关于饱和孔隙力学框架及其与 Abaqus 土力学和 Biot 孔隙弹性框架的关系

Lei Jin[1]

[1]埃克森美孚上游研究公司，得克萨斯州斯普林 77389，美国

lei.jin@exxonmobil.com

摘要

我们提出了一种守恒与本构框架，适用于由可变形多孔固体基质和使其完全饱和的单相可压缩孔隙流体组成、且不存在相间质量交换的封闭等温两相材料系统。我们运用基本输运定律重新推导了广义流体质量平衡定律。我们还总结了文献中的一条基本流固混合物力平衡定律，该定律无需先验假设任何有效应力定律。我们表明，这两条守恒定律无需任何本构前提，自然耦合至二阶。这与 Biot 孔隙弹性不同：后者首先将一阶流固耦合作为两条线性化本构关系加以假设，然后将其纳入简单的守恒定律欧拉形式。接下来，我们考察 Abaqus 中实现的一种极限情形非饱和土力学框架，假设其处于等温条件、完全饱和且不存在吸附，并将其与我们的框架联系起来。我们证明：(1) 无论流体本构行为如何，两条质量平衡定律始终等价；(2) 当固体骨架呈线弹性时，两条力平衡定律在各自的具体形式下等价。最后，利用一条基本孔隙本构定律，我们说明了我们的框架以及由此延伸出的极限情形 Abaqus 框架如何自然地区分排水与不排水条件，并在简化条件下归结为 Biot 孔隙弹性。值得注意的是，我们的框架表明，当固体颗粒速度与达西速度不正交时，会出现一个额外的固体到流体耦合项。

Keyw词：孔隙力学、土力学、Biot孔隙弹性、流固耦合、Abaqu s

1. 引言

孔隙力学描述了具有连通孔隙的多孔固体的运动学和变形行为，这些孔隙由单相或多相流体部分或完全饱和。孔隙力学对于研究地质材料（如土壤和岩石）、工程材料（如混凝土和陶瓷），以及包括软骨和角膜在内的各种生物组织至关重要。De Boer (1996年) 部分回顾了饱和多孔介质在微小变形条件下孔隙力学理论历史发展的若干要点 。重要里程碑包括 Terzaghi 的土力学框架（Terzaghi, 1943年），以及 Biot 的孔隙弹性理论（Biot, 1941年；1955年）及其后续改述（Rice 和 Cleary,1976年）。近年来，Coussy（2004年）通过将多孔固体连续体视为开放系统，提出了热力学一致的孔隙力学框架；在该系统中，加入流体相会影响能量平衡和熵不平衡。该框架自然地扩展到了部分饱和和有限变形的情形。

孔隙力学控制框架的一个基本要素是流体和固体组分之间的水力-力学相互作用（即耦合）。Biot（1941年）开创性地提出了两种线性本构关系来描述这种耦合作用。具体而言，流体含量与流体压力和固体平均应力呈线性关系，而固体应变与固体应力和流体压力呈线性关系。这组本构关系被Rice 和 Cleary （1976年）沿用。将其代入简单的守恒定律欧拉形式后，可知负孔隙压力梯度（方向由高压指向低压）起到等效体力的作用，驱动变形、应变和应力；而一部分体积应变率则起到等效流体源或汇的作用（Wang，2000年；Segall，2010年）。一个关键问题是，无论组分及其行为如何，这种耦合是否都自然地源自守恒定律。另一个仍待探讨的问题是，这种耦合是否遵循 Biot 提出的线性形式。

近年来，地球物理学界对 Biot孔隙弹性重新产生了一些兴趣，这主要源于开展流体注入相关地震活动机理研究的需求（例如，Ellsworth，2013年）。Segall 和 Lu（2015年）首次证明，孔隙弹性应力效应是此类地震活动的重要触发机制。他们采用经典的Rudnicki（1986年）解析解来求解 Biot 控制方程。该解针对这样一种情形推导而得：流体质量率点源嵌入各向同性均匀全空间的中心，且固体基质为线弹性，孔隙流体遵循线性扩散。后续研究通过数值模拟实现 Biot孔隙弹性，以体现物理上的现实性。研究人员已开发出少数实用的数值求解器，可处理复杂模型配置下的 Biot孔隙弹性问题（例如，Wang 和 Kümpel，2003年； Jin 和 Zoback，2017年）。另一些研究则选择使用商业有限元求解器 Fan 等，2016年；Haddad 和 Eichhubl，2020年（Dassault Systèmes Simulia，2014年）Abaqus 实现 Biot孔隙弹性，其依据是有研究声称，通过适当调整参数，即可使 Abaqus 重现

Biot孔隙弹性的经典解；具体而言，将 Biot 参数映射为等效的 Abaqus 参数（Altmann，2010年；Altmann 等，2010年）。

这种做法反映出孔隙力学从业者对于 Abaqus 所求解的底层控制定律存在一些明显的混淆。事实上，Abaqus 实现的并非线性 Biot 孔隙弹性，而是针对由固体颗粒、润湿流体和空气组成的三相混合物所建立的一般非线性非饱和土力学框架。流固耦合同样是双向的，但与 Biot的假设截然不同。首先，整体材料会响应随饱和度变化的有效应力（Wu，1967年），这与 Biot有效应力不同（Biot，1941年；Nur 和 Byerlee，1971年；Berryman，1992年）；其次，固体颗粒会通过固有密度变化直接响应局部流体压力，这与 Biot的固体应变—流体压力关系不同。另有两点差异也值得注意。首先，Abaqus 中的有效应力驱动的不是应变变化（Biot孔隙弹性中则是如此），而是所谓的有效应变；其次，Abaqus 还考虑了流体滞留以及流体和固体颗粒的热膨胀等行为（Dassault Systèmes Simulia，2014年）。

基于上述原因，似乎有必要建立一个不依赖本构假设的一般孔隙力学守恒框架。本文首先就这一问题提出一些见解。此外，一般框架、Biot框架与Abaqus框架之间似乎仍存在有待弥合的差距。由于Biot孔隙弹性假定流体为单相、介质完全饱和且发生微小变形，因此本文将研究范围限定于这些条件。为便于进行有意义的比较，我们通过假定介质完全饱和、且不存在流体滞留或热膨胀，推导出Abaqus框架的一个极限情形。随后，我们从数学角度描述这三个框架之间的关系。本研究旨在帮助不同领域的从业者理解其共同的基础问题、增进认识，并促进商业软件工具的恰当使用。

2. 饱和孔隙力学框架

2.1 基本定义与关系

考虑一种固体多孔介质，其中组成固体颗粒之间的孔隙空间完全被单相流体饱和。流体可相对于固体自由流动，不会被困留或发生吸附。该材料是理想化的两相（流体、固体）混合物。可定义三个参考系，包括分别跟随流体和固体颗粒运动的两个拉格朗日参考系，以及一个欧拉参考系。考虑相 j（f、s 表示相）拉格朗日参考系中的一个物质点 X_j ($j=f, s$，其位置向量为 $\boldsymbol{X}_j$，并将其在欧拉参考系中的当前位置向量记为 $\boldsymbol{x}$，使得

$$\boldsymbol{x}=\varphi_j(\boldsymbol{X}_j),\ \boldsymbol{X}_j=\varphi_j^{-1}(\boldsymbol{x}),\ j=f,s \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{\varphi}_j$ 是唯一且可逆的向量映射函数。

在任一参考系中，相-j粒子速度均相同。即

$$\boldsymbol{V}_j(\boldsymbol{X}_j,t)=\frac{\partial\varphi_j(\boldsymbol{X}_j,t)}{\partial t}=\boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial\varphi_j\left(\varphi_j^{-1}(\boldsymbol{x}),t\right)}{\partial t},\quad j=f,s \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{V}_j$ 为相-j拉格朗日速度，$\boldsymbol{v}_j$ 为相应的欧拉速度。由于二者相等，后文默认使用后者。当流体粒子在孔隙中运动时，$\boldsymbol{v}_f$ 也称为孔隙间速度。

梯度算子 ∇ 和散度算子 $\nabla\cdot$ 的定义也取决于参考系。为简洁起见，本文中这两个算子均默认采用欧拉参考系下的定义，即

$$\begin{aligned}\nabla&:=\nabla_x=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\\ \nabla\cdot&:=\nabla_x\cdot=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\cdot\end{aligned} \tag{3}$$

默认仅针对固相定义变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 及其对应的雅可比行列式 J，如下：

$$\boldsymbol{F}:=\boldsymbol{F}_s=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{X}_s}=\nabla_{X_s}\boldsymbol{x} \tag{4}$$

$$J=\det(\boldsymbol{F}) \tag{5}$$

两相材料系统中的物质时间导数（即粒子导数、全时间导数或实质导数）的定义因相而异。它与欧拉偏时间导数的关系为

$$\frac{d^j}{dt}(\square)=\frac{\partial}{\partial t}(\square)+\boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla(\square),\quad j=f,s \tag{6}$$

将方程（6）分别展开至两个相，并将两式相减，可得以下结果，该结果很快就会派上用场

$$\frac{d^f}{dt}(\square)-\frac{d^s}{dt}(\square)=\left(\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{x},t)\right)\cdot\nabla(\square) \tag{7}$$

在本研究中，默认的全时间导数通过追踪固体颗粒的运动定义如下

$$\dot{\square}=\frac{d}{dt}(\square):=\frac{d^s}{dt}(\square) \tag{8}$$

对于固相，雅可比行列式的物质时间导数与欧拉速度之间的以下关系已广为人知（例如，Hughes, 2012年）

$$\dot{J}=\frac{dJ}{dt}=\frac{d^sJ}{dt}=J\nabla\cdot\boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{x},t) \tag{9}$$

2.2 流体相的质量守恒

在当前欧拉参考系中，考虑任意物质体积 $V(\boldsymbol{x}, t)=V_f(\boldsymbol{x}, t)+V_s(\boldsymbol{x}, t)$，其中 $V_f(\boldsymbol{x}, t)$ 和 $V_s(\boldsymbol{x}, t)$ 分别为流体体积和固体体积。由于孔隙空间完全饱和，流体体积 $V_f(\boldsymbol{x}, t)$ 与孔隙体积 $V_\phi(\boldsymbol{x}, t)$. 相同。我们定义

$$\phi(\boldsymbol{x},t):=\frac{V_\phi(\boldsymbol{x},t)}{V(\boldsymbol{x},t)}=\phi_f(\boldsymbol{x},t):=\frac{V_f(\boldsymbol{x},t)}{V(\boldsymbol{x},t)} \tag{10}$$

where $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ 为欧拉孔隙率，$\phi_f(\boldsymbol{x}, t)$ 为当前流体体积分数。

现在作出三项假设：(1) 系统为等温，且材料为斜压；(2) 不发生相间质量交换；(3) 系统封闭且不存在外部质量源。在这些假设下，沿固体颗粒的运动，并结合方程 (10)，物质体积内的流体质量守恒记为 m_f，写作

$$0=\dot{m}_f=\frac{d^sm_f}{dt}=\frac{d^s}{dt}\int_{V(\boldsymbol{x},t)}\rho_f(\boldsymbol{x},t)\phi_f(\boldsymbol{x},t)dV \tag{11}$$

其中，ρ_f 是流体的本征密度。

在同一欧拉参考系中，还考虑一个任意的承载多孔固体骨架控制体积$CV(\boldsymbol{x}, t)$，其控制面为$CS(\boldsymbol{x}, t)$。注意，$CV(\boldsymbol{x}, t)$不一定与物质体积$V(\boldsymbol{x}, t)$相同。因此，根据广义雷诺输运定理，方程（11）可展开为

$$0=\frac{d^s}{dt}\int_{CV(\boldsymbol{x},t)}\rho_f(\boldsymbol{x},t)\phi_f(\boldsymbol{x},t)dV+\int_{CS(\boldsymbol{x},t)}\rho_f(\boldsymbol{x},t)\phi_f(\boldsymbol{x},t)\tilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{n}$是单位法向量，$\tilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t)$ 是流体质点相对于运动固体控制面的速度，即

$$\tilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t):=\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{x},t) \tag{13}$$

此处，$\tilde{\boldsymbol{v}}$ 也称为渗流速度。

同时，式 (12) 右侧的第一项需要在积分号下求导，可根据莱布尼茨定理进行计算，如下所示：

$$\begin{aligned}&\frac{d^s}{dt}\int_{CV(\boldsymbol{x},t)}\rho_f(\boldsymbol{x},t)\phi_f(\boldsymbol{x},t)dV\\&=\int_{CV(\boldsymbol{x},t)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_f(\boldsymbol{x},t)\phi_f(\boldsymbol{x},t)\right)\right]dV+\int_{CS(\boldsymbol{x},t)}\left[\rho_f(\boldsymbol{x},t)\phi_f(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}\right]dS\end{aligned}\tag{14}$$

根据散度定理，可将式 (12) 和式 (14) 中的曲面积分转换为体积分，因此，式 (11) 现在变为

$$0=\int_{CV(\boldsymbol{x},t)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_f(\boldsymbol{x},t)\phi_f(\boldsymbol{x},t)\right)+\nabla\cdot\left(\rho_f(\boldsymbol{x},t)\phi_f(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{x},t)\right)+\nabla\cdot\left(\rho_f(\boldsymbol{x},t)\phi_f(\boldsymbol{x},t)\tilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t)\right)\right]dV\tag{15}$$

由于式 (15) 对任意控制体$(\boldsymbol{x}, t)$均成立，我们得到以下流体质量平衡的欧拉形式（为简洁起见，下文省略书写 $(\boldsymbol{x}, t)$）

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_f\phi_f\right)+\nabla\cdot\left(\rho_f\phi_f\boldsymbol{v}_s\right)+\nabla\cdot\left(\rho_f\phi_f\tilde{\boldsymbol{v}}\right)=0\tag{16}$$

式 (16)　　也可以写成等价的任意固体拉格朗日-欧拉形式（AL_sE）　　as

$$\frac{d^s}{dt}\left(\rho_f\phi_f\right)+\left(\rho_f\phi_f\right)\nabla\cdot\boldsymbol{v}_s+\nabla\cdot\left(\rho_f\phi_f\tilde{\boldsymbol{v}}\right)=0\tag{17}$$

或者，也许更直观地说，方程（17）可以通过追踪流体粒子自身的运动推导得出。此时，流体质量守恒关系为

$$\begin{aligned}0=\dot{m}_f&=\frac{d^f m_f}{dt}=\frac{d^f}{dt}\int_V\rho_f\phi_f dV\\&=\int_V\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_f\phi_f\right)\right]dV+\int_S\left[\rho_f\phi_f\boldsymbol{v}_f\cdot\boldsymbol{n}\right]dS\\&=\int_V\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_f\phi_f\right)+\nabla\cdot\left(\rho_f\phi_f\boldsymbol{v}_f\right)\right]dV\end{aligned}\tag{18}$$

这里，体积分的流体物质导数直接按照莱布尼茨定理展开，随后再次应用散度定理。方程 (18) 中物质体积 V的任意性要求

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_f\phi_f\right)+\nabla\cdot\left(\rho_f\phi_f\boldsymbol{v}_f\right)=0\tag{19}$$

Eq方程 (19) 可改写为任意流体拉格朗日-欧拉形式 (*ALE*)，即

$$\frac{d^f}{dt}\left(\rho_f\phi_f\right)+\left(\rho_f\phi_f\right)\nabla\cdot\boldsymbol{v}_f=0 \tag{20}$$

根据方程（7）和（13），方程（20）可展开为

$$\frac{d^s}{dt}\left(\rho_f\phi_f\right)+\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\left(\rho_f\phi_f\right)+\left(\rho_f\phi_f\right)\nabla\cdot\left(\boldsymbol{v}_s+\tilde{\boldsymbol{v}}\right)=0 \tag{21}$$

方程（21）显然可证明与方程（17）等价，因此也与方程（16）等价。

最后，在存在外部流体质量扰动的情况下，可通过将方程（16）、（17）和（19）~ （21）右侧的0替换为流体质量率项，放宽对封闭物质系统的第三项假设。

2.3 流固混合物连续体的力平衡

无需任何先验假设，即可严格推导出非饱和流固混合物的线动量平衡定律的一般形式（Borja，2006年）。在完全饱和且颗粒运动准静态的极限情况下（即惯性 ≈ 0），该定律可化简为欧拉参考系中的以下力平衡定律（同样省略了 (***x***，*t*)）

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\underbrace{\left(\rho_f\phi_f+\rho_s\left(1-\phi_f\right)\right)}_{\rho_{mix}}\mathbf{g}\simeq\mathbf{0} \tag{22}$$

其中，**σ** 为2nd阶总柯西应力张量，**g**为重力加速度，ρ_f 与前文相同，ρ_s为固体颗粒的本征密度，ρ_{mix} 为流固混合物的密度，由所谓的分密度 $\rho^f=\rho_f\phi_f$ 和 $\rho^s=\rho_s\left(1-\phi_f\right)$ 相加得到。

关键在于建立一种有效应力定律，用以描述在流体压力作用下总应力如何分配到固体颗粒上。已有多项开创性研究。Nur & Byerlee (1971年提出了首个严格推导，并保留了 Biot (1941年)所作的现象学假设，即应变对应力和孔隙压力呈线性依赖（详见第5.1节）。Coussy (2004； 2007年) 和 Borja (2006年)则分别从热力学第一定律和第二定律出发，在不作此类假设的情况下进行了更严格的推导。对于完全饱和的多孔骨架，这些研究得出了相同的有效应力定律。采用拉应力为正的记号，该定律写作

$$\boldsymbol{\sigma}'=\boldsymbol{\sigma}+\underbrace{\left(1-\frac{K}{K_s}\right)}_{\alpha}p_f\mathbf{1} \tag{23}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}'$ 是2nd阶有效柯西应力张量，p_f 是孔隙流体压力，$\mathbf{1}$ 是二阶单位恒等张量，K_g 是固体颗粒体积模量，而K 是多孔固体骨架（即基质）的体积模量，有时也称为干燥体积模量或排水体积模量。$1-K/K_s$ 是体积有效应力系数，与广为人知的比奥-威利斯系数形式α (Biot & Willis，1957年)相同，另见第5.1节。

已证明$\boldsymbol{\sigma}'$是与固体变形率张量共轭的功变量$\boldsymbol{d}=(\nabla\boldsymbol{v}_s+\boldsymbol{v}_s\nabla)/2$。将方程（23）代入方程（22），并将散度算子与单位恒等张量进行缩并，可得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}'-\left(1-\frac{K}{K_s}\right)\nabla p_f+\left(\rho_f\phi_f+\rho_s\left(1-\phi_f\right)\right)\mathbf{g}=\mathbf{0} \tag{24}$$

2.4 一阶和二阶流固全耦合的自然产生

方程（17）（或由方程（16）、（19）、（20）得到的等价形式）和方程（24）是控制一般单相、饱和、瞬态、准静态孔隙力学问题的两种守恒定律强形式，适用于等温条件，且不存在相间质量交换或外部流体质量扰动。这两个方程均需结合适当的狄利克雷和诺伊曼边界条件闭合。方程中相互作用项的存在表明，流固全耦合无需任何先决条件便会自然产生。这与Biot (1941年）、Rice 和 Cleary (1976年）、 以及 Cleary (1977年）的方法有根本区别；在这些方法中，两种守恒定律中的耦合项是通过直接代入两个线性化唯象本构定律“强加”的（即流体含量线性依赖于流体压力和固体平均应力，固体应变线性依赖于固体应力和流体压力，另见第 5.1 节）。

此外，这里的两个方程揭示了两层完全耦合，而 Biot 孔隙弹性中只有一层耦合。对于第一层耦合，固体颗粒速度的散度，$\nabla\cdot\boldsymbol{v}_s$，代表承载多孔固体骨架的体积变化率；乘以 $\rho_f\phi_f$ 后，它便作为单位体积单位时间质量形式的等效流体源项发挥作用。这种固体到流体的耦合，根本上源于承载多孔固体的运动（包括刚体平移和变形）。另一方面，孔隙压力梯度乘以 $1-K/K_s$ 后，便作为等效体力（单位体积力）发挥作用。第二层耦合虽不那么显著，却源于 ϕ_f 同时出现在两个方程中。ϕ_f 是 p_f 和 $\boldsymbol{v}_s$ 的固有函数。例如，展开方程（17）中的第一项需要针对 $d\phi_f$ 的切线本构定律（见第 2.5 节）；在一定条件下，Coussy 已证明该定律可写成 dp_f 与 $d\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{vol}}$ ($\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{vol}}=tr(\boldsymbol{\varepsilon})$ 为体积应变) 的线性组合，而 $d\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{vol}}/dt$ 与 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}_s$ 相关，因此又引入了一个由固体运动导致的等效流体源项，出现在流体质量平衡中。同时，方程（24）中的体力取决于流体，因为混合物密度会随着

孔隙压力变化而变化。清晰观察这种耦合作用的一种方法，是考察作用于任意一块当前物质体积的相关重力向量 $\mathbf{F}_g$

$$d\mathbf{F}_g = d\int_{V(\boldsymbol{x},t)} \rho_{mix}(\boldsymbol{x},t)\mathbf{g}dV \tag{25}$$

为对体积分进行微分，我们在拉格朗日构形与欧拉构形之间来回进行体积输运。其表达式如下（此处写出参考系，以展示拉回与推前操作；下标“0”表示前一个时间步）

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_g &= d\int_{V_0(\boldsymbol{X},t)} \rho_{mix}(\boldsymbol{X},t)\mathbf{g}JdV_0 \\ &= \int_{V_0(\boldsymbol{X},t)} d\left(\rho_{mix}(\boldsymbol{X},t)J\right)\mathbf{g}dV_0 \\ &= \int_{V_0(\boldsymbol{X},t)} \left[J_0 d\left(\rho_{mix}(\boldsymbol{X},t)\right)+\rho_{mix0}(\boldsymbol{X},t)dJ\right]\mathbf{g}dV_0 \\ &= \int_{V(\boldsymbol{x},t)} \left[Jd\left(\rho_{mix}(\boldsymbol{x},t)\right)+\rho_{mix0}(\boldsymbol{x},t)dJ\right]\frac{1}{J}\mathbf{g}dV \end{aligned} \tag{26}$$

将方程（9）代入方程（26）可得

$$d\mathbf{F}_g = \int_V \left[d\rho_{mix} + \rho_{mix0}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_s dt\right]\mathbf{g}dV \tag{27}$$

这里，$d2^{\text{nd}}$ 阶流体到固体的耦合由ρ_{mix}引入，显然可表示为

$$d\rho_{mix} = \left(\rho_{f0}-\rho_{s0}\right)d\phi_f + \phi_{f0}d\rho_f + \left(1-\phi_{f0}\right)d\rho_s \tag{28}$$

方程（28）表明，这种耦合作用有三个具体来源：其中，$d\phi_f$ 通过切线本构定律与dp_p 相关联，而$d\rho_f$, $d\rho_s$则通过材料压缩性与dp_f 相关联，详见后续方程（42）和（43）。

2.5 本构定律

方程（17）和（24）可用于求解分别与流体相和固相相关的两个主要未知量。对于流体，显然的选择是 p_p。对于固相，选择可以有所不同，一种方便的选择是位移向量，其定义为

$$\boldsymbol{u} := \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_s = \varphi_s(\boldsymbol{X}_s) - \boldsymbol{X}_s \tag{29}$$

在代入适当的流体、固体和孔隙本构定律后，这两条守恒定律都可写成更具体的形式。在方程（17）中，微分欧拉速度 $\tilde{}\boldsymbol{v}$与欧拉孔隙率 ϕ_f的乘积称为达西速度，此处记为 $\tilde{\boldsymbol{v}}$，它与p_f的关系为

$$\underline{\tilde{\boldsymbol{v}}} := \phi_f\tilde{\boldsymbol{v}} = -\eta^{-1}\boldsymbol{k}\cdot\left(\nabla p_f + \rho_f\mathbf{g}\right) \tag{30}$$

其中，η 为流体黏度，而$\boldsymbol{k}$是2nd阶渗透率张量，可为完全各向异性、（仅含对角元素的）各向异性或各向同性；在各向同性情况下，$\boldsymbol{k}=k\mathbf{1}$。

式（30）给出了一个线性流体本构定律。另一方面，若假设固体骨架是线弹性且各向同性的，则可采用胡克定律来描述其本构行为。其表达式为

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon} = \left[K\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + 2\mu\left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)\right] : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{31}$$

其中，K与前文相同，μ 为多孔固体骨架的剪切模量（即干燥或排水剪切模量），$\mathbf{I}$和$\mathbf{1}$分别为4th阶和2nd阶单位张量，$\mathbb{C}^e$ 为4th阶弹性刚度张量，可分解为各向同性部分和偏量部分，而$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为2nd阶欧拉应变张量。

若进一步假设变形是微小的，则可作两处简化。首先，忽略2nd阶项后，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 可近似为位移的对称梯度

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \nabla^{(s)}\boldsymbol{u} = \left[\frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T\right)\right] \tag{32}$$

其次，

$$\partial\boldsymbol{u} \simeq \partial\varphi_s,\ \boldsymbol{v}_s \simeq \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t},\ \nabla\cdot\boldsymbol{v}_s \simeq \nabla\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right) = \frac{\partial\left(\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right)}{\partial t} = \frac{\partial\varepsilon_{vol}}{\partial t} \tag{33}$$

至此，孔隙力学系统变为线性孔隙弹性系统。材料线性由方程（30）和（31）给出，而几何线性由方程（32）和（33）给出。

如第 2.4 节所述，进行微分需要增量孔隙本构定律。根据热力学第二定律，Coussy (2004年在假设不存在能量耗散、满足等温条件、固体骨架发生微小变形且具有各向同性的情况下，证明了以下线性关系的存在。该关系为

$$d^s\phi_f = \frac{\alpha - \phi_{L0}}{K_s} d^s p_f + (\alpha - \phi_f) d^s\varepsilon_{vol} \tag{34}$$

这里，ϕ_L 是所谓的拉格朗日孔隙率，定义为当前孔隙体积与初始总体积之比，并可通过以下输运关系与欧拉孔隙率联系起来。对初始拉格朗日孔隙率 ϕ_{L0}进行输运后，得到

$$\phi_{L0} = J_0\phi_f = \det(\mathbf{1})\phi_f = \phi_f \tag{35}$$

将方程（35）代入方程（34），即可得到常见的本构关系，其中 $d\phi_f$ 是 dp_f 和 $d\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{vol}}$ 的线性组合（例如 Wang，2000年； Cheng，2016年；Zhang 等，2021年），见方程（62）。

3. Abaqus 土力学：极限情形

Abaqus 能够对一般的三相非饱和土力学问题进行建模（Dassault Systèmes Simulia，2014年）。所研究的介质由密实堆积的固体颗粒、润湿相流体（包括自由部分和滞留/吸附部分）以及空气组成；后两者共同完全占据孔隙空间。所有组成相均允许压缩，并考虑润湿流体和固体颗粒的热体积应变。将等温条件、润湿相完全饱和（无空气）以及无流体滞留这几个条件结合起来，问题便简化为一种极限情形，此时物质系统的构型与上文第 2 节所述的一般等温两相饱和孔隙力学问题的构型相同。下文将重点讨论 Abaqus 中的这一极限情形。

3.1 守恒定律

润湿相流体的质量守恒定律（即连续性方程）是在一个欧拉控制体积上建立的，该控制体积包含固定量的固体物质（即控制体积就是固体物质体积）。这等同于跟踪固体颗粒的运动。流体质量平衡要求液体在控制体积内的总质量变化率与穿过相应控制面的液体质量之间满足平衡。按照本文采用的术语和符号，公式如下（这里特意将 d/dt 记为 d^s/dt，以突出参考系）

$$\frac{1}{J}\frac{d^s}{dt}\left(J\rho_f\phi_f\right)+\nabla\cdot\left(\rho_f\phi_f\tilde{\boldsymbol{v}}\right)=0 \tag{36}$$

Abaqus 中的准静态力平衡直接根据虚功（率）原理，以弱形式在同一当前控制体积 V 上进行表述。在我们的极限情况下，其形式为

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}:\nabla^{(s)}\delta\boldsymbol{v}_s dV=\int_S \mathbf{t}\cdot\delta\boldsymbol{v}_s dS+\int_V \mathbf{f}_s\cdot\delta\boldsymbol{v}_s dV+\int_V \rho_f\phi_f\mathbf{g}\cdot\delta\boldsymbol{v}_s dV \tag{37}$$

其中 δv_s 为虚拟固体颗粒速度，$\mathbf{t}$ 为当前控制面 S 上的牵引力，$\mathbf{f_s}$ 为不包括液体重量部分的体力（即固体重量，本质上为 $\rho_s(1\text{-}\phi_f)\mathbf{g}$，尽管手册中并未明确写出这一点）。

容易看出，方程（37）对应的强形式与施加标准 Neumann 边界牵引 $\mathbf{t}$ 的方程（22）相同。然而，在完全饱和条件下，Abaqus 对多孔固体采用简单的有效应力原理。在我们的极限情形下，该原理可写为

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{\sigma}+p_f\mathbf{1} \tag{38}$$

将方程（38）代入方程（37）的强形式（与方程（22）相同），并进行简单变换，可得到如下力平衡方程:

$$\nabla\cdot\bar{\boldsymbol{\sigma}}-\nabla p_f+\left(\rho_f\phi_f+\rho_s\left(1-\phi_f\right)\right)\mathbf{g}=\mathbf{0} \tag{39}$$

3.2 本构定律

Abaqus 采用非线性 Forchheimer 定律及其线性化形式——Darcy 定律（与公式 (30) 相同）——来描述宏观流体行为。另一方面，对于固体颗粒，Abaqus 采用有效应变这一概念，其定义为总应变张量减去或加上三个各向同性部分。这些部分由流体压力、热膨胀/收缩以及流体滞留引起的孔隙比变化所导致的固体颗粒体积变化产生，此外还有第四个由饱和度驱动的湿胀各向异性部分。在我们的限制情形下，最后三个部分为零，有效应变记为 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$，其形式为

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}=\boldsymbol{\varepsilon}+\frac{1}{3}\frac{p_f}{K_s}\mathbf{1} \tag{40}$$

其中，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 是与公式 (32) 中相同的应变张量。

在 Abaqus 中，假定正是这一有效应变会改变固体的有效应力（记为 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$）。对于线弹性固体骨架，即

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbb{C}^e:\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{41}$$

其中 $\mathbf{C}^e$ 与公式（31）中的 4th 阶弹性刚度张量相同。

最后，为了考虑材料压缩性，Abaqus 定义了两组定律。忽略热膨胀时，流体随孔隙压力线性压缩，而固体颗粒则同时随有效平均应力和流体压力线性压缩。其表达式为

$$d\rho_f=\frac{\rho_{f0}}{K_f}dp_f \tag{42}$$

$$d\rho_s=\frac{\rho_{s0}}{K_s}\left(-\frac{1}{3(1-\phi_{f0})}d\left(tr(\bar{\boldsymbol{\sigma}})\right)+dp_f\right) \tag{43}$$

这里，K_f 和 K_s 分别是润湿液体和固体颗粒的体积模量 .

4. 等价性

这里，我们展示了第 2 节一般饱和两相孔隙力学的守恒框架与第 3 节 Abaqus 土力学极限情形之间的等价性。我们首先说明这两个问题中的质量守恒定律一般形式是等价的。为此，我们考虑方程 (9)，并将方程 (36) 左端的第一项展开为

$$\frac{1}{J}\frac{d^s}{dt}\left(J\rho_f\phi_f\right)=\frac{1}{J}\left[J\frac{d^s}{dt}\left(\rho_f\phi_f\right)+\left(\rho_f\phi_f\right)\dot{J}\right]=\frac{d^s}{dt}\left(\rho_f\phi_f\right)+\left(\rho_f\phi_f\right)\nabla\cdot\boldsymbol{v}_s \tag{44}$$

显然，将方程（44）代入方程（36）后，所得方程与方程（17）完全相同。此外，当两者均采用 Darcy 定律方程（30）时，其具体形式也完全相同。

另一方面，如方程（24）和（39）左端的非体力项所示，两个问题中的力平衡定律一般形式似乎不同。然而，若假设固体骨架为线弹性材料，两者的具体形式相同。为说明这一点，我们将方程（40）和（41）代入方程（39），得到其前两项的如下表达式

$$\nabla\cdot\bar{\boldsymbol{\sigma}}-\nabla p_f=\nabla\cdot\left(\mathbb{C}^e:\boldsymbol{\varepsilon}+\frac{1}{3}\frac{p_f}{K_s}\mathbb{C}^e:\mathbf{1}\right)-\nabla p_f \tag{45}$$

此处，$\mathbf{C}^e$ 与$\mathbf{1}$之间的双重张量缩并可化简为

$$\mathbb{C}^e:\mathbf{1}=K\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}:\mathbf{1}+2\mu\underbrace{\left(\mathbf{I}-\frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right):\mathbf{1}}_{0}=K\mathbf{1}tr(\mathbf{1})=3K\mathbf{1} \tag{46}$$

因此，公式（45）现在变为

$$\nabla\cdot\bar{\boldsymbol{\sigma}}-\nabla p_f=\nabla\cdot\left(\mathbb{C}^e:\boldsymbol{\varepsilon}\right)+\nabla\cdot\left(\frac{K}{K_s}p_f\mathbf{1}\right)-\nabla p_f=\nabla\cdot\left(\mathbb{C}^e:\boldsymbol{\varepsilon}\right)-\left(1-\frac{K}{K_s}\right)\nabla p_f \tag{47}$$

通过将公式（47）代入公式（39），并将公式（31）代入公式（24），即可建立等价性。

总而言之，在这两个孔隙力学问题中，流体子问题（具有两阶固体到流体耦合）始终等价；而固体子问题（具有两阶流体到固体耦合）仅在线性孔隙弹性极限下等价。

5. 与 Biot 孔隙弹性的关系

5.1 Biot框架

Biot孔隙弹性理论（Biot，1941年）被广泛用于分析水文地质力学耦合问题。该理论基于两项关键假设，由此产生流固全耦合。这两项假设是最初为饱和不可压缩流体的多孔固体提出的两组唯象线性本构定律，

$$\theta = \frac{1}{3H} tr(\sigma) + \frac{1}{R} p_f = \alpha\, tr(\varepsilon) + \frac{1}{Q} p_f \tag{48}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{H} p_f \mathbf{1} \tag{49}$$

其中H和R是材料常数，但其物理意义尚不明确，α 是 Biot 系数，Q是比奥模量（许多研究中也记作M），$\mathbf{S}$是土骨架的弹性柔量张量，$\boldsymbol{\sigma}$ 和$\boldsymbol{\varepsilon}$ 与前文相同，θ 是多孔固体单位体积含水量的增量。θ 被 Rice 和 Cleary（1976年） 改述为表观体积分数。

为方便起见，通过探究材料常数之间的关系，将方程（49）改写为广为人知的 Biot 有效应力定律（符号约定仍为拉应力为正），

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon} - \alpha\, p_f \mathbf{1} = \boldsymbol{\sigma}' - \alpha\, p_f \mathbf{1} \tag{50}$$

流体可压缩时，Biot 采用的质量守恒定律具有最简单的欧拉形式。其表达式为

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{\tilde{\boldsymbol{v}}} = 0 \tag{51}$$

其中，$\underline{\tilde{\boldsymbol{v}}}$ 是我们符号体系中的达西速度。Biot 最初在达西方程中采用各向同性渗透率，因此术语 $\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}$ 可简化为 $k\nabla^2 p_f$，其中 k 是各向同性渗透率（另见方程（30）下方的文字）。此处不展开该项。将方程（48）代入方程（51），即可恢复 Biot 给出的质量守恒形式

$$\frac{1}{Q}\frac{\partial p_f}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} tr(\boldsymbol{\varepsilon}) + \nabla \cdot \underline{\tilde{\boldsymbol{v}}} = 0 \tag{52}$$

Biot 给出的准静态力平衡定律，是通过令总应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 自行平衡并忽略体力得到的，也就是说，　　。将其代入方程（50）后，实质上可写为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \alpha \nabla p_f = \mathbf{0} \tag{53}$$

方程（52）和（53）采用整体耦合。具体而言，方程（52）中的$\alpha\partial(tr(\boldsymbol{\varepsilon}))/\partial t$ 项实现了固体到流体的耦合，而方程（53）中的$\alpha\nabla p_f$ 项实现了流体到固体的耦合。

如果弹性多孔固体骨架也是各向同性的，则需要四个独立的材料属性才能完整确定该问题，其中两个是标准弹性属性（例如剪切模量 μ 和泊松比 ν，或其他组合）。其余两个参数可以组合为H和R，或α和Q。孔隙流体会引入其他独立参数，其中最重要的是渗透率张量$\boldsymbol{k}$。

一个值得注意的后续进展见于Rice 和 Cleary (1976年，他们引入了排水与不排水弹性行为的区分，并使用一组新的四个独立参数重新表述该问题，这些参数在物理意义上更易于解释。一种常见的组合包括 Skempton 系数B，该系数用于描述不排水条件下孔隙压力变化与总平均应力之间的关系（Skempton，1954年）、排水与不排水泊松比ν，ν_u，以及剪切模量μ，它不会因孔隙流体而改变。然而，方程（48）和（49）所表达的两个假设仍未发生根本变化。具体而言，方程（50）仍予以保留，只是将α 替换为新的参数，

$$\alpha = \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu_u)(1-2\nu)} \tag{54}$$

并将方程（48）改写为

$$\Delta m = m - m_0 = \rho_0 \frac{3(\nu_u - \nu)}{2\mu B(1+\nu)(1+\nu_u)}\left(tr(\boldsymbol{\sigma}) + \frac{3}{B}p_f\right) \tag{55}$$

其中，Δm表示单位当前混合物体积内孔隙流体质量的变化 e.

除纳入孔隙流体密度外，质量守恒定律仍保持方程（51）的简洁欧拉形式，

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_0 \tilde{\underline{v}}) = 0 \tag{56}$$

将方程（55）代入方程（56）并约去ρ_0，即可得到质量守恒的另一种形式

$$\frac{9(\nu_u - \nu)}{2\mu B^2(1+\nu)(1+\nu_u)}\frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{3(\nu_u - \nu)}{2\mu B(1+\nu)(1+\nu_u)}\frac{\partial}{\partial t}tr(\boldsymbol{\sigma}) + \nabla\cdot\tilde{\underline{\boldsymbol{v}}} = 0 \tag{57}$$

力平衡的另一种形式与方程（53）相同，只是根据方程（54）替换了$\boldsymbol{\alpha}$。

此后出现了许多研究，基本上都以方程（48）和（50）为基础，并保留了由方程（52）和（53）或其替代形式确立的 Biot 守恒框架，替代形式由 Rice 和 Cleary(1976年) 提出。基于方程（49），α 的物理含义已由 Nur 和 Byerlee (1971年) 确立，

而 Coussy (2004年) 和 Borja (2006年) 则从热力学原理出发进行了更严格的阐述，另见第 2.3 节。然而，Biot 线性孔隙弹性框架与上述一般孔隙力学框架之间的关系仍不清楚。

5.2 化简

本节将说明，在简化条件下，Biot线性孔隙弹性框架是一般孔隙力学框架的一种约化形式。我们从流体-固体混合物的力平衡定律开始。显然，方程（53）是方程（24）的一种约化形式，因为其中忽略了体力项。因此，方程（53）也未能捕捉 2nd阶流体到固体的耦合效应。

或许一个更引人深思的问题涉及孔隙流体本身，具体而言，就是 Biot框架中的方程（52）与我们框架中的方程（17）有何关联。为此，我们将方程（17）的等价形式，即方程（20），展开，并将两边除以孔隙流体密度ρ_f，得到

$$\frac{d^f \phi_f}{dt} + \frac{\phi_f}{\rho_f}\frac{d^f \rho_f}{dt} + \phi_f \nabla \cdot \boldsymbol{v}_f = 0 \tag{58}$$

这里，利用压缩性的定义，可得

$$\frac{1}{\rho_f}\frac{d^f \rho_f}{dt} = \frac{1}{\rho_f}\frac{d^f \rho_f}{d^f p_f}\frac{d^f p_f}{dt} = C_f \frac{d^f p_f}{dt} = \frac{1}{K_f}\frac{d^f p_f}{dt} \tag{59}$$

其中，C_f 表示孔隙流体的压缩性，并与K_f 满足关系C_f=1/K_f。

利用方程（7）和（13）给出的关系，并代入方程（59），可将方程（58）进一步展开为混合（流体拉格朗日、固体拉格朗日和欧拉）参考系下的形式：

$$\frac{d^s \phi_f}{dt} + \tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi_f + \frac{\phi_f}{K_f}\frac{d^f p_f}{dt} + \phi_f \nabla \cdot \boldsymbol{v}_s + \phi_f \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{v}} = 0 \tag{60}$$

合并2nd 和5th 项，并考虑方程（30）给出的关系，可将方程（60）直接变形为：

$$\frac{d^s \phi_f}{dt} + \frac{\phi_f}{K_f}\frac{d^f p_f}{dt} + \phi_f \nabla \cdot \boldsymbol{v}_s + \nabla \cdot \underline{\tilde{\boldsymbol{v}}} = 0 \tag{61}$$

这是在第 2.2 节所述三项一般假设下，孔隙流体质量平衡的另一种一般形式。

在微小变形范围内，我们可以使用基本的增量孔隙本构定律方程（34），其中 $d^s\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{vol}} \approx \nabla\cdot\boldsymbol{v}_s dt$。考虑到这一点，并结合方程（35），孔隙空间`量的变化率可写为

$$\frac{d^s\phi_f}{dt}=\frac{\alpha-\phi_f}{K_s}\frac{d^s p_f}{dt}+\left(\alpha-\phi_f\right)\nabla\cdot\boldsymbol{v}_s \tag{62}$$

将方程（62）代入方程（61），并进一步进行代数运算，得到

$$\frac{\alpha-\phi_f}{K_s}\frac{d^s p_f}{dt}+\frac{\phi_f}{K_f}\frac{d^f p_f}{dt}+\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{v}_s+\nabla\cdot\underline{\tilde{\boldsymbol{v}}}=0 \tag{63}$$

有趣的是，方程（63）自然引出了不排水条件与排水条件之间的区别。现在，它们不再由流动边界条件定义，而可以更本质地定义为

$$\frac{d}{dt}=\frac{d^s}{dt}\begin{cases}=\dfrac{d^f}{dt}\left(or,\boldsymbol{v}_f=\boldsymbol{v}_s\right)\leftarrow undrained\\ \neq\dfrac{d^f}{dt}\left(or,\boldsymbol{v}_f\neq\boldsymbol{v}_s\right)\leftarrow drained\end{cases} \tag{64}$$

在不排水极限下，方程（64）化简为

$$\frac{1}{M}\frac{dp_f}{dt}+\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{v}_s+\nabla\cdot\underline{\tilde{\boldsymbol{v}}}=0 \tag{65}$$

其中，

$$\frac{1}{M}=\frac{1}{Q}=\frac{\phi_f}{K_f}+\frac{\alpha-\phi_f}{K_s} \tag{66}$$

其中 M（或 Q）是与之前相同的比奥模量，其表达式与其他假设无流动边界条件的研究（例如，Wang, 2000； Cheng, 2016）中给出的表达式高度一致。

利用公式（6）中给出的关系，公式（65）可写成以下欧拉形式

$$\frac{1}{M}\frac{\partial p_f}{\partial t}+\underbrace{\frac{1}{M}\boldsymbol{v}_s\cdot\nabla p_f}_{\substack{2^{nd}-order\\ s-to-f\ coupling}}+\underbrace{\overbrace{\alpha\frac{\partial}{\partial t}tr(\varepsilon)}^{=\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{v}_s}}_{\substack{1^{st}-order\\ s-to-f\\ coupling}}+\underbrace{\nabla\cdot\underline{\tilde{\boldsymbol{v}}}}_{=0}=0 \tag{67}$$

在更一般的排水情形下，再次利用方程（6），代入方程（13），并考虑方程（30）所示的达西速度与相对速度之间的关系，方程（63）现在可以改写为其欧拉形式。经过代数运算可得

$$\frac{1}{M}\frac{\partial p_f}{\partial t}+\frac{1}{M}\boldsymbol{v}_s\cdot\nabla p_f+\underbrace{\frac{1}{K_f}\underline{\tilde{\boldsymbol{v}}}\cdot\nabla p_f}_{\substack{2nd-order\\ fluid\ term}}+\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{v}_s+\underbrace{\nabla\cdot\underline{\tilde{\boldsymbol{v}}}}_{\neq 0}=0 \tag{68}$$

值得再次指出的是，方程（67）和（68）所示的具体形式，是通过利用方程（34）的切向孔隙本构定律得到的；该定律假设多孔固体骨架发生微小变形且具有各向同性。在满足这些条件时，将这两个方程与方程（52）进行对比，便可揭示我们的广义定律与 Biot 定律在孔隙流体质量守恒方面的关系。在不排水极限下，我们的方程（68）表明存在一个额外的 2nd 阶固体到流体耦合项，但流体通量散度为零（这意味着流体不会沿法向穿过给定区域边界）。请注意，2nd 阶固体到流体耦合项中的压力梯度与达西速度线性相关（见方程（30）），因此其本质上随$\boldsymbol{v}_s\cdot\underline{\tilde{\boldsymbol{v}}}$呈线性变化。这意味着，只有当 $\boldsymbol{v}_s$ 和 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ 彼此正交时，这种耦合作用才会消失；否则，这种作用普遍存在。在一般排水情形下，除了存在 2nd 阶固体到流体耦合项外，还会出现 2nd 阶流体项，同时流体通量散度仍然存在。

6. 总结

我们提出了一组适用于完全饱和流固混合体的一般守恒定律。该材料系统为等温系统，不存在相间质量交换或外部（流体）质量源。通过基本输运定律，推导出由运动并发生变形的多孔固体骨架所容纳流体的质量守恒定律，并自然地体现出不排水与排水状态的区别。混合体的准静态力平衡定律则依据已有研究得出。这两条守恒定律无需任何先决条件便自然实现完全耦合，其中 1st 阶和 2nd 阶耦合项均描述了流固相互作用。该孔隙力学框架涵盖了经典的 Biot 孔隙弹性框架；后者不仅仅体现 1st 阶整体耦合，而且本质上依赖两条假定的线性本构定律来实现耦合。最后，力平衡定律的差异很直接：我们的定律包含一个随时间演化的混合体体力项，用以表征 2nd 阶流体到固体的耦合。然而，两条质量守恒定律之间的关系则更为微妙。在同一欧拉参考系中且处于微小变形范围内，我们说明，对于给定的均质各向同性固体骨架，两者具有相同的 1st 阶固体到流体的耦合；但在不排水极限下，我们的框架还捕捉到 2nd 阶固体到流体的耦合，而在排水极限下则多出一个 2nd 阶流体项。最后，我们的框架也等价于 Abaqus 中在完全饱和且组分不存在流体圈闭、吸附或热膨胀时所建立的土力学极限情形问题。具体而言，两者的质量守恒定律在一般意义上等价，且与流体本构行为无关；在假设多孔固体骨架为线弹性时，两者的力平衡定律在具体形式上等价。

要完整表征孔隙力学系统，无论采用 Biot 框架还是我们的框架，除标准水力属性（渗透率）外，都需要四个相互独立的参数。在 Biot 框架中，常用的一组参数包括 Skempton 系数 B（或 Biot系数 α）、排水与不排水泊松比 ν, ν_u，以及剪切模量 μ。我们的框架采用更多材料固有属性，包括流体和固体颗粒的体积模量 K_f 和 K_s，以及干燥（即排水）多孔骨架的两个独立参数，例如其体积模量 K 和泊松比 ν。

致谢

感谢 William J. Curry 帮忙校对。本文撰写过程中未使用任何数据。

参考文献

Altmann, J. B.（2010年）。储层建模中的孔弹性效应（博士论文，Karlsruher Inst. für 工艺，博士论文，2010年）。

Altmann, J. B., Müller, T. M., Müller, B. I., Tingay, M. R., & Heidbach, O.（2010年）。孔隙弹性对储层应力路径的贡献。《国际岩石力学与矿业科学杂志》，*47*（7），1104-1113。

Berryman, J. G.（1992年）。非均质多孔岩石输运性质的有效应力。《地球物理研究杂志：固体地球》，*97*（B12），17409-17424。

Biot, M. A.（1941年）。三维固结的一般理论。《应用物理学杂志》，*12*（2），155-164。Biot, M. A.（1955年）。多孔各向异性固体的弹性与固结理论。《应用物理学杂志》

《应用物理学》，*26*（2），182-185。

Biot, M. A., & Willis, D. G.（1957年）。固结理论的弹性系数。《应用力学杂志》，24（4）：594-601。

Borja, R. I.（2006年）。论饱和与非饱和多孔介质中的机械能和有效应力连续体。*International Journal of Solids and Structures*，*43*(6), 1764-1786.

Cheng, A. H., D. (2016年)。孔隙弹性（第27卷）。固体的基本解。*International Journal of Solids and*

g. Cleary, M. P.（1977年）。弹性饱和多孔固体的基本解。*Springer International Journal of Publishing*

《结构》, *13*(9), 785-806.

Coussy, O.（2004年）。孔隙力学。John Wiley & Sons。

Coussy, O.（2007年）。使用拉格朗日饱和度概念。*International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*，*31*(15), 1675-1694。

De Boer, R.（1996年）。多孔介质理论历史发展的重要进展：迈向一致的宏观理论。*Applied Mechanics Reviews*，49(4)：201-262。

DSS（Dassault Systèmes Simulia）。（2014年）。Abaqus 理论手册第 6.11 版。

Ellsworth, W. L.（2013年）。注入诱发地震。*Science*，*341*(6142)，1225942。

Fan, Z.、Eichhubl, P. 和 Gale, J. F.（2016年）。德克萨斯州蒂姆普森 Mw 4.8 地震序列的流体注入与地震断层滑动地质力学分析。《地球物理研究杂志：固体地球》，*121*(4)，2798-2812。Haddad, M. 和 Eichhubl, P.（2020年）。叠置储层中对同步注入与采出作出响应的断层再活化孔隙弹性模型。《能源与环境地质力学》，*24*，100181。Hughes, T. J.（2012年）。有限元法：线性静态与动态有限元分析。Courier Corporation。Jin, L. 和 Zoback, M. D.（2017年）。任意裂隙多孔介质中非线性流体流动与孔隙弹性的全耦合：一种混合维度计算模型。《地球物理研究杂志：固体地球》，*122*(10)，7626-7658。

Nur, A., & Byerlee, J.（1971年）。含流体岩石弹性变形的精确有效应力定律。《地球物理研究杂志》，*76*(26)，6414-6419。

Rice, J. R., & Cleary, M. P.（1976年）。含可压缩组分的流体饱和弹性多孔介质中的一些基本应力扩散解。《地球物理评论》，*14*(2)，227-241。

Rudnicki, J. W.（1986年）。线性弹性扩散固体中的流体质量源和点力。《材料力学》，*5*(4)，383-393。

Segall, P.（2010年）。地震与火山形变。载于《地震与火山形变》。普林斯顿大学出版社。

Segall, P., & Lu, S. (2015年). 注入诱发地震活动：孔隙弹性与地震成核效应。《地球物理研究杂志：固体地球》，120(7), 5082-5103.

Skempton, A. W.（1954年）。孔隙压力系数 A 和 B。《岩土工程学》，4(4)，143-147。

Terzaghi K（1943年）。《理论土力学》。纽约：Wiley。

Wang, H. (2000年). 线性孔隙弹性理论及其在地质力学和水文地质学中的应用（第2卷）。普林斯顿大学出版社。

Wang, R., & Kümpel, H. J. (2003年). 孔隙弹性：强耦合慢变形的高效建模多层半空间中的过程。*Geophysics*，*68*(2), 705-717。

Wu, T. H.（1967年）。土力学。波士顿：Allyn and Bacon。

Zhang, Q.、Yan, X. 和 Shao, J.（2021年）。超低基质渗透率各向异性可变形双重孔隙介质中的流体流动：一种连续介质框架。*Journal of Petroleum Science and Engineering*，*200*，108349。