \mathbin{\tilde{\vee}} \sigma'_n\end{array}}{\Gamma \vdash \text{if } M_s\{N_s\}\{N'_s\} \Rightarrow \text{若 } \mathrm{h}\sigma\Leftarrow\ \sigma_m\mathrm{i}M\{\mathrm{h}\sigma\Leftarrow\ \sigma_n\mathrm{ih}C\Leftarrow\ B\mathrm{i}N\}\{\mathrm{h}\sigma\Leftarrow\sigma'_n\mathrm{ih}C\Leftarrow\ B'\mathrm{i}N'\} :\ \sigma \,!\, \text{布尔类型}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_s \Rightarrow A \qquad \Gamma, x : A \vdash M_s \Rightarrow M : \sigma \,!\, B}{\Gamma \vdash \lambda x : A_s . M_s \Rightarrow \lambda x . M : \emptyset \,!\, A \to_\sigma B} \qquad \frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash M_s \Rightarrow M : \sigma_m \,!\, A \to_{\sigma_o} B \qquad \Gamma \vdash N_s \Rightarrow N : \sigma_n \,!\, A' \\ A' \lesssim A \qquad \sigma = \sigma_m \mathbin{\tilde{\vee}} \sigma_n \mathbin{\tilde{\vee}} \sigma_o\end{array}}{\Gamma \vdash M_s\ N_s \Rightarrow (\mathrm{h}\sigma\Leftarrow\ \sigma_m\mathrm{i}M)(\mathrm{h}A\Leftarrow\ A'\mathrm{ih}\sigma\Leftarrow\ \sigma_n\mathrm{i}N) :\ \sigma \,!\, B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M_s \Rightarrow M : \sigma_m \,!\, A' \qquad \Gamma \ni \varepsilon @ A \rightsquigarrow B \qquad A' \lesssim A \qquad \sigma = \sigma_m \mathbin{\tilde{\vee}} \{\varepsilon @ A \rightsquigarrow B\}}{\Gamma \vdash \text{raise 操作 } \varepsilon(M_s) \Rightarrow \text{Let } x = \mathrm{h}\sigma\Leftarrow\ \sigma_m\mathrm{i}M\text{in } \mathrm{h}\sigma\Leftarrow \{\varepsilon @ A \rightsquigarrow B\}\mathrm{i}\text{raise 操作 } \varepsilon(\mathrm{h}A\Leftarrow\ A'\mathrm{i}x) :\ \sigma \,!\, B}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash C_s \Rightarrow C \qquad \Gamma \vdash \sigma_s \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash M_s \Rightarrow M : \sigma_m \,!\, A_m \\ \Gamma, x : A \vdash N_s \Rightarrow N : \sigma_n \,!\, C_n \qquad \sigma_n \lesssim \sigma \qquad C_n \lesssim C \\ \mathrm{dom}(\phi_\Leftarrow) = \mathrm{dom}(\phi_s) \qquad \Gamma \vdash \mathrm{handleTy}(\sigma_m, \sigma, \mathrm{dom}(\phi_s)) = \sigma'_m \\ (\forall \varepsilon \in \mathrm{dom}(\phi_s).\ \exists (\varepsilon @ A_\varepsilon \rightsquigarrow B_\varepsilon) \in \Gamma. \\ \Gamma, x : A_\varepsilon, k : B_\varepsilon \to_\sigma C \vdash \phi_s(\varepsilon) \Rightarrow N_\varepsilon : \sigma_\varepsilon \,!\, C_\varepsilon \\ \sigma_\varepsilon \lesssim \sigma \qquad C_\varepsilon \lesssim C \qquad \phi_\Leftarrow(\varepsilon) = \langle \sigma \Leftarrow \sigma_\varepsilon\rangle\langle C \Leftarrow C_\varepsilon\rangle N_\varepsilon)\end{array}}{\Gamma \vdash \text{处理器}_{\sigma\ s\,!\,C_s}\ M_s\ \{\mathtt{ret}\ x . N_s \mid \phi_s\} \Rightarrow \mathtt{handle}\ \langle \sigma'_m \Leftarrow \sigma_m\rangle M\ \{\mathtt{ret}\ x . \langle \sigma \Leftarrow \sigma_n\rangle\langle C \Leftarrow C_n\rangle N \mid \phi_\Leftarrow\} : \sigma \,!\, C}$$

$$\frac{\mathrm{dom}(\sigma_c) \subseteq \mathrm{dom}(\tau_c) \cup \sigma_s}{\Gamma \vdash \mathrm{handleTy}(\sigma_c, \tau_c, \sigma_s) = \tau_c \cup \Gamma(\sigma_s)} \qquad \Gamma \vdash \mathrm{handleTy}(?\ \tau_c, \sigma_s) = \tau_c \cup \Gamma(\sigma_s)$$

$$\Gamma \vdash \mathrm{handleTy}(\sigma_c, ?\ \sigma_s) = \sigma_c|_{\sigma_s} \uplus \lceil \Gamma(\mathrm{dom}(\sigma_c) - \sigma_s)\rceil \qquad \Gamma \vdash \mathrm{handleTy}(?, ?\ \sigma_s) = ?$$

Fig. 8. GrEff Typing/Elaboration, Expression Language

请注意，为了简化说明，所有模块中的效应都必须使用相同的名称。在实际实现中，可以轻松支持更灵活的重命名机制。这里，兼容性判断 $A \sim A'$ 定义为两个方向上的渐进子类型关系的合取，$A \lesssim A'$ 和 $A' \lesssim A$，其定义将在后文给出。这确保了该模块中使用此效应名称的任何导入都会成功。我们检查两个方向上的渐进子类型关系，因为在后续导入中，该效应可能用于正位置和负位置。此效应名称仅添加到局部名称中，而不添加到签名中，因为它使用的是一个已分配的效应名称。接下来，定义一个值只需对该值进行展开，将其类型添加到输出类型环境，并将该值与该名称关联起来。导入一个值的过程类似，只是我们会检查.....

声明的类型是渐进子类型，因此可以通过类型转换 h$A \Leftarrow A$'i 进行强制转换，其定义将在稍后介绍。

接下来，我们定义表达式语言的elaboration，如图 8。判断式 $\Gamma \vdash M_s \Rightarrow M : \sigma \,!\, A$ 表示在由 Γ 给出的名称类型下，GrEff表达式 M_s elaboration为核心 GrEff函数 M，其将是良类型的，具有推断的效应类型 σ 和值类型 A。所有形式本质上elaboration到核心 GrEff中的类似形式，但插入了合适的强制转换。首先，我们定义值类型强制转换的翻译 $\langle A \Leftarrow B \rangle M$ 和效应类型转换 $\langle \sigma \Leftarrow \tau \rangle M$ 为向上强制转换后跟向下强制转换。对于效应转换，这些强制转换经过动态效应类型，但对于两个值类型没有单一的最动态效应类型，因此我们再次使用擦除操作。注意，这仅在情形 $\lceil B \rceil = \lceil A \rceil$ 下是良类型的，这在以下情况下得到保证 $A \lesssim B$，这是插入强制转换的前提条件。这不一定是强制转换最高效的实现，我们在第 4.3

接下来，变量、布尔值和函数值展开为自身，并具有空效应类型 $\emptyset$。let绑定形式展示了不同效应类型的组合方式： M和 N 的效应类型使用渐进并 $\vee$进行组合，并将强制转换插入 M 和 N 中，使它们具有该效应类型。渐进并的作用类似于类型精确部分上的并，但扩展为使得 ˜such $\sigma \vee ? = \sigma$。类型标注形式仅检查适当类型是否满足渐进子类型判断式，并插入一个强制转换。这使用了下文定义的类型展开 $\Gamma \vdash A_s \Rightarrow A$。if 规则检查条件是否具有布尔类型，并将分支的渐进并作为输出值类型，同时也将条件表达式纳入渐进并，作为输出效应类型，这与先前的工作 [9]一致。应用规则类似，只是将参数强制转换为具有函数定义域类型，并将函数的效应类型与各项的效应类型进行并运算。接下来是 raise 形式，它展开为 raise，但首先对请求项进行let绑定，并将raise项强制转换为具有这样的效应类型：请求项的效应类型与该操作的类型的并。最后是最复杂的情形，即 handle 形式。handle形式展开为核心语言中的handle 形式，并在每个情形中插入强制转换，使它们与类型标注的值类型 C 和效应类型σ一致。请求变量和续延的输入通过查找 Γ中的效应获得，而输出则由类型标注给出。这一展开中最复杂的部分是判定项 M所需的强制转换。在核心语言中，我们需要判定项 M 所引发、但未被处理器捕获的所有效应都位于输出类型 σ中。但当 σ是动态的而 M具有具体效应类型，或反之时，这一点不一定成立，因此在这些情形下必须插入一个强制转换，以有效处理所有"其他"效应。该定义在 handle 判定项的特殊展开中给出（$\Gamma \vdash \mathsf{handleTy}(\sigma, \tau, \sigma_s) = \sigma_o$）。这里，类型 σ是判定项的展开类型， τ是 handle 表达式结果的展开类型，而 σ_s是处理器捕获的效应集合；我们将 $\Gamma(\sigma_s)$记作这样一个映射：它查找 σ_s中每个操作当前关联的类型。首先，如果 σ 和 τ 都是精确的效应集合，那么我们检查它所引发的所有效应是否要么被捕获，要么仍出现在输出类型中，并插入一个子类型强制转换。其次，如果 σ，即判定项的类型是不精确的，那么将其向下强制转换为仅包含输出效应与捕获效应的并集；否则报错。第三，如果判定项是精确的，但结果 $\tau = ?$ 是动态的，那么我们需要将所有未处理的效应操作向上强制转换为其动态版本。这通过令结果类型为组合 ($\uplus$) 来表达：该类型由按原样处理的效应（记作 $\sigma_c|_{\sigma_s}$）与其他未处理效应的最动态版本 $\lceil \Gamma(\mathrm{dom}(\sigma_c) - \sigma_s) \rceil$ 组合而成。这里 $\sigma_c|_{\sigma_s}$表示将偏函数 σ_s 限制为仅在集合 σ_s上有定义。最后，如果判定项和目标都不精确，那么我们就在判定项上放置一个指向 ? 的平凡恒等强制转换。

$$\Gamma \vdash \texttt{bool} \Rightarrow \texttt{bool} \qquad \frac{\Gamma \vdash A_s \Rightarrow A \qquad \Gamma \vdash B_s \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash \sigma_s \Rightarrow \sigma}{\Gamma \vdash A_s \to_{\sigma_s} B_s \Rightarrow A \to_{\sigma} B} \qquad \Gamma \vdash ? \Rightarrow ? \qquad \frac{\mathrm{dom}(\sigma_c) = \sigma_s \qquad \forall \varepsilon \in \sigma_c.\ \sigma_c(\varepsilon) = \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma \vdash \sigma_s \Rightarrow \sigma_c}$$

布尔类型 . 布尔类型 $\qquad \frac{A' \lesssim A' \qquad \sigma \lesssim \sigma' \qquad B \lesssim B'}{A \to_{\sigma} B \lesssim A' \to_{\sigma'} B'} \qquad ? \lesssim \sigma \qquad \sigma \lesssim ? \qquad \frac{\forall \varepsilon : A_{\sigma} \rightsquigarrow B_{\sigma} \in \sigma_c . \exists \varepsilon : A_{\tau} \rightsquigarrow B_{\tau} \in \tau_c . \quad A_{\sigma} \lesssim A_{\tau} \wedge B_{\tau} \lesssim A_{\tau}}{\sigma_c \lesssim \tau_c}$

Fig. 9. Gradual Subtyping and Type Elaboration

最后，图 9 描述了类型的 elaboration和渐进子类型关系。值类型和效应类型的展开 $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ 主要是结构型的，唯一的例外是，具体效应集的规则会根据上下文解析效应操作的请求和响应类型 Γ。接下来，我们描述主要遵循标准定义的 渐进 值类型的子类型关系 $A \lesssim B$和效应类型的子类型关系 $\sigma \lesssim \tau$，以确定动态强制转换 $\langle B \Leftarrow A \rangle$ 或 $\langle \tau \Leftarrow \sigma \rangle$ 何时会归约为类型精确部分上的子类型关系。请注意，我们在核心语言中定义类型的渐进子类型关系，即在elaboration之后定义，这样我们就可以比较跨越模块边界的效应类型，而这些模块对效应名称使用了不同的类型标注。基于这一点，该定义与子类型关系的定义类似，只不过动态效应类型是所有其他效应类型的渐进子类型和超类型。最后，我们指出 elaboration 的以下语法性质，这些性质可由结构归纳法得到。

引理3.1（展开是一个函数）。如果 $\cdot \mid \cdot \vdash P \Rightarrow \Sigma \vdash_{\sigma} M : A$ 且 $\cdot \mid \cdot \vdash P \Rightarrow \Sigma' \vdash_{\sigma'} M' : A'$ 则 $\Sigma = \Sigma'$ 且 $M = M'$ 且 $\sigma = \sigma'$ 且 $A = A'$。

引理3.2 (展开后的项是良类型). 如果 $\cdot \mid \cdot \vdash P \Rightarrow \Sigma \vdash_{\sigma} M : A$, 则 $\Sigma \mid \cdot \vdash_{\sigma} M : A$.

4 AXIOMATICS AND OPERATIONAL SEMANTICS

接下来我们转向 GrEff 的语义方面：表达式如何求值，哪些简化- /优化可以正确执行，以及渐进性原理对该语言成立。我们以公理化的方式形式化这三个方面，采用 不等式理论 来推理 Core GrEff 程序。也就是说，我们定义了表达式之间的一种不等式 $M \sqsubseteq N$概念，称为项精度，这是类型精度概念到表达式的一种扩展。这种不等式的语义解释是， M 在输出和终止方面与 N 具有相同的行为，只不过它可能在 N 不会引发动态类型错误时引发动态类型错误。从这个不等式概念中，我们得到一个诱导的等价关系 $M \equiv N$，它指定了何时 M 和 N 具有相同的行为。项精度和诱导的等价关系用于建模我们期望的语义概念：当等价关系$M \equiv V$成立时，表达式 M 可以求值为值 V， M可以在 $M \equiv N$成立时简化/优化为 N，并且渐进性原理指出，当 M 在表层语言中被重写为具有更精确类型信息的某个 M' 时，则相应的关系 $M' \sqsubseteq M$ 应该成立：添加更精确的类型信息会导致更精确的动态类型检查。考虑到这一点，我们在不等式理论中公理化了从效应处理器中已知的有效优化以及先前关于渐进性工作中期望的不等式。

只有当我们能够构造出满足这些公理的模型时，公理才有用。对于 GrEff，我们通过构造一种操作性 语义来实现这一点，该语义更精确地规定了如何求值

程序，然后定义观察等价和错误序，以对其进行建模$\equiv$ 以及 $\sqsubseteq$ 并证明所有公理在这一操作模型中都有效。我们将基于公理体系构造这一操作语义：我们在第 4.2 节展示每个归约 $M \mapsto N$ 都由不等式理论中可证明的等价关系 $M \equiv N$ 所证明。对于许多规则，这非常直接，例如，β 函数的归约由相应的β 等式所证明。此处我们从公理中获得的最大效用在于强制转换归约：处理器的强制转换归约并非由公理中的直接对应规则所证明，而是由处理器的外延性（η）原则以及强制转换的最小上界/最大下界性质共同证明；该性质在先前工作中被确定为渐进性性质的关键[19]。这表明，我们定义的操作行为具有规范地位：如果处理器的某些优化要有效，并且需要渐进性性质，那么就必须使用我们定义的强制转换归约。

4.1 公理体系

我们在图 10 中展示了项精度不等式理论的一组选定规则。完整规则见附录。不等式判断的形式为 $\Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{\sigma \sqsubseteq \tau} M \sqsubseteq N : A \sqsubseteq B$，表示 M 更精确，或者粗略地说，“出错更多”，而非 N。这是一种异构不等式关系，因为 M 和 N 不要求具有相同的类型：在上下文 $\Gamma^{\sqsubseteq}$ 下，M 必须具有值类型 A 和效应类型 σ，而 N 必须具有值类型 B 和效应类型 τ，并且 $A \sqsubseteq B$ 和 $\sigma \sqsubseteq \tau$ 必须成立。我们允许 M 和 N 是开放项，并相对于类型上下文 $\Gamma^{\sqsubseteq}$ 进行类型检查。类型上下文 $\Gamma^{\sqsubseteq}$ 类似于普通类型上下文 Γ，但变量的类型为 $x : A \sqsubseteq B$，其中左侧类型 A 是 x 在左侧项 M 中的类型，而 B 是 N 的类型。要使上下文格式良好，其中每个 $A \sqsubseteq B$ 都必须可证。

首先，我们添加一个公理，规定 $\mho$ 是任意类型的最小项，以对渐进性性质进行建模。接下来，我们添加一个公理，规定 $\sqsubseteq$ 具有传递性，其中值类型和效应类型都可以同时变化。该关系也是自反的，但这可由同余规则导出。其次，我们给出函数和应用的同余规则，而完整系统还为所有项构造器都包含这样的同余规则。接下来，对于每种类型，我们都有计算（β）规则和推理（η）规则。对于函数和 if，这些是标准的按值调用 $\beta\eta$ 规则，因此我们只展示处理器规则。对于处理器，有两个 β 规则。如果被处理的项是一个值，则使用返回子句。如果被处理的项是一个效应 ε的 raise操作，则它等价于处理器子句 $\phi(\varepsilon)$，其中续延是包围原始处理器项的捕获的续延。我们要求这里是一个let，但请注意，我们还有其他规则，可以推出任何不进行处理的求值上下文都可以重写为 let。然后，我们给出两个关于处理器的推理（η）规则。首先，如果 M 由一个没有效应子句的处理器处理，那么该处理器等价于一个 let绑定。这可以与let绑定的标准规则结合起来，以证明任何项都等价于一个不带子句的处理器 $M \equiv$ 处理 $M\{$返回 $x.x \mid \emptyset\}$。我们将其称为非处理原则。其次，我们有一条规则指出，任何只是使用传递给它的同一续延重新引发其操作的子句，都可以从处理器中删除，因为这与完全不捕获该项时的行为相同。我们称其为效应转发原则，因为它表明，将效应转发到环境上下文等价于完全不显式处理该效应。结合非处理原则，可以证明任何具有 M 效应类型 σ 的项都等价于处理 $M\{$返回 $x.x \mid \phi_\sigma\}$，其中 ϕ_σ 只是转发 σ中的所有效应。接下来，我们展示描述子类型关系与值类型强制转换之间交互的规则；完整系统还包含效应类型的类似规则。第一条规则表明，向上强制转换后再进行子类型强制，小于先进行子类型强制再向上强制转换，而向下强制转换规则则类似。最后，我们给出规定值类型强制转换和效应强制转换行为的规则。这些规则将向上强制转换刻画为最小上界，将向下强制转换刻画为最大下界。第一条规则表明，

$$\frac{\Gamma \vdash_{\sigma} M : A}{\Gamma \vdash_{\sigma \sqsubseteq \sigma} \mathcal{U} \sqsubseteq M : A \sqsubseteq A} \qquad \frac{\Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{\sigma_1 \sqsubseteq \sigma_2} M_1 \sqsubseteq M_2 : A_1 \sqsubseteq A_2 \qquad \Gamma'^{\sqsubseteq} \vdash_{\sigma_2 \sqsubseteq \sigma_3} M_2 \sqsubseteq M_3 : A_2 \sqsubseteq A_3 \quad \mathrm{rhs}(\Gamma^{\sqsubseteq}) = \mathrm{lhs}(\Gamma'^{\sqsubseteq}) \quad \mathrm{lhs}(\Gamma^{\sqsubseteq}) = \mathrm{lhs}(\Gamma''^{\sqsubseteq}) \quad \mathrm{rhs}(\Gamma'^{\sqsubseteq}) = \mathrm{rhs}(\Gamma''^{\sqsubseteq})}{\Gamma''^{\sqsubseteq} \vdash_{\sigma_1 \sqsubseteq \sigma_3} M_1 \sqsubseteq M_3 : A_1 \sqsubseteq A_3}$$

$$\frac{\Gamma^{\sqsubseteq}, x : A \sqsubseteq A' \vdash_{\tau \sqsubseteq \tau'} M \sqsubseteq M' : B \sqsubseteq B'}{\Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{\sigma \sqsubseteq \sigma'} \lambda x.M \sqsubseteq \lambda x.M' : A \to_{\tau} B \sqsubseteq A' \to_{\tau'} B'} \qquad \frac{\Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{\sigma \sqsubseteq \sigma'} M \sqsubseteq M' : A \to_{\sigma} B \sqsubseteq A' \to_{\sigma'} B' \quad \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{\sigma \sqsubseteq \sigma'} N \sqsubseteq N' : A \sqsubseteq A'}{\Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{\sigma \sqsubseteq \sigma'} M\,N \sqsubseteq M'\,N' : B \sqsubseteq B'}$$

$$\mathtt{handle}\ V\ \{\mathtt{ret}\ y.M \mid \phi\} \equiv M[y/v] \qquad \mathtt{handle}\ (\mathtt{let}\ o = \mathtt{raise}\ \varepsilon(x)\ \mathtt{in}\ N_k)\ \{\mathtt{ret}\ y.M \mid \phi\} \equiv \phi(\varepsilon)[\lambda o.\mathtt{handle}\ N_k\ \{\mathtt{ret}\ y.M \mid \phi\}/k]$$

$$\mathtt{handle}\ M\ \{\mathtt{ret}\ x.N \mid \emptyset\} \equiv \mathtt{let}\ x = M\ \mathtt{in}\ N \qquad \frac{\forall \varepsilon \in \mathrm{dom}(\phi).\ \psi(\varepsilon) = \phi(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in \mathrm{dom}(\psi).\varepsilon \notin \mathrm{dom}(\phi) \Rightarrow \psi(\varepsilon) = k(\mathtt{raise}\ \varepsilon(x))}{\mathtt{handle}\ M\ \{\mathtt{ret}\ y.N \mid \phi\} \equiv \mathtt{handle}\ M\ \{\mathtt{ret}\ y.N \mid \psi\} : \sigma\,!\,B}$$

$$\frac{A \le A' \qquad B \le B' \qquad \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{\sigma \sqsubseteq \sigma'} M \sqsubseteq N : A}{\Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{\sigma \sqsubseteq \sigma'} \langle B \quad A \rangle M \sqsubseteq \langle B' \quad A' \rangle N : B' \sqsubseteq B'} \qquad \frac{A \le A' \qquad B \le B' \qquad \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{\sigma \sqsubseteq \sigma'} M \sqsubseteq N : B \sqsubseteq B}{\Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{\sigma \sqsubseteq \sigma'} \langle A' \quad B' \rangle M \sqsubseteq \langle A \quad B \rangle N : A' \sqsubseteq A'}$$

$$\frac{\Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{\sigma \sqsubseteq \sigma'} M \sqsubseteq N : B \sqsubseteq B}{\Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{\sigma \sqsubseteq \sigma'} \mathrm{h}A \quad B\mathrm{i}M \sqsubseteq N : A \sqsubseteq B} \qquad \frac{\Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{\sigma \sqsubseteq \sigma'} M \sqsubseteq N : A \sqsubseteq B}{\Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{\sigma \sqsubseteq \sigma'} M \sqsubseteq \mathrm{h}A \quad B\mathrm{i}N : A \sqsubseteq A}$$

图 10. 不等式理论

向下强制转换是一个下界，第二个条件是它是最大的。向上转换具有类似的规则，我们也为效应强制转换纳入了相应的规则。这些最小上界／最大下界性质改编自先前关于渐进式类型公理体系的工作[20], 但现在同时纳入了效应和值类型上的序。我们发现，这种规则的一般形式——在执行值转换时允许效应有所不同（$\sigma \sqsubseteq \sigma'$）——对于证明值转换和效应强制转换的交换性至关重要；该交换性用于操作语义的推导，并且在我们的逻辑关系模型中同样成立。

4.2 操作语义

接下来，我们展示操作语义规则的一部分 $M \mapsto M'$ 如图 11，省略布尔值、函数和 let 绑定的标准按值调用规则。我们通过使用第 3.1节中定义的求值上下文来捕捉从左到右的按值调用求值顺序。首先，我们有 β 处理器的规则：当处理一个值时，执行返回子句。接下来，当发生 raise 操作时，我们搜索处理引发的效应的最近包围处理器，并将中间求值上下文捕获到传递给相应处理器的续延中。我们用关系 $E' \# \varepsilon$ 来表示求值上下文不处理给定的操作。

接下来的规则涉及效应强制转换的行为。首先，所有效应强制转换对值都是恒等操作。其次，向上转换 raise 操作时，我们会重新引发该效应，但会根据输出效应类型中的类型，对请求进行向上强制转换，并对响应进行向下强制转换。如果该效应出现在结果效应类型中，效应向下强制转换则以对偶方式进行。不过，如果该效应未出现在输出

$$E[\texttt{handle}\ V\ \{\texttt{ret}\ x.N \mid \phi\}] \mapsto E[N[V/x]] \qquad \frac{\varepsilon \in \mathrm{dom}(\phi) \qquad E' \# \varepsilon}{E[\texttt{handle}\ E'[\texttt{raise}\ \varepsilon(V)]\ \{\texttt{ret}\ x.N \mid \phi\}] \mapsto E[\phi(\varepsilon)\ [V/x][(\lambda y.\text{处理器}\ (E'[y])\ \{\text{返回}\ \ x.N \mid \phi\})/k]]}$$

$$E[(\lambda x.M)V] \mapsto E[M[V/x]] \qquad E[\texttt{let}\ x = V\ \texttt{in}\ M] \mapsto E[M[V/x]]$$

$$E[\langle \sigma' \quad \sigma \rangle V] \mapsto E[V] \qquad \frac{\varepsilon \in \sigma' \qquad E' \# \varepsilon}{E[\langle \sigma' \quad \sigma \rangle E'[\texttt{raise}\ \varepsilon(V)]] \mapsto E[\texttt{let}\ x = \langle B \quad B' \rangle \texttt{raise}\ \varepsilon(\langle A' \quad A \rangle V)\ \texttt{in}\ \langle \sigma' \quad \sigma \rangle E'[x]]}$$

$$E[\mathrm{h}\sigma \quad \sigma' \rangle V] \mapsto E[V] \qquad \frac{\varepsilon \in \sigma \qquad E' \# \varepsilon}{E[\text{时}\sigma \quad \sigma' \rangle E'[\texttt{raise}\ \varepsilon(V)]] \mapsto E[\texttt{let}\ x = \langle B' \quad B \rangle \texttt{raise}\ \varepsilon(\langle A \quad A' \rangle V)\ \texttt{in}\ \langle \sigma \quad \sigma' \rangle E'[x]]}$$

$$\frac{\varepsilon \notin \sigma \qquad E' \# \varepsilon}{E[\mathrm{h}\sigma \quad ? \rangle E'[\texttt{raise}\ \varepsilon(V)]] \mapsto \mho} \qquad E[(\langle (A \to_\sigma B) \quad (A' \to_{\sigma'} B') \rangle V_f)\ V] \mapsto E[\mathrm{h}B \quad B' \mathrm{i} \mathrm{h}\sigma \quad \sigma' \rangle (V_f \langle A' \quad A \mathrm{i} V)]$$

Fig. 11. Operational semantics of Core GrEff

效应类型中（这只会在输入效应类型为 ? 时发生），那么就会引发错误。最后，我们来看函数向下转换。回想一下，对值应用函数转换后，结果本身仍是一个值，只有将其应用于某个值时才会继续化简。如图所示，当这种情况出现在向下转换中时，结果会化简为：将原函数应用于输入的向上强制转换版本，并对输出进行向下强制转换；这一次，我们同时转换值类型和效应类型。请注意，输出上的值转换和效应转换顺序是任意选择的：由于值转换只影响值，而效应转换只影响效应操作，因此两种可能的顺序等价。省略的函数向上转换规则恰好与此对偶。最后，对于布尔值上的恒等强制转换，还有一条平凡的转换规则。

我们以下述定理结束操作语义，该定理确立了：在任何对不等式理论进行建模的系统中，操作规则都是有效的等式推理原则。

定理 4.1. 如果 $\cdot \vdash_\emptyset M, N : A$ 且 $M \mapsto N$，则 $M \equiv N$ 在公理语义中是可证明的。

完整的证明见附录，但我们特别概述效应转换 $\mathrm{h}\sigma \quad \sigma' \mathrm{i} M$ 的行为是如何推导出来的。论证的核心是证明向下强制转换等价于某个特定的处理器，然后从处理器的 β 归约中推导出操作归约。该处理器是 $\mathrm{h}\sigma \quad \sigma, \mathrm{i} M \equiv$ 处理 $M\{\text{返回}\ x.x \mid \phi_{\langle \sigma \quad \sigma' \rangle}\}$，其中 $\phi_{\langle \sigma \quad \sigma' \rangle}$ 恰好处理 σ' 中的效应，并且对于每个这样的 $\varepsilon @ A'_\sigma \rightsquigarrow B'_\sigma \in \sigma,$，该子句定义为

$$\phi_{\langle \sigma \quad \sigma' \rangle}(\varepsilon) = \begin{cases} \mho & \varepsilon \notin \mathrm{dom}(\sigma) \\ k(\langle B'_\sigma \quad B_\sigma \rangle \texttt{raise}\ \varepsilon(\langle A_\sigma \quad A'_\sigma \rangle x)) & \varepsilon @ A_\sigma \rightsquigarrow B_\sigma \in \sigma \end{cases}$$

也就是说，如果效应不存在于 σ 中，处理器会产生错误；否则，它会将效应再次执行 raise 操作并传递到其上下文，但首先对请求进行 向下强制转换，并对收到的响应进行 向上强制转换，然后再将其传回原始续延。接着，我们通过证明两个方向上的序，来展示 $\mathrm{h}\sigma \quad \sigma, \mathrm{i} M \equiv$ 处理器 $M\{\text{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle \sigma \quad \sigma' \rangle}\}$。对于 $\mathrm{h}\sigma \quad \sigma, \mathrm{i} M \equiv$ 处理器 $M\{\text{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle \sigma \quad \sigma' \rangle}\}$ 情形，我们应用效应转发原则，将左侧转换为处理器 $\mathrm{h}\sigma \quad \sigma, \mathrm{i} M\{\text{ret}\ x.x \mid \phi_\sigma\}$。

然后我们对处理器应用同余，其中右侧处理不属于 σ 的效应的情形无关紧要。剩余子句的句法结构都相同，只有向上强制转换和向下强制转换例外，因此证明可由同余和向上转换/向下转换规则推出。为证明 handle $M\{\mathrm{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle\sigma \quad \sigma'\rangle}\} \sqsubseteq \mathrm{h}\sigma \quad \sigma' \mathrm{i} M$，我们首先应用向下强制转换右规则，消去右侧的类型转换。接下来，为证明 handle $M\{\mathrm{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle\sigma \quad \sigma'\rangle}\} \sqsubseteq M$，我们再次使用效应转发原则，将右侧重写为 handle $M\{\mathrm{ret}\ x.x \mid \phi_{\sigma'}\}$。我们再次应用处理器同余，其中 $\varepsilon \in \sigma$ 的情形与之前的论证类似。在剩余的情形 $\phi_{\langle\sigma \quad \sigma'\rangle}(\varepsilon) \sqsubseteq \phi_{\sigma'}(\varepsilon)$ where $\varepsilon \notin \sigma$中，左侧是一个错误，因此根据错误在序中最小这一事实即可完成论证。

4.3 子类型关系、渐进子类型与强制转换

第 3.2 节中定义的 elaboration 会在类型检查器中使用渐进子类型 $A \quad \lceil A \rceil \rangle \langle \lceil B \rceil \quad B \rangle M$ 时插入形式为 $A \lesssim B$ 的类型转换。如果我们将 $\lceil A \rceil$ 视为无跟踪语言中程序的类型，这意味着，要将程序从一种类型转换为另一种类型，我们应该先将它转换为无跟踪类型，再转换为另一种跟踪效应的类型，这与先前基于向上转换和向下转换的类型转换演算工作类似 [17]。如果我们将无跟踪语言视为“操作性基准真值”，那么这种类型转换是合理的，因此我们应该证明，任何其他转换都与此转换外延等价。然而，从操作层面看，这种转换可能非常浪费，因为类型转换在运行时可能导致代理，而子类型强制转换没有运行时行为，因此零成本。例如，如果 子类型关系强制转换成立，且实际上 $A \lesssim B$ 为真，因为事实上 $A \leq B$，那么根本不需要任何运行时类型转换。因此，我们希望根据 $A \lesssim B$ 的证明中的子类型信息来优化类型转换。由于 A 在某些子项上的精度可能低于 B，反之亦然，因此类型转换的结构仍应是先向上转换再向下转换，但在某些位置也可以使用隐式子类型强制转换。我们可以在三个位置插入隐式子类型强制转换：向上转换之前、向上转换与向下转换之间，以及向下转换之后。根据 $A \lesssim A'$ 的证明，我们可以提取类型以及子类型关系／精度推导，如图 12 所示。

左侧是来自 A的渐进子类型关系证明中的“纯子类型”组件，右侧则是来自 B的纯子类型组件。中间有两个同样通过子类型关系关联的“动态”类型。于是，从 A 到 A' 在此图中有三条路径，它们生成了三种不同的潜在强制转换，并由隐式子类型强制确保它们作为从 A 到 A'的转换具有良类型：(1)先向上，然后向右两次$\mathrm{h}B \quad D_h \mathrm{i} \mathrm{h} D_h \quad A_h \mathrm{i}$ (2)先向右、再向上，然后向右：$\mathrm{h}B \quad D_h \mathrm{i} \mathrm{h} D_l \quad A \mathrm{i}$ (3) 先向右两次，然后向上：$\mathrm{h}B_l \quad D_l \mathrm{i} \mathrm{h} D_l \quad A \mathrm{i}$ 幸运的是，我们可以选择任意一种

$$\begin{array}{ccccc} A_h & \sqsubseteq & D_h & \sqsupseteq & B \\ \vee & & \vee & & \vee \\ A & \sqsubseteq & D_l & \sqsupseteq & B_l \end{array}$$

Fig. 12. Situation derivable from $A \lesssim B$

在操作上更为理想：这些强制转换中的每一个作为从 A 到 B 的函数都是等价的，并且它们都等价于基准真相强制转换$\mathrm{h}A' \quad \lceil A \rceil \mathrm{i} \mathrm{h} \lceil A \rceil \quad A \mathrm{i}$。上述讨论同样适用于效应强制转换，而效应强制转换甚至更简单，因为“基准真相”总是经过唯一的最不精确效应类型：动态效应类型。

5 SOUNDNESS AND GRADUALITY

在本节中，我们证明核心GrEff 的公理语义在其操作语义意义下具有一个可靠模型。这确立了两个关键性质：等价项（$M \equiv N$）在操作语义中是上下文等价的，并且渐进性性质成立。首先，我们

回顾渐进性性质的定义，然后我们给出一个逻辑关系模型，并证明任何可证明的不等式 $M \sqsubseteq N$ 都意味着项在逻辑关系中相关。

5.1 Static and Dynamic Gradual Guarantees

GrEff 旨在支持从低精度类型化到高精度类型化的平滑迁移。静态渐进保证[24] 将这一平滑迁移理念的一个语法元素形式化。静态渐进保证的非正式表述是：提高程序中类型注解的精度，只会使其更难以满足静态类型检查器；反过来看，降低类型注解的精度，只会使其更容易满足静态类型检查器。然后，动态渐进保证（也称为渐进性）确立了语义上的对应性质：提高程序中类型注解的精度，只应使其更难在没有动态类型错误的情况下终止；此外，除存在动态类型错误的情况外，程序的行为应与原程序一致。这些性质可以形式化为：将表层GrEff 的语法程序elaboration 为具有语义意义的核心 GrEff 程序时，elaboration具有某种形式的单调性，具体如下。首先，我们将无类型 GrEff 程序上的语法项精度序$\sqsubseteq^{\text{syn}}$ 定义为类型精度序的同余闭包。然后，静态渐进保证表明，这是一个从语法项精度序到核心 GrEff 项上的公理不等式的单调偏函数：

定理 5.1（静态渐进保证）。 如果 $P \sqsubseteq^{syn} P'$，那么如果 $\cdot \mid \cdot \vdash P \Rightarrow \Sigma \vdash_{\sigma} M : A$，那么存在 M', σ, A' 使得 $\cdot \mid \cdot \vdash P' \Rightarrow \Sigma \vdash_{\sigma'} M' : A'$ 使得 $\cdot \vdash_{\sigma \sqsubseteq \sigma'} M \sqsubseteq M' : A \sqsubseteq A'$。

Then the dynamic gradual guarantee says that this extends to monotonicity in the following *semantic* ordering on core GrEff terms:

定义 *5.2*（闭合程序上的错误序）。给定$\cdot \vdash_{\emptyset} M, M' :$ 布尔类型，定义 $M \sqsubseteq^{\text{sem}} M'$成立，当以下条件之一得到满足时：(1) $M \mapsto^* \mho$，(2) $M \Uparrow$ 且 $M' \Uparrow$，(3) $M \mapsto^*$ true 且$M' \mapsto^*$ true (4) $M \mapsto^*$ false 且 $M' \mapsto^*$ false。

定理 5.3 (动态渐进保证). 如果 $\Sigma \mid \cdot \vdash_{\emptyset \sqsubseteq \emptyset} M \sqsubseteq M' :$ 布尔类型, 则 $M \sqsubseteq^{sem} M'$.

该定理是针对固定类型的闭项表述的，但为了证明它，我们需要一个更强的归纳假设，即开放项的逻辑关系。由此得到的定理是：理论中可证明的任何不等式都蕴含语义序；该定理被称为渐进性，因为其结构类似于参数多态中的参数化性 定理。然后，动态渐进保证作为推论得出。

5.2 逻辑关系

在图 13中，我们给出用于渐进性的步索引逻辑关系的定义。遵循以往关于渐进性逻辑关系的工作，该关系的索引不是按类型，而是按 推导的类型精度事实，即 $c : A \sqsubseteq B$ 或 $d_{\sigma} : \sigma \sqsubseteq \sigma'$的证明项。我们在附录中给出这些证明项的定义。对于类型精度推导 d，定义 d^l 和 d^r 为满足以下条件的类型： $d : d^l \sqsubseteq d^r$，效应类型同理。

许多细节与先前工作类似，尤其是 [18],因此我们重点介绍效应类型的处理，这是新颖之处。见第 **??** 节。除了通常的表达式关系和值关系外，我们还有 结果 关系和 续延 关系。在我们的语言中，**结果**要么是一个值，要么是一个求值上下文 E 包裹着一个效应的 raise 操作 ε，使得 $E\#\varepsilon$。结果关系指定了两个此类结果相关的条件。最后，这些关系由精度推导参数化。对于表达式关系和结果关系，这是效应精度推导，而对于值和续延，则是值类型精度推导。这类似于

$$
\begin{array}{rcl}
(M_1, M_2) \in (\blacktriangleright R)_j & \iff & j = 0 \vee (j = k+1 \wedge (M_1, M_2) \in R_k) \\
(V_1, V_2) \in \mathcal{V}^{\sim}_j[\![\texttt{bool}]\!] & \iff & (V_1, V_2) \in \mathrm{VAtom}\,\texttt{bool} \wedge (V_1 = V_2 = \texttt{true}) \vee (V_1 = V_2 = \texttt{false}) \\
(V_1, V_2) \in \mathcal{V}^{\sim}_j[\![d_i \to_{d_\sigma} d_o]\!] & \iff & (V_1, V_2) \in \mathrm{VAtom}\, d_i \to_{d_\sigma} d_o \wedge \\
 & & \forall k \le j. \forall (V_{i1}, V_{i2}) \in \mathcal{V}^{\sim}_k[\![d_i]\!]. \\
 & & (V_1\, V_{i1}, V_2\, V_{i2}) \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![d_\sigma]\!](\mathcal{V}^{\sim}[\![d_o]\!]) \\
(M_1, M_2) \in \mathcal{E}^{\lesssim}_j[\![d_\sigma]\!](R, A^l, A^r) & \iff & (M_1, M_2) \in \mathrm{TAtom}\, A^l\, A^r\, d_\sigma \wedge (M_1 \mapsto^{j+1} \\
 & & \vee (\exists k \le j.\ (M_1 \mapsto^{j-k} \mho) \\
 & & \quad \vee (\exists (N_1, N_2) \in \mathcal{R}^{\lesssim}_k[\![d_\sigma]\!] R \wedge M_1 \mapsto^{j-k} N_1 \wedge M_2 \mapsto^* N_2))) \\
(M_1, M_2) \in \mathcal{E}^{\gtrsim}_j[\![d_\sigma]\!](R, A^l, A^r) & \iff & (M_1, M_2) \in \mathrm{TAtom}\, A^l\, A^r\, d_\sigma \wedge (M_2 \mapsto^{j+1} \\
 & & \vee (\exists k \le j. (M_2 \mapsto^{j-k} \mho \wedge M_1 \mapsto^* \mho) \\
 & & \quad \vee (\exists N_2. M_2 \mapsto^{j-k} N_2 \wedge M_1 \mapsto^* \mho) \\
 & & \quad \vee (\exists (N_1, N_2) \in \mathcal{R}^{\gtrsim}_k[\![d_\sigma]\!] R \wedge M_2 \mapsto^{j-k} N_2 \wedge M_1 \mapsto^* N_1))) \\
(M_1, M_2) \in \mathcal{R}^{\sim}_j[\![d_\sigma]\!](R, A^l, A^r) & \iff & (M_1, M_2) \in \mathrm{TAtom}\, A^l\, A^r\, d_\sigma \wedge \\
 & & ((\texttt{val}(M_1) \wedge \texttt{val}(M_2) \wedge (M_1, M_2) \in Rj) \\
 & & \quad \vee (\exists \epsilon : c \rightsquigarrow d \in d_\sigma, E^l \# \epsilon, E^r \# \epsilon, V^l, V^r. \\
 & & \quad (V^l, V^r) \in (\blacktriangleright \mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!])_j \wedge \\
 & & \quad (x^l.E^l[x^l], x^r.E^r[x^r]) \in (\blacktriangleright \mathcal{K}^{\sim}[\![d]\!])_j \\
 & & \quad\quad (\mathcal{E}^{\sim}[\![d_\sigma]\!](R, A^l, A^r), (d^l_\sigma\, !\, A^l), (d^r_\sigma\, !\, A^r)) \wedge \\
 & & \quad M_1 = E^l[\texttt{raise}\ \epsilon(V^l)] \wedge M_2 = E^r[\texttt{raise}\ \epsilon(V^r)])) \\
(x^l.M^l, x^r.M^r) \in & \iff & (M^l, M^r) \in \mathrm{ECtxAtom}\, c\, (\sigma^l\, !\, A^l)\, (\sigma^r\, !\, A^r) \wedge \\
\mathcal{K}^{\sim}_j[\![c]\!](S, (\sigma^l\, !\, A^l), (\sigma^r\, !\, A^r)) & & \forall k \le j. (V^l, V^r) \in \mathcal{V}^{\sim}_k[\![c]\!]. (M^l[V^l/x^l], M^r[V^r/x^r]) \in S_k \\
(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{G}^{\sim}_j[\![\Gamma^{\sqsubseteq}]\!] & \iff & \forall (x_1 \sqsubseteq x_2 : c) \in \Gamma^{\sqsubseteq}. (\gamma_1(x_1), \gamma_2(x_2)) \in \mathcal{V}^{\sim}_j[\![c]\!]
\end{array}
$$

图 13. 逻辑关系

通常的方法，即逻辑关系由类型索引。但我们不使用类型，而是使用精度推导，即 LHS 项比 RHS 项的类型更精确的证明。

与此前关于渐进性逻辑关系的工作一样，逻辑关系这一表达式 E˜È·É 被拆分为两个关系 E$^{\lesssim}$È·É 和 E$^{\gtrsim}$È·É。前者统计左侧项所执行的步数，后者统计右侧项所执行的步数。这由定量小步归约 $M \mapsto^j N$ 表示，其含义是 M 恰好经过 j 步归约为 N。尽管需要两个关系，但在大多数情况下，我们仍能将它们的差异抽象掉：我们证明的大多数引理都同时适用于这两个关系，无需做任何调整。值得注意的例外是传递性以及反向归约和前向归约引理：这些引理关键地依赖于步数计数，因此，究竟统计哪一侧的步数自然会产生影响。

给定一个步索引关系 R，我们定义一个操作符 $\blacktriangleright R$（读作"later 模态 R"）如下：项 M_1 和 M_2 在 $\blacktriangleright R$ 中于索引 n 相关，当且仅当 n 为零，或 $n \ge 1$、M_1 和 M_2 在 R 中于索引 $n-1$ 相关。

我们逻辑关系的一个新颖之处在于结果关系 R˜È·É。此关系关联项 M_1 和 M_2 ——它们的类型分别为 A^l 和 A^r ——表示两个值，或对提升操作的两次"求值"。该关系由一个步索引关系 R 参数化，此关系关联类型为 A^l 和 A^r（即 M_1 和 M_2 的类型）的值。当满足以下任一条件时，M_1 和 M_2 由 R˜È·É 关联：(1) 两个项都是值，且在适当的步索引处由 R 关联；或 (2) 存在一个效应 ϵ 在

d_σ、与 later 模态相关的值，以及与later 模态相关的求值上下文（即续延——见下文），使得 M_1 is 等于提升该效应，然后将其包装在续延中，同样地适用于 M_2。

关系 K˜È·É将求值上下文 E_1 和 E_2 联系起来，它们表示接受值的续延，与此前关于续延的逻辑关系研究类似 [1]。每个求值上下文都有一个空位 • ——空位的类型就是续延输入值的类型。为了确保续延只接受值，而不接受任意项，续延关系的输入实际上是项 M^l 和 M^r，其自由变量分别为 x^l 和 x^r。 E_1 和 E_2 也有"输出"类型（A^l和 A^r）以及"输出"效应集（σ^l和 σ^r）。将值代入E_1 和 E_2后，结果是两个项，其类型分别为 A^l 和 A^r，效应集分别为 σ^l 和 σ^r。

5.3 Proof of Graduality

我们的目标是证明，相对于逻辑关系，不等式理论是可靠的。首先，我们定义两个项在语义上相关的概念：

$$\Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{d_\sigma} M_1 \sqsubseteq M_2 \in c := \forall \sim \in \{<, >\}. \forall j \in \mathbb{N}. \forall (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{V}_j^{\sim}[\![\Gamma]\!]. (M_1[\gamma_1], M_2[\gamma_2]) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!].$$

也就是说，如果对于所有 j，以及所有在 j 处相关的值替换 γ_1 和 γ_2，所得项在 E˜$_j$Èd_σÉV˜Èc É 中相关，那么 M_1 和 M_2 就相关；这里要求 $\sim$ 为 $<$ 和为 $>$ 两种情况都成立。因此，我们的目标是证明以下内容：

Theorem 5.4 (Graduality). *If* $\Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_\sigma} M \sqsubseteq N : c$ *then* $\Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{d_\sigma} M \sqsubseteq N \in c$

我们在此提供证明的高层概述；完整的证明见附录。我们首先建立标准逆归约和前向归约引理以及单子绑定的变体。我们还证明了一个 Löb归纳原则，用于组织对步索引的归纳。借助这些引理，我们首先通过使用单子绑定引理以及归约引理，证明项精度的每条同余规则的可靠性。接下来，我们证明等式理论规则的可靠性，例如， β和 η 定律以及传递性。最后，我们证明强制转换和子类型关系规则的可靠性。

6 讨论

关于渐进式效应的先前工作。关于渐进式效应，最重要的先前工作是 Bañados Schwerter 等人 [2], 提出的渐进式效应系统。该系统基于 Marino 和 Millstein 的通用效应演算 [16]，并采用了面向渐进式类型系统的早期抽象化渐进类型 （AGT）框架[9]。虽然我们基于效应处理器而非通用效应演算构建了 GrEff，但二者在类型标注方面有显著相似之处：在两个系统中，函数类型和类型判断式都由一组效应操作索引。最显著的语法差异在于，他们的框架以固定的效应理论为参数，而 GrEff 则显式支持在程序中声明新效应。尤其是，这意味着他们的系统无需像我们这样支持包含同一名义型效应不同视图的模块。此外，他们还支持一种部分跟踪的函数；用 GrEff 语法表示，它看起来会像这样$A \to_{\varepsilon,\ ?} B$，这是一种函数类型，其中明确知道该函数可能引发效应 ε，同时也可能引发其他效应。在 GrEff 中，这种部分跟踪会确保任何以名称 ε 引发的效应，都与模块对 ε效应类型标注的本地视图相匹配。最后，在语义方面，这项先前工作只证明了类型安全性，而我们在此证明了渐进性，以及基于类型的优化和处理器优化的正确性。

另一个相关的研究领域是带有定界续延的渐进式类型研究，而定界续延与效应处理器可以相互表达 [7, 21]。Takikawa 等人（[30]）通过契约，为一种使用带类型提示的定界续延语言提出了渐进式类型系统及其语义。

他们仅考虑值类型和未跟踪函数类型，后者没有说明预期存在的提示符。他们表明，基于朴素契约的实现是不可靠的，因为动态类型程序可以与类型化提示符交互，因此提示符本身必须配备契约，尽管这并不对应于任何被导入的值。在核心 GrEff中，通过使用内禀类型系统排除了这种不可靠性：该问题对应于以不同于最近处理器所预期类型的类型引发效应操作，而这正是效应类型系统所跟踪的内容。用契约包装提示符，在行为上等价于我们的效应类型转换所实现的结果。Sekiyama、Ueda 和 Igarashi 为一种带有 shift 和 reset 的语言提出了责难演算[23]。该责难演算类似于我们的核心 GrEff 语言，并为shift/reset的答案类型使用类型和效应系统。他们没有像我们的 GrEff 那样开发一种可展开为该责难演算的表层语言，而且基于 shift/reset 的系统中不存在效应操作的对应物，因此他们的语言没有名义型方面。此外，尽管他们拥有用于跟踪答案类型的效应系统，却没有效应类型转换。

渐进名义数据类型的既有方法. 我们也不是第一个考虑渐进式类型与名义类型系统结合的人。与我们设计最接近的是 Typed Racket 对类型化结构体的支持。在 Racket 中，结构体是一种记录类型，（默认情况下）是生成式的，因为它会创建一个与所有其他类型标签不同的新类型标签。Typed Racket 支持将无类型 Racket 结构体导入 Typed Racket，其中为字段分配类型，然后相应地用契约包装该结构体类型的值。这与我们对名义效应操作的处理非常接近，后者可被视为向动态效应单子添加新情形，而非动态类型。然而，我们的类型系统更为复杂，因为在我们的系统中模块可以使用动态类型效应，而在 Typed Racket 中，没有用于动态类型值的语法类型，当导入到类型化代码中时，系统必须给出完全精确的类型。Malewski 等人 ([15]) 提出了一种带有名义代数数据类型的渐进式类型设计。他们的重点是从情形开放的数据类型渐进式迁移到具有固定构造器集合的数据类型。他们没有考虑我们遇到的用例，即不同模块对相同的名义构造器具有不同的类型。

子类型研究。 此前关于将子类型关系与渐进式类型相结合的大量研究，主要聚焦于静态类型方面 [4, 8, 26, 33]。关于子类型关系与渐进式类型，最重要的既有语义研究是抽象化渐进类型工作 [9] 该工作使用 AGT 方法论构建了一个包含子类型关系的系统，并证明了其动态渐进保证。在本文中，我们证明了结合渐进式类型转换与子类型强制转换的多种不同方式之间的等价关系，这些方式总结于图 12中，并可由我们在等式理论（图 10）中新确定的转换/强制转换排序原则推导出来。

迈向实用语言设计。 GrEff 旨在作为一种概念验证型语言设计，为扩展 OCaml 5、使其支持渐进式效应类型提供语义基础。我们将讨论它与 OCaml 设计之间目前存在的不匹配之处，以及如何弥补这些差异。首先，OCaml 使用可扩展变体类型来表示效应和异常，而在 GrEff 中，效应不是一等值。要支持这一点应该并不困难，因为变体类型可以用与动态类型大致相似的方式处理。其次，OCaml 支持递归效应类型，即效应的请求或响应可以引用正在定义的效应。例如，这使得我们可以对协程示例进行变体扩展，让分叉线程能够进一步创建线程。这会使 GrEff 的元理论变得更复杂，但原则上应该可行。最后一个语法上的差异是，OCaml 基于 Hindley–Milner 风格的多态类型方案，而 GrEff 则基于一种

简单类型系统。或许可以借鉴先前针对基于统一的类型系统中渐进式类型所开展的工作[4, 8, 27]。

实现渐进效应带来了其自身的挑战。我们对操作语义的推导基于证明效应强制转换可以实现为处理器，因此可以通过源到源转换来实现。然而，这种实现可能遭受与其他朴素包装器语义类似的性能问题，这可以通过将强制转换反函数化来解决[10]。此外，完全动态类型和静态代码之间的强渐进类型即使在空间高效的实现中也可能导致高昂的性能惩罚[29]。然而，由于效应强制转换在典型程序中不会像值类型强制转换那样普遍，因此在渐进效应类型化的 OCaml 程序中是否会出现相同的病态行为并不明显。这是一个需要在未来工作中解决的明确实证问题。

参考文献

[1] Kenichi Asai。2005。按值调用的分隔续延的逻辑关系。载于《函数式编程趋势第六届研讨会精选论文修订版》，TFP 2005，爱沙尼亚塔林，2005 年 9 月 23–24 日（《函数式编程趋势》，第 6 卷），Marko C. J. D. van Eekelen（编）。63–78。[2] Felipe Bañados Schwerter、Ronald Garcia 和 Éric Tanter。2014。渐进式效应系统理论。载于《第 19 届 ACM SIGPLAN 函数式编程国际会议论文集》（瑞典哥德堡）（ICFP '14）。283–295。[3] Jonathan Immanuel Brachthäuser、Philipp Schuster 和 Klaus Ostermann。2020。Effekt：用于 Scala 中类型安全、效应安全且可扩展效应处理器的能力传递风格。《函数式编程期刊》30（2020），e8。https://doi.org/ 10 1017 0956796820000027 。/ S Giuseppe Castagna、Victor Lanvin、Tommaso Petrucciani 和 Jeremy G. Siek。2019。渐进式类型：一种新视角。《ACM 程序设计语言会议论文集》。 3, 16 2019 32 10 1145 3290329 POPL，文章（1 月），[4] [5] 页码。https://doi.org/ 。/ [ ] WasmFX 贡献者。无日期。。WasmFX：用于 WebAssembly 的效应处理器。https://wasmfx.dev/ 访问日期：2020-11-10。[6] Ezra Cooper、Sam Lindley、Philip Wadler 和 Jeremy Yallop。2006。Links：无层级的 Web 编程。载于《组件与对象形式化方法》，第五届国际研讨会，FMCO 2006，荷兰阿姆斯特丹，2006 年 11 月 7–10 日，修订讲义（《计算机科学讲义》，第 4709 卷）。266–296。https://doi.org/ 10 1007 978 3 540 74792 5_12 。/ - - - - Yannick Forster、Ohad Kammar、Sam Lindley 和 Matija [7] Pretnar。2019。用户定义效应的表达能力：效应处理器、单子反射与分隔控制。《函数式编程期刊》29（2019），e15。https://doi.org/ 10 1017 0956796819000121 。/S Ronald Garcia 和 Matteo Cimini。。渐进式程序的主类型方案。载于《第 42 [8] 届 ACM SIGPLAN-SIGACT 编程语言原理年度研讨会论文集》，POPL 2015，印度孟买，2015 *15 17, 2015,* 303 315 10 1145 2676726 2676992 年 1 月—— [9] Sriram K. Rajamani 和 David Walker（编）。ACM，–。https://doi.org/ 。/ 。Ronald Garcia、Alison M. Clark 和 Éric Tanter。。抽象化渐进类型。载于 ACM 编程语言原理研讨会（POPL）。[10] David Herman、Aaron Tomb 和 Cormac Flanagan。2010。空间高效的渐进式类型。《高阶符号计算》23，2（2010 年 6 月），167–189。https://doi.org/10.1007/s10990-011-9066-z [11] Oleg Kiselyov、Amr Sabry 和 Cameron Swords。2013。可扩展效应：单子转换器的替代方案。载于《2013 年 ACM SIGPLAN Haskell 研讨会论文集》，美国马萨诸塞州波士顿，2013 年 9 月 23–24 日。ACM，59–70。https://doi.org/ 10 1145 2503778 2503791 。/ 。Nico Lehmann 和 Éric Tanter。。渐进式细化类型。载于 ACM 编程语言原理研讨会（POPL）。[12] Daan Leijen。2014。Koka：使用行多态效应类型进行编程。载于《第五届数学结构化函数式编程研讨会论文集》，MSFP@ETAPS 2014，法国格勒诺布尔，2014 年 4 月 12 日（EPTCS，第 153 卷）。 100 126 10 4204 153 8 –。https://doi.org/ 。/EPTCS. 。Sam Lindley、Conor McBride 和 Craig McLaughlin。2017。Do be do be do。载于《第 44 届 ACM SIGPLAN 编程语言原理研讨会论文集》，POPL 2017，法国巴黎，2017 年 1 月 18–20 日。ACM，500–514。https://doi.org/ 10 1145 3009837 3009897 。/ 。Stefan Malewski、Michael Greenberg 和 Éric Tanter。2021。渐进式结构化数据。《ACM 程序设计语言会议论文集》5，OOPSLA（ 2021 1 29 10 1145 3485503 ），–。https://doi.org/ 。/ Daniel Marino 和 Todd D. Millstein。。一种通用类型与效应系统。载于《TLDI'09 论文集：2009 年 ACM SIGPLAN 语言设计与实现中的类型国际研讨会》，美国佐治亚州萨凡纳，2009 年 1 月 24 日，

2009, 39 50 10 1145 1481861 1481868 Andrew [17] Kennedy 和 AmalAhmed（编）。ACM，2018 –。https://doi.org/。/.MaxS.New和AmalAhmed。。来自嵌入-投影对的渐进性。载于函数式编程国际会议（ICFP），密苏里州圣路易斯。[18] Max S. New、DustinJamner和Amal Ahmed。2020。渐进性与参数多态性：首次再度携手。ACM 程序语言会议论文集。

4, 2020 46 1 46 32 10 1145 3371114 POPL（），：–：。[19] 2018 https://doi.org/。/MaxS.New 和DanielR. Licata。。按名调用的渐进式类型理论。载于计算与演绎的形式结构，英国牛津。[20] Max S. New、Daniel R. Licata 和 AmalAhmed。2019。渐进式类型理论。载于ACM 编程语言原理研讨会（POPL），葡萄牙卡斯凯什。[21] Maciej Piróg、Piotr Polesiuk和 FilipSieczkowski。2019。效应处理器与分隔控制的类型化等价关系。载于第4 届计算与演绎形式结构国际会议（FSCD2019），2019 年 6 月24—30 日，德国多特蒙德（LIPIcs，第 131 卷），Herman Geuvers（编）。Schloss Dagstuhl - Leibniz 信息学中心，

30 1 30 16 10 4230 2019 30 :– :。https://doi.org/。/LIPIcs.FSCD.。GordonD. Plotkin 和 [22] 2009 Matija Pretnar。。代数效应的处理器。载于编程语言与系统：第 18 届欧洲编程研讨会（ESOP2009），作为软件理论与实践联合欧洲会议（ETAPS 2009）的一部分举行，英国约克，2009年 3 月22—29 日。论文集（计算机科学讲义，第5502 卷）。 80 94 10 1007 978 3 642 00590 9_7–。https://doi.org/。/ - - - - Taro Sekiyama、SoichiroUeda 和[23] AtsushiIgarashi。2015。转移责难——一种带分隔控制的责难演算。载于编程语言与系统——第 13 届亚洲研讨会（APLAS 2015），韩国浦项，2015年 11 月 30 日至12 月 2 日，论文集（计算机科学讲义，第 9458 卷），XinyuFeng和 Sungwoo Park（编）。Springer， 189 207 10 1007 978 3 319 26529 2_11–。https://doi.org/。/ - -- - Jeremy Siek、Micahel Vitousek[24]、MatteoCimini和JohnTangBoyland。2015。渐进式类型的改进判据。载于第 1 届编程语言进展峰会（SNAPL 2015）。[25] JeremyG.Siek和 Walid Taha。2006。函数式语言的渐进式类型。载于Scheme 与函数式编程研讨会（Scheme）。81–92。[26] JeremyG.Siek和 WalidTaha。2007。对象的渐进式类型。载于欧洲面向对象编程会议（ECOOP）。[27] Jeremy G.Siek和ManishVachharajani。2008。基于统一推断的渐进式类型。载于 2008 年动态语言研讨会论文集（DLS 2008），2008年 7 月8日，塞浦路斯帕福斯，Johan Brichau（编）。ACM，7。https://doi.org/ 10 1145 1408681 1408688 . / . K. C. Sivaramakrishnan、Stephen Dolan、Leo White[28]、Tom Kelly、SadiqJaffer 和 Anil Madhavapeddy。2021。为 OCaml 增添效应处理器。载于 PLDI '21：第 42 届 ACM SIGPLAN 编程语言设计与实现国际会议，线上活动，加拿大，2021 年 6 月 20—25日。ACM，206–221。https://doi.org/ 10 1145 3453483 3454039 ./ . Asumu Takikawa、Daniel Feltey、Ben Greenman、Max S. New[29]、JanVitek和 Matthias Felleisen。2016。可靠的渐进式类型已死？载于第 43届 ACM SIGPLAN-SIGACT 编程语言原理年度研讨会论文集（美国佛罗里达州圣彼得堡）（POPL '16）。计算机协会，纽约，纽约州，美国，456–468。https://doi.org/ 10 1145 2837614 2837630 . / . Asumu Takikawa、T. Stephen Strickland和SamTobin-Hochstadt。[30] 2013。用契约约束分隔控制。载于编程语言与系统——第22 届欧洲编程研讨会（ESOP2013），作为欧洲软件理论与实践联合会议（ETAPS2013）的一部分举行，意大利罗马，2013年 3 月 16—24 日。论文集（计算机科学讲义，第7792卷），Matthias Felleisen 和 Philippa Gardner（编）。Springer，229–248。https://doi.org/ 10 1007 978 3 642 37036 6_14 . / - - - - Sam Tobin-Hochstadt 和 Matthias Felleisen。2008。类型化 Scheme的设计与实现。载于ACM 编程语言原理研讨会（POPL），加利福尼亚州旧金山。[32] PhilipWadler。2021。GATE：渐进式效应类型。载于形式方法、验证与确认应用——第10届形式方法、验证与确认应用国际研讨会（ISoLA2021），希腊罗得岛，2021 年 10 月17—29 日，论文集（计算机科学讲义，第 13036 卷），Tiziana Margaria和 Bernhard Steffen（编）。Springer，

[31] 335 345 10 1007 978 3 030 89159 6_21 –。https://doi.org/。/ - - - - PhilipWadler和 RobertBruce Findler[33]。。良类型程序不会受责难。载于欧洲编程研讨会（ESOP）（英国约克）。1–16。 2009

$$\Sigma \vdash \mathtt{bool} : \mathtt{bool} \sqsubseteq \mathtt{bool} \qquad \frac{\Sigma \vdash d_i : A \sqsubseteq A' \qquad \Sigma \vdash d_e : \sigma \sqsubseteq \sigma' \qquad \Sigma \vdash d_o : B \sqsubseteq B'}{\Sigma \vdash d_i \to_{d_e} d_o : A \to_{\sigma} B \sqsubseteq A' \to_{\sigma'} B'}$$

$$\Sigma \vdash ? : ? \sqsubseteq ? \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathrm{supp}(d_c) = \mathrm{supp}(\sigma_c) = \mathrm{supp}(\sigma_c') \\ (\forall \varepsilon\colon\ c \rightsquigarrow d \in d_c, \varepsilon\colon\ A \rightsquigarrow B \in \sigma_c, \varepsilon\colon\ A' \rightsquigarrow B' \in \sigma_c'. \\ \Sigma \vdash c : A \sqsubseteq A' \qquad \Sigma \vdash B \sqsubseteq B')\end{array}}{\Sigma \vdash d_c :\ \sigma_c \sqsubseteq \sigma_c'} \qquad \frac{\Sigma \vdash d_c :\ \sigma_c \sqsubseteq \Sigma|_{\mathrm{supp}(\sigma_c)}}{\Sigma \vdash \mathrm{inj}(d_c) :\ \sigma_c \sqsubseteq ?}$$

$$\frac{\varepsilon :\ c \rightsquigarrow d \in\in \Sigma}{\Sigma \vdash \varepsilon :\ c \rightsquigarrow d \in ?} \qquad \frac{\Sigma \vdash \varepsilon :\ c' \rightsquigarrow d' \in d_c \qquad c = \mathtt{inj}(c') \qquad d = \mathtt{inj}(d')}{\Sigma \vdash \varepsilon : c \rightsquigarrow d \in \mathtt{inj}(d_c)}$$

Fig. 14. Type and Effect Precision Derivations

A SYNTAX AND ELABORATION

我们在图 14中给出了效应精确性的项赋值。在其中，我们使用效应操作处于精度推导中的概念 $\varepsilon :\ c \rightsquigarrow d \in d_c$。当 d_c 自身是一个偏函数时，这与之前的用法相同；但当 $d_c = ?$ 或 $d_c = \mathrm{Inj}(d_c')$时，我们使用图底部的定义。

Thought the generating axioms are different from the simple presentation in the body of the paper, we show that provability is not affected:

Lemma A.1 (Correctness of Term Assignment). *Assuming $\Sigma \vdash A$ and $\Sigma \vdash B$, the following are equivalent*

- *$A \sqsubseteq A'$ is provable in the system in Figure 5*
- *There exists a derivation $\Sigma \vdash c : A \sqsubseteq A'$ in the system in Figure 14.*

Similarly, assuming $\Sigma \vdash \sigma$ and $\Sigma \vdash \sigma'$, the following are equivalent

- *$\sigma \sqsubseteq \sigma'$ is provable in the system in Figure 5*
- *There exists a derivation $\Sigma \vdash c_e : \sigma \sqsubseteq \sigma'$ in the system in Figure 14.*

接下来我们在图 15 中定义值和效应类型的渐进并与交。请注意，对于具体效应集而言，定义相当简单，因为这只用于 同一模块内，所以我们从不需要考虑两边为同一个操作名称赋予不同效应的情况 ε。

Now we define a notion of subtyping of precision derivations, which will be needed in the proofs involving the interaction between subtyping and casts.

B (IN)EQUATIONAL THEORY

In this section we describe the full inequational theory and then prove several derivable theorems in the theory.

请注意，为简洁起见，我们使用一些简写：我们不写出完整的 $\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{\sigma \sqsubseteq \tau} M \sqsubseteq N : A \sqsubseteq B$, (1)而是省略 $\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq}$，并且所有规则都应解释为在任意此类上下文(2)下成立；我们不写 $\sigma \sqsubseteq \tau$和 $A \sqsubseteq B$, 而是使用精度推导 d_σ, c，以及 (3) 每当含义明确时，我们也会省略类型，尤其是对于等式规则。

$$\begin{aligned}
\mathtt{bool} \mathbin{\tilde{\vee}} \mathtt{bool} &= \mathtt{bool} \\
(A \to_\sigma B) \mathbin{\tilde{\vee}} (A' \to_{\sigma'} B') &= (A \mathbin{\tilde{\wedge}} A') \to_{\sigma \mathbin{\tilde{\vee}} \sigma'} (B \mathbin{\tilde{\vee}} B') \\
? \mathbin{\tilde{\vee}} \sigma &= \sigma \\
\sigma \mathbin{\tilde{\vee}} ? &= \sigma \\
\sigma_c \mathbin{\tilde{\vee}} \tau_c &= \{\varepsilon@A \rightsquigarrow B \mid \varepsilon@A \rightsquigarrow B \in \sigma_c \wedge \varepsilon \notin \mathrm{dom}(\tau_c)\} \\
&\quad \cup \{\varepsilon@A' \rightsquigarrow B' \mid \varepsilon \notin \mathrm{dom}(\sigma_c) \wedge \varepsilon@A' \rightsquigarrow B' \in \tau_c\} \\
&\quad \cup \{\varepsilon@A \mathbin{\tilde{\vee}} A' \rightsquigarrow B \mathbin{\tilde{\wedge}} B' \mid \varepsilon@A \rightsquigarrow B \in \sigma_c \wedge \varepsilon@A' \rightsquigarrow B' \in \tau_c\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathtt{bool} \mathbin{\tilde{\vee}} \mathtt{bool} &= \mathtt{bool} \\
(A \to_\sigma B) \mathbin{\tilde{\wedge}} (A' \to_{\sigma'} B') &= (A \mathbin{\tilde{\vee}} A') \to_{\sigma \mathbin{\tilde{\wedge}} \sigma'} (B \mathbin{\tilde{\wedge}} B') \\
? \mathbin{\tilde{\wedge}} \sigma &= ? \\
\sigma \mathbin{\tilde{\wedge}} ? &= ? \\
\sigma_c \mathbin{\tilde{\wedge}} \tau_c &= \{\varepsilon@A \mathbin{\tilde{\wedge}} A' \rightsquigarrow B \mathbin{\tilde{\vee}} B' \mid \varepsilon@A \rightsquigarrow B \in \sigma_c \wedge \varepsilon@A' \rightsquigarrow B' \in \tau_c\}
\end{aligned}$$

图15. 渐进式交与并

$$\mathtt{bool} \leq \mathtt{bool} \qquad \frac{d_i \leq c_i \qquad c_e \leq d_e \qquad c_o \leq d_o}{c_i \to_{c_e} c_o \leq d_i \to_{d_e} d_o} \qquad ? \leq ? \qquad \frac{c \leq d}{\mathtt{inj}(c) \leq \mathtt{inj}(d)}$$

$$\frac{\mathrm{dom}(d_c) \subseteq \mathrm{dom}(d_c') \qquad \forall \varepsilon : c \rightsquigarrow d \in d_c . \varepsilon : c' \rightsquigarrow d' \in d_c' \wedge c \leq c' \wedge d' \leq d}{d_c \leq d_c'} \qquad \frac{c \leq \mathtt{inj}(\Sigma)}{c \leq ?} \qquad \frac{c \leq d}{c \leq \mathtt{inj}(d)}$$

图16. 精度推导的子类型关系

First we need general call-by-value reasoning principles.

$$\frac{M[x : A] \equiv N[x : A] \qquad V \equiv V' : A}{M[V/x] \equiv N[V'/x]}\ \textsc{ValSubst} \qquad \mathtt{let}\ x = y\ \mathtt{in}\ N \equiv N[y/x]\ \textsc{MonadUnitL}$$

$$\mathtt{let}\ x = M\ \mathtt{in}\ x \equiv M\ \textsc{MonardUnitR}$$

$$\mathtt{let}\ y = (\mathtt{let}\ x = M\ \mathtt{in}\ N)\ \mathtt{in}\ P \equiv \mathtt{let}\ x = M\ \mathtt{in}\ \mathtt{let}\ y = N\ \mathtt{in}\ P\ \textsc{MonadAssoc}$$

$$M[x : \mathtt{bool}] \equiv \mathtt{if}\ x\{M[\mathtt{true}/x]\}\{M[\mathtt{false}/x]\}\ \textsc{BoolEta}$$

$$\mathtt{if}\ \mathtt{true}\{N_t\}\{N_f\} \equiv N_t\ \textsc{BoolBetaTru} \qquad \mathtt{if}\ \mathtt{false}\{N_t\}\{N_f\} \equiv N_f\ \textsc{BoolBetaFalse}$$

$$\mathtt{if}\ M\{N_t\}\{N_f\} \equiv \mathtt{let}\ x = M\ \mathtt{in}\ \mathtt{if}\ x\{N_t\}\{N_f\}\ \textsc{IfEval} \qquad (\lambda x.M)V \equiv M[V/x]\ \textsc{FunBeta}$$

$$(V : A \to B) \equiv \lambda x.Vx\ \textsc{FunEta} \qquad M\,N \equiv \mathtt{let}\ x = M\ \mathtt{in}\ \mathtt{let}\ y = N\ \mathtt{in}\ x\,y\ \textsc{AppEval}$$

Next, the rules specifically for raise and handlers:

$$\texttt{handle}\ x\,\{\texttt{ret}\ y.M \mid \phi\} \equiv M[x/y]\ \textsc{HandleBetaRet}$$

$$\texttt{handle}\ (\texttt{let}\ o = \texttt{raise}\ \varepsilon(x)\ \texttt{in}\ N_k)\,\{\texttt{ret}\ y.M \mid \phi\} \equiv \phi(\varepsilon)[\lambda o.\texttt{handle}\ N_k\,\{\texttt{ret}\ y.M \mid \phi\}/k]\ \textsc{HandleBetaRaise}$$

$$\texttt{raise}\ \varepsilon(M) \equiv \texttt{let}\ x = M\ \texttt{in raise}\ \varepsilon(x)\ \textsc{RaiseEval}$$

$$\texttt{handle}\ M\,\{\texttt{ret}\ x.N \mid \emptyset\} \equiv \texttt{let}\ x = M\ \texttt{in}\ N\ \textsc{HandleEmpty}$$

$$\frac{\forall \varepsilon \in \mathrm{dom}(\phi).\ \psi(\varepsilon) = \phi(\varepsilon) \qquad \forall \varepsilon \in \mathrm{dom}(\psi).\varepsilon \notin \mathrm{dom}(\phi) \Rightarrow \psi(\varepsilon) = k(\texttt{raise}\ \varepsilon(x))}{\texttt{handle}\ M\,\{\texttt{ret}\ y.N \mid \phi\} \equiv \texttt{handle}\ M\,\{\texttt{ret}\ y.N \mid \psi\}}\ \textsc{HandleExt}$$

Next, the congruence rules

$$\frac{x_1 \sqsubseteq x_2 : c \in \Gamma^{\sqsubseteq}}{\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_\sigma} x_1 \sqsubseteq x_2 : c}\ \textsc{VarCong} \qquad \frac{}{\vdash_{d_\sigma} \texttt{true} \sqsubseteq \texttt{true} : \texttt{bool}}\ \textsc{TrueCong}$$

$$\frac{}{\vdash_{d_\sigma} \texttt{false} \sqsubseteq \texttt{false} : \texttt{bool}}\ \textsc{FalseCong} \qquad \frac{x_1 \sqsubseteq x_2 : c \vdash_{d_{\sigma'}} M_1 \sqsubseteq M_2 : d}{\vdash_{d_\sigma} \lambda x_1.M_1 \sqsubseteq \lambda x_2.M_2 : c \to_{d_{\sigma'}} d}\ \textsc{LambdaCong}$$

$$\frac{\vdash_{d_\sigma} M_1 \sqsubseteq M_2 : c \to_{d_\sigma} d \qquad \vdash_{d_\sigma} N_1 \sqsubseteq N_2 : c}{\vdash_{d_\sigma} M_1\,N_1 \sqsubseteq M_2\,N_2 : d}\ \textsc{AppCong}$$

$$\frac{\vdash_{d_\sigma} M_1 \sqsubseteq M_2 : c \qquad x_1 \sqsubseteq x_2 : c \vdash_{d_\sigma} N_1 \sqsubseteq N_2 : d}{\vdash_{d_\sigma} \texttt{let}\ x_1 = M_1\ \texttt{in}\ N_1 \sqsubseteq \texttt{let}\ x_2 = M_2\ \texttt{in}\ N_2 : d}\ \textsc{LetCong}$$

$$\frac{\vdash_{d_\sigma} M \sqsubseteq M' : \texttt{bool} \qquad \vdash_{d_\sigma} N_t \sqsubseteq N_t' : c \qquad \vdash_{d_\sigma} N_f \sqsubseteq N_f' : c}{\vdash_{d_\sigma} \texttt{if}\ M\{N_t\}\{N_f\} \sqsubseteq \texttt{if}\ M'\{N_t'\}\{N_f'\} : c}\ \textsc{IfCong}$$

$$\frac{c : A_1 \sqsubseteq A_2 \qquad d : B_1 \sqsubseteq B_2 \qquad \varepsilon@c \rightsquigarrow d \in d_\sigma \qquad \vdash_{d_\sigma} M_1 \sqsubseteq M_2 : c}{\vdash_{d_\sigma} \texttt{raise}\ \varepsilon(M_1) \sqsubseteq \texttt{raise}\ \varepsilon(M_2) : d}\ \textsc{RaiseCong}$$

$$\frac{\vdash_{d_\sigma} M \sqsubseteq M' : c \qquad y : c \vdash_{d_\tau} N \sqsubseteq N' : d \qquad \forall \varepsilon@d_i \rightsquigarrow d_o \in d_\sigma.(\varepsilon \notin \mathrm{dom}(\phi) \wedge \varepsilon \notin \mathrm{dom}(\phi') \wedge \varepsilon : d_i \rightsquigarrow d_o \in d_\tau) \vee x : d_i, k : d_o \to_{d_\tau} d \vdash_{d_\tau} \phi(\varepsilon) \sqsubseteq \phi'(\varepsilon) : d}{\vdash_{d_\tau} \texttt{handle}\ M\,\{\texttt{ret}\ y.N \mid \phi\} \sqsubseteq \texttt{handle}\ M'\,\{\texttt{ret}\ y.N' \mid \phi'\} : d}\ \textsc{HandleCong}$$

接下来，错误的规则

$$\frac{\vdash_{d_\sigma{}^r} M : c^r}{\vdash_{d_\sigma} \mho \sqsubseteq M : c}\ \textsc{ErrBot} \qquad E[\mho] \equiv \mho\ \textsc{ErrStrict}$$

类型转换的一般规则

$$\frac{\vdash_{d_\sigma} M \sqsubseteq N : (c : A \sqsubseteq B)}{\vdash_{d_\sigma} \langle B \quad A\rangle M \sqsubseteq N : B}\ \textsc{ValUpL} \qquad \frac{\vdash_\sigma M : A \quad c : A \sqsubseteq B}{\vdash_\sigma M \sqsubseteq \langle B \quad A\rangle M : c}\ \textsc{ValUpR}$$

$$\langle B \quad A\rangle M \equiv \mathtt{let}\ x = M\ \mathtt{in}\ \langle B \quad A\rangle x \qquad \textsc{ValUpEval} \qquad \frac{c : A \sqsubseteq B \quad \vdash_\sigma N : B}{\vdash_\sigma \langle A \quad B\rangle N \sqsubseteq N : c}\ \textsc{ValDnL}$$

$$\frac{\vdash_{d_\sigma} M \sqsubseteq N : (c : A \sqsubseteq B)}{\vdash_{d_\sigma} M \sqsubseteq \langle A \quad B\rangle N : A}\ \textsc{ValDnR} \qquad \langle A \quad B\rangle M \equiv \mathtt{let}\ x = M\ \mathtt{in}\ \langle A \quad B\rangle x\ \textsc{ValDnEval}$$

$$\frac{\vdash_{d_\sigma} M \sqsubseteq N : c \quad d_\sigma : \sigma \sqsubseteq \tau}{\vdash_\tau \langle \tau \quad \sigma\rangle M \sqsubseteq N : c}\ \textsc{ValUpL} \qquad \frac{\vdash_\sigma M : A \quad d_\sigma : \sigma \sqsubseteq \tau}{\vdash_{d_\sigma} M \sqsubseteq \langle \tau \quad \sigma\rangle M : c}\ \textsc{ValUpR}$$

$$\frac{d_\sigma : \sigma \sqsubseteq \tau \quad \vdash_\tau N : A}{\vdash_{d_\sigma} \langle \sigma \quad \tau\rangle N \sqsubseteq N : A}\ \textsc{EffDnL} \qquad \frac{d_\sigma : \sigma \sqsubseteq \tau \vdash_{d_\sigma} M \sqsubseteq N : c}{\vdash_\sigma M \sqsubseteq \langle \sigma \quad \tau\rangle N : c}\ \textsc{EffDnR}$$

以及子类型规则

$$\frac{\begin{array}{c}\vdash_{d_\sigma} M \sqsubseteq N : c \quad d_\sigma : \sigma \sqsubseteq \tau \quad c : A \sqsubseteq B \\ d'_\sigma : \sigma' \sqsubseteq \tau' \quad c' : A' \sqsubseteq B' \\ \sigma \le \sigma' \quad A \le A' \quad \tau \le \tau' \quad B \le B'\end{array}}{\vdash_{d'_\sigma} M \sqsubseteq N : c'}\ \textsc{SubtyMon}$$

$$\frac{c : A \sqsubseteq B \quad c' : A' \sqsubseteq B' \quad c \le c' \quad \vdash_\sigma M : A}{\vdash_\sigma \langle B \quad A\rangle M \equiv \langle B' \quad A'\rangle M : B'}\ \textsc{ValUpSub}$$

$$\frac{c : A \sqsubseteq B \quad c' : A' \sqsubseteq B' \quad c \le c' \quad \vdash_\sigma N : B}{\vdash_\sigma \langle A \quad B\rangle N \equiv \langle A' \quad B'\rangle N : \sigma\,!\,A'}\ \textsc{ValDnSub}$$

$$\frac{c_\sigma : \sigma \sqsubseteq \tau \quad c' : \sigma' \sqsubseteq \tau' \quad c_\sigma \le c'_\sigma \quad \vdash_\sigma M : A}{\vdash_{\tau'} \langle \tau \quad \sigma\rangle M \equiv \langle \tau' \quad \sigma'\rangle M : A}\ \textsc{EffUpSub}$$

$$\frac{c_\sigma : \sigma \sqsubseteq \tau \quad c' : \sigma' \sqsubseteq \tau' \quad c_\sigma \le c'_\sigma \quad \vdash_\tau N : A}{\vdash_{\sigma'} \langle \sigma \quad \tau\rangle N \equiv \langle \sigma' \quad \tau'\rangle N : A}\ \textsc{EffDnSub}$$

In Figure 17, we list some derivable reasoning principles for our inequational theory, which follow by analogous proofs to prior work.

We can show the following properties of the interaction between subtyping and casts axiomatically:

Lemma B.1. *The following hold:*

(1) $\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{d_\sigma} hB' \quad A'iM \sqsubseteq hB \quad AiN : \ B'_\circ$

(2) $\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{d_\sigma} hA \quad BiM \sqsubseteq hA' \quad B'iN : \ A'_\circ$

(3) $\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{\sigma'_2} h\sigma'_2 \quad \sigma'_1 i P \sqsubseteq h\sigma_2 \quad \sigma_1 iQ : \ c_\circ$

(4) $\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{\sigma'_1} h\sigma_1 \quad \sigma_2 i P \sqsubseteq h\sigma'_1 \quad \sigma'_2 iQ : \ c_\circ$

证明

$$\langle A \quad A\rangle M \equiv M \qquad \langle \sigma \quad \sigma\rangle M \equiv M \qquad \langle A \quad A\rangle M \equiv M \qquad \langle \sigma \quad \sigma\rangle M \equiv M$$

$$\langle C \quad B\rangle\langle B \quad A\rangle M \equiv \langle C \quad A\rangle M \qquad \langle A \quad B\rangle\langle B \quad C\rangle M \equiv \langle A \quad C\rangle M$$

$$\langle \sigma'' \quad \sigma'\rangle\langle \sigma' \quad \sigma\rangle M \equiv \langle \sigma'' \quad \sigma\rangle M \qquad \langle \sigma \quad \sigma'\rangle\langle \sigma' \quad \sigma''\rangle M \equiv \langle \sigma \quad \sigma''\rangle M$$

$$\langle B \quad A\rangle\langle \sigma' \quad \sigma\rangle M \equiv \langle \sigma' \quad \sigma\rangle\langle B \quad A\rangle M \qquad \langle A \quad B\rangle\langle \sigma \quad \sigma'\rangle M \equiv \langle \sigma \quad \sigma'\rangle\langle A \quad B\rangle M$$

Fig. 17. Proveable Uniqueness Theorems

我们有

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash_{d_\sigma} M \sqsubseteq N : A}{\vdash_{d\sigma} M \sqsubseteq \langle B \quad A\rangle N : A \sqsubseteq B}\,(\textsc{ValUpR})}{\vdash_{d_\sigma} M \sqsubseteq \langle B \quad A\rangle N : A' \sqsubseteq B'}\,(\textsc{Subtyping})}{\vdash_{d\sigma} \langle B' \quad A'\rangle M \sqsubseteq \langle B \quad A\rangle N : B'}\,(\textsc{ValUpL})$$

与上述内容对偶。
我们有

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash_{\sigma_1} P \sqsubseteq Q : c}{\vdash_{d_\sigma} P \sqsubseteq \langle \sigma_2 \quad \sigma_1\rangle Q : c}\,(\textsc{EffUpR})}{\vdash_{d'_\sigma} P \sqsubseteq \langle \sigma_2 \quad \sigma_1\rangle Q : c}\,(\textsc{Subtyping})}{\vdash_{\sigma'_2} \langle \sigma'_2 \quad \sigma'_1\rangle P \sqsubseteq \langle \sigma_2 \quad \sigma_1\rangle Q : c}\,(\textsc{EffUpL})$$

与上述内容对偶。 □

C OPERATIONAL SEMANTICS

An evaluation context $E_{\#\varepsilon}$ is one in which none of the handler clauses in the spine of the context handles ε.

C.1 Operational Semantics from First Principles

Now we show that every operational reduction is justified by our inequational theory.

引理C.1（效应强制转换是处理器）。*Let* $\sigma \sqsubseteq \tau$ 其中 σ 是一个具体效应集。那么向上强制转换 $\langle \tau \quad \sigma\rangle$ 等价于一个处理器，即对于任意 M： $\sigma\,!\;A$:

$$\langle \tau \quad \sigma\rangle M \equiv \texttt{handle}\ M\,\{\texttt{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle \tau \quad \sigma\rangle}\}$$

where for each $\varepsilon \in dom(\sigma)$

$$x, k \vdash \phi_{\langle \tau \quad \sigma\rangle}(\varepsilon) = k(\langle B_\sigma \quad B_\tau\rangle \texttt{raise}\ \varepsilon(\langle A_\tau \quad A_\sigma\rangle))$$

where $\varepsilon @ A_\sigma \rightsquigarrow B_\sigma \in \sigma$ *and* $\varepsilon @ A_\tau \rightsquigarrow B_\tau \in \tau$.

Similarly, the downcast $\langle \sigma \quad \tau\rangle$ *is equivalent to a handler in that for any* $N : \tau\,!\,A$:

$$\langle \sigma \quad \tau\rangle M \equiv \texttt{handle}\ M\,\{\texttt{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle \sigma \quad \tau\rangle}\}$$

where for each $\varepsilon \in dom(\tau)$, *if* $\varepsilon \in dom(\sigma)$, *then*

$$x, k \vdash \phi_{\langle \sigma \quad \tau\rangle}(\varepsilon) = k(\langle B_\tau \quad B_\sigma\rangle \texttt{raise}\ \varepsilon(\langle A_\sigma \quad A_\tau\rangle))$$

$$\frac{\varepsilon \in \mathrm{dom}(\phi) \qquad E'\#\varepsilon}{E[\texttt{handle}\ E'[\texttt{raise}\ \varepsilon(V)]\ \{\texttt{ret}\ x.N \mid \phi\}] \mapsto E[\phi(\varepsilon)[V/x][(\lambda y.\text{处理器}\ (E'[y])\ \{\text{返回}\ \ x.N \mid \phi\})/k]]}$$

$$\frac{}{E[\texttt{handle}\ V\ \{\texttt{ret}\ x.N \mid \phi\}] \mapsto E[N[V/x]]}\ \text{HandleVal}$$

$$\frac{}{E[(\lambda x.M)V] \mapsto E[M[V/x]]}\ \textsc{Lam} \qquad \frac{}{E[\texttt{let}\ x = V\ \texttt{in}\ M] \mapsto E[M[V/x]]}\ \textsc{Let}$$

$$\frac{}{E[\mho] \mapsto \mho}\ \textsc{Err} \qquad \frac{}{E[\texttt{if true}\{N_t\}\{N_f\}] \mapsto E[N_t]}\ \text{IfTrue}$$

$$\frac{}{E[\texttt{if false}\{N_t\}\{N_f\}] \mapsto E[N_f]}\ \text{IfFalse} \qquad \frac{}{E[{}^{\text{小时}}_{\sigma'}\ \ \sigma\rangle V] \mapsto E[V]}\ \text{EffUpDnCastVal}$$

$$\frac{}{E[{}^{\text{小时}}_{\sigma}\ \ \sigma'\rangle V] \mapsto E[V]}\ \text{EffDnCastVal}$$

$$\frac{\varepsilon \in \sigma' \qquad E'\#\varepsilon}{E[\langle\sigma'\ \ \sigma\rangle E'[\texttt{raise}\ \varepsilon(V)]] \mapsto E[\texttt{let}\ x = \langle B\ \ B'\rangle\texttt{raise}\ \varepsilon(\langle A'\ \ A\rangle V)\ \texttt{in}\ \langle\sigma'\ \ \sigma\rangle E'[x]]}\ \text{EffUpCast}$$

$$\frac{\varepsilon \in \sigma \qquad E'\#\varepsilon}{E[{}^{\text{小时}\sigma}\ \ \sigma'\rangle E'[\texttt{raise}\ \varepsilon(V)]] \mapsto E[\texttt{let}\ x = \langle B'\ \ B\rangle\texttt{raise}\ \varepsilon(\langle A\ \ A'\rangle V)\ \texttt{in}\ \langle\sigma\ \ \sigma'\rangle E'[x]]}\ \text{GoodEffDnCast}$$

$$\frac{\varepsilon \notin \sigma \qquad E'\#\varepsilon}{E[{}^{\text{小时}}_{\sigma}\ \ ?\rangle E'[\texttt{raise}\ \varepsilon(V)]] \mapsto E[\mho]}\ \text{BadEffDnCast}$$

$$E[\updownarrow \texttt{bool}M] \mapsto E[M]\quad \textsc{BoolUpDnCast}$$

$$\frac{}{E[(\langle(A' \to_{\sigma'} B') \quad (A \to_{\sigma} B)\rangle V_f)\ V] \mapsto E[\langle B' \quad B\text{ih}\sigma' \quad \sigma\rangle(V_f\langle A \quad A'\rangle V)]}\ \text{Fun向上强制转换}$$

$$\frac{}{E[(\langle(A \to_{\sigma} B) \quad (A' \to_{\sigma'} B')\rangle V_f)\ V] \mapsto E[\langle B \quad B'\text{ih}\sigma \quad \sigma'\rangle(V_f\langle A' \quad A\text{i}V)]}\ \text{FunDnCast}$$

Fig. 18. Full Operational Semantics

and if $\varepsilon \notin dom(\sigma)$, then

$$\phi_{\langle\sigma \quad \tau\rangle}(\varepsilon) = \mho$$

Proof. First for the upcast case

- 我们希望证明

$$\langle\tau \quad \sigma\rangle M \sqsubseteq \texttt{handle}\ M\ \{\texttt{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle\tau \quad \sigma\rangle}\}$$

By UpL, it is sufficient to show

$$M \sqsubseteq \texttt{handle}\ M\ \{\texttt{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle\tau \quad \sigma\rangle}\}$$

$$\Delta ::= \bullet : (\sigma\,!\,A) \qquad \frac{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\sigma E : A \to_\sigma B \qquad \Sigma \mid \Gamma \mid \cdot \vdash_\sigma N : A}{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\sigma E\,N : B}$$

$$\frac{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma V : A \to_\sigma B \qquad \Sigma \mid \Gamma \mid \bullet : (\sigma_i\,!\,C) \vdash_\sigma E : A}{\Sigma \mid \Gamma \mid \bullet : (\sigma_i\,!\,C) \vdash_\sigma V\,E : B}$$

$$\frac{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\sigma E : \text{布尔类型} \qquad \Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma N_t B \qquad \Sigma \mid \Gamma \vdash_\sigma N_f B}{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\sigma \texttt{if}\ E\{N_t\}\{N_f\} : B}$$

$$\frac{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\sigma E : A \qquad \varepsilon @ A \rightsquigarrow B \in \sigma}{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\sigma \text{raise 操作 } \varepsilon(E) : \ B}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\sigma E : A \\ \Sigma \mid \Gamma, \ x : \ A \vdash_\tau N : \ B \\ (\forall(\varepsilon : \ A_\varepsilon \rightsquigarrow B_\varepsilon) \in \sigma.\, (\varepsilon \notin \text{定义域}(\phi) \ \wedge (\varepsilon : \ A_\varepsilon \rightsquigarrow B_\varepsilon) \in \tau) \\ \vee(\Sigma \mid \Gamma, \ x : \ A_\varepsilon, \ k : \ B_\varepsilon \to_\tau B \vdash_\tau \phi(\varepsilon) : \ B))\end{array}}{\Sigma \mid \Gamma \vdash_\tau \texttt{handle}\ E\,\{\texttt{ret}\ x.N \mid \phi\} : B}$$

$$\frac{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\sigma E : A \qquad \Sigma \mid \Gamma, x : A \vdash_\sigma N : B}{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\sigma \texttt{let}\ x = E\ \texttt{in}\ N : B} \qquad \frac{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\sigma E : A' \qquad \Sigma \mid \Gamma \vdash A' \leq A}{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\sigma E : A}$$

$$\frac{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\Delta \sigma' : EA \qquad \Sigma \mid \Gamma \vdash \sigma' \leq \sigma}{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\sigma E : A} \qquad \frac{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\sigma E : A \qquad \Sigma \vdash A \sqsubseteq B}{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\sigma \langle B \quad A\mathbf{i}E : B}$$

$$\frac{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\sigma E : B \qquad \Sigma \vdash A \sqsubseteq B}{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\sigma \langle A \quad B\mathbf{i}E : A} \qquad \frac{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\sigma E : A \qquad \Sigma \vdash \sigma \sqsubseteq \sigma'}{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_{\sigma'} \langle \sigma' \quad \sigma\mathbf{i}E : A}$$

$$\frac{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_{\sigma'} E : A \qquad \Sigma \vdash \sigma \sqsubseteq \sigma'}{\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\sigma \langle \sigma \quad \sigma' \rangle E : A}$$

Fig. 19. Typing Rules for Evaluation Contexts

$$\varepsilon \# \bullet \qquad \frac{\varepsilon \# E}{\varepsilon \#(\mathrm{h}B \quad A\rangle E)} \qquad \frac{\varepsilon \# E}{\varepsilon \#(\mathrm{h}A \quad B\rangle E)} \qquad \frac{\varepsilon \# E \qquad \varepsilon \notin \sigma \qquad \varepsilon \notin \sigma'}{\varepsilon \#(\langle \sigma' \quad \sigma\rangle E)}$$

$$\frac{\varepsilon \# E \qquad \varepsilon \notin \sigma'}{\varepsilon \#(\mathrm{h}\sigma \quad \sigma'\rangle E)} \qquad \frac{\varepsilon \# E \qquad \varepsilon' \text{ 任意效应}}{\varepsilon \#(\texttt{raise}\ \varepsilon'(E))} \qquad \frac{\varepsilon \# E \wedge \varepsilon \notin \mathrm{dom}(\phi)}{\varepsilon \#(\texttt{handle}\ E\,\{\texttt{ret}\ x.N \mid \phi\})} \qquad \frac{\varepsilon \# E}{\varepsilon \#(E\,M)}$$

$$\frac{\varepsilon \# E}{\varepsilon \#(V\,E)} \qquad \frac{\varepsilon \# E}{\varepsilon \#(\texttt{if}\ E\{N_t\}\{N_f\})} \qquad \frac{\varepsilon \# E}{\varepsilon \#(\texttt{let}\ x = E\ \texttt{in}\ N)}$$

Fig. 20. Apartness of Effect from an Evaluation Context

但根据处理器 η 规则，这等价于证明

$$\texttt{handle}\ M\,\{\texttt{ret}\ x.x \mid \phi_\sigma\} \sqsubseteq \texttt{handle}\ M\,\{\texttt{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle\tau\quad\sigma\rangle}\}$$

其中定义域(ϕ_σ) =定义域(σ) 且 $\phi_\sigma(\varepsilon) = k(\texttt{raise}\ \text{操作}\ \varepsilon(x))$。然后根据同余，我们需要证明对于每个 $\varepsilon \in$ 定义域(σ),

$$k(\texttt{raise}\ \varepsilon(x)) \sqsubseteq k(\langle B_\sigma \quad B_\tau\rangle \texttt{raise}\ \varepsilon(\langle A_\sigma \quad \rangle A_\tau x)$$

这由 UpR/DnR 和同余规则得出

- 我们想要证明

$$\texttt{handle}\ M\,\{\texttt{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle\tau\quad\sigma\rangle}\} \sqsubseteq \langle\tau \quad \sigma\rangle M$$

By handler η it is sufficient to show

$$\texttt{handle}\ M\,\{\texttt{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle\tau\quad\sigma\rangle}\} \sqsubseteq \texttt{handle}\ \langle\tau \quad \sigma\rangle M\,\{\texttt{ret}\ x.x \mid \phi_\tau\}$$

其中 定义域(ϕ_τ) =定义域(τ)，且 $\phi_\tau(\varepsilon) = k(\texttt{raise}\ \text{操作}\ \varepsilon(x))$。然后 $M \sqsubseteq \texttt{h}\tau \quad \sigma\texttt{i}M$依据 UpR 成立，因此依据 同余，我们只需证明对于每个 $\varepsilon \in \sigma$ 均有

$$\phi_{\langle\tau\quad\sigma\rangle}(\varepsilon) \sqsubseteq \phi_\tau(\varepsilon)$$

which follows by a similar argument to the previous case.

Next, the downcast cases.

- 我们想要展示

$$\texttt{handle}\ N\,\{\texttt{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle\sigma\quad\tau\rangle}\} \sqsubseteq \langle\sigma \quad \tau\rangle N$$

By DnR, it is sufficient to show

$$\texttt{handle}\ N\,\{\texttt{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle\sigma\quad\tau\rangle}\} \sqsubseteq N$$

By handler η this is equivalent to showign

$$\texttt{handle}\ N\,\{\texttt{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle\sigma\quad\tau\rangle}\} \sqsubseteq \texttt{handle}\ N\,\{\texttt{ret}\ x.x \mid \phi_\tau\}$$

That is, for any $\varepsilon \in \mathrm{dom}(\tau)$ that

$$\phi_{\langle\sigma\quad\tau\rangle}(\varepsilon) \sqsubseteq \phi_\tau(\varepsilon)$$

有两种情形

(1) If $\varepsilon \in \mathrm{dom}(\sigma)$, then we need to show

$$k(\langle B_\tau \quad B_\sigma\rangle \texttt{raise}\ \varepsilon(\langle A_\tau \quad A_\sigma\rangle x)) \sqsubseteq k(\texttt{raise}\ \varepsilon(x))$$

which follows by congruence and DnL/UpL rules.

(2) If $\varepsilon \notin \mathrm{dom}(\sigma)$, then we need to show

$$\mho \sqsubseteq k(\texttt{raise}\ \varepsilon(x))$$

这是显而易见的。

- 我们想要展示

$$\langle\sigma \quad \tau\rangle N \sqsubseteq \texttt{handle}\ N\,\{\texttt{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle\sigma\quad\tau\rangle}\}$$

By handler η this is equivalent to showing

$$\texttt{handle}\ (\langle\sigma \quad \tau\rangle N)\,\{\texttt{ret}\ x.x \mid \phi_\sigma\} \sqsubseteq \texttt{handle}\ N\,\{\texttt{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle\sigma\quad\tau\rangle}\}$$

By congruence and DnL this reduces to showing for each $\varepsilon \in \mathrm{dom}(\sigma)$ that

$$\phi_\sigma(\varepsilon) \sqsubseteq \phi_{\langle\sigma\quad\tau\rangle}(\varepsilon)$$

since $\varepsilon \in \mathrm{dom}(\sigma)$, these are each of the form:

$$k(\mathtt{raise}\ \varepsilon(x)) \sqsubseteq k(\langle B_\tau \quad B_\sigma\rangle \mathtt{raise}\ \varepsilon(\langle A_\tau \quad A_\sigma\rangle x))$$

which follows by congruence and DnR/UpR rules.

□

Lemma C.2 (Derivation of Function Casts).

$$\langle A' \to_\tau B' \quad A \to_\sigma B\rangle f \equiv \lambda x.\langle B' \quad B\rangle\langle \tau \quad \sigma\rangle(f(\langle A \quad A'\rangle x))$$

同样,

$$\langle A \to_\sigma B \quad A' \to_\tau B'\rangle f \equiv \lambda x.\langle B \quad B'\rangle\langle \sigma \quad \tau\rangle(f(\langle A' \quad A\rangle x))$$

Proof. We show the upcast cases, the downcast cases are precisely dual.

(1) 我们要证明

$$\langle A' \to_\tau B' \quad A \to_\sigma B\rangle f \sqsubseteq \lambda x.\langle B' \quad B\rangle\langle \tau \quad \sigma\rangle(f(\langle A \quad A'\rangle x))$$

根据 UpL，只需证明

$$f \sqsubseteq \lambda x.\langle B' \quad B\rangle\langle \tau \quad \sigma\rangle(f(\langle A \quad A'\rangle x))$$

根据函数的 η 等价关系，只需证明

$$\lambda x.fx \sqsubseteq \lambda x.\langle B' \quad B\rangle\langle \tau \quad \sigma\rangle(f(\langle A \quad A'\rangle x))$$

这可由同余规则和 UpR/DnR 规则推出。

(2) 我们要证明

$$\lambda x.\langle B' \quad B\rangle\langle \tau \quad \sigma\rangle(f(\langle A \quad A'\rangle x)) \sqsubseteq \langle A' \to_\tau B' \quad A \to_\sigma B\rangle f$$

根据函数 η，只需证明

$$\lambda x.\langle B' \quad B\rangle\langle \tau \quad \sigma\rangle(f(\langle A \quad A'\rangle x)) \sqsubseteq \lambda y.(\langle A' \to_\tau B' \quad A \to_\sigma B\rangle f)y$$

Which follows by congruence and UpL/DnL/UpR rules.

□

Lemma C.3. *If* $x, k \vdash \phi(\varepsilon) = k(\mathtt{raise}\ \varepsilon(x))$, *then*

处理器raise 操作 $\varepsilon(x)$ {返回 $y.N \mid \phi$} ≡Let o =(raise操作 $\varepsilon(x)$) in 处理器 o {返回 $y.N \mid \phi$} 证明。

$$\begin{aligned}\text{处理器raise 操作 } \varepsilon(x)\ \{\text{返回 } y.N \mid \phi\} &\equiv \text{处理器 (Let } o = \text{raise 操作 } \varepsilon(x) \text{ 中 } o\{\text{返回 } y.N \mid \phi\}\\ &\equiv (\lambda o.\mathtt{handle}\ o\ \{\mathtt{ret}\ y.N \mid \phi\})(\mathtt{raise}\ \varepsilon(x))\\ &\equiv \mathtt{let}\ o = (\mathtt{raise}\ \varepsilon(x))\ \mathtt{in}\ \mathtt{handle}\ o\ \{\mathtt{ret}\ y.N \mid \phi\}\end{aligned}$$

□

该引理对于以下内容的类型转换情形很有用，因为它简化为证明该类型转换等价于其 ε 情形仅为重新 raise 操作的类型转换。

Lemma C.4. *If* $E\#\varepsilon$, *then*

$$E[\mathtt{raise}\ \varepsilon(x)] \equiv \mathtt{let}\ y = \mathtt{raise}\ \varepsilon(x)\ \mathtt{in}\ E[y]$$

Proof. By induction on $\varepsilon\#E$

- $\varepsilon\#\bullet$

$$\mathtt{raise}\ \varepsilon(x) \equiv \mathtt{let}\ y = \mathtt{raise}\ \varepsilon(x)\ \mathtt{in}\ y$$

- $\dfrac{\varepsilon \# E}{\varepsilon \# (\mathrm{h}B \quad A\rangle E)}$

$$\begin{aligned}\langle B \quad A\rangle E[\mathtt{raise}\ \varepsilon(x)] &\equiv \mathtt{let}\ y = E[\mathtt{raise}\ \varepsilon(x)]\ \mathtt{in}\ \langle B \quad A\rangle y \\ &\equiv \mathtt{let}\ y = (\mathtt{let}\ z = (\mathtt{raise}\ \varepsilon(x))\ \mathtt{in}\ E[z])\ \mathtt{in}\ \langle B \quad A\rangle y \\ &\equiv \mathtt{let}\ z = (\mathtt{raise}\ \varepsilon(x))\ \mathtt{in}\ \mathtt{let}\ y = E[z]\ \mathtt{in}\ \langle B \quad A\rangle y \\ &\equiv \mathtt{let}\ z = (\mathtt{raise}\ \varepsilon(x))\ \mathtt{in}\ \langle B \quad A\rangle E[z]\end{aligned}$$

- $\dfrac{\varepsilon \# E}{\varepsilon \# (\mathrm{h}A \quad B\rangle E)}$
与之前类似。
- $\dfrac{\varepsilon \# E}{\varepsilon \# (\text{raise 操作 } \varepsilon'(E))}$

$$\begin{aligned}\text{raise } \varepsilon'(E[\text{raise } \varepsilon'(x)]) &\equiv \text{raise } \varepsilon'((\text{let } z = \text{raise } \varepsilon'(x) \text{ in } E[z])) \\ &\equiv \mathtt{let}\ z = \mathtt{raise}\ \varepsilon'(x)\ \mathtt{in}\ E[z]\mathtt{raise}\ \varepsilon'(())\end{aligned}$$

- $\dfrac{\varepsilon \# E \qquad \varepsilon \notin \mathrm{dom}(\phi)}{\varepsilon \# (\text{处理器 } E\{\text{返回 } y.N \mid \phi\})}$ 将 ψ 定义为 ϕ 与情形 $\psi(\varepsilon) = k$ (raise 操作 $\varepsilon(x)$) 的扩展。

$$\begin{aligned}\text{处理器 } E[\text{raise 操作 } \varepsilon(x)]\{\text{返回 } y.N \mid \phi\} &\equiv \text{处理器 } E[\text{raise 操作 } \varepsilon(x)]\{\text{返回 } y.N \mid \psi\} \\ &\equiv \text{处理器 (let } z = (\text{raise 操作 } \varepsilon(x)) \text{ in } E[z])\{\text{返回 } y.N \mid \psi\} \\ &\equiv (\lambda o.\text{处理器 } E[o]\{\text{返回 } y.N \mid \psi\})(\text{raise 操作 } \varepsilon(x)) \equiv (\text{let} \\ &\ o = (\text{raise 操作 } \varepsilon(x)) \text{ in 处理器 } E[o]\{\text{返回 } y.N \mid \psi\}) \equiv \\ &(\text{let } o = (\text{raise 操作 } \varepsilon(x)) \text{ in 处理器 } E[o]\{\text{返回 } y.N \mid \phi\})\end{aligned}$$

- $\dfrac{\varepsilon \# E}{\varepsilon \# (E\ M)}$

$$\begin{aligned}(E[\mathtt{raise}\ \varepsilon(x)])M &\equiv \mathtt{let}\ f = E[\mathtt{raise}\ \varepsilon(x)]\ \mathtt{in}\ \mathtt{let}\ y = M\ \mathtt{in}\ f\ y \\ &\equiv \mathtt{let}\ f = (\mathtt{let}\ z = \mathtt{raise}\ \varepsilon(x)\ \mathtt{in}\ E[z])\ \mathtt{in}\ \mathtt{let}\ y = M\ \mathtt{in}\ f\ y \\ &\equiv \mathtt{let}\ z = \mathtt{raise}\ \varepsilon(x)\ \mathtt{in}\ \mathtt{let}\ f = E[z]\ \mathtt{in}\ \mathtt{let}\ y = M\ \mathtt{in}\ f\ y \\ &\equiv \mathtt{let}\ z = \mathtt{raise}\ \varepsilon(x)\ \mathtt{in}\ (E[z])\ M\end{aligned}$$

- $\dfrac{\varepsilon \# E}{\varepsilon \# (V\ E)}$

$$\begin{aligned}(V\,E[\mathtt{raise}\ \varepsilon(x)]) &\equiv \mathtt{let}\ f = V\ \mathtt{in}\ \mathtt{let}\ y = E[\mathtt{raise}\ \varepsilon(x)]\ \mathtt{in}\ f\,y\\ &\equiv \mathtt{let}\ f = V\ \mathtt{in}\ \mathtt{let}\ y = (\mathtt{let}\ z = \mathtt{raise}\ \varepsilon(x)\ \mathtt{in}\ E[z])\ \mathtt{in}\ f\,y\\ &\equiv \mathtt{let}\ y = (\mathtt{let}\ z = \mathtt{raise}\ \varepsilon(x)\ \mathtt{in}\ E[z])\ \mathtt{in}\ V\,y\\ &\equiv \mathtt{let}\ z = \mathtt{raise}\ \varepsilon(x)\ \mathtt{in}\ \mathtt{let}\ y = (E[z])\ \mathtt{in}\ V\,y\\ &\equiv \mathtt{let}\ z = \mathtt{raise}\ \varepsilon(x)\ \mathtt{in}\ V\,(E[z])\end{aligned}$$

- $$\frac{\varepsilon \# E}{\varepsilon \# (\mathtt{if}\ E\{N_t\}\{N_f\})}$$

$$\begin{aligned}\mathtt{if}\ E[\mathtt{raise}\ \varepsilon(x)]\{N_t\}\{N_f\} &\equiv \mathtt{let}\ y = (E[\mathtt{raise}\ \varepsilon(x)])\ \mathtt{in}\ \mathtt{if}\ y\{N_t\}\{N_f\}\\ &\equiv \mathtt{let}\ y = (\mathtt{let}\ z = \mathtt{raise}\ \varepsilon(x)\ \mathtt{in}\ E[z])\ \mathtt{in}\ \mathtt{if}\ y\{N_t\}\{N_f\}\\ &\equiv \mathtt{let}\ z = \mathtt{raise}\ \varepsilon(x)\ \mathtt{in}\ \mathtt{let}\ y = (E[z])\ \mathtt{in}\ \mathtt{if}\ y\{N_t\}\{N_f\}\\ &\equiv \mathtt{let}\ z = \mathtt{raise}\ \varepsilon(x)\ \mathtt{in}\ \mathtt{if}\ E[z]\{N_t\}\{N_f\}\end{aligned}$$

- $$\frac{\varepsilon \# E}{\varepsilon \# (\mathtt{let}\ x = E\ \mathtt{in}\ N)}$$

$$\begin{aligned}\mathtt{let}\ y = E[\mathtt{raise}\ \varepsilon(x)]\ \mathtt{in}\ N &\equiv \mathtt{let}\ y = \mathtt{let}\ z = (\mathtt{raise}\ \varepsilon(x))\ \mathtt{in}\ E[z]\ \mathtt{in}\ N\\ &\equiv \mathtt{let}\ z = (\mathtt{raise}\ \varepsilon(x))\ \mathtt{in}\ \mathtt{let}\ y = E[z]\ \mathtt{in}\ N\end{aligned}$$

□

定理C.5（操作语义的可靠性）。如果 $M \mapsto^* M'$ 那么 $M \equiv M'$ 在不等式理论中可推导。

证明。(1) 值处理器、布尔/函数 β归约以及错误归约均由公理立即得出。

(2)

$$\frac{E \# \varepsilon}{\mathtt{handle}\ E[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V)]\ \{\mathtt{ret}\ y.N \mid \phi\} \equiv \phi(\varepsilon)[V/x, \lambda o.\mathtt{handle}\ E[o]\ \{\mathtt{ret}\ y.N \mid \phi\}/k]}$$

$$\begin{aligned}\mathtt{handle}\ E[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V)]\ \{\mathtt{ret}\ y.N \mid \phi\} &\equiv \mathtt{handle}\ (\mathtt{let}\ z = \mathtt{raise}\ \varepsilon(V)\ \mathtt{in}\ E[z])\ \{\mathtt{ret}\ y.N \mid \phi\} && (\text{Lemma C.4})\\ &\equiv \phi(\varepsilon)[V/x, \lambda o.\mathtt{handle}\ E[o]\ \{\mathtt{ret}\ y.N \mid \phi\}/k]\end{aligned}$$

(3)

$$\langle \tau \quad \sigma \rangle V \equiv V$$

如下所述：

$$\begin{aligned}\langle \tau \quad \sigma \rangle V &\equiv \mathtt{handle}\ V\ \{\mathtt{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle \tau \quad \sigma \rangle}\} && (\text{Lemma C.1})\\ &\equiv V && (\text{Handle } \beta)\end{aligned}$$

(4)

$$\langle \sigma \quad \tau \rangle V \equiv V$$

与前一个类似。

(5)

$$\frac{\varepsilon @ A \rightsquigarrow B \in \sigma \qquad \varepsilon @ A' \rightsquigarrow B' \in \tau \qquad E \# \varepsilon}{\langle \tau \quad \sigma \rangle E[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V)] \equiv \mathtt{let}\ x = \langle B \quad B' \rangle \mathtt{raise}\ \varepsilon(\langle A' \quad A \rangle V)\ \mathtt{in}\ \langle \tau \quad \sigma \rangle E[x]}$$

$$\begin{aligned}
\langle \tau \quad \sigma \rangle E[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V)] &\equiv \mathtt{handle}\ (E[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V)])\ \{\mathtt{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle \tau \quad \sigma \rangle}\} && \text{(LemmaC.1)} \\
&\equiv \mathtt{handle}\ (\mathtt{let}\ z = \mathtt{raise}\ \varepsilon(V)\ \mathtt{in}\ E[z])\ \{\mathtt{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle \tau \quad \sigma \rangle}\} \\
& && \text{(LemmaC.4)} \\
&\equiv \phi_{\langle \tau \quad \sigma \rangle}(\varepsilon)[V/x, \lambda o.\mathtt{handle}\ E[o]\ \{\mathtt{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle \tau \quad \sigma \rangle}\}] \\
&= (\lambda o.\mathtt{handle}\ E[o]\ \{\mathtt{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle \tau \quad \sigma \rangle}\})(\langle B \quad B' \rangle \mathtt{raise}\ \varepsilon(\langle A' \quad A \rangle V)) \\
&\equiv (\lambda o.\langle \tau \quad \sigma \rangle E[o])(\langle B \quad B' \rangle \mathtt{raise}\ \varepsilon(\langle A' \quad A \rangle V)) \\
&\equiv \mathtt{let}\ o = (\langle B \quad B' \rangle \mathtt{raise}\ \varepsilon(\langle A' \quad A \rangle V))\ \mathtt{in}\ \langle \tau \quad \sigma \rangle E[o]
\end{aligned}$$

(6)

$$\frac{\varepsilon @ A \rightsquigarrow B \in \sigma \qquad \varepsilon @ A' \rightsquigarrow B' \in \tau \qquad E \# \varepsilon}{\langle \sigma \quad \tau \rangle E[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V)] \equiv \mathtt{let}\ x = \langle B' \quad B \rangle \mathtt{raise}\ \varepsilon(\langle A \quad A' \rangle V)\ \mathtt{in}\ \langle \sigma \quad \tau \rangle E[x]}$$

Similar to previous

(7)

$$\frac{\varepsilon \notin \sigma \qquad E \# \varepsilon}{\langle \sigma \quad ? \rangle E[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V)] \equiv \mho}$$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma \quad ? \rangle E[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V)] &\equiv \mathtt{handle}\ (E[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V)])\ \{\mathtt{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle \sigma \quad ? \rangle}\} && \text{(LemmaC.1)} \\
&\equiv \mathtt{handle}\ (\mathtt{let}\ z = (\mathtt{raise}\ \varepsilon(V))\ \mathtt{in}\ E[z])\ \{\mathtt{ret}\ x.x \mid \phi_{\langle \sigma \quad ? \rangle}\} \\
& && \text{(引理C.4)} \\
&\equiv \mho
\end{aligned}$$

(8)

$$\langle \mathtt{bool} \quad \mathtt{bool} \rangle V \equiv V$$

根据恒等规则。

(9)

$$\langle \mathtt{bool} \quad \mathtt{bool} \rangle V \equiv V$$

根据恒等规则。

(10)

$$(\langle (A' \to_\tau B') \quad (A \to_\sigma B) \rangle V_f)\ V \equiv \langle B' \quad B \rangle \langle \tau \quad \sigma \rangle (V_f \langle A \quad A' \rangle V)$$

依据以下内容：

$$\begin{aligned}
(\langle (A' \to_\tau B') \quad (A \to_\sigma B) \rangle V_f)\ V &\equiv ((\lambda x.\langle B' \quad B \rangle \langle \tau \quad \sigma \rangle (V_f (\langle A \quad A' \rangle x)))\ V \\
& && \text{(LemmaC.2)} \\
&\equiv \langle B' \quad B \rangle \langle \tau \quad \sigma \rangle (V_f (\langle A \quad A' \rangle V)) && (\beta \to)
\end{aligned}$$

(11) Similar to previous.

□

Theorem C.6 (Adequacy). *If* $\cdot \vdash_\emptyset M \equiv M' : \texttt{bool}$ *is derivable in the equational theory than for any* $R \in \{\texttt{true}, \texttt{false}\ \mho\}$

$$M \mapsto^* R \iff M' \mapsto^* R$$

Corollary C.7 (Consistency). $\texttt{true} \equiv \texttt{false}$ *is not derivable.*

定理 C.8（渐进性）。如果$\cdot \vdash_\emptyset M \sqsubseteq M' :$ 布尔类型则对于任意 $R \in \{\texttt{true},\ \texttt{false}\}$,

$$M \mapsto^* R \Rightarrow M' \mapsto^* R$$

and for any $R' \in \{\texttt{true}, \texttt{false}\ \mho\}$,

$$M' \mapsto^* R' \implies M \mapsto^* R'$$

D elaboration

引理 D.1. 如果 $A \lesssim B$则存在类型 A_h, D_h, D_l, B_l使得

(1) $c_l : A \sqsubseteq D_l$且 $c_h : A_h \sqsubseteq D_h$满足 $c_l \le c_h$*(2)* $d_l : B_l \sqsubseteq D_l$且 $d_h : B \sqsubseteq D_h$满足 $d_l \le d_h$*(3)* $e_l : D_l \sqsubseteq D$且 $e_h : D_h \sqsubseteq D$满足 $e_l \le e_h$其中 $D = \lceil A \rceil = \lceil B \rceil$.

证明. 通过对 $A \lesssim A'$的证明使用归纳法。 □

于是四种不同的类型转换选择在不等式理论中都是等价的:

引理 D.2. 给定前一个引理输出中的 $A, A_h, B, B_l, D_l, D_h, D, c_l, c_h, d_l, d_h, e_l, e_h$，对于任意 $\Gamma \vdash M : \sigma\,!\,A$，以下四个项在类型 B 上等价。

*(1)*hB $D_h$ihD_h A_hiM*(2)*hB $D_h$ihD_l AiM*(3)* hB_l $D_l$ihD_l AiM*(4)*hB Dih$D$ AiM

Proof. (1) To show (1) is equivalent to (2), it suffices to show

$$\langle D_h \quad A_h \rangle M \equiv \langle D_l \quad A \rangle M$$

which is an instance of the subtyping/cast rule since $c_l \sqsubseteq c_h$.

(2) Similarly to show (2) is equivalent to (3) follows from $d_l \le d_h$

(3) Lastly we show (4) is equivalent to (2). By cast functoriality,

$$\langle B \quad D \rangle \langle D \quad A \rangle M \equiv \langle B \quad D_h \rangle \langle D_h \quad D \rangle \langle D \quad D_l \rangle \langle D_l \quad A \rangle M$$

And by retraction the middle cast $\langle D_h \quad D \rangle \langle D \quad D_l \rangle$ is the identity.

□

D.1 Graduality

Our main goal is to prove the soundness of the inequational theory with respect to the logical relation. That is

定理 D.3（渐进性）。如果 $\Gamma^\sqsubseteq \vdash_{d_\sigma} M \sqsubseteq N : c$那么 $\Gamma^\sqsubseteq \vDash_{d_\sigma} M \sqsubseteq N : c$

Proof. By induction on the term precision derivation.

(1)（值替换）引理D.31(2)（MonadUnitL）引理D.32(3)（单子右单位）引理D.33(4)（单子结合律）引理D.34(5)（布尔β 规约）引理D.36 和 D.37

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{VAtom}\, c & := & \{(V^l, V^r) : \mathtt{val}(V^l) \wedge \mathtt{val}(V^r) \wedge \\ & & \quad (\Sigma \mid \cdot \mid \cdot \vdash_\emptyset V^l : c^l) \wedge (\Sigma \mid \cdot \mid \cdot \vdash_\emptyset V^r : c^r)\} \\ \\ \mathrm{TAtom}\, A^l\, A^r\, d_\sigma & := & \{(M^l, M^r) : \\ & & \quad (\Sigma \mid \cdot \mid \cdot \vdash_{d^l_\sigma} M^l : A^l) \wedge (\Sigma \mid \cdot \mid \cdot \vdash_{d^r_\sigma} M^r : A^r)\} \end{array}$$

$\mathrm{ECtxAtom}\, c (\sigma^l!\ A^l)\ (\sigma^r!\, A^r) := \{(x^l.M^l, x^r.M^r) : (\Sigma \mid x^l\colon\ c^l \mid \cdot \vdash_{\sigma^l} M^l\colon\ A^l) \wedge (\Sigma \mid x^r\colon\ c^r \mid \cdot \vdash_{\sigma^r} M^r\colon\ A^r)\}$

Fig. 21. Well typed atoms

(6) (BoolEta) 引理 D.35 (7) (IfEval) 引理 D.38 (8) (FunBeta) 引理 D.39 (9) (FunEta) 引理 D.40 (10) (AppEval) 引理 D.41 (11) (HandleBetaRet) 引理 D.42 (12) (HandleBetaRaise) 引理 D.43 (13) (HandleEmpty) 引理 D.45 (14) (HandleExt) 引理 D.46 (15) (RaiseEval) 引理 D.44 (16) (变量) 引理 D.23 (17) (Let) 引理 D.27 (18) (布尔) 引理 D.22 (19) (If) 引理 D.26 (20) (Lambda) 引理 D.24 (21) (App) 引理 D.25 (22) (Raise) 引理 D.28 (23) (HandleCong) 引理 D.29 (24) (传递性) 引理 D.69 (25) (ErrBot) 引理 D.47 (26) (ErrStrict) 引理 D.48 (27) (SubtyMon) 引理 D.49 (28) (ValUpSub) 引理 D.61 (29) (ValDnSub) 引理 D.61 (30) (EffUpSub) 引理 D.61 (31) (EffDnSub) 引理 D.61 (32) (ValUpL) 由引理 D.51 得出。(33) (ValUpR) 由引理 D.50 得出。(34) (ValUpEval) 引理 D.58 (35) (ValDnR) 由引理 D.53 得出。(36) (ValDnL) 由引理 D.52 得出。(37) (ValDnEval) 引理 D.59 (38) (ValRetract) 引理 D.60。(39) (EffUpL) 由引理 D.55 得出 (40) (EffUpR) 由引理 D.54 得出

(41) (EffDnR) 由引理D.57(42) (EffDnL)
由引理D.56(43) (EffRetract) 引理D.60。

□

We begin with a few lemmas that will be useful in our proofs.

D.1.1 Lemmas.

引理 D.4. 如果 $(V_1, V_2) \in R$，且 V_1和 V_2分别是类型 A^l和 A^r的值，那么$(V_1, V_2) \in \mathcal{R}_j^{\sim}[\![d_\sigma]\!](R, A^l, A^r)$。

Proof. We will establish the first disjunct in the definition of $\mathcal{R}^{\sim}[\![\cdot]\!]$. This follows by assumption. □

引理 D.5. 如果 $(V_1, V_2) \in \mathrm{R}_j^{\sim}\grave{E}d_\sigma\acute{E}(R, A^l, A^r)$，则 $(V_1, V_2) \in \mathrm{E}_j^{\sim}\grave{E}d_\sigma\acute{E}(R, A^l, A^r)$。

证明.Let $\sim \in \{<, >\}$，并假设 $(V_1, V_2) \in \mathrm{R}_j^{\sim}\grave{E}d_\sigma\acute{E}(R, A^l, A^r)$。注意，无论 $\sim$是 $<$ 还是 $>$，我们都能证明 $\mathrm{E}\ {}_j^{\lesssim}\grave{E}d_\sigma\acute{E}(R, A^l, A^r)$ 或 $\mathrm{E}\ {}_j^{\gtrsim}\grave{E}d_\sigma\acute{E}(R, A^l, A^r)$ 定义中的最后一个子句。具体而言，我们可以取 $k = j$、 $V_1 = V_1$和 $V_2 = V_2$，注意到 V_1 在 0步内规约到自身， V_2 也是如此。因此，剩下的就是证明 V_1 和 V_2 由 $\mathrm{R}\ {}_j^{\lesssim}\grave{E}d_\sigma\acute{E}(R, A^l, A^r)$ 或 $\mathrm{R}_j^{\gtrsim}\grave{E}d_\sigma\acute{E}(R, A^l, A^r)$ 关联。这由假设可得。
□

引理 D.6. 若 $(V_1, V_2) \in \mathrm{V}_j^{\sim}\grave{E}c\acute{E}$，则 $(V_1, V_2) \in \mathrm{E}_j^{\sim}\grave{E}d_\sigma\acute{E}\mathrm{V}^{\sim}\grave{E}c\acute{E}$。

证明。 根据引理 D.5 (取 $R = \mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!]$)，只需证明 $(\sigma_1 V_1, \sigma_1 V_2) \in \mathcal{R}_j^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!]$。由引理 D.4（同样取 $R = \mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!]$）即可得证。 □

引理 *D.7*（反向归约，单侧）。设 $M_1 \mapsto^{i_1} M_1'$ 且 $M_2 \mapsto^{i_2} M_2'$。若 $(M_1', M_2') \in E\ {}_{j-i_2}^{\gtrsim}\grave{E}d_\sigma\acute{E}(R, A^l, A^r)$，则 $(M_1, M_2) \in E\ {}_j^{\gtrsim}\grave{E}d_\sigma\acute{E}(R, A^l, A^r)$。类似地，若 $(M_1', M_2') \in E\ {}_{j-i_1}^{\lesssim}\grave{E}d_\sigma\acute{E}(R, A^l, A^r)$，则 $(M_1, M_2) \in E\ {}_j^{\lesssim}\grave{E}d_\sigma\acute{E}(R, A^l, A^r)$。

证明。我们证明第一个陈述；第二个类似（事实上更简单）。假设 $(M_1', M_2') \in \mathrm{E}\ {}_{j-i_2}^{\gtrsim}\grave{E}d_\sigma\acute{E}(R, A^l, A^r)$，共有四种情形：

(1) $M_2' \mapsto^{j-i_2+1}$。在这种情形下，$M_2 \mapsto^{i_2} M_2' \mapsto^{j-i_2+1}$，即 $M_2 \mapsto^{j+1}$。因此，我们可以断言 $\mathrm{E}\ {}_j^{\gtrsim}\grave{E}d_\sigma\acute{E}(R, A^l, A^r)$ 定义中的第一个析取项。(2) 存在 $k \le j - i_2$ 使得 $M_1' \mapsto^{j-i_2-k} \mathrm{U}$，并且 $M_1' \mapsto^* \mathrm{U}$。在这种情形下，我们有 $M_2 \mapsto^{i_2} M_2' \mapsto^{j-i_2-k} \mathrm{U}$，所以 $M_2 \mapsto^{j-k} \mathrm{U}$。此外，$M_1 \mapsto^{i_1} M_1' \mapsto^* \mathrm{U}$，所以 $M_1 \mapsto^* \mathrm{U}$。因此，我们可以断言第二个析取项。(3) 存在 $k \le j - i_2$ 和 N_2 使得 $M_2' \mapsto^{j-i_2-k} N_2$ 和 $M_1' \mapsto^* \mathrm{U}$。在这种情形下，我们有 $M_2 \mapsto^{i_2} M_2' \mapsto^{j-i_2-k} N_2$，所以 $M_2 \mapsto^{j-k} N_2$。因此，我们可以断言第三个析取项。(4) 与前一种情形类似。

□

引理D.8（反向归约）。 假设 $M_1 \mapsto^{i_1} M_1'$ 和 $M_2 \mapsto^{i_2} M_2'$，并且 $(M_1', M_2') \in \mathcal{E}_{j-m}^{\sim}[\![d_\sigma]\!](R, A^l, A^r)$，其中 $m = \min\{i_1, i_2\}$。那么$(M_1, M_2) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![d_\sigma]\!](R, A^l, A^r)$。

Proof. Follows from one-sided anti-reduction (Lemma D.7) and downward closure. □

引理 *D.9*（前向归约，单侧）。假设$M_1 \mapsto^{i_1} M_1'$和 $M_2 \mapsto^{i_2} M_2'$。若 $(M_1, M_2) \in E\ {}_{j+i_2}^{\gtrsim}\grave{E}d_\sigma\acute{E}(R, A^l, A^r)$，则 $(M_1', M_2') \in E\ {}_j^{\gtrsim}\grave{E}d_\sigma\acute{E}(R, A^l, A^r)$。类似地，若 $(M_1, M_2) \in E\ {}_{j+i_1}^{\lesssim}\grave{E}d_\sigma\acute{E}(R, A^l, A^r)$，则 $(M_1', M_2') \in E\ {}_j^{\lesssim}\grave{E}d_\sigma\acute{E}(R, A^l, A^r)$。

证明。由求值的确定性以及对 M_1和 M_2 相关这一假设进行情形分析可得。□

引理D.10（前向归约）。 假设 $M_1 \mapsto^{i_1} M_1'$ 和 $M_2 \mapsto^{i_2} M_2'$，且 $(M_1, M_2) \in \mathcal{E}^{\sim}_{j+m}[\![d_\sigma]\!](R, A^l, A^r)$，其中 $m = \max\{i_1, i_2\}$。那么 $(M_1', M_2') \in \mathcal{E}^{\sim}_{j}[\![d_\sigma]\!](R, A^l, A^r)$。

Proof. Follows from one-sided forward reduction (Lemma D.9) and downward closure. □

在我们的证明中，我们经常会遇到这样的情况：已知两个求值上下文在 K~È·É 关系下相关，也就是说，代入相关值会得到相关输出。另一方面，由于应用于值的类型转换本身不一定是值，因此我们无法直接推理将此类语义值代入相关求值上下文时会发生什么。因此，我们引入以下引理。

引理 D.11. 假设 E_1 和 E_2 是能将值映射为值的求值上下文。令 V_1 和 V_2为值（不必相关），使得

$$(E_1[V_1], E_2[V_2]) \in \mathcal{E}^{\sim}_{j}[\![d'_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!].$$

此外，令 $(E^l[x^l], E^r[x^r] \in \mathcal{K}^{\sim}_{j}[\![c]\!]\mathcal{E}^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![d]\!])$。

Then

$$(E^l[E_1[V_1]], E^r[E_2[V_2]]) \in \mathcal{E}^{\sim}_{j}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![d]\!].$$

证明。我们给出 $\sim = >$ 的证明。

根据假设，存在值 $V\prime 1$ 和 $V\prime 2$，使得 $E_1[V_1] \mapsto^{i_1} V\prime 1$ 和 $E_2[V_2] \mapsto^{i_2} V\prime 2$，其中 i_1 和 i_2 为某些值。

因此，$E^l[E_1[V_1]] \mapsto^{i_1} E^l[V\prime_1]$，同理 $E^r[E_2[V_2]] \mapsto^{i_2} E^r[V\prime_2]$。

根据单侧反向归约（引理D.7），只需证明

$$(E^l[V_1'], E^r[V_2']) \in \mathcal{E}^{\geq}_{j-i_2}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\geq}[\![d]\!].$$

根据关于 E^l和 E^r相关的假设，只需证明 $(V\prime 1,\ V\prime 2) \in \mathcal{V}^{\geq}_{j-i_2}[\![c]\!]$。现在根据单侧前向归约（引理 D.9），只需证明

$$(E_1[V_1], E_2[V_2]) \in \mathcal{E}^{\geq}_{(j-i_2)+i_2}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!].$$

But this is precisely our assumption, so we are finished.

□

备注：我们之所以需要单独考虑 $\sim$ 的情形，是因为更"通用"/双边的反向归约和前向归约引理涉及两个项所采取的步数的最小值或最大值。这些可能不相等，在这种情况下算术将无法成立。但这并不意味着上述引理是错误的。从概念上讲，发生的情况是，在引理的双边变体中，$\sim$ 可能是 $>$ 或 $<$。另一方面，关键在于 $\sim$ 在应用反向归约和前向归约的整个过程中保持不变，因此我们能够使用更具体的单边引理。

引理 D.12（超时）。如果 $M_1 \mapsto^{(i+1)}$，则$(M_1, M_2) \in \mathcal{E}^{\leq}_{i}[\![d_\sigma]\!]R$。类似地，如果 $M_2 \mapsto^{(i+1)}$，则$(M_1, M_2) \in \mathcal{E}^{\geq}_{i}[\![d_\sigma]\!]R$。

证明。假设 $M_1 \mapsto^{(i+1)}$。那么我们可以断言$\mathrm{E}^{\leq}_{i}$Èd_σÉR 的定义中的第一个析取项，从而得出$(M_1, M_2) \in \mathrm{E}^{\leq}_{i}$È$d_\sigma$É$R$。同样地，如果 $M_2 \mapsto^{(i+1)}$，那么我们可以断言 $\mathrm{E}^{\geq}_{i}$Èd_σÉR 的定义中的第一个析取项，从而得出$(M_1, M_2) \in \mathrm{E}^{\geq}_{i}$È$d_\sigma$É$R$。□

We present two trivial lemmas about the later modality. We do this to cut down on tedious reasoning about step indices within other proofs.

引理 D.13。 *Let* R是一个单调步索引关系。如果 $(M_1, M_2) \in R_j$，那么$(M_1, M_2) \in (\blacktriangleright R)j$。

证明。假设 $(M_1, M_2) \in R_j$。若 $j = 0$，则 $(M_1, M_2) \in (\blacktriangleright R)_0$ 显然成立。

否则，Let $j = j' + 1$。根据 R 的单调性，我们有 $(M_1, M_2) \in R_{j'}$，由此可得 $(M_1, M_2) \in (\blacktriangleright R)j$。 □

引理 D.14.*Let* R 是一个单调步索引关系，并令 j 具有 $j = j' + 1$的形式。如果$(M_1, M_2) \in (\blacktriangleright R)j$，那么 $(M_1, M_2) \in (\blacktriangleright R)j'$。

证明。 假设 $(M_1, M_2) \in (\blacktriangleright R)j$。由于 $j = j\prime + 1$，根据 $\blacktriangleright$的定义，我们必须有$(M_1, M_2) \in R_{j'}$。根据前一个引理（引理 D.13），我们得出 $(M_1, M_2) \in (\blacktriangleright R)j'$，这正是我们需要证明的结论。 □

引理 D.15（当双方都迈步时运用"later"进行推理）。假设 $M \mapsto^1 M'$ 且 $N \mapsto^1 N\prime$，并且 $(M', N\prime) \in (\blacktriangleright \mathrm{E}\tilde{}\grave{\mathrm{E}}d_\sigma\acute{\mathrm{E}})_k R$。那么 $(M, N) \in \mathrm{E}^{\sim}_k \grave{\mathrm{E}}d_\sigma\acute{\mathrm{E}}R$。

证明。 首先假设 $k = 0$。那么根据超时引理（引理 D.12），无论$\sim$是 $<$还是 $>$，都有 $(M, N) \in \mathcal{E}^{\sim}_0[\![d_\sigma]\!]R$。

现在假设 $k \geq 1$。那么根据 later 模态的定义，我们有 $(M', N\prime) \in \mathrm{E}^{\sim}_{k-1}\grave{\mathrm{E}}d_\sigma\acute{\mathrm{E}}R$，因此根据反向归约，我们有$(M, N) \in \mathrm{E}^{\sim}_k \grave{\mathrm{E}}d_\sigma\acute{\mathrm{E}}R$。 □

引理 D.16（Löb 归纳）。 *Let* $P(n)$ 是一个以自然数 n 为指标的谓词。假设对于所有自然数 n，我们有 $(\blacktriangleright^m P)(n)$ 蕴含 $P(n)$，对于所有 $m \geq 1$ 均成立。那么 $P(n)$对于所有自然数 n都成立。

证明。证明通过对 n 进行归纳法。当 $n = 0$时，假设表明 $(\blacktriangleright P)$ (0) implies$P(0)$（我们取了 $m = 1$）。因此，只需证明 $(\blacktriangleright P)$ (0) 成立即可。根据 later 模态的定义，这一点成立。

现在固定 $n \geq 1$，并假设 $P(n)$ 为真。我们声称 $P(n+1)$ 为真。根据我们的假设，只需证明 $(\blacktriangleright P)(n+1)$ 为真。（我们再次选择了 $m = 1$。）根据 later 模态的定义，我们必须证明 $P(n)$ 为真。但根据假设，$P(n)$ 为真。 □

We now introduce a key lemma about evaluation contexts.

注意：在下文中，我们省略了与参数化 $\mathrm{E}\tilde{}\grave{\cdot}\acute{\mathrm{E}}$ 和 $\mathrm{R}\tilde{}\grave{\cdot}\acute{\mathrm{E}}$ 的关系相关联的类型的显式提及。

引理 D.17. 如果 *(1)* $(M_1, M_2) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![d'_\sigma]\!]S'$*(2)* 对所有 $k \leq j$以及$(N_1, N_2) \in \mathcal{R}^{\sim}_k[\![d\prime_\sigma]\!]S'$，我们有$(E_1[N_1], E_2[N_2]) \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![d_\sigma]\!]S$,

那么 $(E_1[M_1], E_2[M_2]) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![d_\sigma]\!]S$。

证明。我们证明 $\sim =>$ 的引理；其他情形类似。根据假设 (1)，有四种情形：

(1)情形 $M_2 \mapsto^{j+1}$。我们有 $E_2[M_2] \mapsto^{j+1}$，因此可以断言定义中的第一个析取项 $\mathrm{E}^{\sim}_j\grave{\mathrm{E}}d_\sigma\acute{\mathrm{E}}S$，从而 $(E_1[M_1], E_2[M_2]) \in \mathrm{E}^{\sim}_j\grave{\mathrm{E}}d_\sigma\acute{\mathrm{E}}S$。(2) 情形 $\exists k \leq j$使得 $M_2 \mapsto^{j-k} \mho$ 且 $M_1 \mapsto^* \mho$。我们有 $E_2[M_2] \mapsto^{j-k+1} \mho$。如果 $k = 0$，那么我们有 $E_2[M_2] \mapsto^{j+1}$，因此可以断言第一个析取项。否则，如果 $k \geq 1$，那么可以取 $k' = k - 1$ 并注意到 $E_2[M_2] \mapsto^{j-k'} \mho$。

(3)情形 $\exists k \le j, \exists V_2$ 使得 $M_2 \mapsto^{j-k} N_2$ 和 $M_1 \mapsto^* \upsilon$。我们有 $E_2[M_2] \mapsto^{j-k} E_2[N_2]$，所以我们可以用 $k = k$ 和 $N_2 = E_2[N_2]$ 断言第三个析取项。

(4) 情形 $\exists k \le j, \exists (N_1, N_2) \in \mathrm{R}_{\ge k}[\![d_\sigma]\!] S'$ 使得 $M_2 \mapsto^{j-k} N_2$ 且 $M_1 \mapsto^* N_1$。我们有 $E_1[M_1] \mapsto^{i_1} E_1[N_1]$ 对于某个 i_1，以及 $E_2[M_2] \mapsto^{j-k} E_2[N_2]$。根据假设 (2)，我们有 $(E_1[N_1], E_2[N_2]) \in \mathrm{E}_k^{\sim}[\![d_\sigma]\!] S$。因此，我们可以断言第四个析取支，其中 $V_1 = E_1[N_1]$ 和 $V_2 = E_2[N_2]$。

□

引理 D.18（“语义绑定”）。*Let* $c : A \sqsubseteq A'$ 和 $d : B \sqsubseteq B'$。*Let* E_1 和 E_2 为求值上下文，使得 $\Sigma \mid \Gamma \mid \bullet : (d_\sigma'^{l}!\ A) \vdash_{d_\sigma^l} E_1 : B$ 且 $\Sigma \mid \Gamma \mid \bullet : (d_\sigma'^{r}!\ A') \vdash_{d_\sigma^r} E_2 : B'$。假设 *(1)* $(M_1, M_2) \in E_j^{\sim}[\![d_\sigma']\!](S', A, A')$。*(2)* 对于所有 $k \le j$ 以及 $(V_1, V_2) \in S_k'$，我们有 $(E_1[V_1], E_2[V_2]) \in E_k^{\sim}[\![d_\sigma]\!](S, B, B')$。*(3)* 对于所有 $k \le j$ 以及所有 $\varepsilon : c_\varepsilon \rightsquigarrow d_\varepsilon \in d_\sigma'$，如果 E_1 捕获 ε 或 E_2 捕获 ε，则对于所有 V^l、$V^r \in (\blacktriangleright V^{\sim}[\![c_\varepsilon]\!])_k$ 以及所有求值上下文 $E^l \# \varepsilon$ 和 $E^r \# \varepsilon$，使得 $(x^l.E^l[x^l], x^r.E^r[x^r]) \in (\blacktriangleright K^{\sim}[\![d_\varepsilon]\!])_k (E^{\sim}[\![d_\sigma']\!](S', A, A'), (d_\sigma'^{l}!\ A), (d_\sigma'^{r}!\ A'))$，我们有 $(E_1[E^l[\mathit{raise}\ \varepsilon(V^l)]], E_2[E^r[\mathit{raise}\ \varepsilon(V^r)]]) \in E_k^{\sim}[\![d_\sigma]\!](S, B, B')$。则 $(E_1[M_1], E_2[M_2]) \in E_j^{\sim}[\![d_\sigma]\!](S, B, B')$。

证明。我们使用Löb归纳（引理 D.16）。我们假设，如果引理的前提在“later模态”下得到满足，那么结论在 later 模态下成立。我们在此假设下证明该引理在“现在”成立。

我们首先应用引理 D.17。第一个假设显然成立。现在令 $k \le j$，并令 $(N_1, N_2) \in \mathrm{R}_k^{\sim}[\![d_\sigma]\!](S', A, A')$。我们需要证明的是

$$(E_1[N_1], E_2[N_2]) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![d_\sigma]\!](S, B, B').$$

需要考虑两种情形。第一种情形中，N_1 和 N_2 是值，并且 $(N_1, N_2) \in \mathrm{V}_j^{\sim}[\![c]\!]$。于是，根据假设 (2) 和 $k = j$，我们有 $(E_1[N_1], E_2[N_2]) \in \mathrm{E}_j^{\sim}[\![d_\sigma]\!](S, B, B')$，正如所需。

在第二种情形中，存在 $\varepsilon' : c' \rightsquigarrow d' \in d_\sigma'$，$E^l \# \varepsilon', E^r \# \varepsilon'$，和 V^l, V^r，使得 $(V^l, V^r) \in (\blacktriangleright \mathrm{V}^{\sim}[\![c']\!])_j$，并且 $(x^l.E^l[x^l], x^r.E^r[x^r]) \in (\blacktriangleright \mathrm{K}^{\sim}[\![d']\!])_j (\mathrm{E}^{\sim}[\![d_\sigma']\!](S', A, A'), (d_\sigma'^{l}!\ A), (d_\sigma'^{r}!\ A'))$，和 $N_1 = E^l[\text{raise 操作 } \varepsilon'(V^l)]$ 和 $N_2 = E^r[\text{raise操作 } \varepsilon'(V^r)]$。Let $N'_1 = E_1[N_1] = E_1[E^l[\text{raise 操作 } \varepsilon'(V^l)]]$ 和 $N'_2 = E_2[N_2] = E_2[E^r[\text{raise 操作 } \varepsilon'(V^r)]]$。

我们需要证明：

$$(N_1', N_2') \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![d_\sigma]\!](S, B, B').$$

现在我们考虑 E_1 或 E_2 中的一个是否捕获 ε'，或者两者都没有捕获它。在前一种情形下，假设 (3) 立即推出所需结果。

现在假设 E_1 和 E_2 都没有捕获 ε。在这种情形下，注意到由于 $\varepsilon' \# E^l$ 和 $\varepsilon' \# E_1$，我们有 $\varepsilon' \# E_1[E^l]$。同样，我们有 $\varepsilon' \# E_2[E^r]$。由此可知，$N'1$ 和 $N'2$ 是卡住项，即它们不会进行步进。因此，只需证明

$$(N_1', N_2') \in \mathcal{R}_j^{\sim}[\![d_\sigma]\!](S, B, B').$$

我们首先断言 $(V^l,\ V^r) \in (\blacktriangleright \mathcal{V}^{\sim}[\![c']\!])_j$。由于 $(V^l,\ V^r) \in (\blacktriangleright \mathcal{V}^{\sim}[\![c']\!])_j$，这可由引理 D.14 得出。

我们现在主张：

$$(x^l.(E_1[E^l[x^l]]), x^r.(E_2[E^r[x^r]])) \in (\blacktriangleright \mathcal{K}^{\sim}[\![d']\!])_j (\mathcal{E}^{\sim}[\![d_\sigma]\!](S, B, B'), (d_\sigma^l\ !\ B), (d_\sigma^r\ !\ B')).$$

To this end, let $k \leq j$ and let $(V'^l, V'^r) \in (\blacktriangleright \mathcal{V}^\sim[\![d']\!])_k$. We need to show that

$$(E_1[E^l[V'^l]], E_2[E^r[V'^r]]) \in (\blacktriangleright \mathcal{E}^\sim[\![d_\sigma]\!])_k(S, B, B').$$

根据 Löb归纳假设，只需证明该引理的三个假设在 later 模态下成立。我们声称 $(E^l[V'^l], E^r[V'^r]) \in (\mathrm{E}^\sim_k \grave{\mathrm{E}} d\prime_\sigma \acute{\mathrm{E}} \mathrm{V}^\sim \grave{\mathrm{E}} c \acute{\mathrm{E}})$。为此，请回想我们的假设，即

$$(x^l.E^l[x^l], x^r.E^r[x^r]) \in (\blacktriangleright \mathcal{K}^\sim[\![d']\!])_j(\mathcal{E}^\sim[\![d'_\sigma]\!]\mathcal{V}^\sim[\![c]\!]).$$

因此，我们有 $(E^l[V'^l], E^r[V'^r]) \in (\blacktriangleright \mathrm{E}^\sim \grave{\mathrm{E}} d\prime_\sigma \acute{\mathrm{E}})_k(\mathrm{V}^\sim \grave{\mathrm{E}} c \acute{\mathrm{E}})$，这正是我们需要证明的结论。

□

We now introduce a few lemmas about precision derivations. We first show how we may "compose" precision derivations:

引理 D.19（精度推导的切规则可容许性）。• 若 $c\colon A \sqsubseteq B$ 且 $d\colon B \sqsubseteq C$则 $c \circ d\colon A \sqsubseteq C$。

• 若 $d_\sigma\colon \sigma \sqsubseteq \sigma'$ 且 $d\prime_\sigma\colon \sigma' \sqsubseteq \sigma''$ 则 $d_\sigma \circ d\prime_\sigma\colon \sigma \sqsubseteq \sigma''$。

证明。我们通过对 d 和 d'_σ 同时进行归纳来证明这些陈述。

• 情形 d = 布尔类型。我们有 $B = C$ = 布尔类型，因此 c = 布尔类型（自反性推导）。于是，我们可以取 $c \circ d$ = 布尔类型。

• 情形$d = d_i \to_{d_\sigma} d_o$。检查图 14 中的规则，我们看到 $B = B_i \to_{B_\sigma} B_o$ 和 $C = C_i \to_{C_\sigma} C_o$。因此，我们必须有 $A = A_i \to_{A_\sigma} A_o$，这意味着 $c = c_i \to_{c_\sigma} c_o$。我们可以取 $c \circ d = (c_i \circ d_i) \to_{c_\sigma \circ d_\sigma} (c_o \circ d_o)$。根据归纳假设，我们有 (1)$c_i \circ d_i\colon A_i \sqsubseteq C_i$，(2) $c_\sigma \circ d_\sigma\colon A_\sigma \sqsubseteq C_\sigma$，以及 (3) $c_o \circ d_o\colon A_o \sqsubseteq C_o$。现在，使用函数的类型精度形成规则，我们得到 $(c_i \circ d_i) \to_{c_\sigma \circ d_\sigma} (c_o \circ d_o) : (A_i \to_{A_\sigma} A_o \sqsubseteq C_i \to_{C_\sigma} C_o)$。

• 情形 $d\prime_\sigma = ?$。定义 $? \circ ? = ?$。定义 $\mathrm{Inj}(d) \circ ? = \mathrm{Inj}(d)$。具体效应集无法与 ? 组合。

• 情形 $d\prime_\sigma = \mathrm{Inj}(d)$。注意，$\sigma'' = ?$。我们定义 $d_\sigma \circ \mathrm{Inj}(d) = \mathrm{Inj}(d_\sigma \circ d)$。

• 情形 $d\prime_\sigma = d\prime_c$：定义（$d_c \circ d\prime_c$）如下：$\varepsilon\colon c \rightsquigarrow d \in (d_c \circ d\prime_c)$ 当且仅当 $c = c_1 \circ c_2$且 $d = d_1 \circ d_2$，其中 $\varepsilon\colon c \rightsquigarrow_1 d_1 \in d_c$且 $\varepsilon\colon c \rightsquigarrow_2 d_2 \in d\prime_c$。

□

引理 D.20（复合的自反性）。*Let* $c\colon A \sqsubseteq B$ 且 $d_\sigma\colon \sigma \sqsubseteq \sigma'$。以下成立 *d.*

- $c \circ B = A \circ c = c$.
- $d_\sigma \circ \sigma' = \sigma \circ d_\sigma = d_\sigma$.

证明。由精度推导的唯一性可得。也就是说，$c \circ B$、$A \circ c$ 和 c 都是 $A \sqsubseteq B$ 的证明，因此它们相等。□

引理 D.21（分解）。假设 $\varepsilon @ c \rightsquigarrow d \in d_\sigma \circ d'_\sigma$。那么存在 c_1、c_2 和 d_1、d_2，使得 $\varepsilon @ c_1 \rightsquigarrow d_1 \in d_\sigma$ 且 $\varepsilon @ c_2 \rightsquigarrow d_2 \in d'_\sigma$，并且 $c = c_1 \circ c_2$ 和 $d = d_1 \circ d_2$。

证明。对 $d\prime_\sigma$ 进行归纳法。

• 情形 $d\prime_\sigma = ?$。如果 $d_\sigma = ?$，那么我们的假设变为 $\varepsilon @ c \rightsquigarrow d \in ? \circ ? = ?$。根据 ? 中成员关系的定义，这意味着 $\varepsilon @ c^r \rightsquigarrow d^r \in \Sigma$。

我们可以将 $c_1 = c$ 视为 $c^r \sqsubseteq c^r$的自反性推导，并将 c_2 取为同一推导。同样地，我们将 $d_1 = d$和 d_2 视为 $d^r \sqsubseteq d^r$的自反性推导。请注意，$\varepsilon @ c_2 \rightsquigarrow d_2 \in ?$

因为 $c_2^r = c^r$和 $d_2^r = d^r$，并且我们知道 $\varepsilon@c^r \rightsquigarrow d^r \in \Sigma$。我们还有 $c = c_1 \circ c_2$和$d = d_1 \circ d_2$, 使用引理 D.20。
如果 d_σ =inj(d_σ)，则我们的假设变为 $\varepsilon@c \rightsquigarrow d \in$inj($d_\sigma$)。根据 Inj(,) 中成员关系的定义，我们有 $\varepsilon@c \rightsquigarrow d \in d_\sigma$。我们可以再次取 $c_1 = c$ 和 c_2 为 $c^r \sqsubseteq c^r$ 的自反性推导，对 d_1 和 d_2 同理。上述相同的推理适用。

- 情形 $d_{\prime\sigma}$ =inj(d_σ)。根据复合的定义，我们的假设变为 $\varepsilon@c \rightsquigarrow d \in (d_\sigma \circ \text{inj}(d_\sigma)) = \text{inj}(d_\sigma \circ d_\sigma)$。根据归纳假设，存在 c_1, c_2 和 d_1, d_2 使得 $\varepsilon@c_1 \rightsquigarrow d_1 \in d_\sigma$ 且 $\varepsilon@c_2 \rightsquigarrow d_2 \in d_\sigma$ 且 $c = c_1 \circ c_2$ 且 $d = d_1 \circ d_2$。根据 Inj(,) 中成员关系的定义，我们有 $\varepsilon@c_2 \rightsquigarrow d_2 \in$inj($d_\sigma$) = $d_{\prime\sigma}$。
- Case $d'_\sigma = d'_c$ (concrete effect set). Similar to previous case.

□

*D.1.2*同余规则。借助这些引理，我们可以证明项精度同余规则的可靠性。证明通过对项精度推导进行归纳法完成。

Lemma D.22 (Congruence for Booleans).

证明。我们需要证明 $\Gamma^\sqsubseteq \vDash_{d_\sigma}$ ÈtrueÉ ⊑ ÈtrueÉ ∈ 布尔类型，对于 false也是如此（我们只展示 true 的情况；对于 false 的推理完全相同。）
Let $\sim \in \{<, >\}$ 且 let $(\gamma_1, \gamma_2) \in \text{G}_i^\sim$ÈΓ⊑É. 我们需要证明

$$(\texttt{true}[\gamma_1], \texttt{true}[\gamma_2]) \in \mathcal{E}_i^\sim[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^\sim[\![\texttt{bool}]\!],$$

即

$$(\texttt{true}, \texttt{true}) \in \mathcal{E}_i^\sim[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^\sim[\![\texttt{bool}]\!].$$

根据引理 D.6，只需证明 (真，真) $\in \mathcal{V}_i^\sim[\![$布尔类型$]\!]$。根据逻辑关系的定义，这一点成立。

□

Lemma D.23 (Congruence for Variables).

证明。我们需要证明 $\Gamma^\sqsubseteq, x_1 \sqsubseteq x_2 : c, \Gamma'^\sqsubseteq \vDash_{d_\sigma} x_1 \sqsubseteq x_2 \in c$。
Let $\sim \in \{<, >\}$，并令 bΓ⊑ = $\Gamma^\sqsubseteq, x_1 \sqsubseteq x_2 : c, \Gamma'^\sqsubseteq$。令$(\gamma_1, \gamma_2) \in \text{G}_i^\sim$ÈbΓ⊑É。我们需要证明 w

$$(x_1[\gamma_1], x_2[\gamma_2]) \in \mathcal{E}_i^\sim[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^\sim[\![c]\!].$$

根据引理 D.6，只需证明$(\gamma_1(x_1)\ \gamma_2(x_2)) \in \text{V}_i^\sim$ÈcÉ。但这由以下事实可得：$(\gamma_1, \gamma_2) \in \text{G}_i^\sim$ÈbΓ⊑É。特别地，根据逻辑关系的定义，由于 $(x_1 \sqsubseteq x_2 : c) \in$bΓ⊑，我们有$(\gamma_1(x_1)\ \gamma_2(x_2)) \in \text{V}_i^\sim$ÈcÉ。□

Lemma D.24 (Congruence for Lambdas).

证明。假设 $\Gamma^\sqsubseteq, x \sqsubseteq y : c \vDash_{d_{\sigma'}} M \sqsubseteq N \in d$。我们需要证明 $\Gamma^\sqsubseteq \vDash_{d_\sigma} \lambda x.M \sqsubseteq \lambda y.N \in c \to_{d_{\sigma'}} d$。

Let $\sim \in \{<, >\}$ and Let $(\gamma_1, \gamma_2) \in \text{G}_i^\sim$ÈΓ⊑É。我们需要证明

$$((\lambda x.M)[\gamma_1], (\lambda y.N)[\gamma_2]) \in \mathcal{E}_i^\sim[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^\sim[\![c \to_{d_{\sigma'}} d]\!].$$

Let $V_1 = \lambda x.M[\gamma_1]$和 $V_2 = \lambda y.N[\gamma_2]$。根据引理D.6，只需证明 $(V_1, V_2) \in \mathrm{V}_i^{\sim}\grave{\mathrm{E}}c \to_{d_{\sigma'}} d\acute{\mathrm{E}}$。为此，Let $k \le i$和令$(V_{i1}, V_{i2}) \in \mathrm{V}_k^{\sim}\grave{\mathrm{E}}c\acute{\mathrm{E}}$。我们将证明$(V_1\ V_{i1}, V_2\ V_{i2}) \in \mathrm{E}_k^{\sim}\grave{\mathrm{E}}d_{\sigma'}\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}d\acute{\mathrm{E}}$。

Let $M' = (M[\gamma_1])(V_{i1}/x)$，且Let $N' = (N[\gamma_2])(V_{i2}/y)$。注意到$(V_1\ V_{i1}) \mapsto^1 M'$，类似地$(V_2\ V_{i2}) \mapsto^1 N'$。因此，如果 $k = 0$，则根据超时引理（引理D.12），我们得出$(V_1\ V_{i1}, V_2\ V_{i2}) \in \mathrm{E}_k^{\sim}\grave{\mathrm{E}}d_{\sigma'}\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}d\acute{\mathrm{E}}$。

因此，从现在起，我们假设 $k \ge 1$。根据反向归约引理（引理 D.8）（结合 $i_1 = i_2 = 1$和 $j = k$，只需证明 $(M',\ N') \in \mathcal{E}_{k-1}^{\sim}[\![d_{\sigma'}]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![d]\!]$。

这将由我们的归纳假设推出，该假设表明，对于任意 $\sim \in \{<, >\}$、任意自然数 n，以及任意 $(\gamma'1, \gamma'2) \in \mathrm{G}_n^{\sim}\grave{\mathrm{E}}\Gamma^{\sqsubseteq}, x \sqsubseteq y\colon c\acute{\mathrm{E}}$，我们都有

$$(M[\gamma_1'], N[\gamma_2']) \in \mathcal{E}_n^{\sim}[\![d_{\sigma'}]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![d]\!].$$

Let $\gamma'_1 = \gamma_1, V_{i1}/x$，let $\gamma'_2 = \gamma_2, V_{i2}/y$。容易验证，$(\gamma'1, \gamma'2) \in \mathrm{G}_{k-1}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}\Gamma^{\sqsubseteq}, x \sqsubseteq y\colon c\acute{\mathrm{E}}$。（这需要使用单调性引理，并结合以下事实：$(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{G}_i^{\sim}\grave{\mathrm{E}}\Gamma^{\sqsubseteq}\acute{\mathrm{E}}$，以及 $k - 1 < k \le i$。）取上述 $n = k - 1$，并注意到 $M' = M[\gamma_1']$和 $N' = N[\gamma_2']$，由此可得$(M', N') \in \mathrm{E}_{k-1}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}d_{\sigma'}\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}d\acute{\mathrm{E}}$，正如我们所要证明的。

□

Lemma D.25 (Congruence for Function Application).

证明。假设$\Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{d_\sigma} M_1 \sqsubseteq M_2 \in c \to_{d_\sigma} d$，且 $\Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{d_\sigma} N_1 \sqsubseteq N_2 \in c$。我们需要证明 $\Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{d_\sigma} M_1\ N_1 \sqsubseteq M_2\ N_2 \in d$。Let $\sim \in \{<, >\}$ 并 Let $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{G}_i^{\sim}\grave{\mathrm{E}}\Gamma^{\sqsubseteq}\acute{\mathrm{E}}$。
我们需要证明

$$(M_1\ N_1[\gamma_1], M_2\ N_2[\gamma_2]) \in \mathcal{E}_i^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![d]\!].$$

By Lemma D.18, it will suffice to show that
(1) $(M_1[\gamma_1], M_2[\gamma_2]) \in \mathrm{E}_i^{\sim}\grave{\mathrm{E}}d_\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}c \to_{d_\sigma} d\acute{\mathrm{E}}$，且（2）对于所有 $k \le i$以及$(V_1, V_2) \in \mathrm{V}_k^{\sim}\grave{\mathrm{E}}c \to_{d_\sigma} d\acute{\mathrm{E}}$，均有$(V_1\ N_1, V_1\ N_2) \in \mathrm{E}_k^{\sim}\grave{\mathrm{E}}d_\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}d\acute{\mathrm{E}}$。
(1) follows immediately from our first top-level assumption.
为证明 (2)，我们再次应用引理 D.18。根据我们的第二个顶层假设可得 $(N_1[\gamma_1], N_2[\gamma_2]) \in \mathrm{E}_k^{\sim}\grave{\mathrm{E}}d_\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}c\acute{\mathrm{E}}$。现在 Let $k' \le k$并且 $(V'1\ , V'2\ ) \in \mathrm{V}_{k'}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}c\acute{\mathrm{E}}$。我们声称

$$(V_1\ V_1', V_2\ V_2') \in \mathcal{E}_{k'}^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![d]\!].$$

这成立是因为 $(V_1, V_2) \in \mathrm{V}_k^{\sim}\grave{\mathrm{E}}c \to_{d_\sigma} d\acute{\mathrm{E}}$ 和 $(V'1\ , V'2\ ) \in \mathrm{V}_{k'}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}c\acute{\mathrm{E}}$.

□

Lemma D.26 (Congruence for If).

证明。假设：
(1) $\Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{d_\sigma} \grave{\mathrm{E}}M\acute{\mathrm{E}} \sqsubseteq \grave{\mathrm{E}}M'\acute{\mathrm{E}} \in$ 布尔类型 (2) $\Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{d_\sigma} \grave{\mathrm{E}}N_t\acute{\mathrm{E}} \sqsubseteq \grave{\mathrm{E}}N'_t\acute{\mathrm{E}} \in c$
(3)$\Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{d_\sigma} \grave{\mathrm{E}}N_f\acute{\mathrm{E}} \sqsubseteq \grave{\mathrm{E}}N'\ f\acute{\mathrm{E}} \in c$
Let $\sim \in \{<, >\}$ 且 let $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{G}_i^{\sim}\grave{\mathrm{E}}\Gamma^{\sqsubseteq}\acute{\mathrm{E}}$. 我们需要证明

$$\left(\texttt{if}\ M\{N_t\}\{N_f\}[\gamma_1], \texttt{if}\ M'\{N_t'\}\{N_f'\}[\gamma_2]\right) \in \mathcal{E}_i^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!].$$

根据引理 D.18，只需证明 (1) $([\![M]\!][\gamma_1],\ [\![M']\!][\gamma_2]) \in \mathcal{E}_i^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![$布尔类型$]\!]$，以及 (2) 对所有 $k \le i$和 $(V_1,\ V_2) \in \mathcal{V}_k^{\sim}[\![$布尔类型$]\!]$，都有

（如果 $V_1\{N_t[\gamma_1]\}\{N_f[\gamma_1]\}$），（如果 $V_2\{N'_t[\gamma_2]\}\{N'_f[\gamma_2]\}$） $\in \mathrm{E}_k^{\sim}$ Èd_σÉV˜ÈcÉ。

我们注意到，(1) 根据我们的第一个顶层假设即可得出。对于 (2)，假设 $(V_1,\ V_2) \in \mathcal{V}_k^{\sim}[\![$布尔类型$]\!]$ 有两种情形。如果 $V_1 = V_2 =$ 真，那么根据反向归约（引理 D.8），只需证明$(N_t[\gamma_1],\ N'_t[\gamma_2]) \in \mathrm{E}_k^{\sim}$ Èd_σÉV˜ÈcÉ。但这由我们的第二个顶层假设得出。同样地，如果 $V_1 = V_2 =$假，则只需证明$(N_f[\gamma_1],\ N'_f[\gamma_2]) \in \mathrm{E}_k^{\sim}$ Èd_σÉV˜ÈcÉ，这由我们的第三个顶层假设得出。

□

Lemma D.27 (Congruence for Let).

Proof. This proof is similar to the function abstraction proof and is hence omitted. □

Lemma D.28 (Congruence for Raise).

证明。Let $c\colon A_1 \sqsubseteq A_2$ 和 $d\colon B_1 \sqsubseteq B_2$。假设 $\varepsilon @ c \rightsquigarrow d \in d_\sigma$ 和

$$\Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{d_\sigma} M_1 \sqsubseteq M_2 \in c.$$

我们需要证明的是

$$\Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{d_\sigma} \mathtt{raise}\ \varepsilon(M_1) \sqsubseteq \mathtt{raise}\ \varepsilon(M_2) \in d.$$

Let $\sim \in \{<, >\}$ and $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{G}_j^{\sim}[\![\Gamma]\!]$. We will show

$$(\mathtt{raise}\ \varepsilon(M_1)[\gamma_1], \mathtt{raise}\ \varepsilon(M_2)[\gamma_2]) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![d]\!].$$

我们应用引理 D.18。我们首先断言 $(M_1[\gamma_1],\ M_2[\gamma_2]) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!]$。这由假设可得。现在，令 $k \le j$ 以及 $(V_1,\ V_2) \in \mathcal{V}_k^{\sim}[\![c]\!]$。我们断言

$$(\mathtt{raise}\ \varepsilon(V_1)[\gamma_1], \mathtt{raise}\ \varepsilon(V_2)[\gamma_2]) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![d]\!].$$

By Lemma D.5, it suffices to show that

$$(\mathtt{raise}\ \varepsilon(V_1)[\gamma_1], \mathtt{raise}\ \varepsilon(V_2)[\gamma_2]) \in \mathcal{R}_k^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![d]\!].$$

我们断言 R˜È·É 的定义中的第二个析取项，其中我们令 ε 为 ε（根据假设，我们知道它属于 d_σ），并令 $E^l = E^r = \bullet$ 和 $V^l = V_1$、$V^r = V_2$。

We need to show that $(V_1, V_2) \in (\blacktriangleright\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!])_k$, and that

$$(x^l.(\bullet[x^l]), x^r.(\bullet[x^r])) \in (\blacktriangleright\mathcal{K}^{\sim}[\![d]\!])_k(\mathcal{E}^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![d]\!])$$

为此，令 $k' \le k$，并令 $(V^l,\ V^r) \in \mathrm{V}_{k'}^{\sim}$ ÈcÉ。我们需要证明

$$(V^l, V^r) \in \mathcal{E}_{k'}^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![d]\!].$$

But this follows by Lemma D.6.

□

Lemma D.29 (Congruence for Handle).

$$\frac{\begin{array}{c} M \sqsubseteq M' : d_\sigma\,!\,c \qquad y : c \vdash N \sqsubseteq N' : d_\tau\,!\,d \\ \forall \varepsilon @ d_i \rightsquigarrow d_o \in d_\sigma.(\varepsilon \notin dom(\phi) \wedge \varepsilon \notin dom(\phi') \wedge \varepsilon : d_i \rightsquigarrow d_o \in d_\tau) \vee \\ x : d_i, k : d_o \to_{d_\tau} d \vdash \phi(\varepsilon) \sqsubseteq \phi'(\varepsilon) : d_\tau\,!\,d \end{array}}{\mathtt{handle}\ M\ \{\mathtt{ret}\ y.N \mid \phi\} \sqsubseteq \mathtt{handle}\ M'\ \{\mathtt{ret}\ y.N' \mid \phi'\} : d_\tau\,!\,d}$$

证明。我们使用 Löb归纳（引理 D.16）。假设对于所有 $k \le j$ 以及所有$(\gamma_1, \gamma_2) \in(\blacktriangleright \mathrm{G}\tilde{}\grave{\mathrm{E}}\Gamma^{\sqsubseteq}\acute{\mathrm{E}})_k$以及所有$(M, M') \in(\blacktriangleright \mathrm{E}\tilde{}\grave{\mathrm{E}}d_\sigma\acute{\mathrm{E}})_k(\mathrm{V}\tilde{}\grave{\mathrm{E}}c\acute{\mathrm{E}})$，我们有

$$\begin{gathered}(\texttt{handle}\ M\,\{\texttt{ret}\ x.N \mid \phi\}[\gamma_1],\\ \texttt{handle}\ M'\,\{\texttt{ret}\ x'.N' \mid \phi'\}[\gamma_2])\\ \in (\blacktriangleright \mathcal{E}_j\tilde{}[\![d_\tau]\!]_k(\mathcal{V}\tilde{}[\![d]\!]).\end{gathered}$$

Let $(M, M') \in \mathcal{E}_j\tilde{}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}\tilde{}[\![c]\!]$.
令 $\sim \in \{<, >\}$，并令 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{G}_j\tilde{}\grave{\mathrm{E}}\Gamma^{\sqsubseteq}\acute{\mathrm{E}}$。我们需要证明，

$$\begin{gathered}(\texttt{handle}\ M\,\{\texttt{ret}\ x.N \mid \phi\}[\gamma_1],\\ \texttt{handle}\ M'\,\{\texttt{ret}\ x'.N' \mid \phi'\}[\gamma_2])\\ \in \mathcal{E}_j\tilde{}[\![d_\tau]\!]\mathcal{V}\tilde{}[\![d]\!].\end{gathered}$$

By monadic bind (Lemma D.18), it suffices to consider the following cases:

- Let $k \le j$ and let $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}_k\tilde{}[\![c]\!]$. We need to show that

$$\begin{gathered}(\texttt{handle}\ V_1\,\{\texttt{ret}\ x.N[\gamma_1] \mid \phi[\gamma_1]\},\\ \texttt{handle}\ V_2\,\{\texttt{ret}\ x'.N'[\gamma_2] \mid \phi'[\gamma_2]\})\\ \in \mathcal{E}_j\tilde{}[\![d_\tau]\!]\mathcal{V}\tilde{}[\![d]\!].\end{gathered}$$

  根据反向归约（引理D.8），只需证明

$$(N[\gamma_1][V_1/x], N'[\gamma_2][V_2/x']) \in \mathcal{E}_k\tilde{}[\![d_\tau]\!]\mathcal{V}\tilde{}[\![d]\!].$$

  这可由前提推出：若令 $\gamma'_1 = \gamma_1, V_1/x$和 $\gamma'_2 = \gamma_2, V_2/x'$，则很容易验证 $(\gamma'1, \gamma'2) \in \mathrm{G}_j\tilde{}\grave{\mathrm{E}}\Gamma^{\sqsubseteq}, x \sqsubseteq x' : c\acute{\mathrm{E}}$。此外，$N[\gamma_1][V_1/x] = N[\gamma'_1]$，$N[\gamma_2][V_2/x']$亦然。于是，前提蕴含$(N[\gamma_1][V_1/x], N'[\gamma_2][V_2/x']) \in \mathrm{E}_k\tilde{}\grave{\mathrm{E}}d_\tau\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}\tilde{}\grave{\mathrm{E}}d\acute{\mathrm{E}}$，正如所需。

- Let $k \le j$，并令 $\varepsilon@d_i \rightsquigarrow d_o \in d_\sigma$ 为一个由任一处理器捕获的效应——即 $\varepsilon \in \mathrm{dom}(\phi)$ 或 $\varepsilon \in \mathrm{dom}(\phi_\prime)$。根据前提可知，$\varepsilon$同时属于 $\mathrm{dom}(\phi)$ 和 $\mathrm{dom}(\phi_\prime)$。令 $(V^l, V^r) \in(\blacktriangleright \mathrm{V}\tilde{}\grave{\mathrm{E}}c_i\acute{\mathrm{E}})_k$。令 $E^l\#\varepsilon$和 $E^r\#\varepsilon$为求值上下文，使得

$$(x^l.E^l[x^l], x^r.E^r[x^r]) \in (\blacktriangleright \mathcal{K}\tilde{}[\![d_o]\!])_k(\mathcal{E}\tilde{}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}\tilde{}[\![c]\!]).$$

  我们需要证明

$$\begin{gathered}(\texttt{handle}\ E^l[\texttt{raise}\ \varepsilon(V^l)\,\{\texttt{ret}\ x.N[\gamma_1] \mid \phi[\gamma_1]\},\\ \texttt{handle}\ E^r[\texttt{raise}\ \varepsilon(V^r)\,\{\texttt{ret}\ x'.N'[\gamma_2] \mid \phi'[\gamma_2]\})\\ \in \mathcal{E}_k\tilde{}[\![d_\tau]\!]\mathcal{V}\tilde{}[\![d]\!].\end{gathered}$$

  By anti-reduction, it suffices to show that

$$\begin{gathered}(\phi(\varepsilon)[\gamma_1][V^l/x][(\lambda y.\texttt{handle}\ E^l[y]\,\{\texttt{ret}\ x.N[\gamma_1] \mid \phi[\gamma_1]\})/k],\\ \phi'(\varepsilon)[\gamma_2][V^r/x'][(\lambda y.\texttt{handle}\ E^r[y]\,\{\texttt{ret}\ x'.N'[\gamma_2] \mid \phi'[\gamma_2]\})/k'])\\ \in (\blacktriangleright \mathcal{E}\tilde{}[\![d_\tau]\!])_k(\mathcal{V}\tilde{}[\![d]\!]).\end{gathered}$$

为展示这一点，我们应用前提如下。Let $H_1 =$处理器 $E^l[y]\{$返回 $x.N[\gamma_1] \mid \phi[\gamma_1]\}$并且 $H_2 =$处理器 $E^r[y]\{$返回 $x'.N'[\gamma_2] \mid \phi'[\gamma_2]\}$。Let $\gamma'_1 = \gamma_1, V^l/x_i, (\lambda y.H_1)/k_i$并且 Let$\gamma'_2 = \gamma_2, V^r/x'_i, (\lambda y.H_2)/k'_i$。为了应用该前提，我们必须证明$(\gamma'1, \gamma'2) \in \mathsf{G}^{\sim}_{k'}\grave{\mathrm{E}}\Gamma^{\sqsubseteq}, x_i \sqsubseteq x'_i\colon d_i, k_i \sqsubseteq k'_i\colon d_o \to_{d_\tau} d\acute{\mathrm{E}}$。

我们首先需要证明 $(V^l, V^r) \in (\blacktriangleright \mathsf{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}c_i\acute{\mathrm{E}})_k$。这由假设可得。现在我们需要证明

$$((\lambda y.H_1), (\lambda y.H_2)) \in (\blacktriangleright \mathcal{V}^{\sim}[\![d_o \to_{d_\tau} d]\!])_k.$$

为此，令 $k' \le k$，并令 $(V_A,\ V_B) \in (\blacktriangleright \mathsf{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}d_o\acute{\mathrm{E}})_{k'}$。我们需要证明 that

$$\begin{aligned}&((\lambda y.H_1)\, V_A, (\lambda y.H_2)\, V_B)\\ &\quad \in (\blacktriangleright \mathcal{E}^{\sim}[\![d_\tau]\!])_{k'}(\mathcal{V}^{\sim}[\![d]\!])\end{aligned}$$

By anti-reduction, it suffices to show that

$$\begin{aligned}&(\mathtt{handle}\ E^l[V_A]\ \{\mathtt{ret}\ x.N \mid \phi\}, \mathtt{handle}\ E^r[V_B]\ \{\mathtt{ret}\ x'.N' \mid \phi'\})\\ &\quad \in (\blacktriangleright \mathcal{E}^{\sim}[\![d_\tau]\!])_{k'}(\mathcal{V}^{\sim}[\![d]\!]).\end{aligned}$$

By the Löb induction hypothesis, it will suffice to show that

$$(E^l[V_A], E^r[V_B]) \qquad \in (\blacktriangleright \mathcal{E}^{\sim}[\![d_\sigma]\!])_{k'}(\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!]).$$

回顾一下，根据假设，我们有

$$(x^l.E^l[x^l], x^r.E^r[x^r]) \in (\blacktriangleright \mathcal{K}^{\sim}[\![d_o]\!])_k(\mathcal{E}^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!]).$$

因此，只需证明 $(V_A,\ V_B) \in (\blacktriangleright \mathsf{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}d_o\acute{\mathrm{E}})_{k'}$，这正是我们的假设。

□

注意，我们无需证明涉及类型转换的项精度同余规则的可靠性。这将由类型转换的上界规则和下界规则的可靠性推出。

推论 D.30（自反性）。*Let* M 是一个满足 $\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\sigma M\colon\ A$ 的项。我们有 $\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_\sigma M \sqsubseteq M : A$。

证明。对 M 进行归纳，并使用已证明的项精度关系的可靠性。

□

D.1.3 等式规则。

Lemma D.31 (Value substitution).

$$\frac{x_1 \sqsubseteq x_2 : c \vDash_{d_\sigma} M \equiv N : d \qquad V \equiv V' : c}{M[V/x_1] \equiv N[V'/x_2]}$$

Proof. Suppose for all j and all $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{G}^{\sim}_j[\![\Gamma^{\sqsubseteq}, x^l \sqsubseteq x^r : c]\!]$, that

$$(x_1.M, x_2.N) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![d]\!]$$

and

$$(x_2.N, x_1.M) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![d]\!].$$

Further suppose that for all j,

$$(V, V') \in \mathcal{V}_j^{\sim}[\![c]\!]$$

and

$$(V', V) \in \mathcal{V}_j^{\sim}[\![c]\!].$$

Let j be arbitrary, and let $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{G}^{\sim}[\![\Gamma^{\sqsubseteq}]\!]$. We need to show

$$(M[V/x_1], N[V'/x_2]) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![d]\!]$$

and

$$(N[V'/x_2], M[V/x_1]) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![d]\!].$$

The second statement is symmetric to the first, so we show only the first.

Let $\gamma_1' = (\gamma_1, x_1 = V)$ 且 Let $\gamma_2' = (\gamma_2, x_2 = V')$

注意，根据替换的定义，我们有 $M[\gamma_1'] = M[\gamma_1][V/x_1]$和 $N[\gamma_2'] = N[\gamma_2][V'/x_2]$。

根据我们的假设，只需证明 $(\gamma'1, \gamma'2) \in \mathrm{G}_j^{\sim}\grave{\mathrm{E}}\Gamma^{\sqsubseteq}, x_1 \sqsubseteq x_2 \colon c\acute{\mathrm{E}}$。

为此，只需证明 $(\gamma'1(x_1)\ \gamma'2(x_2)) \in \mathrm{V}_j^{\sim}\grave{\mathrm{E}}c\acute{\mathrm{E}}$。但 $\gamma'1(x_1) = V$且 $\gamma'2(x_2)V'$，因此结论成立。

□

引理 D.32（单子单位左）。

$$\texttt{let}\ x = y\ \texttt{in}\ N \equiv N[y/x]$$

证明。我们证明等价关系的一个方向；另一个方向对称。Let j 任意，且令 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{G}_j^{\sim}\grave{\mathrm{E}}\Gamma\acute{\mathrm{E}}$。我们需要证明

$$(\texttt{let}\ x = y\ \texttt{in}\ N, N[y/x]) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

由于 y 是变量，因而也是一个值，根据操作语义可得

$$\texttt{let}\ x = y\ \texttt{in}\ N \mapsto^1 N[y/x].$$

因此，根据反向归约，只需证明

$$(N[y/x], N[y/x]) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

但这可由自反性（推论D.30）得出。

□

Lemma D.33 (Monad Unit Right).

$$\texttt{let}\ x = M\ \texttt{in}\ x \equiv M$$

证明。我们证明等价关系的一个方向；另一个方向是对称的。Let j 为任意，并令 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{G}_j^{\sim}\grave{\mathrm{E}}\Gamma\acute{\mathrm{E}}$。我们需要证明

$$(\texttt{let}\ x = M\ \texttt{in}\ x, M) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

Since x is a variable and hence a value, we have by the operational semantics that

$$\texttt{let}\ x = M\ \texttt{in}\ x \mapsto^1 M[x/x].$$

By definition of substitution, $M[x/x] = M$. Thus, by anti-reduction, it suffices to show that

$$(M, M) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

This follows by reflexivity (Corollary D.30).

□

引理 D.34（单子结合律）。

$$\texttt{let } y = (\texttt{let } x = M \texttt{ in } N) \texttt{ in } P \equiv \texttt{let } x = M \texttt{ in let } y = N \texttt{ in } P$$

证明。我们证明等价关系的一个方向；另一个方向是对称的。令 j 为任意值，并令 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{G}_j^{\sim}$ÈΓÉ。我们需要证明

$$(\texttt{let } y = (\texttt{let } x = M \texttt{ in } N) \texttt{ in } P, \texttt{let } x = M \texttt{ in let } y = N \texttt{ in } P) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

我们应用引理 D.18，取 $E_1 =$令 $y =$(令 $x = \bullet$在 N）在 P并且 $E_2 =$令 $x = \bullet$在令 $y = N$在 P中。

我们首先需要证明 $(M, M) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!]$，这由自反性（推论D.30）成立。

现在，令 $k \le j$ 且 $(V_1, V_2) \in \mathrm{V}_k^{\sim}$ ÈAÉ。我们需要证明

$$(\texttt{let } y = (\texttt{let } x = V_1 \texttt{ in } N) \texttt{ in } P, \texttt{let } x = V_2 \texttt{ in let } y = N \texttt{ in } P) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

根据操作语义，我们有

$$(\texttt{let } x = V_1 \texttt{ in } N) \mapsto^1 N[V_1/x].$$

因此，

$$\texttt{let } y = (\texttt{let } x = V_1 \texttt{ in } N) \texttt{ in } P \mapsto^1 \texttt{let } y = N[V_1/x] \texttt{ in } P.$$

类似地，我们有

令 $x = V_2$中 令 $y = N$中 $P \mapsto^1$(令 $y = N$中 $P)[V_2/x] =$令 $y = N[V_2/x]$中 $P[V_2/x]$.

注意，由于 x 不出现在 P 中，我们有 $P[V_2/x] = P$。

现在，根据反向归约，只需证明

$$(\texttt{let } y = N[V_1/x] \texttt{ in } P, \texttt{let } y = N[V_2/x] \texttt{ in } P) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

我们再次应用引理 D.18，这次令 $E_1 =$ let $y = \bullet$in P 和 $E_2 =$ let $y = \bullet$in P。我们首先需要证明 $(N[V_1/x], N[V_2/x]) \in \mathrm{E}_k^{\sim}$ ÈσÉV˜ÈAÉ。这可由自反性（推论 D.30）和对 V_1 and V_2 的假设应用值替换（引理 D.31）得到。现在令 $k' \le k$ 和 $(V'1, V'2) \in \mathrm{V}_A^{\sim}$ÈkÉ。我们需要证明

$$(\texttt{let } y = V_1' \texttt{ in } P, \texttt{let } y = V_2' \texttt{ in } P) \in \mathcal{E}_{k'}^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

根据反向归约，只需证明

$$(P[V_1'/y], P[V_2'/y]) \in \mathcal{E}_{k'}^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

This again follows from reflexiviy and value substitution.

□

Lemma D.35 (η-expansion for Booleans).

$$M[x : \texttt{bool}] \equiv \texttt{if } x\{M[\texttt{true}/x]\}\{M[\texttt{false}/x]\}$$

证明。我们证明等价关系的一个方向；另一个方向对称。令 j 任意，并令 $(\gamma_1,\ \gamma_2) \in \mathsf{G}^{\sim}_j$ÈΓ，$x_1 \sqsubseteq x_2$：布尔类型É。我们需要证明

$$(M[\gamma_1], (\texttt{if } x\{M[\texttt{true}/x]\}\{M[\texttt{false}/x]\})[\gamma_2]) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

根据替换的定义，这等价于

$$(M[\gamma_1], (\texttt{if } \gamma\{\}\{2\}(x)M[\texttt{true}/x][\gamma_2]M[\texttt{false}/x][\gamma_2])) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

根据关于 γ_1 和 γ_2 的假设，我们有：要么 $\gamma_1(x_1) = \gamma_2(x_2) = \text{true}$，要么 $\gamma_1(x_1) = \gamma_2(x_2) = \text{false}$。

我们只证明前一种情形；后一种情形对称。在前一种情形中，我们需要证明

$$(M[\texttt{true}/x][\gamma_1], (\texttt{if true}\{M[\texttt{true}/x][\gamma_2]\}\{M[\texttt{false}/x][\gamma_2]\})) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

By anti-reduction, it is sufficient to show

$$(M[\texttt{true}/x][\gamma_1], M[\texttt{true}/x][\gamma_2]) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

This follows by reflexivity.

□

Lemma D.36 (Boolean β reduction - true).

$$\texttt{if true}\{N_t\}\{N_f\} \equiv N_t$$

证明。我们证明等价关系的一个方向；另一个方向是对称的。Let j 为任意，并令 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathsf{G}^{\sim}_j$ÈΓÉ。我们需要证明

$$((\texttt{if true}\{N_t\}\{N_f\})[\gamma_1], N_t[\gamma_2]) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

By anti-reduction, it suffices to show

$$(N_t[\gamma_1], N_t[\gamma_2]) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

This holds by reflexivity.

□

引理 D.37（布尔类型 β归约 - false）。

$$\texttt{if false}\{N_t\}\{N_f\} \equiv N_f$$

证明。与上述证明完全对偶。 □

引理 D.38（If 求值）。

$$\texttt{if } M\{N_t\}\{N_f\} \equiv \texttt{let } x = M \texttt{ in if } x\{N_t\}\{N_f\}\ \textit{IfEval}$$

证明。我们证明等价关系的一个方向；另一个方向是对称的。令 j 为任意值，并令 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathsf{G}^{\sim}_j$ÈΓÉ。我们需要证明

$$((\texttt{if } M\{N_t\}\{N_f\})[\gamma_1], (\texttt{let } x = M \texttt{ in if } x\{N_t\}\{N_f\})[\gamma_2]) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

我们应用引理D.18 ，在 $E_1 = \text{if } \bullet\{N_t[\gamma_1]\}\{N_f[\gamma_1]\}$ 且 $E_2 = \text{Let } x = \bullet \text{ in if } \gamma_2(x)\{N_t[\gamma_2]\}\{N_f[\gamma_2]\}$。

我们首先需要证明 $(M[\gamma_1], M[\gamma_2]) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\tau]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![$布尔类型$]\!]$。这由自反性（推论 D.30）得出。

Now let $k \leq j$ and let $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}_k^{\sim}[\![\texttt{bool}]\!]$. We need to show that

$$((\text{如果 } V_1\{N_t[\gamma_1]\}\{N_f[\gamma_1]\}), (\text{Let } x = V_2 \text{ 中 如果 } \gamma_2(x)\{N_t[\gamma_2]\}\{N_f[\gamma_2]\})) \in \mathrm{E}_k^{\sim}\,\text{È}\sigma\text{É}\mathrm{V}^{\sim}\text{È}B\text{É}。$$

根据 V˜È布尔类型É 的定义， $V_1 = V_2 =$ true 或 $V_1 = V_2 =$ false。我们考虑第一种情形；第二种情形是对称的。

我们需要证明

$$((\text{如果 真}\{N_t[\gamma_1]\}\{N_f[\gamma_1]\}), (\text{Let } x = \text{真中 如果 } \gamma_2(x)\{N_t[\gamma_2]\}\{N_f[\gamma_2]\})) \in \mathrm{E}_k^{\sim}\,\text{È}\sigma\text{É}\mathrm{V}^{\sim}\text{È}B\text{É}。$$

根据反向归约，只需证明

$$(N_t[\gamma_1], N_t[\gamma_2]) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

这由自反性得出。

□

引理 D.39（函数的 β-归约）。

$$(\lambda x.M)V \equiv M[V/x] \textit{ FunBeta}$$

证明。我们证明等价关系的一个方向；另一个方向是对称的。Let j 任意取值，并令 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{G}_j^{\sim}\text{È}\Gamma\text{É}$。我们需要证明

$$(((\lambda x.M)\, V)[\gamma_1], (M[V/x])[\gamma_2]) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

由于 V 是一个值，根据反向归约，只需证明

$$(M[V/x][\gamma_1], M[V/x][\gamma_2]) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

This follows by reflexivity.

□

引理 D.40（函数的 η-扩展）。 *Let* V_f 为满足 $\Sigma \mid \Gamma \mid \Delta \vdash_\emptyset V\colon A \to_{\sigma'} B$。我们有 $\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_\sigma V_f \equiv (\lambda x.V_f x) : (A \to_{\sigma'} B)$。

Proof. Let j be arbitrary. We need to show

$$(V_f, (\lambda x.V_f x)) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\emptyset]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A \to_{\sigma'} B]\!].$$

由于这些是值，由引理D.6 足以证明它们在 $\mathcal{V}_j^{\sim}[\![A \to_{\sigma'} B]\!]$。为此，Let $k \leq j$ and Let $(V_{i1}, V_{i2}) \in \mathcal{V}_k^{\sim}[\![A]\!]$。我们声称

$$(V_f\, V_{i1}, (\lambda x.V_f x)\, V_{i2}) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma']\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

By anti-reduction, it will suffice to show that

$$(V_f\, V_{i1}, V_f\, V_{i2}) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma']\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

根据自反性（推论D.30），我们知道$(V_f, V_f) \in \mathrm{E}_k^{\sim}\,\text{È}\emptyset\text{É}A \to_{\sigma'} B$，并且由于 V_f是一个值，这意味着 $(V_f, V_f) \in \mathrm{V}_k^{\sim}\,\text{È}A \to_{\sigma'} B\text{É}$。这立即推出了所需的结果，因为$(V_{i1}, V_{i2}) \in \mathrm{V}_k^{\sim}\,\text{È}A\text{É}$。

□

Lemma D.41 (AppEval).

$$M\,N \equiv \texttt{let}\ x = M\ \texttt{in}\ \texttt{let}\ y = N\ \texttt{in}\ x\,y$$

证明。我们证明等价关系的一个方向；另一个方向是对称的。令 j 任意，并令 $(\gamma_1,\ \gamma_2) \in \mathsf{G}_j^{\sim}$ÈΓÉ。我们需要证明

$$((M\,N)[\gamma_1], (\texttt{let}\ x = M\ \texttt{in}\ \texttt{let}\ y = N\ \texttt{in}\ x\,y)[\gamma_2]) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\tau_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_o]\!].$$

我们应用引理 D.18，其中 $E_1 =$(• $N[\gamma_2]$)，且 $E_2 =$令 $x =$ • 在 let $y = N[\gamma_2]$ 中 $x\,y$。我们首先需要证明 $(M[\gamma_1], M[\gamma_2]) \in \mathsf{E}_j^{\sim}$È$\tau$É$\mathsf{V}^{\sim}$È$A_i \to_{\tau_A} A_o$É。这由自反性得出。现在令 $k \le j$，并令 $(V_1, V_2) \in \mathsf{V}_k^{\sim}$È$A_i \to_{\sigma_A} A_o$É。我们需要证明

$$((V_1\,N[\gamma_1]), (\texttt{let}\ x = V_2\ \texttt{in}\ \texttt{let}\ y = N[\gamma_2]\ \texttt{in}\ x\,y)) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\tau_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_o]\!].$$

根据反向归约，只需证明

$$((V_1\,N[\gamma_1]), (\texttt{let}\ y = N[\gamma_2]\ \texttt{in}\ V_2\,y)) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\tau_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_o]\!].$$

我们再次应用引理 D.18，这次取 $E_1 = (V_1\ \bullet)$ 以及 $E_2 =$令 $y =$ • 在 $V_2\,y$。

我们需要证明 $(N[\gamma_1], N[\gamma_2]) \in \mathsf{E}_k^{\sim}$È$\tau$É$\mathsf{V}^{\sim}$È$A_i$É，这由自反性成立。现在 Let $k' \le k$且 Let $(V\prime 1\ , V\prime 2\ ) \in \mathsf{V}_{k'}^{\sim}$È$A_i$É。我们需要证明

$$((V_1\,V_1'), (\texttt{let}\ y = V_2'\ \texttt{in}\ V_2\,y)) \in \mathcal{E}_{k'}^{\sim}[\![\tau_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_o]\!].$$

By anti-reduction, it suffices to show

$$((V_1\,V_1'), (V_2\,V_2')) \in \mathcal{E}_{k'}^{\sim}[\![\tau_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_o]\!].$$

This follows from our assumptions on V_1 and V_2 and on V_1' and V_2'.

□

Lemma D.42 (HandleBetaRet).

$$\texttt{handle}\ x\,\{\texttt{ret}\ y.M \mid \phi\} \equiv M[x/y]$$

证明。我们证明等价关系的一个方向；另一个方向是对称的。Let j 为任意，并令 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathsf{G}_j^{\sim}$ÈΓÉ。我们需要证明

$$((\texttt{handle}\ x\,\{\texttt{ret}\ y.M \mid \phi\})[\gamma_1], (M[x/y])[\gamma_2]) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

Since x is a value, the above handle term steps, and by anti-reduction it is sufficient to show

$$((M[x/y][\gamma_1]), (M[x/y])[\gamma_2]) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

这由自反性可得。

□

引理 D.43（HandleBetaRaise）。

处理器 (let $o =$raise 操作 $\varepsilon(x)$ in N_k) {ret $y.M \mid \phi$} $\equiv \phi(\varepsilon)[\lambda o.$处理器 N_k {ret $y.M \mid \phi$}/k]

Proof. We show one direction of the equivalence; the other is symmetric. Let j be arbitrary and let $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{G}_j^{\sim}[\![\Gamma]\!]$. We need to show

$$((\texttt{handle}\ (\texttt{let}\ o = \texttt{raise}\ \varepsilon(x)\ \texttt{in}\ N_k)\ \{\texttt{ret}\ y.M \mid \phi\})[\gamma_1],\\ (\phi(\varepsilon)[\lambda o.\texttt{handle}\ N_k\ \{\texttt{ret}\ y.M \mid \phi\}/k])[\gamma_2])\\ \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

Let $E = \texttt{let}\ o = \bullet\ \texttt{in}\ N_k[\gamma_1]$. Our goal is to show

$$((\texttt{handle}\ E[\texttt{raise}\ \varepsilon(x)]\ \{\texttt{ret}\ y.M[\gamma_1] \mid \phi[\gamma_1]\}),\\ (\phi(\varepsilon)[\gamma_2][\lambda o.\texttt{handle}\ N_k[\gamma_2]\ \{\texttt{ret}\ y.M[\gamma_2] \mid \phi[\gamma_2]\}/k]))\\ \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

注意， $E\#\varepsilon$。根据反向归约，只需证明

$$((\phi(\varepsilon)[\gamma_1][\lambda o'.\texttt{handle}\ E[o']\ \{\texttt{ret}\ y.M[\gamma_1] \mid \phi[\gamma_1]\}/k]),\\ (\phi(\varepsilon)[\gamma_2][\lambda o.\texttt{handle}\ N_k[\gamma_2]\ \{\texttt{ret}\ y.M[\gamma_2] \mid \phi[\gamma_2]\}/k]))\\ \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

也就是说，我们需要证明

$$((\phi(\varepsilon)[\gamma_1][\lambda o'.\texttt{handle}\ \texttt{let}\ o = o'\ \texttt{in}\ N_k[\gamma_1]\ \{\texttt{ret}\ y.M[\gamma_1] \mid \phi[\gamma_1]\}/k]),\\ (\phi(\varepsilon)[\gamma_2][\lambda o.\texttt{handle}\ N_k[\gamma_2]\ \{\texttt{ret}\ y.M[\gamma_2] \mid \phi[\gamma_2]\}/k]))\\ \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

根据值替换，只需证明对于所有相关的（V_{f1}， V_{f2}） $\in \mathrm{V}_j^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A_i \to_\sigma B\acute{\mathrm{E}}$ 和 $\gamma_{\prime 1} = \gamma_1$， $V_{f1}/k$and $\gamma_{\prime 2} = \gamma_2$， V_{f2}/k，有

$$(\phi(\varepsilon)[\gamma_1'], \phi(\varepsilon)[\gamma_2']) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!],$$

以及（2），

$$((\lambda o'.\texttt{handle}\ \texttt{let}\ o = o'\ \texttt{in}\ N_k[\gamma_1]\ \{\texttt{ret}\ y.M[\gamma_1] \mid \phi[\gamma_1]\}),\\ (\lambda o.\texttt{handle}\ N_k[\gamma_2]\ \{\texttt{ret}\ y.M[\gamma_2] \mid \phi[\gamma_2]\}))\\ \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_i \to_\sigma B]\!].$$

(1) follows from relfexivity. To show (2), we will use transitivity (Lemma D.66). If $\sim$ is $<$, then note that by MonadUnitL we have

$$(\texttt{let}\ o = o'\ \texttt{in}\ N_k[\gamma_1], N_k[\gamma_2][o'/o]) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!],$$

and by soundness of the congruence rules we have

$$((\lambda o'.\texttt{handle}\ \texttt{let}\ o = o'\ \texttt{in}\ N_k[\gamma_1]\ \{\texttt{ret}\ y.M[\gamma_1] \mid \phi[\gamma_1]\}),\\ (\lambda o'.\texttt{handle}\ N_k[\gamma_2][o'/o]\ \{\texttt{ret}\ y.M[\gamma_2] \mid \phi[\gamma_2]\}))\\ \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_i \to_\sigma B]\!].$$

Then by transitivity, it will suffice to show that

$$((\lambda o'.\texttt{handle}\ N_k[\gamma_2][o'/o]\ \{\texttt{ret}\ y.M[\gamma_2] \mid \phi[\gamma_2]\}),\\ (\lambda o.\texttt{handle}\ N_k[\gamma_2]\ \{\texttt{ret}\ y.M[\gamma_2] \mid \phi[\gamma_2]\}))\\ \in \mathcal{E}^{\sim}_{\omega}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_i \to_\sigma B]\!].$$

By congruence for lambdas, it suffices to show that, given related values $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}^{\sim}_{\omega}[\![A_i]\!]$, we have

$$((\texttt{handle}\ N_k[\gamma_2][o'/o][V_1/o']\ \{\texttt{ret}\ y.M[\gamma_2] \mid \phi[\gamma_2]\}),\\ (\texttt{handle}\ N_k[\gamma_2][V_2/o]\ \{\texttt{ret}\ y.M[\gamma_2] \mid \phi[\gamma_2]\}))\\ \in \mathcal{E}^{\sim}_{\omega}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_i \to_\sigma B]\!].$$

这由同余规则的可靠性得出。

另一方面，如果 ~ 是 >，那么类似地，由 MonadUnitL 我们有

$$(\texttt{let}\ o = o'\ \texttt{in}\ N_k[\gamma_1], N_k[\gamma_1][o'/o]) \in \mathcal{E}^{\sim}_{\omega}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

然后只需证明

$$((\lambda o'.\texttt{handle}\ N_k[\gamma_1][o'/o]\ \{\texttt{ret}\ y.M[\gamma_1] \mid \phi[\gamma_1]\}),\\ (\lambda o.\texttt{handle}\ N_k[\gamma_2]\ \{\texttt{ret}\ y.M[\gamma_2] \mid \phi[\gamma_2]\}))\\ \in \mathcal{E}^{\sim}_{j}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_i \to_\sigma B]\!],$$

这同样由同余规则的可靠性得出。

□

引理 D.44（RaiseEval）。

$$\texttt{raise}\ \varepsilon(M) \equiv \texttt{let}\ x = M\ \texttt{in}\ \texttt{raise}\ \varepsilon(x)$$

证明。我们证明等价关系的一个方向；另一方向对称。令 j 任意，并令 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{G}^{\sim}_{j}$ÈГÉ。我们需要证明

$$((\texttt{raise}\ \varepsilon(M))[\gamma_1], (\texttt{let}\ x = M\ \texttt{in}\ \texttt{raise}\ \varepsilon(x))[\gamma_2]) \in \mathcal{E}^{\sim}_{j}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

我们应用单子绑定（引理 D.18），其中 $E_1 =$ raise 操作 $\varepsilon(\bullet)$ 以及 $E_2 =$ 令 $x = \bullet$ in raise 操作 $\varepsilon(x)$。我们首先需要证明 $(M[\gamma_1], M[\gamma_2]) \in \mathcal{E}^{\sim}_{j}[\![\tau]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!]$。这由自反性（推论 D.30）得出。

现在令 $k \le j$，并令 $(V_1, V_2) \in \mathrm{V}^{\sim}_{k}$ ÈAÉ。我们需要证明

$$((\texttt{raise}\ \varepsilon(V_1))[\gamma_1], (\texttt{let}\ x = V_2\ \texttt{in}\ \texttt{raise}\ \varepsilon(x))[\gamma_2]) \in \mathcal{E}^{\sim}_{k}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

由于 V_2 是一个值，上述 let 项会执行一步。根据反向归约，只需证明

$$((\texttt{raise}\ \varepsilon(V_1)), (\texttt{raise}\ \varepsilon(V_2))) \in \mathcal{E}^{\sim}_{k}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

这由我们关于 V_1 和 V_2 的假设以及 raise 操作的项同余规则的可靠性（引理D.28）得出。

□

Lemma D.45 (HandleEmpty).

$$\texttt{handle}\ M\ \{\texttt{ret}\ x.N \mid \emptyset\} \equiv \texttt{let}\ x = M\ \texttt{in}\ N$$

Proof. We show one direction of the equivalence; the other is symmetric.
Let j be arbitrary and let $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{G}_j^{\sim}[\![\Gamma]\!]$. We need to show

$$\begin{array}{c}((\texttt{handle}\ M\ \{\texttt{ret}\ x.N \mid \emptyset\})[\gamma_1], \\ (\texttt{let}\ x = M\ \texttt{in}\ N)[\gamma_2]) \\ \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].\end{array}$$

根据单子绑定（引理 D.18）以及两个求值上下文都不会捕获任何效应这一事实，只需证明

$$\begin{array}{c}(\texttt{handle}\ V_1\ \{\texttt{ret}\ x.N[\gamma_1] \mid \emptyset\}, \\ \texttt{let}\ x = V_2\ \texttt{in}\ N[\gamma_2]) \\ \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!],\end{array}$$

其中 $k \leq j$ 以及 $(V_1, V_2) \in \mathrm{V}_k^{\sim}$ ÈBÉ。根据反向归约，只需证明

$$(N[\gamma_1][V_1/x], N[\gamma_2][V_2/x]) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

使用值替换，根据自反性以及关于 V_1 和 V_2 的假设即可得到该结果。

□

引理 D.46。

$$\frac{\forall \varepsilon \in dom(\phi).\ \psi(\varepsilon) = \phi(\varepsilon) \qquad \forall \varepsilon \in dom(\psi).\varepsilon \notin dom(\phi) \Rightarrow \psi(\varepsilon) = k(\texttt{raise}\ \varepsilon(x))}{\texttt{handle}\ M\ \{\texttt{ret}\ y.N \mid \phi\} \equiv \texttt{handle}\ M\ \{\texttt{ret}\ y.N \mid \psi\} : \sigma\,!\,B}\ \textsc{HandleExt}$$

证明。我们证明等价关系的一个方向；另一方向可对称地证明。
该证明采用 Löb归纳。我们假设

((处理器 $M\{$返回 $\_.1 \mid '\}yN\phi)\ [\gamma_1]$, (处理器 $M\{$返回 $\_.2 \mid '\}yN\psi)\ [\gamma_2]) \in$(►E˜È$\sigma$É)$_j$(V˜È$B$É).

对所有 $k \leq j$, $(\gamma_1, \gamma_2) \in$(►G˜ÈΓÉ)$_k$且 $(M_1', M_2') \in$(►E˜ÈσÉ)$_k$(V˜ÈAÉ)。
令 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{G}_j^{\sim}$È$\Gamma$É。我们需要证明

$$((\texttt{handle}\ M\ \{\texttt{ret}\ \_.1 \mid y\}N\phi)[\gamma_1], (\texttt{handle}\ M\ \{\texttt{ret}\ \_.2 \mid y\}N\psi)[\gamma_2]) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!]$$

对所有 $(M_1, M_2) \in \mathrm{E}_j^{\sim}$È$\sigma$ÉV˜È$A$É。
我们应用单子绑定（引理 D.18）。只需考虑以下情形：

- Let $k \leq j$ 且 $(V_1, V_2) \in \mathrm{V}_k^{\sim}$ ÈAÉ。我们需要证明

((hand le $V_1\{$返回 $y.N[\gamma_1] \mid \phi[\gamma_1]\}), ($处理器 $V_2\{$返回 $y.N[\gamma_2] \mid \psi[\gamma_2]\})) \in \mathrm{E}_k^{\sim}$ ÈσÉV˜ÈBÉ.

  这由反向归约和自反性得出。
- Let $k \leq j$ 并令 $\varepsilon \in \sigma$ 为被任一处理器捕获的效应，即 ε 属于 $\mathrm{dom}(\phi)$ 或 $\mathrm{dom}(\psi)$。令 $(V^l, V^r) \in$(►V˜Èc_εÉ)$_k$，并令 $E^l\#\varepsilon$和 $E^r\#\varepsilon$满足 $(x^l.E^l[x^l], x^r.E^r[x^r]) \in$(►K˜È$d_\varepsilon$É)$_k$(E˜È$\sigma$ÉV˜È$B$É)。我们需要证明

$$((\texttt{handle}\ E^l[\texttt{raise}\ \varepsilon(V^l)]\ \{\texttt{ret}\ y.N[\gamma_1] \mid \phi[\gamma_1]\}),\\ (\texttt{handle}\ E^r[\texttt{raise}\ \varepsilon(V^r)]\ \{\texttt{ret}\ y.N[\gamma_2] \mid \psi[\gamma_2]\}))\\ \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

若 $\varepsilon \in \mathrm{dom}(\phi)$，则根据前提，我们有 $\psi(\varepsilon) = \phi(\varepsilon)$，因此两边都能归约；由反向归约，只需证明

$$(\phi(\varepsilon)[\gamma_1][V^l/x][(\lambda z.\texttt{handle}\ E^l[z]\ \{\texttt{ret}\ y.N[\gamma_1] \mid \phi[\gamma_1]\})/k],\\ \phi(\varepsilon)[\gamma_2][V^r/x][(\lambda z.\texttt{handle}\ E^r[z]\ \{\texttt{ret}\ y.N[\gamma_2] \mid \psi[\gamma_2]\})/k])\\ \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma]\!])_k(\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!]).$$

根据值替换，只需证明 $(V^l, V^r) \in (\blacktriangleright \mathrm{V}^{\sim}[\![c_\varepsilon]\!])_k$，这由假设可知成立，并且

$$((\lambda z.\texttt{handle}\ E^l[z]\ \{\texttt{ret}\ y.N[\gamma_1] \mid \phi[\gamma_1]\}),\\ (\lambda z.\texttt{handle}\ E^r[z]\ \{\texttt{ret}\ y.N[\gamma_2] \mid \psi[\gamma_2]\}))\\ \in (\blacktriangleright\mathcal{V}^{\sim}[\![d_\varepsilon \to_\sigma B]\!])_k.$$

根据 λ抽象的同余性，只需证明：给定值 $(V_1, V_2) \in (\blacktriangleright \mathrm{V}^{\sim}[\![d_\varepsilon]\!])_k$，我们有

$$(\texttt{handle}\ E^l[V_1]\ \{\texttt{ret}\ y.N[\gamma_1] \mid \phi[\gamma_1]\},\\ \texttt{handle}\ E^r[V_2]\ \{\texttt{ret}\ y.N[\gamma_2] \mid \psi[\gamma_2]\})\\ \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma]\!])_k(\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!]).$$

This follows by the Löb induction hypothesis and our assumption on E^l and E^r.
Now assume that $\varepsilon \notin \mathrm{dom}(\phi)$. Then note that the first handle term does not step, while the second handle term steps to

$$\psi(\varepsilon)[\gamma_2][V^r/x][(\lambda z.\texttt{handle}\ E^r[z]\ \{\texttt{ret}\ y.N[\gamma_2] \mid \psi[\gamma_2]\})/k].$$

通过该 premise, we have $\psi(\varepsilon) = k(\texttt{raise}\ \varepsilon(x))$. Thus, by anti-reduction, it suffices to show

$$((\texttt{handle}\ E^l[\texttt{raise}\ \varepsilon(V^l)]\ \{\texttt{ret}\ y.N[\gamma_1] \mid \phi[\gamma_1]\}),\\ (k(\texttt{raise}\ \varepsilon(x))[\gamma_2)[V^r/x][(\lambda z.\texttt{handle}\ E^r[z]\ \{\texttt{ret}\ y.N[\gamma_2] \mid \psi[\gamma_2]\})/k])\\ \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

That is, it will suffice to show

$$((\texttt{handle}\ E^l[\texttt{raise}\ \varepsilon(V^l)]\ \{\texttt{ret}\ y.N[\gamma_1] \mid \phi[\gamma_1]\}),\\ ((\lambda z.\texttt{handle}\ E^r[z]\ \{\texttt{ret}\ y.N[\gamma_2] \mid \psi[\gamma_2]\})\ (\texttt{raise}\ \varepsilon(V)^r)))\\ \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

Neither term steps, so it suffices to show they are related in $\mathcal{R}^{\sim}_k[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!]$.

我们需要证明 $(V^l, V^r) \in (\blacktriangleright \mathrm{V}\tilde{}\grave{\mathrm{E}}c_\varepsilon\acute{\mathrm{E}})_k$，这根据假设成立，并且根据$k' \le k$和相关值$(V_1, V_2) \in (\blacktriangleright \mathrm{V}\tilde{}\grave{\mathrm{E}}d_\varepsilon\acute{\mathrm{E}})_{k'}$，我们有

$$\begin{array}{c}((\texttt{handle}\ E^l[V_1]\ \{\texttt{ret}\ y.N[\gamma_1] \mid \phi[\gamma_1]\}),\\ ((\lambda z.\texttt{handle}\ E^r[z]\ \{\texttt{ret}\ y.N[\gamma_2] \mid \psi[\gamma_2]\})\ V_2))\\ \in (\blacktriangleright \mathcal{E}\tilde{}[\![\sigma]\!])_{k'}(\mathcal{V}\tilde{}[\![B]\!]).\end{array}$$

By anti-reduction, it suffices to show

$$\begin{array}{c}((\texttt{handle}\ E^l[V_1]\ \{\texttt{ret}\ y.N[\gamma_1] \mid \phi[\gamma_1]\}),\\ (\texttt{handle}\ E^r[V_2]\ \{\texttt{ret}\ y.N[\gamma_2] \mid \psi[\gamma_2]\}))\\ \in (\blacktriangleright \mathcal{E}\tilde{}[\![\sigma]\!])_{k'}(\mathcal{V}\tilde{}[\![B]\!]).\end{array}$$

This follows by the Löb induction hypothesis and our assumption on E^l and E^r.

□

D.1.4 Cast, Error, and Subtyping Properties.

Lemma D.47 (Err-bot).

$$\frac{M : {d_\sigma}^r \,!\, c^r}{\mho \sqsubseteq M : d_\sigma \,!\, c}$$

Proof. Let $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{G}_j\tilde{}[\![\Gamma^{\sqsubseteq}]\!]$. We need to show

$$(\mho[\gamma_1], M[\gamma_2]) \in \mathcal{E}_j\tilde{}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}\tilde{}[\![c]\!].$$

这由逻辑关系的定义直接推出：如果 ~ 是 $<$（计算左侧的步数），那么根据 $\mathrm{E}\tilde{}\grave{\mathrm{E}}\acute{\mathrm{E}}$ 关系的定义，我们就完成了，因为 $\mho \mapsto^0 \mho$。

如果 ~ 是 $>$（在右侧计数步数），那么我们同样完成了，因为 $M \mapsto^0 M$ 并且左手边的项是 $\mho$。

□

Lemma D.48 (Err-strict). $E[\mho] \equiv \mho$

Proof. We show one direction of the equivalence; the other is symmetric. Let j, d_σ, and c be arbitrary. We need to show

$$(E[\mho], \mho) \in \mathcal{E}_j\tilde{}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}\tilde{}[\![c]\!].$$

By anti-reduction, it is sufficient to show

$$(\mho, \mho) \in \mathcal{E}_j\tilde{}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}\tilde{}[\![c]\!],$$

which is easily seen to hold by definition of the logical relation.

□

引理 D.49（子类型关系的单调性）。如果 $c \le d$ 那么 $\mathcal{V}[\![c]\!] \subseteq \mathcal{V}[\![d]\!]$此外，

如果 $R \subseteq S$ 那么 $\mathcal{K}[\![d]\!]R \subseteq \mathcal{K}[\![c]\!]S$，此外，如果 $c_\sigma \le d_\sigma$ 那么两者都

- $\mathcal{E}[\![c]\!]R \subseteq \mathcal{E}[\![d]\!]S$
- $\mathcal{R}[\![c]\!]R \subseteq \mathcal{R}[\![d]\!]S$

Proof. By mutual induction on the subtyping proofs. First the type subtyping cases: (1)布尔类型 $\leq$ 布尔类型：平凡。(2) $c_i \to_{c_e} c_o \leq d_i to_{d_e} d_o$。假设 $(V_f, V\prime f) \in$VÈ $c_i \to_{c_e} c_o$É，我们需要证明$(V_f, V\prime f) \in$VÈ$d_i \to_{d_e} d_o$É。Let$(V_i, V\prime i) \in$VÈd_iÉ。那么根据归纳假设，$(V_i, V\prime i) \in$VÈc_iÉ。因此$(V_f V_i, V\prime f^{V}\prime i) \in$EÈ$c_e$ÉVÈ$c_o$É，结论由两个归纳假- 设得出。

The $\mathcal{K}[\![\cdot]\!]$ case follows by a similar argument to the function case.

The $\mathcal{E}[\![\cdot]\!]$ case follows by inductive hypothesis.

Next the $\mathcal{R}[\![\cdot]\!]$ cases:

(1) $? \leq ?$: trivial

(2) $\dfrac{c \leq \Sigma}{c \leq ?}$: trivial by definition of $\mathcal{R}[\![?]\!]$

(3) $\dfrac{c \leq d}{c \leq Inj(d)}$: trivial by definition of $\mathcal{R}[\![Inj(i,d)]\!]$

(4) $\dfrac{c \leq d}{Inj(c) \leq Inj(d)}$: trivial by definition of $\mathcal{R}[\![Inj(i,d)]\!]$

(5) $\dfrac{\begin{array}{c}\mathrm{dom}(d_c) \subseteq \mathrm{dom}(d'_c) \\ \forall \varepsilon : c \rightsquigarrow d \in d_c . \varepsilon : c' \rightsquigarrow d' \in d'_c \wedge c \leq c' \wedge d' \leq d\end{array}}{d_c \leq d'_c}$: Follows using Löb induction by the monotonicity of subtyping for the $\mathcal{V}^{\sim}[\![\cdot]\!]$ and $\mathcal{K}^{\sim}[\![\cdot]\!]$ relations.

□

接下来，我们证明类型转换性质 ValUpL、ValUpR、ValDnL、ValDnR、EffUpL、EffUpR、EffDnL、EffDnR 的推广版本。这些性质通过对类型精度推导进行归纳，并借助 Löb 归纳法同时证明。

Lemma D.50 (ValUpR-general).

$$\frac{\begin{array}{c} c : A \sqsubseteq A' \\ e : A' \sqsubseteq A'' \\ \Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{d_\sigma} M \sqsubseteq N : c \end{array}}{\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{d_\sigma} M \sqsubseteq \langle A'' \quad A' \rangle N : c \circ e}$$

Proof. We need to show that

$$(M, \langle A'' \quad A' \rangle N) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c \circ e]\!].$$

证明通过对精度推导进行归纳法 e。根据单子绑定（引理 D.18），结合$E_1 = \bullet$ 和 $E_2 = \langle A'' \quad A' \rangle \bullet$，只需证明

$$(V_1, \langle A'' \quad A' \rangle V_2) \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c \circ e]\!],$$

where $k \leq j$ and $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}^{\sim}_k[\![c]\!]$. We continue by cases on e.

- 情形 $e =$ 布尔类型。我们有 $A = A\prime = A\prime\prime =$ 布尔类型，且 $c =$ 布尔类型。因此 $c \circ e =$ 布尔类型。

Examining the operational semantics, we see that

$$(\langle \texttt{bool} \quad \texttt{bool} \rangle)(V_1) \mapsto^1 V_1.$$

Thus, by anti-reduction, it suffices to show

$$(V_1, V_2) \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![\texttt{bool}]\!].$$

This is true by assumption and Lemma D.6.

• 情形 $e = e_i \to_{e_\sigma} e_o$。我们有 $A' = A'_i \to_{\sigma'_A} A'_o$ 以及 $A'' = A''_i \to_{\sigma''_A} A''_o$，并且还有 $e_i : A'_i \sqsubseteq A''_i$ 和 $e_o : A'_o \sqsubseteq A''_o$。通过逆向分析，我们看到 $c = c_i \to_{c_\sigma} c_o$。因此，我们有 $c \circ e = (c_i \to_{c_\sigma} c_o) \circ (e_i \to_{e_\sigma} e_o) = (c_i \circ e_i) \to_{c_\sigma \circ e_\sigma} (c_o \circ e_o)$。我们需要证明

$$(V_1, \langle (A''_i \to_{\sigma''_A} A''_o) \quad (A'_i \to_{\sigma'_A} A'_o) \rangle V_2) \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![(c_i \circ e_i) \to_{c_\sigma \circ e_\sigma} (c_o \circ e_o)]\!].$$

由于两个项都是值，根据引理D.6只需证明它们在$\mathrm{V}^{\sim}_k \grave{\mathrm{E}}(c_i \circ e_i) \to_{c_\sigma} \circ e_\sigma (c_o \circ e$ 中相关。为此，Let $k' \le k$和 $(V^l, V^r) \in \mathrm{V}^{\sim}_{k'} \grave{\mathrm{E}} c_i \circ e_i \acute{\mathrm{E}}$。我们需要证明

$$(V_1\, V^l, (\langle (A''_i \to_{\sigma''_A} A''_o) \quad (A'_i \to_{\sigma'_A} A'_o) \rangle V_2)\, V^r) \in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![c_\sigma \circ e_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c_o \circ e_o]\!].$$

By anti-reduction, it suffices to show that

$$(V_1\, V^l, \langle A''_o \quad A'_o \rangle \langle \sigma''_A \quad \sigma'_A \rangle (V_2\, \langle A'_i \quad A''_i \rangle V^r)) \in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![c_\sigma \circ e_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c_o \circ e_o]\!].$$

By the induction hypothesis applied twice, it suffices to show

$$(V_1\, V^l, (V_2\, \langle A'_i \quad A''_i \rangle V^r)) \in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![c_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c_o]\!].$$

最后，根据函数应用的项精度同余规则的可靠性，只需D.25证明 $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}^{\sim}_{k'}[\![c_i \to_{c_\sigma} c_o]\!]$，并证明

$$(V^l, \langle A'_i \quad A''_i \rangle V^r) \in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!].$$

The former is true by our assumption on V_1 and V_2. The latter follows by the induction hypothesis and our assumption on V^l and V^r.

□

Lemma D.51 (ValUpL-general).

$$\frac{\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_\sigma} c : A \sqsubseteq A' \quad \Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_\sigma} e : A' \sqsubseteq A'' \quad \Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_\sigma} M \sqsubseteq N : c \circ e}{\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_\sigma} \langle A' \quad A \rangle M \sqsubseteq N : e}$$

Proof. Let $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{G}^{\sim}_j[\![\Gamma^{\sqsubseteq}]\!]$. We need to show that

$$(\langle A' \quad A \rangle M[\gamma_1], N[\gamma_2]) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![e]\!].$$

By monadic bind (Lemma D.18), with $E_1 = \langle A' \quad A \rangle \bullet$ and $E_2 = \bullet$, it suffices to show

$$(\langle A' \quad A \rangle V_1, V_2) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![e]\!],$$

where $k \le j$ and $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}^{\sim}_k[\![c \circ e]\!]$.

我们继续对 c 进行情形分析。情形 c = 布尔类型与前一个引理中的类似，因此我们跳过，转而考虑情形 $c = c_i \to_{c_\sigma} c_o$。通过逆向分析，我们看到 $e = e_i \to_{e_\sigma} e_o$。

我们有 $A = A_i \to^{\hat{}}_{\hat{\sigma}} A_o$ 和 $A' = A'_i \to^{\hat{}}_{\hat{\sigma}'} A'_o$，并且因此，我们有 $c \circ e = (c_i \circ e_i) \to_{c_\sigma \circ e_\sigma} (c_o \circ e_o)$。

我们需要证明

$$(\langle (A'_i \to_{\hat{\sigma}'} A'_o) \quad (A_i \to_{\hat{\sigma}} A_o) \rangle M[\gamma_1], N[\gamma_2]) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![e_i \to_{e_\sigma} e_o]\!].$$

与之前类似，只需证明这些项在$\mathrm{V}^{\sim}_k$ È$e_i \to_{e_\sigma} e_o$É 处相关。这与前一个引理的证明类似，因而省略。

□

Lemma D.52 (ValDnL-general).

$$\frac{\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_\sigma} c : A \sqsubseteq A' \quad \Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_\sigma} e : A' \sqsubseteq A'' \quad \Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_\sigma} M \sqsubseteq N : e}{\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_\sigma} \langle A \quad A' \rangle M \sqsubseteq N : c \circ e}$$

证明。Th is proof is dual to the proof of ValUpR-general (Lemma D.50) and is hence omitted. □

Lemma D.53 (ValDnR-general).

$$\frac{\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_\sigma} c : A \sqsubseteq A' \quad \Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_\sigma} e : A' \sqsubseteq A'' \quad \Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_\sigma} M \sqsubseteq N : c \circ e}{\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_\sigma} M \sqsubseteq \langle A' \quad A'' \rangle N : c}$$

证明。 该证明与 ValUpL-general（引理D.51）的证明对偶，因此省略。□引理 D.54（EffUpR-general）。

$$\frac{d_\sigma : \sigma \sqsubseteq \sigma' \quad d'_\sigma : \sigma' \sqsubseteq \sigma'' \quad \Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_\sigma} M \sqsubseteq N : c}{\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_\sigma \circ d'_\sigma} M \sqsubseteq \langle \sigma'' \quad \sigma' \rangle N : c}$$

Proof. Let $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{G}^{\sim}_j[\![\Gamma^{\sqsubseteq}]\!]$. We need to show that

$$(M, \langle \sigma'' \quad \sigma' \rangle N) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![d_\sigma \circ d'_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!].$$

我们通过Löb归纳证明此陈述（引理 D.16）。也就是说，假设对于所有 $k \le j$ 以及所有 $(M', N') \in (\blacktriangleright \mathrm{E}^{\sim}$È$d_\sigma$É$)_k(\mathrm{V}^{\sim}$È$c$É$)$，我们有

$$(M', \langle \sigma'' \quad \sigma' \rangle N') \in (\blacktriangleright \mathcal{E}^{\sim}[\![d_\sigma \circ d'_\sigma]\!])_k(\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!]).$$

Let $(M, N) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!]$. We need to show

$$(M, \langle \sigma'' \quad \sigma' \rangle N) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![d_\sigma \circ d'_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!].$$

我们按 d'_σ 分情形讨论。情形 $d_{\prime\sigma} =?$ 是直接的，因此考虑 $d_{\prime\sigma} = \mathsf{Inj}(d_c)$，其中$d_c$: $\sigma_c \sqsubseteq \Sigma|_{\mathrm{supp}(\sigma_c)}$。在此情形中，我们知道 $\sigma_{\prime\prime} =?$ 此外，我们有

$$d_\sigma \circ d'_\sigma = d_\sigma \circ (\mathtt{inj}(d_c)) = \mathtt{inj}(d_\sigma \circ d_c).$$

因此，我们需要展示

$$(M, \langle ?\quad \sigma' \rangle N) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![\mathtt{inj}(d_\sigma \circ d_c)]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!].$$

By monadic bind (Lemma D.18), it will suffice to consider the following cases:

- Let $k \leq j$ and let $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}^{\sim}_k[\![c]\!]$. We need to show

$$(V_1, \langle ?\quad \sigma' \rangle V_2) \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\mathtt{inj}(d_\sigma \circ d_c)]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!].$$

  By anti-reduction, it suffices to show that

$$(V_1, V_2) \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\mathtt{inj}(d_\sigma \circ d_c)]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!].$$

  由于 V_1 和 V_2 是值，只需根据引理 D.6 证明 $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}^{\sim}_k[\![c]\!]$，这由假设为真。

- Let $k \leq j$ 和 $\varepsilon @ c_\varepsilon \rightsquigarrow d_\varepsilon \in d_\sigma$ 是一个被h?σ,i•捕获的效应。Let $(V^l, V^r) \in (\blacktriangleright \mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}c_\varepsilon\acute{\mathrm{E}})_k$，并且 Let $E^l \# \varepsilon$ 和 $E^r \# \varepsilon$ 是求值上下文，使得$(x^l.E^l[x^l], x^r.E^r[x^r]) \in (\blacktriangleright \mathrm{K}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}d_\varepsilon\acute{\mathrm{E}})_k(\mathrm{E}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}d_\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}c\acute{\mathrm{E}})$。我们需要证明

$$\begin{array}{l}(E^l[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^l)],\\ \langle ?\quad \sigma' \rangle E^r[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^r)]) \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\mathtt{inj}(d_\sigma \circ d_c)]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!].\end{array}$$

  By anti-reduction, it suffices to show that

$$\begin{array}{l}(E^l[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^l)],\\ \mathtt{let}\ y = \langle d^r_\varepsilon \quad d^?_\varepsilon \rangle \mathtt{raise}\ \varepsilon(\langle c^?_\varepsilon \quad c^r_\varepsilon \rangle V^r)\ \mathtt{in}\ \langle ?\quad \sigma' \rangle E^r[y])\\ \quad \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\mathtt{inj}(d_\sigma \circ d_c)]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!].\end{array}$$

  Let V'^r be the term to which $\langle c^?_\varepsilon \quad c^r_\varepsilon \rangle V^r$ steps. By anti-reduction, it suffices to show

$$\begin{array}{l}(E^l[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^l)],\\ \mathtt{let}\ y = \langle d^r_\varepsilon \quad d^?_\varepsilon \rangle \mathtt{raise}\ \varepsilon(V'^r)\ \mathtt{in}\ \langle ?\quad \sigma' \rangle E^r[y])\\ \quad \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\mathtt{inj}(d_\sigma \circ d_c)]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!].\end{array}$$

  由于两个项都不步进，只需证明它们在 $\mathrm{R}^{\sim}_k\grave{\mathrm{E}}\mathrm{inj}(d_\sigma \circ\ d_c)\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}c\acute{\mathrm{E}}$. 中相关。为此，我们需要证明 (1) $(V^l, V'^r) \in (\blacktriangleright \mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}c_\varepsilon \circ c'_\varepsilon\acute{\mathrm{E}})_k$，以及 (2) 给定 $k' \leq k$且 $(V_1, V_2) \in (\blacktriangleright \mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}d_\varepsilon \circ\ d_{\prime\varepsilon}\acute{\mathrm{E}})_{k'}$，我们有

$$\begin{array}{l}(E^l[V_1],\\ \mathtt{let}\ y = \langle d^r_\varepsilon \quad d^?_\varepsilon \rangle V_2\ \mathtt{in}\ \langle ?\quad \sigma' \rangle E^r[y])\\ \quad \in (\blacktriangleright \mathcal{E}^{\sim}[\![\mathtt{Inj}(I, d_\sigma \circ d_c)]\!])_{k'}(\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!]).\end{array}$$

  为了证明 (1)，通过前向归约，只需证明$(V^l, \mathrm{h}c^?_\varepsilon \quad c^r_\varepsilon \mathrm{i}V^r) \in (\blacktriangleright \mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}c_\varepsilon \circ c'_\varepsilon\acute{\mathrm{E}})_k$。这可由 ValUpR归纳得到（我们正在同时证明ValUpR，因此可以将其应用于更小的类型），以及我们关于 V^l和 V^r 的假设推出。

  To show (2), let V'_2 be the value to which $\langle d^r_\varepsilon \quad d^?_\varepsilon \rangle V_2$ steps. It suffices by anti-reduction to show

$$(E^l[V_1], \langle ?\quad \sigma' \rangle E^r[V_2'])$$
$$\in (\blacktriangleright \mathcal{E}^\sim[\![\mathtt{Inj}(I, d_\sigma \circ d_c)]\!])_{k'}(\mathcal{V}^\sim[\![c]\!]).$$

By the Löb induction hypothesis, it suffices to show that

$$(E^l[V_1], E^r[V_2'])$$
$$\in (\blacktriangleright \mathcal{E}^\sim[\![d_\sigma]\!])_{k'}(\mathcal{V}^\sim[\![c]\!]).$$

根据我们对 E^l和 E^r的假设，只需证明 $(V_1,\ V\prime 2\ ) \in (\blacktriangleright \mathrm{V}^\sim \grave{\mathrm{E}} d_\varepsilon \acute{\mathrm{E}})_{k'}$。根据前向归约，只需证明

$$(V_1, \langle d_\varepsilon^r \quad d_\varepsilon^? \rangle V_2) \in (\blacktriangleright \mathcal{E}^\sim[\![d_\sigma]\!])_{k'}(\mathcal{V}^\sim[\![d_\varepsilon]\!]).$$

现在根据 ValDnR 进行归纳，只需证明 $(V_1,\ V_2) \in (\blacktriangleright \mathrm{V}^\sim \grave{\mathrm{E}} d_\varepsilon \circ\ d\prime\varepsilon \acute{\mathrm{E}})_{k'}$，这正是我们的假设。

d_σ'是具体效应精度推导的情形与上述类似。

□

引理 D.55（EffUpL-general）。

$$\frac{\begin{array}{c} d_\sigma : \sigma \sqsubseteq \sigma' \\ d_\sigma' : \sigma' \sqsubseteq \sigma'' \\ \Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_\sigma \circ d_\sigma'} M \sqsubseteq N : c \end{array}}{\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_\sigma'} \langle \sigma' \quad \sigma \rangle M \sqsubseteq N : c}$$

证明。证明方法与上文类似。 □

引理 D.56（EffDnL-general）。

$$\frac{\begin{array}{c} d_\sigma : \sigma \sqsubseteq \sigma' \\ d_\sigma' : \sigma' \sqsubseteq \sigma'' \\ \Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_\sigma'} M \sqsubseteq N : c \end{array}}{\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_{d_{\sigma \circ d_\sigma'}} \langle \sigma \quad \sigma' \rangle M \sqsubseteq N : c}$$

证明。我们通过 Löb归纳（引理 D.16）证明这一点。也就是说，假设对于所有 $k \le j$ 以及所有 $(M', N\prime)\ \in (\blacktriangleright \mathrm{E}^\sim \grave{\mathrm{E}} d\prime\sigma \acute{\mathrm{E}})_k (\mathrm{V}^\sim \grave{\mathrm{E}} c \acute{\mathrm{E}})$，我们有

$$(\langle \sigma \quad \sigma' \rangle M', N') \in (\blacktriangleright \mathcal{E}^\sim[\![d_\sigma \circ d_\sigma']\!])_k(\mathcal{V}^\sim[\![c]\!]).$$

设 $(\gamma_1, \gamma_2)\ \in \mathrm{G}_j^\sim \grave{\mathrm{E}} \Gamma^{\sqsubseteq} \acute{\mathrm{E}}$，并设 $(M, N)\ \in \mathrm{E}_j^\sim \grave{\mathrm{E}} d_\sigma' \acute{\mathrm{E}} \mathrm{V}^\sim \grave{\mathrm{E}} c \acute{\mathrm{E}}$。我们需要证明

$$(\langle \sigma \quad \sigma' \rangle M, N) \in \mathcal{E}_j^\sim[\![d_\sigma \circ d_\sigma']\!]\mathcal{V}^\sim[\![c]\!].$$

根据单子绑定（引理 D.18）以及效应强制转换在值上是恒等映射这一事实，只需证明以下内容：

Let $k \le j$和 $\varepsilon @ c_\varepsilon \rightsquigarrow d_\varepsilon \in d_\sigma'$是一个被h$\sigma$ $\sigma\prime$i•捕获的效应。令 $(V^l, V^r)\ \in (\blacktriangleright \mathrm{V}^\sim \grave{\mathrm{E}} c_\varepsilon \acute{\mathrm{E}})_k$，并令 $E^l \# \varepsilon$和 $E^r \# \varepsilon$是求值上下文，使得$(x^l.E^l[x^l], x^r.E^r[x^r])\ \in (\blacktriangleright \mathrm{K}^\sim \grave{\mathrm{E}} d_\varepsilon \acute{\mathrm{E}})_k (\mathrm{E}^\sim \grave{\mathrm{E}} d\prime\sigma \acute{\mathrm{E}} \mathrm{V}^\sim \grave{\mathrm{E}} c \acute{\mathrm{E}})$。我们需要证明

$$(\langle \sigma \quad \sigma' \rangle E^l[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^l)],\ E^r[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^r)]N) \in \mathcal{E}^\sim_j[\![d_\sigma \circ d'_\sigma]\!]\mathcal{V}^\sim[\![c]\!].$$

注意，如果 $\varepsilon \notin \sigma$，那么左侧规约为 $\mathcal{U}$，此时根据 ErrBot（引理 D.47）即可完成证明。否则，证明过程类似于 EffUpR（引理 D.54），只是将向上转换和向下转换互换。

□

引理 D.57（EffDnR-general）。

$$\frac{d_\sigma : \sigma \sqsubseteq \sigma' \quad d'_\sigma : \sigma' \sqsubseteq \sigma'' \quad \Sigma \mid \Gamma^\sqsubseteq \vdash_{d_\sigma \circ d_{\sigma'}} M \sqsubseteq N : c}{\Sigma \mid \Gamma^\sqsubseteq \vdash_{d_\sigma} M \sqsubseteq \langle \sigma' \quad \sigma'' \rangle N : c}$$

证明。我们通过 Löb归纳（引理 D.16）来证明此陈述。也就是说，假设对于所有 $k \le j$以及所有 $(M', N\prime) \in (\blacktriangleright \mathrm{E}^\sim[\![d_\sigma \circ\ d'_\sigma]\!])_k(\mathrm{V}^\sim[\![c]\!])$，我们有

$$(M', \langle \sigma' \quad \sigma'' \rangle N') \in (\blacktriangleright \mathcal{E}^\sim[\![d_\sigma]\!])_k(\mathcal{V}^\sim[\![c]\!]).$$

令 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{G}^\sim_j[\![\Gamma^\sqsubseteq]\!]$，并令 $(M, N) \in \mathrm{E}^\sim_j[\![d_\sigma \circ\ d'_\sigma]\!]\mathrm{V}^\sim[\![c]\!]$。我们需要证明

$$(M, \langle \sigma' \quad \sigma'' \rangle N) \in \mathcal{E}^\sim_j[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^\sim[\![c]\!].$$

根据单子绑定（引理 D.18）以及效应强制转换在值上是恒等映射这一事实，只需证明以下内容：

Let $k \le j$和 $\varepsilon @ c_\varepsilon \rightsquigarrow d_\varepsilon \in d_\sigma \circ\ d'_\sigma$是一个被 $\mathrm{h}\sigma\prime\sigma\prime\prime\mathrm{i}\bullet$捕获的效应。Let $(V^l, V^r) \in (\blacktriangleright \mathrm{V}^\sim[\![c_\varepsilon]\!])_k$，并且 let $E^l \# \varepsilon$和 $E^r \# \varepsilon$为求值上下文，使得 $(x^l.E^l[x^l], x^r.E^r[x^r]) \in (\blacktriangleright \mathrm{K}^\sim[\![d_\varepsilon]\!])_k(\mathrm{E}^\sim[\![d_\sigma \circ\ d\prime\sigma]\!]\mathrm{V}^\sim[\![c]\!])$。我们需要证明

$$(E^l[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^l)], \langle \sigma' \quad \sigma'' \rangle E^r[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^r)]) \in \mathcal{E}^\sim_k[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^\sim[\![c]\!].$$

首先注意，根据引理 D.21，存在 c_1、c_2、d_1和 d_2，使得 $c_\varepsilon = c_1 \circ c_2$ 且 $d_\varepsilon = d_1 \circ d_2$且 $\varepsilon @ c_1 \rightsquigarrow d_1 \in d_\sigma$ 且 $\varepsilon @ c_2 \rightsquigarrow d_2 \in d'_\sigma$。特别地，这意味着 $\varepsilon \in \sigma\prime$，因此从 $\sigma\prime\prime$到 σ' 的向下强制转换不会失败。Let $c^L = c^l_1 (= c^l_\varepsilon)$、$c^M = c^r_1 = c^l_2$ 和 $c^R = c^r_2 (= c^r_\varepsilon)$，并同样定义 d^L, d^M 和 d^R。

By anti-reduction, it suffices to show that

$$(E^l[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^l)], \mathtt{let}\ y = \langle d^R \quad d^M \rangle \mathtt{raise}\ \varepsilon(\langle c^M \quad c^R \rangle V^r)\ \mathtt{in}\ \langle \sigma' \quad \sigma'' \rangle E^r[y]) \in \mathcal{E}^\sim_k[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^\sim[\![c]\!].$$

Let $V\prime r$是 $\mathrm{h}c^M \quad c^R\mathrm{i}V^r$所归约到的项。根据反向归约，只需证明

$$(E^l[\texttt{raise}\ \varepsilon(V^l)],\ \texttt{let}\ y = \langle d^R \quad d^M\rangle \texttt{raise}\ \varepsilon(V'^r)\ \texttt{in}\ \langle \sigma' \quad \sigma''\rangle E^r[y]) \in \mathcal{E}^\sim_k[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^\sim[\![c]\!].$$

由于两个项都无法归约，只需证明它们在 $\mathrm{R}^\sim_k$ Èd_σÉV˜ÈcÉ 中相关。为此，我们需要证明：(1) $(V^l, V'^r) \in$(▶V˜Èc_1É)$_k$；以及 (2) 给定 $k' \le k$和 $(V_1, V_2) \in$(▶V˜Èd_1É)$_{k'}$，我们有

$$(E^l[V_1],\ \texttt{let}\ y = \langle d^R \quad d^M\rangle V_2\ \texttt{in}\ \langle \sigma' \quad \sigma''\rangle E^r[y]) \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^\sim[\![d_\sigma]\!])_{k'}(\mathcal{V}^\sim[\![c]\!]).$$

(1) 由前向归约和值类型的归纳假设得出。为了证明 (2)，令 $V'2$ 为 h$d^R \quad d^M$iV_2 归约到的值。通过反向归约，只需证明

$$(E^l[V_1], \langle \sigma'' \quad \sigma'\rangle E^r[V_2']) \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^\sim[\![d_\sigma]\!])_{k'}(\mathcal{V}^\sim[\![c]\!]).$$

根据 Löb归纳假设，只需证明

$$(E^l[V_1], E^r[V_2']) \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^\sim[\![d_\sigma \circ d'_\sigma]\!])_{k'}(\mathcal{V}^\sim[\![c]\!]).$$

根据我们对 E^l 和 E^r 的假设，只需证明 $(V_1, V'2) \in$(▶V˜Èd_εÉ)$_{k'}$。通过前向归约，只需证明

$$(V_1, \langle d^R \quad d^M\rangle V_2) \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^\sim[\![d_\sigma]\!])_{k'}(\mathcal{V}^\sim[\![d_\varepsilon]\!]).$$

现在通过 ValUpR 归纳地，只需证明 $(V_1, V_2) \in$(▶V˜Èd_1É)$_{k'}$，这是我们的假设。

The case where d'_σ is a concrete effect precision derivation is similar to the above. □

Lemma D.58 (ValUpEval).

$$\langle B \quad A\rangle M \equiv \texttt{let}\ x = M\ \texttt{in}\ \langle B \quad A\rangle x$$

证明。我们证明等价关系的一个方向；另一个方向是对称的。Let j 为任意，并令 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{G}^\sim_j$ÈΓÉ。我们需要证明

$$((\langle B \quad A\rangle M)[\gamma_1], (\texttt{let}\ x = M\ \texttt{in}\ \langle B \quad A\rangle x)[\gamma_2]) \in \mathcal{E}^\sim_j[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^\sim[\![B]\!].$$

通过单子绑定（引理 D.18）和自反性，只需证明对于所有 $k \le j$ Let$(V_1, V_2) \in \mathcal{V}^\sim_k[\![A]\!]$，我们有

$$((\langle B \quad A\rangle V_1), (\texttt{let}\ x = V_2\ \texttt{in}\ \langle B \quad A\rangle x)) \in \mathcal{E}^\sim_k[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^\sim[\![B]\!].$$

By anti-reduction, it suffices to show

$$((\langle B \quad A\rangle V_1), (\langle B \quad A\rangle V_2)) \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

By congruence, it suffices to show

$$(V_1, V_2) \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

This follows from our assumption on V_1 and V_2.

□

Lemma D.59 (ValDnEval).

$$\langle A \quad B\rangle M \equiv \texttt{let } x = M \texttt{ in } \langle A \quad B\rangle x$$

Proof. Dual to the above. □

引理 D.60 (类型转换-回缩). 设 $A \sqsubseteq B$ 和 $\sigma \sqsubseteq \sigma'$，且设 $c\colon A \sqsubseteq B$ 和 $d_\sigma\colon \sigma \sqsubseteq \sigma'$. *Let* $\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_\sigma M \sqsubseteq N\colon A$. 以下成立：

(1) $\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_\sigma \langle A \quad B\rangle\langle B \quad A\rangle M \sqsubseteq N : A$

(2) $\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_\sigma \langle \sigma \quad \sigma'\rangle\langle \sigma' \quad \sigma\rangle M \sqsubseteq N : A$

证明。我们证明上述陈述的更强的"逐点"版本。也就是说，我们假设 $(M, N) \in \mathrm{E}^{\sim}_j\grave{\mathrm{E}}\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$，并证明，例如，$(\mathrm{h}A \quad B\mathrm{i}\mathrm{h}B \quad A\mathrm{i}M, N) \in \mathrm{E}^{\sim}_j\grave{\mathrm{E}}\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$。证明采用对推导 c 和 d_σ的同时归纳法。

(1) Let $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{G}^{\sim}_j\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$. 假设 $(M, N) \in \mathrm{E}^{\sim}_j\grave{\mathrm{E}}\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$. 我们需要证明

$$(\langle A \quad B\rangle\langle B \quad A\rangle M, N) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

By monadic bind (Lemma D.18), it suffices to show that

$$(\langle A \quad B\rangle\langle B \quad A\rangle V_1, V_2) \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!],$$

where $k \le j$ and $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}^{\sim}_k[\![A]\!]$.
We proceed by induction on the precision derivation c. If $c = \texttt{bool}$, then we need to show

$$(\langle \texttt{bool} \quad \texttt{bool}\rangle\langle \texttt{bool} \quad \texttt{bool}\rangle V_1, V_2) \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![\texttt{bool}]\!].$$

According to the operational semantics, we have that

$$\langle \texttt{bool} \quad \texttt{bool}\rangle\langle \texttt{bool} \quad \texttt{bool}\rangle V_1 \mapsto^2 V_1.$$

因此根据反向归约（引理 D.8），只需证明 $(V_1, \ V_2) \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![$布尔类型$]\!]$，这由我们的假设可得。

If $c = c_i \to_{c_\sigma} c_o$, then $A = A_i \to_{\sigma_A} A_o$ and $B = B_i \to_{\sigma_B} B_o$. We need to show

$$(\langle (A_i \to_{\sigma_A} A_o) \quad (B_i \to_{\sigma_B} B_o)\rangle\langle (B_i \to_{\sigma_B} B_o) \quad (A_i \to_{\sigma_A} A_o)\rangle V_1, V_2) \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_i \to_{\sigma_A} A_o]\!].$$

由于这两者都是值，只需证明它们在 $\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A_i \to_{\sigma_A} A_o\acute{\mathrm{E}}$ 中相关。为此，Let $k' \le k$并 Let $(V^l, V^r) \in \mathrm{V}^{\sim}_{k'}\grave{\mathrm{E}}A_i\acute{\mathrm{E}}$。我们需要证明

$$((\langle(A_i \to_{\sigma_A} A_o) \quad (B_i \to_{\sigma_B} B_o)\rangle\langle(B_i \to_{\sigma_B} B_o) \quad (A_i \to_{\sigma_A} A_o)\rangle V_1)\, V^l,\\ V_2\, V^r)\\ \in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![\sigma_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_o]\!].$$

The former term steps, so by anti-reduction, it suffices to show that

$$(\langle A_o \quad B_o\rangle \quad \langle\sigma_A \quad \sigma_B\rangle((\langle(B_i \to_{\sigma_B} B_o) \quad (A_i \to_{\sigma_A} A_o)\rangle V_1)\,\langle B_i \quad A_i\rangle V^l), V_2\, V^r)\\ \in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![\sigma_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_o]\!].$$

Let V'^l be the value to which $\langle B_i \quad A_i\rangle V^l$ steps. By anti-reduction, it suffices to show that

$$(\langle A_o \quad B_o\rangle\langle\sigma_A \quad \sigma_B\rangle\\ (\langle B_o \quad A_o\rangle\langle\sigma_B \quad \sigma_A\rangle\\ (V_1\,\langle A_i \quad B_i\rangle V'^l)),\\ V_2\, V^r)\\ \in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![\sigma_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_o]\!].$$

我们将诉诸传递性（引理D.66）。我们继续按 $\sim$ 分情形。首先假设 $\sim$ 是 $<_\circ$。令 V'^r 为 h $B_i \quad A_i$iV^r 归约到的值。如果我们证明 (1)

$$(\langle A_o \quad B_o\rangle\langle\sigma_A \quad \sigma_B\rangle\\ (\langle B_o \quad A_o\rangle\langle\sigma_B \quad \sigma_A\rangle\\ (V_1\,\langle A_i \quad B_i\rangle V'^l)),\\ \langle A_o \quad B_o\rangle\langle B_o \quad A_o\rangle\\ (\langle\sigma_A \quad \sigma_B\rangle\langle\sigma_B \quad \sigma_A\rangle\\ (V_2\,\langle A_i \quad B_i\rangle V'^r)))\\ \in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![\sigma_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_o]\!].$$

和 (2)

$$(\langle A_o \quad B_o\rangle\langle B_o \quad A_o\rangle\\ (\langle\sigma_A \quad \sigma_B\rangle\langle\sigma_B \quad \sigma_A\rangle\\ (V_2\,\langle A_i \quad B_i\rangle V'^r)),\\ V_2\, V^r)\\ \in \mathcal{E}^{\sim}_{\omega}[\![\sigma_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_o]\!],$$

then we will be finished by transitivity.
To show (1), first note that by monotonicity of casts (Lemma D.65), it suffices to show that

$$
\begin{array}{l}
(\langle \sigma_A \quad \sigma_B \rangle \\
\quad (\langle B_o \quad A_o \rangle \langle \sigma_B \quad \sigma_A \rangle \\
\quad\quad (V_1 \langle A_i \quad B_i \rangle V'^l)), \\
\langle B_o \quad A_o \rangle \\
\quad (\langle \sigma_A \quad \sigma_B \rangle \langle \sigma_B \quad \sigma_A \rangle \\
\quad\quad (V_2 \langle A_i \quad B_i \rangle V'^r))) \\
\quad \in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![\sigma_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B_o]\!].
\end{array}
$$

Then by commutativity of casts (Corollary D.63), it suffices to show

$$
\begin{array}{l}
(\langle \sigma_B \quad \sigma_A \rangle (V_1 \langle A_i \quad B_i \rangle V'^l), \\
\langle \sigma_B \quad \sigma_A \rangle (V_2 \langle A_i \quad B_i \rangle V'^r)) \\
\quad \in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![\sigma_B]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_o]\!].
\end{array}
$$

By monotonicity of casts again, it suffices to show

$$
\begin{array}{l}
((V_1 \langle A_i \quad B_i \rangle V'^l), \\
(V_2 \langle A_i \quad B_i \rangle V'^r)) \\
\quad \in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![\sigma_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_o]\!].
\end{array}
$$

根据函数应用的精度规则的可靠性，只需证明 $(V_1, V_2) \in \mathrm{V}^{\sim}_k \text{È}(A_i \to_{\sigma_A} A_o)\text{É}$，并证明 $(\mathrm{h} A_i \quad B_i \mathrm{i} V', \mathrm{h} A_i \quad B_i \mathrm{i} V'^r) \in \mathrm{E}^{\sim}_k \text{È} \sigma_A \text{É} \mathcal{V}^{\sim} \text{È} A_i \text{É}$。前者由假设得出；而要证明后者，根据前向归约，只需证明 $(\mathrm{h} A_i \quad B_i \mathrm{i} \mathrm{h} B_i \quad A_i \mathrm{i} V^l, \mathrm{h} A_i \quad B_i \mathrm{i} \mathrm{h} B_i \quad A_i \mathrm{i} V^r) \in \mathrm{E}^{\sim}_k \text{È} \sigma_A \text{É} \mathcal{V}^{\sim} \text{È} A_i \text{É}$。这由关于 V^l 和 V^r 的归纳假设和假设得出。

To show (2), it suffices by the inductive hypothesis applied twice to show

$$
\begin{array}{l}
((V_2 \langle A_i \quad B_i \rangle V'^r)), V_2\, V^r) \\
\quad \in \mathcal{E}^{\sim}_{\omega}[\![\sigma_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_o]\!],
\end{array}
$$

By forward reduction, it suffices to show

$$
\begin{array}{l}
((V_2 \langle A_i \quad B_i \rangle V'^r)), V_2\, V^r) \\
\quad \in \mathcal{E}^{\sim}_{\omega}[\![\sigma_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_o]\!],
\end{array}
$$

根据函数应用的可靠性，只需证明 V_2 与其自身在 $\mathcal{V}^{\sim}_{\omega}[\![(A_i \to_{\sigma_A} A_o)]\!]$ 并且 $(\langle A_i \quad B_i \rangle V', V^r) \in \mathcal{E}^{\sim}_{\omega}[\![\sigma_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_i]\!]$。前者根据自反性（推论 D.30）成立，而要证明后者，根据前向归约，只需证明

$$
(\langle A_i \quad B_i \rangle \langle B_i \quad A_i \rangle V^r, V^r) \in \mathcal{E}^{\sim}_{\omega}[\![\sigma_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_i]\!],
$$

which follows by the inductive hypothesis and reflexivity.

当 $\sim$ 是 $<$ 时，情形类似。

(2) Let $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{G}_j^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$。我们使用 Löb归纳。我们假设，对于所有 $k \le j$ 以及所有相关项 $(M', N') \in (\blacktriangleright \mathrm{E}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}\sigma\acute{\mathrm{E}})_k(\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}})$，均有

$$(\langle\sigma \quad \sigma'\rangle\langle\sigma' \quad \sigma\rangle M', N') \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma]\!])_k(\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!]).$$

设 $(M, N) \in \mathrm{E}_j^{\sim}\grave{\mathrm{E}}\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$。我们需要证明

$$(\langle\sigma \quad \sigma'\rangle\langle\sigma' \quad \sigma\rangle M, N) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

根据单子绑定（引理D.18），只需考虑以下情形：

(a) 设 $k \le j$ and $(V_1, V_2) \in \mathrm{V}_k^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$。我们需要证明

$$(\langle\sigma \quad \sigma'\rangle\langle\sigma' \quad \sigma\rangle V_1, V_2) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!]$$

这可由反向归约和假设得出。

(b) Let $k \le j$和令 $\varepsilon@C \rightsquigarrow D \in \sigma$。令 C'和 D'为类型，使得 $\varepsilon@C' \rightsquigarrow D' \in \sigma'$。令 $(V^l, V^r) \in (\blacktriangleright\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}C\acute{\mathrm{E}})_k$，并令 $E^l\#\varepsilon$ 和 $E^r\#\varepsilon$ 满足

$$(x^l.E^l[x^l], x^r.E^r[x^r]) \in (\blacktriangleright\mathcal{K}_j^{\sim}[\![D]\!]_k(\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!]).$$

我们需要证明

$$(\langle\sigma \quad \sigma'\rangle\langle\sigma' \quad \sigma\rangle E^l[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^l)], E^r[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^r)]) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

第一项会步进，因此根据反向归约，只需证明

$$(\langle\sigma \quad \sigma'\rangle(\mathtt{let}\ x = \langle D \quad D'\rangle\mathtt{raise}\ \varepsilon(\langle C' \quad C\rangle V^l)\ \mathtt{in}\ \langle\sigma' \quad \sigma\rangle E^l[x]), E^r[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^r)]) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

令 V'^l为 $\mathrm{h}C' \quad C\mathrm{i}V^l$步进到的值。根据反向归约，只需证明

$$(\mathtt{let}\ y = \langle D' \quad D\rangle\mathtt{raise}\ \varepsilon(\langle C \quad C'\rangle V'^l)\ \mathtt{in}\ \langle\sigma \quad \sigma'\rangle\mathtt{let}\ x = \langle D \quad D'\rangle y\ \mathtt{in}\ \langle\sigma' \quad \sigma\rangle E^l[x], E^r[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^r)]) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

令 y'为 $\mathrm{h}D \quad D'\mathrm{i}y$步进到的值。令 V''^l为 $\mathrm{h}C \quad C'\mathrm{i}V'$步进到的值。根据反向归约，只需证明

$$(\mathtt{let}\ y = \langle D' \quad D\rangle\mathtt{raise}\ \varepsilon(V''^l)\ \mathtt{in}\ \langle\sigma \quad \sigma'\rangle\langle\sigma' \quad \sigma\rangle E^l[y'], E^r[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^r)]) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

两个项都不会归约，因此只需证明它们在 $\mathrm{R}_k^{\sim}\grave{\mathrm{E}}\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$ 中相关。为此，我们首先证明$(V''^l, V^r) \in (\blacktriangleright\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}C\acute{\mathrm{E}})_k$。通过前向归约，只需证明 $(\mathrm{h}C \quad C'\mathrm{i}\mathrm{h}C' \quad C\mathrm{i}V^l, V^r) \in (\blacktriangleright\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}C\acute{\mathrm{E}})_k$。这由值类型的归纳假设以及我们关于 V^l和 V^r的假设得出。

现在我们证明，给定 $k' \leq k$ 与值 $(V_1, V_2) \in (\blacktriangleright \mathbf{V}\tilde{\ }\grave{E}D\acute{E})_{k'}$，我们有

$$(\texttt{let } y = \langle D' \quad D\rangle V_1 \texttt{ in } \langle \sigma \quad \sigma'\rangle\langle \sigma' \quad \sigma\rangle E^l[y'], \\ E^r[V_2]) \\ \in (\blacktriangleright \mathcal{E}\tilde{\ }[\![\sigma]\!])_k(\mathcal{V}\tilde{\ }[\![A]\!]).$$

Let V_1' be the value to which $\langle D' \quad D\rangle V_1$ steps. By anti-reduction, it will suffice to show

$$(\texttt{let } y = V_1' \texttt{ in } \langle \sigma \quad \sigma'\rangle\langle \sigma' \quad \sigma\rangle E^l[y'], \\ E^r[V_2]) \\ \in (\blacktriangleright \mathcal{E}\tilde{\ }[\![\sigma]\!])_k(\mathcal{V}\tilde{\ }[\![A]\!]).$$

By forward reduction, it will suffice to show

$$(\texttt{let } y = V_1' \texttt{ in } \langle \sigma \quad \sigma'\rangle\langle \sigma' \quad \sigma\rangle E^l[\langle D \quad D'\rangle y], \\ E^r[V_2]) \\ \in (\blacktriangleright \mathcal{E}\tilde{\ }[\![\sigma]\!])_k(\mathcal{V}\tilde{\ }[\![A]\!]).$$

By anti-reduction, it will suffice to show

$$(\langle \sigma \quad \sigma'\rangle\langle \sigma' \quad \sigma\rangle E^l[\langle D \quad D'\rangle V_1'], E^r[V_2]) \\ \in (\blacktriangleright \mathcal{E}\tilde{\ }[\![\sigma]\!])_k(\mathcal{V}\tilde{\ }[\![A]\!]).$$

By the Löb induction hypothesis, it suffices to show that

$$(E^l[\langle D \quad D'\rangle V_1'], E^r[V_2]) \\ \in (\blacktriangleright \mathcal{E}\tilde{\ }[\![\sigma]\!])_k(\mathcal{V}\tilde{\ }[\![A]\!]).$$

By forward reduction, it suffices to show

$$(E^l[\langle D \quad D'\rangle \langle D' \quad D\rangle V_1], E^r[V_2]) \\ \in (\blacktriangleright \mathcal{E}\tilde{\ }[\![\sigma]\!])_k(\mathcal{V}\tilde{\ }[\![A]\!]).$$

By the induction hypothesis for value types, it suffices to show

$$(E^l[V_1], E^r[V_2]) \in (\blacktriangleright \mathcal{E}\tilde{\ }[\![\sigma]\!])_k(\mathcal{V}\tilde{\ }[\![A]\!]).$$

This follows by our assumption on E^l and E^r.

□

引理 D.61（渐进子类型关系）。*Let* $c\colon A \sqsubseteq B$ *and* $c'\colon A' \sqsubseteq B'$，其中 $A \leq A'$ 且 $B \leq B'$。令 $d_\sigma\colon \sigma_1 \sqsubseteq \sigma_2$ *and* $d'_\sigma\colon \sigma_{\prime 1} \sqsubseteq \sigma_{\prime 2}$，其中 $\sigma_1 \leq \sigma_{\prime 1}$ 且 $\sigma_2 \leq \sigma_{\prime 2}$。假设 $M \equiv N$。以下结论成立：

(1)

$$\frac{\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{d_\tau} M \sqsubseteq N : A}{\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{d_\tau} \langle B \quad A\rangle M \sqsubseteq \langle B' \quad A'\rangle N : B'}$$

(2)

$$\frac{\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{d_\tau} M \sqsubseteq N : B}{\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{d_\tau} \langle A' \quad B' \rangle M \sqsubseteq \langle A \quad B \rangle N : A'}$$

(3)

$$\frac{\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{\sigma_1} M \sqsubseteq N : d}{\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{\sigma_2'} \langle \sigma_2 \quad \sigma_1 \rangle M \sqsubseteq \langle \sigma_2' \quad \sigma_1' \rangle N : d}$$

(4)

$$\frac{\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{\sigma_2} M \sqsubseteq N : d}{\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{\sigma_1'} \langle \sigma_1' \quad \sigma_2' \rangle M \sqsubseteq \langle \sigma_1 \quad \sigma_2 \rangle N : d}$$

证明。对推导 c': $A' \sqsubseteq B'$and d'_σ: $\sigma_1 \sqsubseteq \sigma_2$ 进行同时归纳。

(1) 我们需要证明

$$(\langle B \quad A \rangle M, \langle B' \quad A' \rangle N) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B']\!].$$

根据单子绑定（引理D.18），结合 $E_1 = \langle B \quad A \rangle \bullet$ 和 $E_2 = \langle B' \quad A' \rangle \bullet$，只需证明以下结论。

令 $k \le j$，并令 $(V_1, V_2) \in \mathrm{V}_k^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A'\acute{\mathrm{E}}$。我们需要证明

$$(\langle B \quad A \rangle V_1, \langle B' \quad A' \rangle V_2) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B']\!].$$

我们接下来按 c' 分情形讨论。

情形 $c' =$ 布尔类型。由精度推导的子类型关系规则进行逆向分析，可得 $c =$ 布尔类型。

我们需要证明

$$(\langle \mathsf{bool} \quad \mathsf{bool} \rangle V_1, \langle \mathsf{bool} \quad \mathsf{bool} \rangle V_2) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![\mathsf{bool}]\!]$$

由反向归约以及关于 V_1 和 V_2的假设可得此结论。

情形 $c' = c_i' \to_{c_\sigma'} c_o'$: $A_i' \to_{\sigma_A'} A_o' \sqsubseteq B_i' \to_{\sigma_B'} B_o'$。

对精度推导的子类型关系规则进行逆向分析，可得 $c = c_i \to_{c_\sigma} c_o$，其中 $c_i' \le c_i$，且 $c_\sigma \le c_\sigma'$，以及 $c_o \le c_o'$。

于是我们的假设变为 $(V_1, V_2) \in \mathrm{V}_k^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A_i' \to_{\sigma_A'} A_o'\acute{\mathrm{E}}$。我们需要证明

$$(\mathrm{h}B_i \to_{\sigma_B} B_o \quad A_i \to_{\sigma_A} A_o\rangle V_1, \langle B_i' \to_{\sigma_B'} B_o' \quad A_i' \to_{\sigma_A'} A_o'\rangle V_2) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B_i' \to_{\sigma_B'} B_o']\!].$$

由于这两个项都是值，只需证明它们在$\mathrm{V}_k^{\sim}\ \grave{\mathrm{E}}B_i' \to_{\sigma_B'} B_o'\acute{\mathrm{E}}$ 中相关。Let$k' \le k$并 Let $(V^l, V^r) \in \mathrm{V}_{k'}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}B_i'\acute{\mathrm{E}}$。我们需要证明

$$\begin{gathered}((\langle B_i \to_{\sigma_B} B_o \quad A_i \to_{\sigma_A} A_o\rangle V_1)\, V^l,\\ (\langle B_i' \to_{\sigma_B'} B_o' \quad A_i' \to_{\sigma_A'} A_o'\rangle V_2)\, V^r)\\ \in \mathcal{E}_{k'}^{\sim}[\![\sigma_B']\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B_o']\!].\end{gathered}$$

By anti-reduction, it suffices to show

$$(\langle B_o \quad A_o\rangle\langle\sigma_B \quad \sigma_A\rangle(V_1\,\langle A_i \quad B_i\rangle V^l),$$
$$\langle B'_o \quad A'_o\rangle\langle\sigma'_B \quad \sigma'_A\rangle(V_2\,\langle A'_i \quad B'_i\rangle V^r))$$
$$\in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![\sigma'_B]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B'_o]\!].$$

By the induction hypothesis applied twice, it suffices to show

$$((V_1\,\langle A_i \quad B_i\rangle V^l), (V_2\,\langle A'_i \quad B'_i\rangle V^r))$$
$$\in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![\sigma'_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A'_o]\!].$$

根据函数应用的项精度同余规则的可靠性（引理 D.25），只需证明 $(V_1, \quad V_2) \in \mathcal{V}^{\sim}_{k'}[\![A'_i \to_{\sigma'_A} A'_o]\!]$，并且

$$(\langle A_i \quad B_i\rangle V^l, \langle A'_i \quad B'_i\rangle V^r) \in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A'_i]\!].$$

前者由假设成立。为了证明后者，根据渐进子类型规则 ValDnSub 的可容许方向（第 (2) 项，引理 B.1），其证明不依赖于当前引理，只需证明 $(V^l, V^r) \in \mathcal{V}^{\sim}_{k'}[\![B'_i]\!]$。这由假设为真。

(2) Similar to the above.
(3) We need to show

$$(\langle\sigma_2 \quad \sigma_1\rangle M, \langle\sigma'_2 \quad \sigma'_1\rangle N) \in \mathcal{E}^{\sim}_{j}[\![\sigma'_2]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!].$$

We use Löb induction. That is, we assume as our induction hypothesis that

$$(\langle\sigma_2 \quad \sigma_1\rangle M', \langle\sigma'_2 \quad \sigma'_1\rangle N') \in \blacktriangleright(\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma'_2]\!])_j(\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!]),$$

对于所有（ $M', N\prime$) $\in$(▶E~Èσ'_1É)j(V~ÈcÉ)，并证明在这一假设下，我们有

$$(\langle\sigma_2 \quad \sigma_1\rangle M, \langle\sigma'_2 \quad \sigma'_1\rangle N) \in \mathcal{E}^{\sim}_{j}[\![\sigma'_2]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!]$$

for all $(M, N) \in \mathcal{E}^{\sim}_{j}[\![\sigma'_1]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!]$.
Using Monadic Bind (Lemma D.18), we have the following cases:

- Let $k \leq j$ and $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}^{\sim}_{k}[\![c]\!]$. We need to show

$$(\langle\sigma_2 \quad \sigma_1\rangle V_1, \langle\sigma'_2 \quad \sigma'_1\rangle V_2) \in \mathcal{E}^{\sim}_{k}[\![\sigma'_2]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!].$$

  This follows by anti-reduction and our assumption on V_1 and V_2.
- Let $\varepsilon@c_i \rightsquigarrow d_i \in \sigma_1$是由 h$\sigma\prime 2$ $\sigma\prime$1i•捕获的效应。Let(V^l, V^r) $\in$(▶V~Èc^l_iÉ)$_k$, and Let(E^l, E^r) $\in$(▶K~Èd^l_iÉ)$_k$(E~È$\sigma\prime$1ÉV~ÈcÉ)。We need to show

$$(\langle\sigma_2 \quad \sigma_1\rangle E^l[\texttt{raise}\ \varepsilon(V^l)], \langle\sigma'_2 \quad \sigma'_1\rangle E^r[\texttt{raise}\ \varepsilon(V^r)])$$
$$\in \mathcal{E}^{\sim}_{k}[\![\sigma'_2]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!].$$

  我们继续根据效应精度推导的子类型关系分情形讨论。我们只展示情形$d\prime\sigma$是一个具体效应精度集 d'_c；其他情形立即得出或归结为此情形。

  通过逆向分析，我们有 d_σ 也是一个具体效应精度集 d_c，其中 dom(d_c) $\subseteq$dom(d'_c)，且对所有 ε: $c \rightsquigarrow d \in d_c$, ε: $c' \rightsquigarrow d\prime \in d\prime c$以及 $c \leq c'$和 $d\prime \leq d$。根据反向归约，只需证明

$$(\texttt{let } x = \langle d_i^l \quad d_i^r\rangle \texttt{raise } \varepsilon(\langle c_i^r \quad c_i^l\rangle V^l) \texttt{ in } \langle \sigma_2 \quad \sigma_1\rangle E^l[x],$$
$$\texttt{let } x = \langle d_i'^l \quad d_i'^r\rangle \texttt{raise } \varepsilon(\langle c_i'^r \quad c_i'^l\rangle V^r) \texttt{ in } \langle \sigma_2' \quad \sigma_1'\rangle E^r[x])$$
$$\in (\blacktriangleright \mathcal{E}_{)}^{\sim}[\![\sigma_2']\!]_k(\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!]),$$

By congruence for Let, it suffices to show (1)

$$(\langle d_i^l \quad d_i^r\rangle \texttt{raise } \varepsilon(\langle c_i^r \quad c_i^l\rangle V^l),$$
$$\langle d_i'^l \quad d_i'^r\rangle \texttt{raise } \varepsilon(\langle c_i'^r \quad c_i'^l\rangle V^r))$$
$$\in (\blacktriangleright \mathcal{E}_{)}^{\sim}[\![\sigma_2']\!]_k(\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!]),$$

以及对于（V_1， V_2） $\in \blacktriangleright$(V˜Èd_iÉ)$_k$，我们有

$$(\langle \sigma_2 \quad \sigma_1\rangle E^l[V_1],$$
$$\langle \sigma_2' \quad \sigma_1'\rangle E^r[V_2])$$
$$\in (\blacktriangleright \mathcal{E}_{)}^{\sim}[\![\sigma_2']\!]_k(\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!]),$$

为证明（1），首先注意到，根据值类型归纳假设，

$$(\texttt{raise } \varepsilon(\langle c_i^r \quad c_i^l\rangle V^l), \texttt{raise } \varepsilon(\langle c_i'^r \quad c_i'^l\rangle V^r)) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma_2']\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c_i']\!],$$

再次根据值类型归纳假设，可得（1）。为证明（2），注意到，根据对 E^l 和 E^r 的假设，$E^l[x^l]$ 和 $E^r[x^r]$ 是相关的。因此，我们可以应用 Löb归纳假设，得到所需结论。

（4）我们再次使用 Löb归纳法和单子绑定。在绑定引理的相关 raise 操作情形中，令 $\varepsilon@c_i \rightsquigarrow d_i \in \sigma_2$ 为被 h$\sigma_{\prime 2}$ $\sigma_{\prime}$1i• 捕获的效应。令（V^l， V^r） $\in$(▶V˜Èc_i^lÉ)$_k$，并令（E^l， E^r） $\in$(▶K˜Èd_i^lÉ)$_k$(E˜Èσ_1'ÉV˜ ÈcÉ)。

我们需要证明

$$(\langle \sigma_2 \quad \sigma_1\rangle E^l[\texttt{raise } \varepsilon(V^l)], \langle \sigma_2' \quad \sigma_1'\rangle E^r[\texttt{raise } \varepsilon(V^r)])$$
$$\in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma_2']\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!].$$

如果 $\varepsilon \notin \sigma_1$，那么两边都会步进到 $\mathcal{U}$。由于 $\mathcal{U}$ 通过 ErrBot（引理D.47）与其自身相关，我们通过反向归约完成证明。

Otherwise, the proof proceeds analogously to that of the previous case, with upcasts and downcasts interchanged.

□

引理 D.62（效应强制转换与纯函数值可交换）。 *Let* E 为一个求值上下文，使得*(1)* 对所有 σ、$\Sigma \mid \Gamma \mid \bullet : (\sigma\,!\ A) \vdash_\sigma E : B$，并且使得 *(2)* 对所有 $\varepsilon \in \Sigma$， $E\#\varepsilon$。此外，假设 *(3)* 对所有值 V，存在一个值 $V\prime$ 使得 $E[V] \mapsto^* V\prime$。

Let $\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{\sigma_2} M \equiv N : A$.

然后 $\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{\sigma_1} E[\langle \sigma_1 \quad \sigma_2\rangle M] \equiv \langle \sigma_1 \quad \sigma_2\rangle E[N] : B$，对于向上转换也是如此。

Proof. We show the statement for downcasts only; the proof for upcasts is similar. Additionally, we show only one of the directions of the equivalence; the other is symmetric.

我们需要证明

$$(E[\langle\sigma_1 \quad \sigma_2\rangle M], \langle\sigma_1 \quad \sigma_2\rangle E[N]) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma_1]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

我们应用单子绑定（引理 D.18）于 $E_1 = E[\langle\sigma_1 \quad \sigma_2\rangle\bullet]$ 和 $E_2 = \langle\sigma_1 \quad \sigma_2\rangle E$。根据对 M 和 N 的假设，只需考虑以下情形。

- Let $k \leq j$ and let $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}_k^{\sim}[\![A]\!]$. We need to show

$$(E[\langle\sigma_1 \quad \sigma_2\rangle V_1], \langle\sigma_1 \quad \sigma_2\rangle E[V_2]) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma_1]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

By the operational semantics, we have $E[\langle\sigma_1 \quad \sigma_2\rangle V_1] \mapsto^1 E[V_1]$.
By anti-reduction, it suffices to show

$$(E[V_1], \langle\sigma_1 \quad \sigma_2\rangle E[V_2]) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma_1]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

此外，存在 i_1和 i_2以及值$V\prime 1$和$V\prime 2$，使得 $E[V_1] \mapsto^{i_1} V\prime 1$ 和 $E[V_2] \mapsto^{i_2} V\prime 2$。

We also have $\langle\sigma_1 \quad \sigma_2\rangle V_2' \mapsto^1 V_2'$.
Putting the above facts together, by anti-reduction, it suffices to show

$$(V_1', V_2') \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma_1]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

但根据前向归约，只需证明 $(E[V_1], E[V_2]) \in \mathrm{E}_k^{\sim}\grave{\mathrm{E}}\sigma_1\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}B\acute{\mathrm{E}}$。
For this, it suffices (by the congruence lemmas) that V_1 and V_2 are related, which is true by assumption.

- Let $k \leq j$以及 Let $\varepsilon@c^r \rightsquigarrow d^r \in \sigma_2$是被效应处理器捕获的$\langle\sigma_1 \quad \sigma_2\rangle\bullet$。Let V^l, V^r, $E^l\#\varepsilon$, $E^r\#\varepsilon$如引理 D.18 的陈述所示。我们需要证明

$$(E[\langle\sigma_1 \quad \sigma_2\rangle E^l[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^l)]], \langle\sigma_1 \quad \sigma_2\rangle E[E^r[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^r)]]) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma_1]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

如果 $\varepsilon \notin \sigma_1$，那么根据操作语义，两个项都会归约为 $\mho$。根据反向归约，只需证明 $(\mho, \mho) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma_1]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!]$。这由 ErrBot（引理 D.47）得出。现在假设 $\varepsilon@c^l \rightsquigarrow d^l \in \sigma_1$。根据操作语义，我们有

$$E[\langle\sigma_1 \quad \sigma_2\rangle E^l[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^l)]] \mapsto^1 E[E^l[\langle d^r \quad d^l\rangle \mathtt{raise}\ \varepsilon(\langle c^l \quad c^r\rangle V^l)]],$$

and

$$\langle\sigma_1 \quad \sigma_2\rangle E[E^r[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^r)]] \mapsto^1 E[E^r[\langle d^r \quad d^l\rangle \mathtt{raise}\ \varepsilon(\langle c^l \quad c^r\rangle V^r)]].$$

Thus, by anti-reduction, it suffices to show

$$\begin{aligned}&(E[E^l[\langle d^r \quad d^l\rangle \mathtt{raise}\ \varepsilon(\langle c^l \quad c^r\rangle V^l)]],\\ &\ E[E^r[\langle d^r \quad d^l\rangle \mathtt{raise}\ \varepsilon(\langle c^l \quad c^r\rangle V^r)]])\\ &\qquad \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma_1]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].\end{aligned}$$

Let $V\prime^l$为 $\mathrm{h}c^l \quad c^r\mathrm{i}V^l$ 经过若干步得到的值，同理，Let $V\prime^r$ 为$\mathrm{h}c^l \quad c^r\mathrm{i}V^r$ 经过若干步得到的值。根据反向归约，只需证明

$$(E[E^l[\langle d^r \quad d^l\rangle \texttt{raise}\ \varepsilon(V'^l)]],\\ E[E^r[\langle d^r \quad d^l\rangle \texttt{raise}\ \varepsilon(V''^r)]])\\ \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma_1]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

由于两个项都不归约，只需证明它们在 $\mathrm{R}_k^{\sim}$ Èσ_1É$\mathrm{V}^{\sim}$ÈBÉ 中相关。我们断言R˜È·É定义中的第二个析取项，取 $E^l = E[E^l[\mathrm{h}d^r \quad d^l\mathrm{i}\bullet]]$和$E^r = E[E^r[\mathrm{h}d^r \quad d^l\mathrm{i}\bullet]]$。

我们首先需要证明 $(V'^l, V'^r) \in (\blacktriangleright \mathrm{V}^{\sim}$È$c$É$)_k$。通过前向归约，只需证明

$$(\langle c^l \quad c^r\rangle V^l, \langle c^l \quad c^r\rangle V^r) \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma_1]\!])_k(\mathcal{V}^{\sim}[\![c^r]\!]).$$

根据强制转换的单调性（引理 D.65），只需证明 $(V, V^r) \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma_1]\!])_k(\mathcal{V}^{\sim}[\![c^r]\!])$。这由我们关于 V^l和 V^r的假设得出。现在我们需要证明

$$(x^l.E[E^l[\langle d^r \quad d^l\rangle x^l]], x^r.E[E^r[\langle d^r \quad d^l\rangle x^r]]) \in (\blacktriangleright\mathcal{K}^{\sim}[\![d]\!])_k(\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma_1]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!]).$$

为此，Let $k' \le k$和 Let $(V_1, \quad V_2) \in (\blacktriangleright \mathrm{V}^{\sim}$È$d^l$É$)_{k'}$。我们需要证明

$$(E[E^l[\langle d^r \quad d^l\rangle V_1]], E[E^r[\langle d^r \quad d^l\rangle V_2]]) \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma_1]\!])_{k'}(\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!]).$$

It will suffice by the soundness of the congruence rules to show that

$$(E^l[\langle d^r \quad d^l\rangle V_1], E^r[\langle d^r \quad d^l\rangle V_2]) \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma_1]\!])_{k'}(\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!]).$$

Let $V'1$ 和 $V'2$为 $\mathrm{h}d^r \quad d^l\mathrm{i}V_1$ 和$\mathrm{h}d^r \quad d^l\mathrm{i}V_2$ 分别单步归约得到的值。根据反向归约，只需证明

$$(E'^l[V_1'], E'^r[V_2']) \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma_1]\!])_{k'}(\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!]).$$

根据对 E^l 和 E^r 的假设，只需证明 $(V'1\,, V'2\,) \in (\blacktriangleright \mathrm{V}^{\sim}$È$d^r$É$)_{k'}$。根据前向归约，只需证明

$$(\langle d^r \quad d^l\rangle V_1, \langle d^r \quad d^l\rangle V_2) \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma_1]\!])_{k'}(\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!]).$$

By monotonicity of casts (lemma D.65), it suffices to show

$$(V_1, V_2) \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma_1]\!])_{k'}(\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!]).$$

This follows from our assumption on V_1 and V_2.

□

Corollary D.63 (commutativity of casts). *Value casts commute with effect casts.*

Proof. This follows from D.62, because $\langle B \quad A\rangle\bullet$ and $\langle A \quad B\rangle\bullet$ satisfy the requirements in the lemma. □

引理 D.64（强制转换的函子性）。*Let* M 是一个项，使得 $\Sigma \mid \Gamma \mid \cdot \vdash_\sigma M : A$。*Let*$c$: $A \sqsubseteq B$且 e: $B \sqsubseteq C$。*Let* d_σ: $\sigma \sqsubseteq \sigma'$ 且令 d'_σ: $\sigma' \sqsubseteq \sigma''$

Suppose $\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_\sigma M \equiv N : A$. *Then the following hold:*

Identity properties: *Suppose* $\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vdash_\sigma M \sqsupseteq\sqsubseteq N : A$. *We have*

(1) $\Sigma \mid \Gamma \vDash_\sigma$ 嗨A A: $M \equiv N$: A
(2) $\Sigma \mid \Gamma \vDash_\sigma$ 嗨A A: $M \equiv N$: A
(3) $\Sigma \mid \Gamma \vDash_\sigma$ 嗨σ σ: $M \equiv N$: A
(4) $\Sigma \mid \Gamma \vDash_\sigma$ 嗨σ σ: $M \equiv N$: A

复合性质: *Let* c: $A \sqsubseteq B$和 e: $B \sqsubseteq C$. *Let* d_σ: $\sigma \sqsubseteq \sigma\prime$和 d'_σ: $\sigma\prime \sqsubseteq \sigma\prime\prime$. 假设$M \sqsupseteq\sqsubseteq N$。则

(1) $\Sigma \mid \Gamma \vDash_\sigma$ hC Ai$M \sqsupseteq\sqsubseteq$ hC Bih$B$ AiN : C*(2)* $\Sigma \mid \Gamma \vDash_\sigma$ hA Ci$M \sqsupseteq\sqsubseteq$ hA Bih$B$ CiN : A*(3)* $\Sigma \mid \Gamma \vDash_{\sigma''}$ hσ'' σi $M \sqsupseteq\sqsubseteq$ hσ'' σ'ihσ' σiN: A*(4)* $\Sigma \mid \Gamma \vDash_\sigma$h$\sigma$ $\sigma\prime$i$M \sqsupseteq\sqsubseteq$h σ $\sigma\prime$ih$\sigma\prime, \sigma''$iN: A

证明。我们证明上述陈述更一般的"逐点"版本。例如，我们证明，如果 $(M, N) \in \mathrm{E}_j^{\sim}$È$\sigma$É$\mathrm{V}^{\sim}$È$A$É，那么 (h$A$ AiM, N) $\in \mathrm{E}_j^{\sim}$ÈσÉ$\mathrm{V}^{\sim}$ÈAÉ。

Additionally, we only prove one direction of each of the equivalences (i.e., $\sqsubseteq$); the proof of the other direction is symmetric.

The statements are proven simultaneously by induction on A and σ.

- 恒等性质:

(1)我们需要证明(hA AiM, N) $\in \mathrm{E}_j^{\sim}$ÈσÉ$\mathrm{V}^{\sim}$ÈAÉ。根据单子绑定（引理 D.18），使用 E_1 = hA Ai• 和 E_2 = •，只需证明以下内容：Let $k \le j$ 和$(V_1, V_2) \in \mathrm{V}_k^{\sim}$ ÈAÉ。我们将证明

$$(\langle A \quad A\rangle V_1, V_2) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

We continue by induction on A. If A = bool, then we need to show

$$(\langle \mathtt{bool} \quad \mathtt{bool}\rangle V_1, V_2) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![\mathtt{bool}]\!].$$

根据反向归约，只需证明 $(V_1, \ V_2) \in \mathrm{E}_k^{\sim}$ ÈσÉ$\mathrm{V}^{\sim}$È布尔类型É，这由我们对 $(V_1, \ V_2)$ 的假设可得。

If $A = A_i \to_{\sigma_A} A_o$, we need to show

$$(\langle (A_i \to_{\sigma_A} A_o) \quad (A_i \to_{\sigma_A} A_o)\rangle V_1, V_2) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_i \to_{\sigma_A} A_o]\!].$$

由于两个项都是值，只需证明它们在 $\mathrm{V}_k^{\sim}$ È$A_i \to_{\sigma_A} A_o$É 中相关。因此，Let$k' \le k$且 Let $(V^l, V^r) \in \mathrm{V}_{k'}^{\sim}$È$A_i$É。我们需要证明

$$(\langle\langle (A_i \to_{\sigma_A} A_o) \quad (A_i \to_{\sigma_A} A_o)\rangle V_1\rangle V^l, V_2\, V^r) \in \mathcal{E}_{k'}^{\sim}[\![\sigma_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_o]\!].$$

By anti-reduction, it suffices to show

$$(\langle A_o \quad A_o\rangle\langle \sigma_A \quad \sigma_A\rangle(V_1\, \langle A_i \quad A_i\rangle V^l), V_2\, V^r) \in \mathcal{E}_{k'}^{\sim}[\![\sigma_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_o]\!].$$

By the induction hypothesis (applied twice), it suffices to show

$$((V_1\, \langle A_i \quad A_i\rangle V^l), V_2\, V^r) \in \mathcal{E}_{k'}^{\sim}[\![\sigma_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_o]\!].$$

根据函数应用的健全性，只需证明 $(V_1, V_2) \in \mathrm{V}_{k'}^{\sim}$È$A_i \to_{\sigma_A} A_o$É 和 (h$A_i$ A_iiV^l, V^r) $\in \mathrm{E}_{k'}^{\sim}$È$\sigma_A$É$\mathrm{V}^{\sim}$È$A_i$É。前者由假设和向下封闭性（$k' \le k$）成立。后者由归纳假设成立，因为 V^l和 V^r是相关的。

(2) This is dual to the above.

(3)我们通过 Löb归纳（引理D.16）证明这一陈述。也就是说，假设对于所有$(M', N') \in (\blacktriangleright \mathrm{E}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}\sigma\acute{\mathrm{E}})_j(\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}})$，我们都有 $(\mathrm{h}\sigma \quad \sigma \mathrm{i} M', N') \in (\blacktriangleright \mathrm{E}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}\sigma\acute{\mathrm{E}})_j(\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}})$。令$(M, N) \in \mathrm{E}^{\sim}_j \grave{\mathrm{E}}\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$。我们需要证明$(\mathrm{h}\sigma \quad \sigma \mathrm{i} M, N) \in \mathrm{E}^{\sim}_j \grave{\mathrm{E}}\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$。根据单子绑定（引理D.18），结合 $E_1 = \mathrm{h}\sigma \quad \sigma \mathrm{i}\bullet$ 和 $E_2 = \bullet$，只需考虑以下情形。

– Let $k \le j$ and let $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}^{\sim}_k[\![A]\!]$. We need to show

$$(\langle \sigma \quad \sigma \rangle V_1, V_2) \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![c]\!].$$

根据操作语义，我们有 $\mathrm{h}\sigma \quad \sigma \mathrm{i} V_1 \mapsto^1 V_1$，因此根据反向归约，只需证明 $(V_1, V_2) \in \mathrm{E}^{\sim}_k \grave{\mathrm{E}}\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$，这由假设$(V_1, V_2) \in \mathrm{V}^{\sim}_k \grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$ 可得。

– Let $k \le j$ 并设 $\varepsilon @ c_\varepsilon \rightsquigarrow d_\varepsilon$ 是被 $\mathrm{h}\sigma \quad \sigma \mathrm{i}\bullet$ 捕获的效应——即 $\varepsilon @ c_\varepsilon \rightsquigarrow d_\varepsilon \in \sigma$。注意，由于 σ 是自反性推导，c_ε 和 d_ε 也都是自反性推导，即 $c^l_\varepsilon = c^r_\varepsilon$，$d_\varepsilon$ 同理。为简单起见，令 $C = c^l_\varepsilon$ 和 $D = d^l_\varepsilon$。

Let $V^l, V^r, E^l \# \varepsilon, E^r \# \varepsilon$ be as in the statement of Lemma D.18. We need to show

$$(\langle \sigma \quad \sigma \rangle E^l[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^l)], E^r[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^r)]) \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

According to the operational semantics, we have

$$\langle \sigma \quad \sigma \rangle E^l[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^l)] \mapsto^1 \mathtt{let}\ x = \langle D \quad D \rangle \mathtt{raise}\ \varepsilon(\langle C \quad C \rangle V^l)\ \mathtt{in}\ \langle \sigma \quad \sigma \rangle E^l[x]$$

So, by anti-reduction it suffices to show that

$$(\mathtt{let}\ x = \langle D \quad D \rangle \mathtt{raise}\ \varepsilon(\langle C \quad C \rangle V^l)\ \mathtt{in}\ \langle \sigma \quad \sigma \rangle E^l[x], E^r[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^r)]) \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

Let V'^l be the term to which $\langle C \quad C \rangle V^l$ steps. By anti-reduction, it suffices to show that

$$(\mathtt{let}\ x = \langle D \quad D \rangle \mathtt{raise}\ \varepsilon(V'^l)\ \mathtt{in}\ \langle \sigma \quad \sigma \rangle E^l[x], E^r[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^r)]) \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

上述项不会进行步进，因此只需证明它们在 $\mathrm{R}^{\sim}_k \grave{\mathrm{E}}\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$ 中相关。为此，我们首先证明 $(V'^l, V^r) \in (\blacktriangleright \mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}C\acute{\mathrm{E}})_k$。根据前向归约，足-以证明 $(\mathrm{h}C \quad C \mathrm{i} V^l, V^r) \in (\blacktriangleright \mathrm{E}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}C\acute{\mathrm{E}}\acute{\mathrm{E}})_k$。根据归纳假设，只需证明$(V^l, V^r) \in (\blacktriangleright \mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}C\acute{\mathrm{E}})_(k)$。

现在我们将展示♀♀♀♀♀♀

$$(x^l.(\mathtt{let}\ x = \langle D \quad D \rangle x^l\ \mathtt{in}\ \langle \sigma \quad \sigma \rangle E^l[x]),\ x^r.E^r[x^r]) \in (\blacktriangleright \mathcal{K}^{\sim}[\![D]\!])_k(\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!]).$$

Let $k' \leq k$ and let $(V_1, V_2) \in (\blacktriangleright \mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!])_{k'}$. We need to show

$$((\texttt{let } x = \langle D \quad D \rangle V_1 \texttt{ in } \langle \sigma \quad \sigma \rangle E^l[x]),\ E^r[V_2]) \in (\blacktriangleright \mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma]\!])_{k'}(\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!]).$$

Let V_1' be the value to which $\langle D \quad D \rangle V_1$ steps. By anti-reduction, it suffices to show

$$((\texttt{let } x = V_1' \texttt{ in } \langle \sigma \quad \sigma \rangle E^l[x]),\ E^r[V_2]) \in (\blacktriangleright \mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma]\!])_{k'}(\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!]),$$

and then since the let term steps, it suffices by anti-reduction again to show

$$(\langle \sigma \quad \sigma \rangle E^l[V_1'],\ E^r[V_2]) \in (\blacktriangleright \mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma]\!])_{k'}(\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!]),$$

By the Löb induction hypothesis, it suffices to show that

$$(E^l[V_1'], E^r[V_2]) \in (\blacktriangleright \mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma]\!])_{k'}(\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!])$$

By our assumption on E^l and E^r, it suffices to show

$$(V_1', V_2) \in (\blacktriangleright \mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!])_{k'}.$$

By forward reduction, it suffices to show

$$(\langle D \quad D \rangle V_1, V_2) \in (\blacktriangleright \mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!])_{k'}.$$

By the induction hypothesis for value types, it suffices to show

$$(V_1, V_2) \in (\blacktriangleright \mathcal{E}^{\sim}[\![A]\!])_{k'}.$$

这由假设可得。

(4) We again use Löb induction and monadic bind.
也就是说，假设对于所有 $(M', N') \in (\blacktriangleright \mathrm{E}^{\sim}[\![\sigma]\!])_j(\mathrm{V}^{\sim}[\![A]\!])$，我们都有 $(\mathrm{h}\sigma \quad \sigma \mathrm{i} M', N') \in (\blacktriangleright \mathrm{E}^{\sim}[\![\sigma]\!])_j(\mathrm{V}^{\sim}[\![A]\!])$。我们需要证明

$$(\langle \sigma \quad \sigma \rangle M, N) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!]$$

其中 $(M, N) \in \mathrm{E}^{\sim}_j[\![\sigma]\!]\mathrm{V}^{\sim}[\![A]\!]$. 我们再次使用单子绑定，并且如同先前的证明，相关值的情形平凡地成立，因为效应强制转换是值上的恒等。因此，只需展示相关 raise 操作的情形即可。即，Let $k \leq j$ 并且 Let $\varepsilon @ c_\varepsilon \rightsquigarrow d_\varepsilon$ 是一个被 $\mathrm{h}\sigma \quad \sigma \mathrm{i} \bullet$ 捕获的效应 – 即，$\varepsilon @ c_\varepsilon \rightsquigarrow d_\varepsilon \in \sigma$。如同先前的证明，由于 σ 是一个自反性推导，c_ε 和 d_ε 也是自反性推导，因此为简单起见，Let $C = c^l_\varepsilon = c^r_\varepsilon$ 和 $D = d^l_\varepsilon = d^r_\varepsilon$。

令 V^l, V^r, $E^l[\#\varepsilon]$, $E^r[\#\varepsilon]$ 与单子绑定引理的陈述中相同。我们需要证明

$$(\langle \sigma \quad \sigma \rangle E^l[\texttt{raise } \varepsilon(V^l)], E^r[\texttt{raise } \varepsilon(V^r)]) \in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

注意，由于 $\varepsilon \in \sigma$，向下强制转换不会失败。
证明的其余部分与前一个证明完全相同，只需将向上强制转换和向下强制转换互换。

- 复合性质：

(1) 我们需要证明 $(\mathsf{h}C \quad A\mathsf{i}M, \mathsf{h}C \quad B\mathsf{i}\mathsf{h}B \quad A\mathsf{i}N) \in \mathrm{E}_j^{\sim}\grave{\mathrm{E}}\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}C\acute{\mathrm{E}}$。根据单子绑定（引理 D.18），结合 $E_1 = \mathsf{h}C \quad A\mathsf{i}\bullet$ and $E_2 = \mathsf{h}C \quad B\mathsf{i}\mathsf{h}B \quad A\mathsf{i}\bullet$，只需证明以下内容：Let $k \le j$ 并令 $(V_1, V_2) \in \mathrm{V}_k^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$。我们将证明

$$(\langle C \quad A\rangle V_1, \langle C \quad B\rangle\langle B \quad A\rangle V_2) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![C]\!].$$

If $c \circ e = \mathtt{bool}$, then $c = e = \mathtt{bool}$, and we need to show

$$(\langle \mathtt{bool} \quad \mathtt{bool}\rangle V_1, \langle \mathtt{bool} \quad \mathtt{bool}\rangle\langle \mathtt{bool} \quad \mathtt{bool}\rangle V_2) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![\mathtt{bool}]\!].$$

根据反向归约，只需证明 $(V_1, V_2) \in \mathrm{V}_j^{\sim}\grave{\mathrm{E}}$布尔类型$\acute{\mathrm{E}}$，这由我们的假设可得。

现在假设 $c \circ e = (c_i \circ e_i) \to_{(c_\sigma \circ e_\sigma)} (c_o \circ e_o)$。我们需要证明

$$\begin{aligned}&(\langle(C_i \to_{\sigma_C} C_o) \quad (A_i \to_{\sigma_A} A_o)\rangle V_1,\\ &\langle(C_i \to_{\sigma_C} C_o) \quad (B_i \to_{\sigma_B} B_o)\rangle\langle(B_i \to_{\sigma_B} B_o) \quad (A_i \to_{\sigma_A} A_o)\rangle V_2)\\ &\qquad \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![C_i \to_{\sigma_C} C_o]\!].\end{aligned}$$

两项都是值，因此只需证明它们在 $\mathrm{V}_k^{\sim}\grave{\mathrm{E}}C_i \to_{\sigma_C} C_o\acute{\mathrm{E}}$ 中相关。Let$k' \le k$并令 $(V^l, V^r) \in \mathrm{V}_{k'}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}C_i\acute{\mathrm{E}}$。我们需要证明

$$\begin{aligned}&((\langle(C_i \to_{\sigma_C} C_o) \quad (A_i \to_{\sigma_A} A_o)\rangle V_1)\, V^l,\\ &(\langle(C_i \to_{\sigma_C} C_o) \quad (B_i \to_{\sigma_B} B_o)\rangle\langle(B_i \to_{\sigma_B} B_o) \quad (A_i \to_{\sigma_A} A_o)\rangle V_2)\, V^r)\\ &\qquad \in \mathcal{E}_{k'}^{\sim}[\![\sigma_C]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![C_o]\!].\end{aligned}$$

By anti-reduction, it suffices to show

$$\begin{aligned}&(\langle C_o \quad A_o\rangle\langle\sigma_C \quad \sigma_A\rangle(V_1\, \langle A_i \quad C_i\rangle V^l),\\ &\langle C_o \quad B_o\rangle\langle\sigma_C \quad \sigma_B\rangle\\ &\qquad ((\langle(B_i \to_{\sigma_B} B_o) \quad (A_i \to_{\sigma_A} A_o)\rangle V_2)\, \langle B_i \quad C_i\rangle V^r))\\ &\qquad\qquad \in \mathcal{E}_{k'}^{\sim}[\![\sigma_C]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![C_o]\!].\end{aligned}$$

Let V'' be the value to which $\langle B_i \quad C_i\rangle V^r$ steps. By anti-reduction, it suffices to show

$$\begin{aligned}&(\langle C_o \quad A_o\rangle\langle\sigma_C \quad \sigma_A\rangle(V_1\, \langle A_i \quad C_i\rangle V^l),\\ &\langle C_o \quad B_o\rangle\langle\sigma_C \quad \sigma_B\rangle\\ &\qquad ((\langle(B_i \to_{\sigma_B} B_o) \quad (A_i \to_{\sigma_A} A_o)\rangle V_2)\, V''))\\ &\qquad\qquad \in \mathcal{E}_{k'}^{\sim}[\![\sigma_C]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![C_o]\!].\end{aligned}$$

By anti-reduction again, it suffices to show

$$\begin{aligned}&(\langle C_o \quad A_o\rangle\langle\sigma_C \quad \sigma_A\rangle(V_1\, \langle A_i \quad C_i\rangle V^l),\\ &\langle C_o \quad B_o\rangle\langle\sigma_C \quad \sigma_B\rangle\\ &\qquad (\langle B_o \quad A_o\rangle\langle\sigma_B \quad \sigma_A\rangle(V_2\, \langle A_i \quad B_i\rangle V'')))\\ &\qquad\qquad \in \mathcal{E}_{k'}^{\sim}[\![\sigma_C]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![C_o]\!].\end{aligned}$$

We will appeal to transitivity (Lemma D.66). We continue by cases on $\sim$.
– First suppose $\sim = <$. We first claim that

$$\begin{array}{l}(\langle C_o \quad A_o\rangle\langle \sigma_C \quad \sigma_A\rangle(V_1\,\langle A_i \quad C_i\rangle V^l),\\ \langle C_o \quad B_o\rangle\langle B_o \quad A_o\rangle\\ \qquad (\langle \sigma_C \quad \sigma_B\rangle\langle \sigma_B \quad \sigma_A\rangle(V_2\,\langle A_i \quad B_i\rangle V'^r)))\\ \qquad\qquad \in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![\sigma_C]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![C_o]\!].\end{array}$$

By the induction hypothesis applied twice, it suffices to show

$$\begin{array}{l}((V_1\,\langle A_i \quad C_i\rangle V^l), (V_2\,\langle A_i \quad B_i\rangle V'^r))\\ \qquad \in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![\sigma_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_o]\!].\end{array}$$

根据函数应用的可靠性，只需证明 $(V_1, V_2) \in \mathrm{V}^{\sim}_{k'}\grave{\mathrm{E}}A_i \to_{\sigma_A} A_o\acute{\mathrm{E}}$ 以及

$$(\langle A_i \quad C_i\rangle V^l, \langle A_i \quad B_i\rangle V'^r) \in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_i]\!].$$

The former holds by assumption and downward closure. To show the latter, it suffices by forward reduction to show that

$$(\langle A_i \quad C_i\rangle V^l, \langle A_i \quad B_i\rangle\langle B_i \quad C_i\rangle V^r) \in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_i]\!].$$

Now, by the induction hypothesis, it suffices to show that

$$(V^l, V^r) \in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![C_i]\!],$$

which follows from our assumption.
Now by transitivity, it will suffice to show

$$\begin{array}{l}(\langle C_o \quad B_o\rangle\langle B_o \quad A_o\rangle\\ \qquad (\langle \sigma_C \quad \sigma_B\rangle\langle \sigma_B \quad \sigma_A\rangle(V_2\,\langle A_i \quad B_i\rangle V'^r)),\\ \langle C_o \quad B_o\rangle\langle \sigma_C \quad \sigma_B\rangle\\ \qquad (\langle B_o \quad A_o\rangle\langle \sigma_B \quad \sigma_A\rangle(V_2\,\langle A_i \quad B_i\rangle V'^r)))\\ \qquad\qquad \in \mathcal{E}^{\geq}_{\omega}[\![\sigma_C]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![C_o]\!].\end{array}$$

根据自反性（推论 D.30），我们有 $\langle B_o \quad A_o\rangle\langle \sigma_C \quad \sigma_B\rangle\langle \sigma_B \quad \sigma_A\rangle(V_2\,\langle A_i B_i\rangle V'^r)$ 与其自身相关。然后根据类型转换的交换性（推论 D.63），我们可以交换 $\langle B_o \quad A_o\rangle$ 和 $\langle \sigma_C \quad \sigma_B\rangle$ 的顺序，所得项彼此相关。最后，根据强制转换的单调性（引理 D.65），我们可以应用 $\langle C_o \quad B_o\rangle$，所得项仍然相关。此外，所有这些关系都在"at ω"下成立。

– Now suppose $\sim = >$. By similar reasoning as in the previous case, we have

$$(\langle C_o \quad A_o\rangle\langle\sigma_C \quad \sigma_A\rangle(V_1\,\langle A_i \quad C_i\rangle V^l),$$
$$\langle C_o \quad B_o\rangle\langle B_o \quad A_o\rangle$$
$$(\langle\sigma_C \quad \sigma_B\rangle\langle\sigma_B \quad \sigma_A\rangle(V_2\,\langle A_i \quad B_i\rangle V^l)))$$
$$\in \mathcal{E}^{\sim}_{\omega}[\![\sigma_C]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![C_o]\!].$$

Thus, by transitivity it will suffice to show

$$(\langle C_o \quad B_o\rangle\langle B_o \quad A_o\rangle$$
$$(\langle\sigma_C \quad \sigma_B\rangle\langle\sigma_B \quad \sigma_A\rangle(V_2\,\langle A_i \quad B_i\rangle V^l)),$$
$$\langle C_o \quad B_o\rangle\langle\sigma_C \quad \sigma_B\rangle$$
$$(\langle B_o \quad A_o\rangle\langle\sigma_B \quad \sigma_A\rangle(V_2\,\langle A_i \quad B_i\rangle V'^r)))$$
$$\in \mathcal{E}^{\geq}_{k'}[\![\sigma_C]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![C_o]\!].$$

推理过程与前一种情形类似。

(2) 这与上文互为对偶。(3) 我们通过 Löb归纳（引理 D.16）证明此陈述。也就是说，假设对于所有 $(M', \quad N')$ $\in(\blacktriangleright\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma]\!])_j(\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!])$，我们有

$$(\langle\sigma'' \quad \sigma\rangle M, \langle\sigma'' \quad \sigma'\rangle\langle\sigma' \quad \sigma\rangle N) \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma'']\!])_j(\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!]).$$

令 $(M, \quad N)$ $\in \mathrm{E}^{\sim}_j$ÈσÉV˜ÈAÉ。我们需要证明

$$(\langle\sigma'' \quad \sigma\rangle M, \langle\sigma'' \quad \sigma'\rangle\langle\sigma' \quad \sigma\rangle N) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![\sigma'']\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

根据单子绑定（引理 D.18），给定 $E_1 = \mathrm{h}\sigma'' \quad \sigma\mathrm{i}\bullet$ 和 $E_2 = \mathrm{h}\sigma'' \quad \sigma'\mathrm{ih}\sigma' \quad \sigma\mathrm{i}\bullet$，只需考虑以下情形：

– 设 $k \leq j$，并设 (V_1, V_2) $\in \mathrm{V}^{\sim}_k$ ÈAÉ。我们需要证明

$$(\langle\sigma'' \quad \sigma\rangle V_1, \langle\sigma'' \quad \sigma'\rangle\langle\sigma' \quad \sigma\rangle V_2) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![\sigma'']\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

由于效应转换在值上是恒等的，以上结论可通过反向归约立即得出。

– 设 $k \leq j$，并设 $\varepsilon@c_\varepsilon \rightsquigarrow d_\varepsilon \in \sigma$ 是被 E_1 或 E_2 捕获的效应。注意，由于σ 是自反性推导，c_ε 和 d_ε 也都是自反性推导，即 $c^l_\varepsilon = c^r_\varepsilon$，$d_\varepsilon$ 也同理。为简便起见，设 $C^L = c^l_\varepsilon$ 和 $D^L = d^l_\varepsilon$。

设 $V^l, V^r, E^l\#\varepsilon, E^r\#\varepsilon$ 如单子绑定引理的陈述所述。我们需要证明

$$(\langle\sigma'' \quad \sigma\rangle E^l[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^l)],$$
$$\langle\sigma'' \quad \sigma'\rangle\langle\sigma' \quad \sigma\rangle E^r[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^r)])$$
$$\in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma'']\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

设 C^M和 D^M 是满足 $\varepsilon@C^M \rightsquigarrow D^M \in \sigma'$ 的类型，设 C^R和 D^R 是满足 $\varepsilon@C^R \rightsquigarrow D^R \in \sigma''$ 的类型。由反向归约，只需证明

$$(\texttt{let } x = \langle D^L \quad D^R\rangle \texttt{raise } \varepsilon(\langle C^R \quad C^L\rangle V^l) \texttt{ in } \langle \sigma'' \quad \sigma\rangle E^l[x],$$
$$\langle \sigma'' \quad \sigma'\rangle(\texttt{let } x = \langle D^L \quad D^M\rangle \texttt{raise } \varepsilon(\langle C^M \quad C^L\rangle V^r) \texttt{ in } \langle \sigma' \quad \sigma\rangle E^r[x]))$$
$$\in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma'']\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

Let V^l是 h$C^R \quad C^L$iV^l经过若干步归约后得到的值，设经过 i 步。Let V^r是 h $C^M \quad C^L$iV^r 经过若干步归约后得到的值，设经过 j 步。根据反向归约，只需证明

$$(\texttt{let } x = \langle D^L \quad D^R\rangle \texttt{raise } \varepsilon(V'^l) \texttt{ in } \langle \sigma'' \quad \sigma\rangle E^l[x],$$
$$\langle \sigma'' \quad \sigma'\rangle(\texttt{let } x = \langle D^L \quad D^M\rangle \texttt{raise } \varepsilon(V''^r) \texttt{ in } \langle \sigma' \quad \sigma\rangle E^r[x]))$$
$$\in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma'']\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

现在（在 EffUpCast 规则中取 $E' =$let $x =$h$D^L \quad D^M$i $\bullet$in hσ,σi$E^r[x]$in），根据反向归约，只需证明

$$(\texttt{let } x = \langle D^L \quad D^R\rangle \texttt{raise } \varepsilon(V'^l) \texttt{ in } \langle \sigma'' \quad \sigma\rangle E^l[x],$$
$$\texttt{let } y = \langle D^M \quad D^R\rangle \texttt{raise } \varepsilon(\langle C^R \quad C^M\rangle V''^r) \texttt{ in}$$
$$\langle \sigma'' \quad \sigma'\rangle(\texttt{let } x = \langle D^L \quad D^M\rangle y \texttt{ in } \langle \sigma' \quad \sigma\rangle E^r[x]))$$
$$\in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma'']\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

Let V'''^r be the value to which $\langle C^R \quad C^M\rangle V''^r$ steps. By anti-reduction, it suffices to show

$$(\texttt{let } x = \langle D^L \quad D^R\rangle \texttt{raise } \varepsilon(V'^l) \texttt{ in } \langle \sigma'' \quad \sigma\rangle E^l[x],$$
$$\texttt{let } y = \langle D^M \quad D^R\rangle \texttt{raise } \varepsilon(V'''^r) \texttt{ in}$$
$$\langle \sigma'' \quad \sigma'\rangle(\texttt{let } x = \langle D^L \quad D^M\rangle y \texttt{ in } \langle \sigma' \quad \sigma\rangle E^r[x]))$$
$$\in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma'']\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

由于两个项都不规约，我们将证明它们属于 $\mathrm{R}^{\sim}_k$ Èσ''ÉV$^{\sim}$ÈAÉ。我们首先需要证明

$$(V'^l, V'''^r) \in (\blacktriangleright\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!])_k.$$

By forward-reduction, it suffices to show that

$$(\langle C^R \quad C^L\rangle V^l, \langle C^R \quad C^M\rangle\langle C^M \quad C^L\rangle V^r) \in (\blacktriangleright\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!])_k.$$

By the induction hypothesis for value types, it suffices to show that $(V^l, V^r) \in (\blacktriangleright\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!])_k$, which is true by assumption.
现在我们需要证明，对于所有 $k' \le k$和相关值 $(V_1, V_2) \in$ ($\blacktriangleright$V$^{\sim}$ÈAÉ)$_{k'}$, 我们有

$$(\texttt{let } x = \langle D^L \quad D^R\rangle V_1 \texttt{ in } \langle \sigma'' \quad \sigma\rangle E^l[x],$$
$$\texttt{let } y = \langle D^M \quad D^R\rangle V_2 \texttt{ in}$$
$$\langle \sigma'' \quad \sigma'\rangle(\texttt{let } x = \langle D^L \quad D^M\rangle y \texttt{ in } \langle \sigma' \quad \sigma\rangle E^r[x]))$$
$$\in (\blacktriangleright\mathcal{E}^\sim[\![\sigma'']\!])_{k'}(\mathcal{V}^\sim[\![A]\!]).$$

Let V_1 和 V_2 分别是 $\mathrm{h}D^L \quad D^R\mathrm{i}V_1$ 和 $\mathrm{h}D^M \quad D^R\mathrm{i}V_2$ 归约到的值。根据反向归约，只需证明

$$(\langle \sigma'' \quad \sigma\rangle E^l[V_1'],$$
$$\langle \sigma'' \quad \sigma'\rangle(\texttt{let } x = \langle D^L \quad D^M\rangle V_2' \texttt{ in } \langle \sigma' \quad \sigma\rangle E^r[x]))$$
$$\in (\blacktriangleright\mathcal{E}^\sim[\![\sigma'']\!])_{k'}(\mathcal{V}^\sim[\![A]\!]).$$

Let V_2'' be the value to which $\langle D^L \quad D^M\rangle V_2'$ steps. By anti-reduction, it will suffice to show

$$(\langle \sigma'' \quad \sigma\rangle E^l[V_1'],$$
$$\langle \sigma'' \quad \sigma'\rangle(\langle \sigma' \quad \sigma\rangle E^r[V_2'']))$$
$$\in (\blacktriangleright\mathcal{E}^\sim[\![\sigma'']\!])_{k'}(\mathcal{V}^\sim[\![A]\!]).$$

Now by the Löb induction hypothesis, it suffices to show

$$(E^l[V_1'], E^r[V_2'']) \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^\sim[\![\sigma'']\!])_{k'}(\mathcal{V}^\sim[\![A]\!]).$$

By assumption on E^l and E^r, it suffices to show

$$(V_1', V_2'') \in (\blacktriangleright\mathcal{V}^\sim[\![A]\!])_{k'}.$$

Now by forward reduction it suffices to show

$$(\langle D^L \quad D^R\rangle V_1, \langle D^L \quad D^M\rangle\langle D^M \quad D^R\rangle V_2) \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^\sim[\![\sigma'']\!])_{k'}(\mathcal{V}^\sim[\![A]\!]).$$

This follows by the inductive hypothesis for value types and our assumption on V_1 and V_2.

(4) This is dual to the above: we use Löb induction and monadic bind, and we reach a point where we need to show

$$(\langle \sigma \quad \sigma''\rangle E^l[\texttt{raise } \varepsilon(V^l)],$$
$$\langle \sigma' \quad \sigma''\rangle\langle \sigma \quad \sigma'\rangle E^r[\texttt{raise } \varepsilon(V^r)])$$
$$\in \mathcal{E}_k^\sim[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^\sim[\![A]\!].$$

where $\varepsilon@C^R \rightsquigarrow D^R \in \sigma''$.
如果 $\varepsilon \notin \sigma$，则左侧规约为 $\mho$，右侧也同样如此。根据ErrBot（引理D.47），$\mho$ 与自身相关，因此根据反向归约，我们就完成了。如果 $\varepsilon \notin \sigma'$，那么实际上，$\varepsilon \notin \sigma$（因为$\sigma \sqsubseteq \sigma'$），所以同样地，两侧都规约为 $\mho$。

Otherwise, we proceed as in the proof of the previous case, with the upcasts and downcasts interchanged.

□

引理 D.65（强制转换的单调性）。*Let* $c\colon A \sqsubseteq B$，并且 $d_\sigma\colon \sigma \sqsubseteq \sigma'$，并令 M 和 N 为项，使得 $\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_\sigma M \sqsubseteq N\colon A$。以下结论成立：

(1) $\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_\sigma \mathrm{h}B \quad A\mathrm{i}M \sqsubseteq \mathrm{h}B \quad A\mathrm{i}N\colon B$*(2)*

$\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_\sigma \mathrm{h}A \quad B\mathrm{i}M \sqsubseteq \mathrm{h}A \quad B\mathrm{i}N\colon A$*(3)*

$\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_{\sigma'} \mathrm{h}\sigma'\ \sigma\mathrm{i}M \sqsubseteq \mathrm{h}\sigma'\ \sigma\mathrm{i}N\colon A$*(4)* $\Sigma \mid \Gamma^{\sqsubseteq} \vDash_\sigma \mathrm{h}\sigma\ \sigma'\mathrm{i}M \sqsubseteq \mathrm{h}\sigma\ \sigma'\mathrm{i}N\colon A$

证明。与强制转换的函子性的证明一样，我们证明上述命题更强的"逐点"版本，即假设 $(M,\ N) \in \mathrm{E}_j^{\sim}\grave{\mathrm{E}}\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$，并证明，例如，$(\mathrm{h}B \quad A\mathrm{i}M,\ \mathrm{h}B \quad A\mathrm{i}N) \in \mathrm{E}_j^{\sim}\grave{\mathrm{E}}\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}B\acute{\mathrm{E}}$。

证明对 c and d_σ 使用归纳法。

(1) 我们需要证明

$$(\langle B \quad A\rangle M, \langle B \quad A\rangle N) \in \mathcal{E}_j^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!].$$

By 单子绑定（引理 D.18），由 $E_1 = E_2 = \langle B \quad A\rangle\bullet$，只需证明 t

$$(\langle B \quad A\rangle V_1, \langle B \quad A\rangle V_2) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B]\!],$$

其中 $k \le j$ and 令 $(V_1,\ V_2) \in \mathrm{V}_k^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$。

如果 $c =$ 是布尔类型，那么我们需要证明

$$(\langle \mathtt{bool} \quad \mathtt{bool}\rangle V_1, \langle \mathtt{bool} \quad \mathtt{bool}\rangle V_2) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![\mathtt{bool}]\!].$$

根据反向归约，只需证明 $(V_1, V_2) \in \mathrm{E}_k^{\sim}\grave{\mathrm{E}}\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}$布尔类型$\acute{\mathrm{E}}$，这由我们的假设得出。

If $c = c_i \to_{c_\sigma} c_o$, then we need to show

$$(\langle (B_i \to_{\sigma_B} B_o) \quad (A_i \to_{\sigma_A} A_o)\rangle V_1,\ \langle (B_i \to_{\sigma_B} B_o) \quad (A_i \to_{\sigma_A} A_o)\rangle V_2) \in \mathcal{E}_k^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B_i \to_{\sigma_B} B_o]\!].$$

由于两个项都是值，只需证明它们在 $\mathrm{V}_k^{\sim}\grave{\mathrm{E}}B_i \to_{\sigma_B} B_o\acute{\mathrm{E}}$中相关。Let$k' \le k$，并令 $(V^l,\ V^r) \in \mathrm{K}_{k'}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}B_i\acute{\mathrm{E}}$。我们需要证明

$$(\langle\langle (B_i \to_{\sigma_B} B_o) \quad (A_i \to_{\sigma_A} A_o)\rangle V_1\rangle\ V^l,\ \langle\langle (B_i \to_{\sigma_B} B_o) \quad (A_i \to_{\sigma_A} A_o)\rangle V_2\rangle\ V^r) \in \mathcal{E}_{k'}^{\sim}[\![\sigma_B]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B_o]\!].$$

By anti-reduction, it suffices to show

$$(\langle B_o \quad A_o\rangle\langle \sigma_B \quad \sigma_A\rangle(V_1\ \langle A_i \quad B_i\rangle V^l),\ \langle B_o \quad A_o\rangle\langle \sigma_B \quad \sigma_A\rangle(V_2\ \langle A_i \quad B_i\rangle V^r)) \in \mathcal{E}_{k'}^{\sim}[\![\sigma_B]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![B_o]\!].$$

By the inductive hypothesis applied twice, it suffices to show

$$((V_1\ \langle A_i \quad B_i\rangle V^l), (V_2\ \langle A_i \quad B_i\rangle V^r)) \in \mathcal{E}^{\sim}_{k'}[\![\sigma_A]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A_o]\!].$$

根据函数应用的可靠性，只需证明 $(V_1, V_2) \in \mathrm{V}^{\sim}_{k'}[\![A_i \to_{\sigma_A} A_o]\!]$ 以及 $(\mathrm{h}A_i \quad B_i\mathrm{i}V^l, \mathrm{h}A_i \quad B_i\mathrm{i}V^r) \in \mathrm{E}^{\sim}_{k'}[\![\sigma]\!]\mathrm{V}^{\sim}[\![A_i]\!]$。前者根据我们关于 V_1 和 V_2的假设成立。要证明后者，根据归纳假设，只需证明$(V^l, V^r) \in \mathrm{E}^{\sim}_{k'}[\![\sigma]\!]\mathrm{V}^{\sim}[\![B_i]\!]$，这由我们的假设推出。

(2) 这与上述内容互为对偶。(3) 这与下述内容互为对偶，事实上更简单，因为这些是向上强制转换。(4) 我们通过 Löb归纳（引理 D.16）证明此陈述。也就是说，假设对于所有 $(M', N') \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma']\!])_j(\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!])$，我们有

$$(\langle\sigma \quad \sigma'\rangle M, \langle\sigma \quad \sigma'\rangle N) \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma]\!])_j(\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!]).$$

Let $(M, N) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![\sigma']\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!]$. We need to show

$$(\langle\sigma \quad \sigma'\rangle M, \langle\sigma \quad \sigma'\rangle N) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

By monadic bind (Lemma D.18), it will suffice to consider the following two cases:

- Let $k \le j$ and let $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}^{\sim}_k[\![A]\!]$. We need to show that

$$(\langle\sigma \quad \sigma'\rangle V_1, \langle\sigma \quad \sigma'\rangle V_2) \in \mathcal{E}^{\sim}_j[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

  Since the effect cast is the identity on values, the above follows immediately by anti-reduction.
- Let $k \le j$and let $\varepsilon@c_\varepsilon \rightsquigarrow d_\varepsilon \in \sigma'$是一个被h$\sigma \quad \sigma'$i•捕获的效应。回忆起 σ'是自反性推导 $\sigma' \sqsubseteq \sigma'$的简写，我们有 c_ε和 d_ε本身就是自反性（类型精度）推导；为简洁起见，我们将类型称为 C 和 D。

令 $(V^l, \ V^r) \in (\blacktriangleright\mathrm{V}^{\sim}[\![C]\!])_k$，并且令 $E^l\#\varepsilon, \ E^r\#\varepsilon$ 满足条件：

$$(x^l.E^l[x^l], x^r.E^r[x^r]) \in (\blacktriangleright\mathcal{K}^{\sim}[\![D]\!])_k(\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!]).$$

我们需要证明

$$\begin{aligned}(&\langle\sigma \quad \sigma'\rangle E^l[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^l)],\\ &\langle\sigma \quad \sigma'\rangle E^r[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V^r)])\\ &\in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].\end{aligned}$$

首先，如果 $\varepsilon \notin \sigma$，那么两边都归约为 $\mathfrak{V}$，由于 $\mathfrak{V}$ 通过 ErrBot 与自身相关（引理 D.47），我们借助反向归约即可完成证明。
Otherwise, by anti-reduction, it suffices to show

$$\begin{aligned}(&\mathtt{let}\ x = \langle D \quad D\rangle\mathtt{raise}\ \varepsilon(\langle C \quad C\rangle V^l)\ \mathtt{in}\ \langle\sigma \quad \sigma'\rangle E^l[x],\\ &\mathtt{let}\ x = \langle D \quad D\rangle\mathtt{raise}\ \varepsilon(\langle C \quad C\rangle V^r)\ \mathtt{in}\ \langle\sigma \quad \sigma'\rangle E^r[x])\\ &\in (\blacktriangleright\mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma]\!])_k(\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!]).\end{aligned}$$

通过 th e soundness of the term precision congruence rule for let, it suffices to show that (1)

$$(\langle D \quad D\rangle \texttt{raise}\ \varepsilon(\langle C \quad C\rangle V^l),$$
$$\langle D \quad D\rangle \texttt{raise}\ \varepsilon(\langle C \quad C\rangle V^r))$$
$$\in (\blacktriangleright \mathcal{E}^{\sim}[\![\sigma]\!])_k(\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!]).$$

and (2) for all related $(V_1, V_2) \in (\blacktriangleright \mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!])$, we have

$$(\langle \sigma \quad \sigma'\rangle E^l[V_1], \langle \sigma \quad \sigma'\rangle E^r[V_2])$$
$$\in \mathcal{E}^{\sim}_k[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\sim}[\![A]\!].$$

□

D.1.5 传递性。 我们引入以下记号。我们定义 $(M_1, M_2) \in R_\omega$ 表示对于所有自然数 k，$(M_1, M_2) \in R_k$。

现在我们陈述并证明一个"混合传递性"引理，其中我们允许假设中的两个关系之一出现在"适当"的精度推导中，而另一个则被约束为出现在自反性推导中。

引理 D.66（混合传递性，项）。 如果 *(1)* $(M_1, M_2) \in \mathrm{E}^{\geq}_{\omega}$È$\sigma$É$\mathcal{V}^{\geq}$È$A$É 且 *(2)* $(M_2, M_3) \in \mathrm{E}^{\geq}_{j}$È$d_\sigma$É$\mathcal{V}^{\geq}$È$c$É，则 $(M_1, M_3) \in \mathrm{E}^{\geq}_{j}$È$d_\sigma$É$\mathcal{V}^{\geq}$È$c$É。
Similarly, if $(M_1, M_2) \in \mathcal{E}$ÆÈ$d_\sigma$É$\mathcal{V}^{\leq}$È$c$É 和 $(M_2, M_3) \in \mathrm{E}^{\leq}_{\omega}$È$\sigma$É$\mathcal{V}^{\leq}$È$A$É，然后 $(M_1, M_3) \in \mathrm{E}^{\leq}_{j}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\leq}[\![c]\!]$.

证明。该结论与下面关于结果和值的传递性的两个引理同时证明。我们为 ~=> 证明该引理；另一种情形类似。

证明采用Löb归纳（引理D.16）。也就是说，假设对于所有 M_1'、M_2'和 M_3'，如果$(M_1', M_2') \in (\blacktriangleright \mathrm{E}^{\geq}$È$\sigma$É$)_\omega(\mathrm{V}^{\geq}$È$A$É$)$ 且(M_2', M_3') $\in (\blacktriangleright \mathrm{E}^{\geq}$È$d_\sigma$É$)_j(\mathrm{V}^{\geq}$È$c$É$)$，那么$(M_1', M_3')$ $\in (\blacktriangleright \mathrm{E}^{\geq}$È$d_\sigma$É$)_j(\mathrm{V}^{\geq}$È
We proceed by considering cases on the assumption that $(M_2, M_3) \in \mathcal{E}^{\geq}_{j}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\geq}[\![c]\!]$.

在第一种情形中，$M_3 \mapsto^{j+1}$。那么我们立即得到 $(M_1, M_3) \in \mathrm{E}^{\geq}_{j}$È$d_\sigma$É$\mathcal{V}^{\geq}$È$c$É，这是通过第一个析取项得到的。

在第二种情形中，存在 $k \leq j$ 使得 $M_3 \mapsto^{j-k} \mathrm{U}$ 和 $M_2 \mapsto^{s} \mathrm{U}$，经过若干步 s。根据假设 (1)，我们有 $(M_1, M_2) \in \mathrm{E}^{\geq}_{s}$È$\sigma$É$\mathcal{V}^{\geq}$È$A$É。通过逆向分析，我们看到第二个析取项必定为真（其中 $k = 0$）。这尤其意味着 $M_1 \mapsto^{*} \mathrm{U}$。因此，我们可以使用第二个析取项得出结论：$(M_1, M_3) \in \mathrm{E}^{\geq}_{j}$È$d_\sigma$É$\mathcal{V}^{\geq}$È$c$É。

在第三种情形中，存在 $k \leq j$ 和 N_3 使得 $M_3 \mapsto^{j-k} N_3$，以及 $M_2 \mapsto^{s} \mathrm{U}$，对于某步数 s。通过与前一种情形类似的推理，我们可以使用第三个析取项得出$(M_1, M_3) \in \mathrm{E}^{\geq}_{j}$È$d_\sigma$É$\mathcal{V}^{\geq}$È$c$É。

最后，在第四种情形中，存在 $k \leq j$和$(N_2, N_3) \in \mathrm{R}^{\geq}_{k}$È$d_\sigma$É$\mathcal{V}^{\geq}$È$c$É使得 $M_2 \mapsto^{s} N_2$对于某个 s，以及 $M_3 \mapsto^{j-k} N_3$。根据假设(1)，我们有$(M_1, M_2) \in \mathrm{E}^{\geq}_{s+i}$È$\sigma$É$\mathcal{V}^{\geq}$È$A$É对所有$i \in \mathbb{N}$成立。通过逆向分析，我们看到第三个或第四个析取项为真，在两种情形中都有 $k = i$（注意$(s + i) - i = s$，这正是 M_2 到达 N_2所采取的步数）。

在前一种情形中，我们有 $M_1 \mapsto^{*} \mathrm{U}$，然后可以通过断言第三个析取项来完成。在后一种情形中，存在 N_1 使得 $M_1 \mapsto^{*} N_1$ 且 $(N_1, N_2) \in \mathrm{R}^{\geq}_{i}$È$\sigma$É$\mathcal{V}^{\geq}$È$A$É。由于 i是任意的，这告诉我们 $(N_1, N_2) \in \mathrm{R}^{\geq}_{\omega}$È$\sigma$É$\mathcal{V}^{\geq}$È$A$É。回顾一下，我们有 $(N_1, N_2) \in \mathrm{R}^{\geq}_{\omega}$È$\sigma$É$\mathcal{V}^{\geq}$È$A$É，以及 $(N_2, N_3) \in \mathrm{R}^{\geq}_{k}$È$d_\sigma$É$\mathcal{V}^{\geq}$È$c$É，对于某个 $k \leq j$。我们想要证明 $(N_1, N_3) \in \mathrm{R}^{\geq}_{k}$È$d_\sigma$É$\mathcal{V}^{\geq}$È$c$É。

这由引理D.68得出。

□

引理 D.67（混合传递性，值）。若$(V_1,\ V_2)\ \in \mathrm{V}_{\omega}^{\geq}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$ 且$(V_2,\ V_3)\ \in \mathrm{V}_{j}^{\geq}\grave{\mathrm{E}}c\acute{\mathrm{E}}$，则$(V_1,\ V_3)\mathrm{V}_{j}^{\geq}\grave{\mathrm{E}}c\acute{\mathrm{E}}$。

同样地，如果$(V_1, V_2)\ \in \mathcal{V}_{j}^{\leq}[\![c]\!]$ 且$(V_2, V_3)\ \in \mathcal{V}_{\omega}^{\leq}[\![A]\!]$，那么$(V_1, V_3)\mathcal{V}_{j}^{\leq}[\![c]\!]$。

证明。与项的齐次传递性（引理 D.66）以及结果的齐次传递性（引理 D.68同时证明。证明通过对类型精度推导 c进行归纳法。我们只证明第一个陈述；另一个陈述的证明类似。

- 情形 $c =$ 布尔类型。然后我们有 $V_1 = V_2 = V_3$，并且要么全部为真，要么全部为假。在任一情形下，V_1 都与 V_3相关。
- 情形 $c = c_i \to_{c_\sigma} c_o$。那么 $A = A_i \to_{\sigma_A} A_o$和 $B = B_i \to_{\sigma_B} B_o$。我们有 $(V_1,\ V_2)\ \in \mathrm{V}_{\omega}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}A_i \to_{\sigma_A} A_o\acute{\mathrm{E}}$ 和 $(V_2, V_3)\ \in \mathrm{V}_{k}^{\sim}\grave{\mathrm{E}}c_i \to_{c_\sigma} c_o\acute{\mathrm{E}}$。我们需要证明

$$(V_1, V_3) \in \mathcal{V}_{j}^{\geq}[\![c_i \to_{c_\sigma} c_o]\!].$$

令 $k \leq j$，并令 $(V^l,\ V^r)\ \in \mathrm{V}_{k}^{\geq}\grave{\mathrm{E}}c_i\acute{\mathrm{E}}$。我们需要证明

$$(V_1\, V^l, V_3\, V^r) \in \mathcal{E}_{k}^{\geq}[\![c_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\geq}[\![c_o]\!].$$

根据自反性（D.30），我们知道 $(V^l,\ V^l)\ \in \mathcal{V}_{\omega}^{\geq}[\![A_i]\!]$。

根据关于 $(V_1,\ V_2)$ 的假设，可得

$$(V_1\, V^l, V_2\, V^l) \in \mathcal{E}_{\omega}^{\geq}[\![\sigma_A]\!]\mathcal{V}^{\geq}[\![A_o]\!].$$

根据关于 $(V_2,\ V_3)$ 的假设，我们有

$$(V_2\, V^l, V_3\, V^r) \in \mathcal{E}_{k}^{\geq}[\![c_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\geq}[\![c_o]\!].$$

现在应用归纳假设（引理 D.66），从而得到

$$(V_1\, V^l, V_3\, V^r) \in \mathcal{E}_{k}^{\geq}[\![c_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\geq}[\![c_o]\!],$$

正如所需。

□

引理 D.68（混合传递性，结果）。若 (1) $(N_1, N_2)\ \in \mathrm{R}_{\omega}^{\geq}\grave{\mathrm{E}}\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\geq}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$ 且 (2) $(N_2, N_3)\ \in \mathrm{R}_{j}^{\geq}\grave{\mathrm{E}}d_\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\geq}\grave{\mathrm{E}}c\acute{\mathrm{E}}$，则$(N_1, N_3)\ \in \mathrm{R}_{j}^{\geq}\grave{\mathrm{E}}d_\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\geq}\grave{\mathrm{E}}c\acute{\mathrm{E}}$。

同样，若$(N_1, N_2)\ \in \mathrm{R}_{j}^{\leq}\grave{\mathrm{E}}d_\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\leq}\grave{\mathrm{E}}c\acute{\mathrm{E}}$ 且$(N_2, N_3)\ \in \mathrm{R}_{\omega}^{\leq}\grave{\mathrm{E}}\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\leq}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$，则$(N_1, N_3)\ \in \mathrm{R}_{j}^{\leq}\grave{\mathrm{E}}d_\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\leq}\grave{\mathrm{E}}c\acute{\mathrm{E}}$。

证明。我们只证明第一个陈述；第二个类似。

Let j 固定。我们考虑假设 (1) 的情形。有两个子情形需要考虑。首先，N_1和 N_2是值，且 $(N_1,\ N_2)\ \in \mathrm{V}_{\omega}^{\geq}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$。然后 N_3也是一个值，且 $(N_2, N_3)\ \in \mathrm{V}_{j}^{\geq}\grave{\mathrm{E}}c\acute{\mathrm{E}}$。由 D.67，我们有 $(N_1, N_3)\ \in \mathrm{V}_{j}^{\geq}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}}$。

否则，存在 $\varepsilon@C \rightsquigarrow D \in \sigma, E_1\#epsilon$和 $E_2\#\varepsilon$，以及 V_1和 V_2使得 $(V_1, V_2)\ \in(\blacktriangleright\mathrm{V}^{\geq}\grave{\mathrm{E}}C\acute{\mathrm{E}})_{\omega}$，并且 $(x_1.E_1[x_1], x_2.E_2[x_2])\ \in(\blacktriangleright\mathrm{K}^{\geq}\grave{\mathrm{E}}D\acute{\mathrm{E}})_{\omega}(\mathrm{E}^{\geq}\grave{\mathrm{E}}\sigma\acute{\mathrm{E}}\mathrm{V}^{\geq}\grave{\mathrm{E}}A\acute{\mathrm{E}})$，并且

$$N_1 = E_1[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V_1)],$$

and

$$N_2 = E_2[\mathtt{raise}\ \varepsilon(V_2)].$$

类似地，由于 N_2和 N_3在 R $\geq_j$Èd_σÉV $\geq$ÈcÉ 中相关，因此得出 $\varepsilon@c_\varepsilon \rightsquigarrow d_\varepsilon \in d_\sigma$,其中$c_\varepsilon$: $C \sqsubseteq C'$ 和 d_ε: $D \sqsubseteq D'$。我们还知道存在 E_3#ε和 V_3使得 (V_2, V_3) ∈(▸V $\geq$Èc_εÉ)$_j$，以及 $(x_2.E_2[x_2], x_3.E_3[x_3])$ ∈ (▸K $\geq$Èd_εÉ)$_j$(E $\geq$Èd_σÉV $\geq$ÈcÉ)，以及

$$N_3 = E_3[\texttt{raise}\ \varepsilon(V_3)].$$

Recall that we need to show

$$(E_1[\texttt{raise}\ \varepsilon(V_1)], E_3[\texttt{raise}\ \varepsilon(V_3)]) \in \mathcal{R}^{\geq}_j[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\geq}[\![c]\!].$$

We assert the second disjunct in the definition of $\mathcal{R}^{\geq}[\![\cdot]\!]$.

我们首先声称(V_1, V_3) ∈(▸V $\geq$Èc_εÉ)$_j$。根据值的传递性（引理 D.67），只需证明(V_1, V_2) ∈(▸V $\geq$Èc_εÉ)$_\omega$ and(V_2, V_3) ∈(▸V $\geq$Èc_εÉ)$_j$。这些由假设可得。

现在我们断言：

$$(x_1.E_1[x_1], x_3.E_3[x_3]) \in (\blacktriangleright\mathcal{K}^{\geq}[\![d_\varepsilon]\!])_j(\mathcal{E}^{\geq}[\![d_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\geq}[\![c]\!]).$$

Let $k \leq j$并令 (V^l, V^r) ∈(▸V $\geq$Èd_εÉ)$_k$。我们需要证明

$$(E_1[V^l], E_3[V^r]) \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^{\geq}[\![d_\sigma]\!])_k(\mathcal{V}^{\geq}[\![c]\!]).$$

根据归纳假设（请回想，我们正在同时证明项的传递性，而项的传递性正通过 Löb归纳证明），只需找到一个项 M使得 $(E_1[V^l], M)$ ∈(▸E $\geq$ÈσÉ)$_\omega$(V $\geq$ÈAÉ)，并且$(M, E_3[V_r])$ ∈(▸E$^{\geq}$Èd_σÉ)$_k$(V $\geq$ÈcÉ)。

根据自反性（推论 D.30），我们有 (V^l, V^l) ∈(▸$\mathcal{V}^{\sim}[\![]\!])_\omega$。

Then by our assumption on (E_1, E_2), we have

$$(E_1[V^l], E_2[V^l]) \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^{\geq}[\![\sigma]\!])_\omega(\mathcal{V}^{\geq}[\![A]\!])$$

By our assumption on (E_2, E_3) we have

$$(E_2[V^l], E_3[V^r]) \in (\blacktriangleright\mathcal{E}^{\geq}[\![d_\sigma]\!])_k(\mathcal{V}^{\geq}[\![c]\!]),$$

这就完成了证明。 □

引理 D.69（异质传递性）。*Let* c: $A_1 \sqsubseteq A_2$ *and* e: $A_2 \sqsubseteq A_3$. *Let* d_σ: $\sigma \sqsubseteq \sigma'$*and let* d'_σ: $\sigma' \sqsubseteq \sigma''$。

如果 *(1)* (M_1, M_2) ∈E $\geq_\omega$Èd_σÉV $\geq$ÈcÉ 并且 *(2)* (M_2, M_3) ∈E $\geq_j$Èd'_σÉV $\geq$ÈeÉ，那么 (M_1, M_3) ∈E $\geq_j$È$d_\sigma \circ d'_\sigma$ÉV $\geq$È$c \circ e$É。

同样，如果 (M_1, M_2) ∈E $\leq_j$Èd_σÉV $\leq$ÈcÉ 且 (M_2, M_3) ∈E$\leq_\omega$Èd'_σÉV $\leq$ÈeÉ，那么 (M_1, M_3) ∈E$\leq_j$È$d_\sigma \circ d'_\sigma$ÉV $\leq$È$c \circ e$É。

证明。由混合传递性（引理 D.66）和广义转换引理（引 理 D.50、D.51、D.52、D.53、D.54、D.55、D.56 和D.57 ）。

例如，由 EffDnR 和 ValDnR，我们有

$$(M_1, \langle\sigma \quad \sigma'\rangle\langle A_1 \quad A_2\rangle M_2) \in \mathcal{E}^{\geq}_\omega[\![\sigma]\!]\mathcal{V}^{\geq}[\![A_1]\!],$$

并且由 EffDnL 和 ValDnL，我们有

$$(\langle\sigma \quad \sigma'\rangle\langle A_1 \quad A_2\rangle M_2, M_3) \in \mathcal{E}^{\geq}_j[\![d_\sigma \circ d'_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\geq}[\![c \circ e]\!].$$

Then applying mixed transitivity, we have

$$(M_1, M_3) \in \mathcal{E}^{\geq}_j[\![d_\sigma \circ d'_\sigma]\!]\mathcal{V}^{\geq}[\![c \circ e]\!],$$

按需。

□