arXiv:2304.02151v1 [math.RT] 4 Apr 2023

单位根处量子幂零代数的删除导子算法

St´ephane Launois*[1]、Samuel A. Lopes†[2] 和 Alexandra Rogers[1]

[1]数学、统计与精算科学学院，肯特大学，坎特伯雷，肯特，CT2 7FS，英国。[2]CMUP，数学系，科学学院，波尔图大学，Rua do Campo Alegre s/n, 4169–007 波尔图，葡萄牙。

2023年4月6日

摘要

本文将 Cau03a] 中的一种算法及典范嵌入推广到一大类量子代数。该算法适用于满足若干适当假设的域上的迭代 Ore 扩张；这些假设涵盖了 Cauchon 原始设定中的条件，同时也允许参数取单位根。推广后的算法通过在分式除环 Frac(A)中进行一系列变量替换，从原量子代数A 构造出量子仿射空间 A'。该典范嵌入将完全素理想 $P \lhd A$ 映到完全素理想 $Q \lhd A'$；当 A 是 PI 代数时，PI-deg(A/P) = PI-deg(A'/Q)。当量子参数是单位根时，将我们的构造与 [BLR22] 中的结果结合，可以给出完全素商代数的 PI 度显式公式。本文最后介绍一种方法：给定 A'/Q 的适当不可约表示，当 A为 PI 代数时，构造 A/P 的最大维数不可约表示。

在 [Cau03a], Cauchon 提出了一种适用于一大类量子代数的算法。这类代数最初以 Cauchon、Goodearl 和 Letzter 的名字命名为 CGL 扩张，因为他们率先证明了该类代数的一组统一性结果；后来则改称量子幂零代数 [LLR06]。这类代数可以写成域上的迭代 Ore 扩张，并且其定义自同构和斜导子满足某些条件。从本质上说，该算法取一个适当 CGL 扩张的素商，并在其分式除环中经过一系列不定元替换，得到一个量子仿射空间的素商；后者与原代数具有相同的分式除环。随后，可以将所得量子仿射空间商的性质传回原商代数。当素理想在环面的有理作用下保持不变时，该算法结合 Goodearl 和 Letzter 的 $\mathcal{H}$-分层理论，被用于证明一大类一般量子代数的素商满足量子 Gel'fand-Kirillov 猜想，例如量子欧几里得空间、量子辛空间、量子矩阵和量子 Weyl 代数 [Cau03a, Th´eor`eme 6.1.1]。许多作者还将 Cauchon 算法应用于一般情形，以更深入地理解量子代数的结构。这些研究包括前述的[Cau03b] 和 [GL98]，以及 [Cas14, GY14, GLL19, GY16, LLN19]。

*部分资助来自英国工程和物理科学研究委员会（EPSRC）项目 EP/R009279/1。

†部分资助来自 CMUP（LASI 成员单位）。LASI 由科学技术基金会（FCT）通过国家资金资助，项目编号为 UIDB/00144/2020 和 UIDP/00144/2020。

然而，对于单位根情形下的此类代数，Cauchon 算法无法应用，因为定义该算法的同态与单位根不相容。若干作者针对满足略有不同条件的单位根情形量子代数，重新构建了 [Cau03a] 中的主要结果（[Hay08] 和 [LM11]）。然而，原算法中明确的变量替换在上述应用中至关重要，但这两篇论文均未重新构建这一部分。本文通过扩展 Cauchon 的消去导子算法来解决这一问题，并纳入用于追踪完全素理想的典范嵌入；具体而言，本文采用 [Hay08, Section 3], 中给出的、经过调整的版本来处理该过程核心的同态，从而将算法扩展至单位根情形。

本文的主要动机在于，许多量子代数取单位根参数时会成为多项式恒等式（PI）代数；在这种情况下，PI 度是一个有用的不变量，可用于推导代数的各种性质（例如，见 [BY17], [CPWZ16], 和[CPWZ15]）。PI 度还在素仿射 PI 代数的表示论中发挥作用，为不可约表示的维数提供上界 [BG02, Theorem I.13.5.]。

本文第 2 节定义的扩展算法，以一个适当的迭代 Ore 扩张A 和一个完全素理想 $P \in$C.Spec(A) 为输入，构造出一个量子仿射空间 A' 以及一个典范嵌入 ψ: C.Spec(A) $\to$C.Spec(A')，使得 Frac(A/P) $=$Frac($A'/\psi(P)$)。此外，若 A是 PI 代数，则 A'也是 PI 代数，因此 PI-deg(A/P) $=$PI-deg($A'/\psi(P)$)。当 $A'/\psi(P)$ 本身是量子仿射空间时，其 PI 度由交换矩阵的不变因子的秩和取值决定（例如见 [BLR22, Lemma 2.4]）。鉴于此，我们关注那些可导出量子仿射空间 $A'/\psi(P_w)$ 的理想 P_w。对于这类理想，定理 4.4 将计算 A/P_w 的 PI 度。最后，我们给出一种方法，将任意 $A'/\psi(P)$ 的某些最大维不可约表示经由删除导子算法反向传递，从而得到 A/P 的最大维不可约表示（第 5 节）；并通过构造单位根参数下 $U_q^+(\mathfrak{so}_5)$ 的一个完全素商的显式最大维不可约表示，来说明我们的结果。

致谢：本文所述内容是第三位署名作者 [Rog19] 博士论文的一部分。她谨此感谢肯特大学数学、统计与精算科学学院提供的资助。

1 单位根处的量子幂零代数

设 $\mathbb{K}$ 为任意域，R 为一个 $\mathbb{K}$-代数。通过定义一个 $\mathbb{K}$-自同构 σ 和一个（左） σ-导子 δ （也称为斜导子），使得对任意 a、$b \in R$，均有 $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$，便可构造一个含不定元 x 的 Ore 扩张 $R[x, \sigma, \delta]$。这些映射规定了 x 与 R 中元素之间的交换关系：给定 $r \in R$，有 $xr = \sigma(r)x + \delta(r)$。Ore 扩张满足泛映射性质（[GW04，命题 2.4]），因此在同构意义下唯一（[GW04，推论 2.5]）。对 N 个不定元迭代这一过程，便得到一个迭代 Ore 扩张 $R[X_1, \sigma_1, \delta_1] \dots [X_N, \sigma_N, \delta_N]$。注意，根据斜希尔伯特基定理 [BG02，定理 I.1.13]，它是一个诺特整环。R 的确切形式以及各对 (σ_i, δ_i) 的性质，将决定单位根处量子幂零代数的定义，并使其区别于 CGL 扩张。

如果上述迭代 Ore 扩张中的所有斜导子都是 0 映射，那么所有自同构都通过对每个不定元进行标量乘法来作用，即对所有 $1 \le j < i \le N$以及某个 $\lambda_{i,\ j} \in \mathbb{K}^*$，$R$ 是一个域 $\mathbb{K}$ 时，$\sigma_i(X_j) = \lambda_{i,\ j} X_j$，此时该迭代 Ore 扩张将描述一个量子仿射空间，我们可以将其写成如下形式：

$$\mathbb{K}[X_1, \sigma_1] \dots [X_N, \sigma_N] = \mathbb{K}_\Lambda[X_1, \dots, X_N] =: \mathcal{O}_{q^\Lambda}(\mathbb{K}^N)$$

其中 $\Lambda := (\lambda_{i,\ j})_{i,\ j} \in M_N(\mathbb{K}^*)$，且对所有 $1 \leq j \leq i \leq N$均有 $\lambda_{j,\ i} = \lambda_{i}^{-1},\ _{j}$。

以下术语是定义我们感兴趣的代数类所必需的。

定义 1.1. 设 R 是一个 $\mathbb{K}$-代数，且 $R[x, \sigma, \delta]$ 是一个 Ore 扩张。

1. 如果自同构与斜导子满足关系 $\delta \circ \sigma = q\sigma \circ \delta$，其中 $1 \neq q \in \mathbb{K}^*$，则我们称这一对 (σ, δ)，实际上也称 Ore 扩张，具有 q-斜性质。 2. 如果对于每个 $0 \neq a \in R$，都存在一个整数 $n_a \geq 0$，使得对于任意 $m < n_a$，均有 $\delta^{n_a}(a) = 0$ 且 $\delta^{m}(a) \neq 0$，则称斜导子 δ 是局部幂零的。我们将这样的 n_a 定义为 a 的 δ-幂零指数。 3. [Hay08] 如果存在一个由 R 上的 $\mathbb{K}$-线性算子构成的序列 $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$（当序列的下标显而易见时，简记为 $\{d_n\}$），满足以下条件，则称 σ-导子 δ 可以扩张为 R 上的高阶 q- 斜 σ- 导子（ h.q-s.σ-d. ）：

- d_0 是恒等映射；
- $d_1 = \delta$；

对所有 r、$s \in R$，以及所有 n，• $d_n(rs) = \sum_{i=0}^{n} \sigma^{n-i} d_i(r) d_{n-i}(s)$，

对所有 n，• $d_n \circ \sigma = q^n \sigma \circ d_n$。

若对所有 $0 \neq r \in R$，都存在一个整数 $n_r \geq 0$，使得对所有 $n \geq n_r$，$d_n(r) = 0$，且对任意 $m < n_r$，$d_m(r) \neq 0$，则称一个（h.q-s.σ-d.）是局部幂零的。在这种情况下，我们称 n_r 为 r 的 d-幂零指数。若对所有 n、m，$d_n d_m = \binom{n+m}{m}_q d_{n+m}$，则称一个 h.$q$-s.$\sigma$-d 是迭代的。这里，$\binom{n+m}{m}_q$ 是 q-高斯二项式系数：它是 q 上的 $\mathbb{Z}$ 多项式，具有类似于常规二项式系数的性质。更确切地说，对所有 $n \geq i \geq 0$，有 $\binom{n}{i}_q := (n)!_q (i)!_q (n-i)!_q$，其中 $(i)_q = \frac{q^i - 1}{q-1}$，且 $(i)!_q = (1)_q \cdots (i-1)_q (i)_q$，约定 $(0)!_q = 1$。

高阶斜导子使 Haynal 能够将 Cauchon 的消去导子同态推广为更一般的同态，从而适用于单位根。为了实际应用，[Hay08, 定理 2.8] 为 q-斜 Ore 扩张 $R[x;\ \sigma, \delta]$ 给出了一个充分条件，使得σ导子 δ 可扩展为任意 $1 \neq q \in \mathbb{K}^*$的 h.$q$-s.$\sigma$-d.。我们用它来检验我们感兴趣的具体例子是否确实满足这一条件。

本文研究的代数满足以下条件：

假设 1.2. 设 $A = \mathbb{K}[X_1][X_2;\ \sigma_2, \delta_2] \ldots [X_N;\ \sigma_N, \delta_N]$，其中 σ_i为相关子代数上的 $\mathbb{K}$-代数自同构，而 δ_i 为 A的相关子代数上的 σ_i-导子。将这些子代数记为 $A_{i-1} := \mathbb{K}[X_1][X_2;\ \sigma_2, \delta_2] \ldots [X_{i-1};\ \sigma_{i-1}, \delta_{i-1}]$，使得 $A_0 := \mathbb{K}$ 且 $A_N := A$。我们对 A施加以下条件：

H1.2.1：对所有 $l < i$ 和 $2 \leq i \leq N$，$\sigma_i(X_l) = \lambda_{i,l} X_l$，其中 $\lambda_{i,l} \in \mathbb{K}^*$。

H1.2.2：$\Lambda := (\lambda_{i,j}) \in M_N(\mathbb{K}^*)$ 是一个乘法反对称矩阵。也就是说，对所有 $1 \leq i$、$l \leq N$，$\lambda_{i,l} = \lambda_{l\,i}^{-1}$,。

H1.2.3：对于 $2 \leq i \leq N$，存在某个 $1 \neq q_i \in \mathbb{K}^*$ 使得 $\delta_i \circ \sigma_i = q_i \sigma_i \circ \delta_i$，即 (σ_i, δ_i) 是 q_i-斜对称的。

H1.2.4：对于所有 $2 \leq i \leq N$，每个 δ_i 都可扩展为一个局部幂零、迭代的 h.q_i-s.σ_i-d.，$\{d_{i,n}\}_{n=0}^{\infty}$，在 A_{i-1} 上，并且对所有 $n \geq 0$ 和 $i+1 \leq l \leq N$，$\sigma_l \circ d_{i,n} = \lambda_{l,i}^{n} d_{i,n} \circ \sigma_l$ 在 A_{i-1} 上。

满足假设 1.2 的代数称为量子幂零代数，包括量子舒伯特胞腔代数、量子化 Weyl 代数、仿射空间、辛空间和欧几里得空间的量子化坐标环，以及量子矩阵。

2 删除导子算法

本节的主要算法将在 A 满足假设 1.2 的代数中逐一消去斜导子：在 A的分式除环内迭代地改变不定元，直至得到一个量子仿射空间。该方法基本按照 [Cau03a 第 3 节的方式展开，2] 但采用了 [Hay08 命题 3.4] 中定义的同态。为应用此方法，我们需要能够重新排列 A的扩张。以下引理将实现这一点。

引理 2.1. 设

$$A = A_{j-1}[X_j; \sigma_j, \delta_j][X_{j+1}; \sigma_{j+1}] \dots [X_N; \sigma_N],$$
$$\hat{A} = A_{j-1}[X_j; \sigma_j, \delta_j][X_{j+1}^{\pm 1}; \sigma_{j+1}] \dots [X_N^{\pm 1}; \sigma_N],$$

其中自同构和斜导子满足性质 H1.2.1–H1.2.3 以及 $\delta_j \neq 0$。

（I）那么

$$A = A_{j-1}[X_{j+1}; \sigma_{j+1}^*] \dots [X_N; \sigma_N^*][X_j; \sigma_j', \delta_j'],$$
$$\hat{A} = A_{j-1}[X_{j+1}^{\pm 1}; \sigma_{j+1}^*] \dots [X_N^{\pm 1}; \sigma_N^*][X_j; \sigma_j', \delta_j'],$$

其中

(i) $\sigma_i^*|_{A_{j-1}} = \sigma_i|_{A_{j-1}}$ *for all* $j+1 \leq i \leq N$ *and* $\sigma_i^*(X_l) = \sigma_i(X_l) = \lambda_{i,l} X_l$ *for all* $j+1 \leq l < i$;

(ii) $\sigma_j'|_{A_{j-1}} = \sigma_j$ *and* $\delta_j'|_{A_{j-1}} = \delta_j$;

(iii) $\sigma_j'(X_l) = \lambda_{j,l} X_l = \lambda_{l,j}^{-1} X_l$ *and* $\delta_j'(X_l) = 0$ *for all* $j+1 \leq l \leq N$.

(II) (σ_j', δ_j') 是 q_j-斜的。

（III）假设性质 H1.2.4 也成立。那么 δ_j' 可扩展为作用于 $A_{j-1}\langle X_{j+1}^{\pm 1}, X_{j+2}^{\pm 1}, \dots, X_N^{\pm 1}\rangle$ 上的局部幂零、迭代的 h.q_j-s.σ_j'-d. $\{d_{j,n}'\}_{n=0}^{\infty}$，其中 $d_{j,n}'$ 与作用于 A_{j-1} 上的 $d_{j,n}$ 相同，并且对所有 $j+1 \leq l \leq N$ 和 $n \geq 1$, $d_{j,n}'(X_l) = 0$。此外，$\{d_{j,n}'\}_{n=0}^{\infty}$ 在 $A_{j-1}\langle X_{j+1}, X_{j+2}, \dots, X_N\rangle$ 上的限制是一个 h.q_j-s.σ_j'-d.，它同样是局部幂零且迭代的。

*Pro*的。这是 Hay08 中引理 4.1] 的一个归纳推论，具体细节留给读者。 □

在以下结果中，我们稍微滥用记号，对定义在同构代数上的映射使用相同的记号。当映射对代数生成元的作用不变时，即使代数本身发生了变化，我们也会这样做。例如，假设我们有两个同构的迭代 Ore 扩张。

$$\mathbb{K}[X_1][X_2; \sigma_2, \delta_2] \cong \mathbb{K}[x_1][x_2; \bar{\sigma}_2, \bar{\delta}_2],$$

其中 $\sigma_2(X_1) = \lambda X_1$ 且 $\bar{\sigma}_2(x_1) = \lambda x_1$ 对于相同的 $\lambda \in \mathbb{K}^*$。在这种情况下，我们简单地将 $\bar{\sigma}_2$ 记为 σ_2（$\bar{\delta}_2$也类似），并写作 $\mathbb{K}[x_1][x_2;\ \sigma_2,\ \delta_2]$。We 对于到同构子代数的映射的限制，也可以类似地滥用记号.

We 现在来描述适用于满足假设 1.2 的代数的消去导子算法。

2.1 算法

对每个 $j \in [\![2, N+1]\!]$，我们定义 F 中一列元素 $(X_1^{(j)}, \dots, X_N^{(j)}) :=$ 分式域(A)，并令 $A^{(j)} := \mathbb{K}\langle X_1^{(j)}, \dots, X_N^{(j)} \rangle$ 为由这些元素生成的 F 的子代数。对于 $j = N+1$，我们令 $(X_1^{(N+1)}, \dots, X_N^{(N+1)}) := (X_1, \dots, X_N)$，使得 $A^{(N+1)} = A$。对于某个固定的 $j \in [\![2, N]\!]$，我们假设代数 $A^{(j+1)}$ 满足以下假设；为方便记号，先令 $(x_1, \dots, x_N) := (X_1^{(j+1)}, \dots, X_N^{(j+1)})$。

假设 2.2.

H2.2.1： $A^{(j+1)} \cong \mathbb{K}[X_1] \dots [X_j; \sigma_j, \delta_j][X_{j+1}; \sigma_{j+1}^{(j+1)}] \dots [X_N; \sigma_N^{(j+1)}]$ 通过一个同构映射，该映射对所有 $i \in [\![1, N]\!]$ 将 x_i 送到 X_i。

H2.2.2：对于每个 $i \in [\![j+1, N]\!]$，映射 $\sigma_i^{(j+1)}$ 是一个自同构，使得 $\sigma_i^{(j+1)}(X_l) = \lambda_{i,l} X_l$ 对所有 $l \in [\![1, i-1]\!]$ 都成立。此外，对于所有 $l \in [\![2, j]\!]$ 和 $n \geq 0$，我们有 $\sigma_i^{(j+1)} \circ d_{l,n} = \lambda_{i,l}^n d_{l,n} \circ \sigma_i^{(j+1)}$。

这使我们能够写出

$$A^{(j+1)} = \mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_N \rangle \tag{1}$$

$$= \mathbb{K}[x_1] \dots [x_j; \sigma_j, \delta_j][x_{j+1}; \sigma_{j+1}^{(j+1)}] \dots [x_N; \sigma_N^{(j+1)}] \tag{2}$$

其中，对于满足假设 1.2 的 $i \in [\![2, j]\!]$，σ_i 和 δ_i，且 δ_i 可扩张为 A_{i-1} 上的局部幂零迭代 h.q_i-s.σ_i-d. $\{d_{i,n}\}_{n=0}^{\infty}$。

我们在 F 中定义一个新的元素序列 $(y_1, \dots, y_N) := (X_1^{(j)}, \dots, X_N^{(j)})$：

$$y_l = \begin{cases} x_l & l \geq j; \\ \sum_{n=0}^{\infty} q_j^{\frac{n(n+1)}{2}} (q_j - 1)^{-n} d_{j,n} \circ \sigma_j^{-n}(x_l) x_j^{-n} & l < j. \end{cases} \tag{3}$$

注意，上述给出的和是有限的，因为序列 $\{d_{j,n}\}_{n=0}^{\infty}$ 是局部幂零的。由此我们定义 $A^{(j)} := \mathbb{K}\langle y_1, \dots, y_N \rangle$。

定理 2.3. 设 A 如假设 1.2 所述，$A^{(j+1)}$ 如上所定义并满足假设 2.2。则有以下结论：

(I) $A^{(j)} \cong \mathbb{K}[X_1][X_2; \sigma_2, \delta_2] \cdots [X_{j-1}; \sigma_{j-1}, \delta_{j-1}][X_j; \sigma_j^{(j)}] \cdots [X_N; \sigma_N^{(j)}]$ *by an isomorphism which sends* y_l *to* X_l *for all* $l \in [\![1, N]\!]$.

(II) 对于所有 $i \in [\![j, N]\!]$，$\sigma_i^{(j)}$ 均为满足以下条件的自同构。

(i) $\sigma_i^{(j)}(X_l) = \lambda_{i,l} X_l$ *for all* $l \in [\![1, i-1]\!]$;

(ii) $\sigma_i^{(j)} \circ d_{l,n} = \lambda_{i,l}^n d_{l,n} \circ \sigma_i^{(j)}$ *for all* $n \geq 0$ *and all* $l \in [\![2, j-1]\!]$.

(III) 设 $S_j := \{x_j^n \mid n \geq 0\} = \{y_j^n \mid n \geq 0\}$。这是一个由正则元素构成的乘法封闭集，在 $A^{(j+1)}$ 和 $A^{(j)}$ 中满足双边奥尔条件，并且此外还满足 $A^{(j)} S_j^{-1} = A^{(j+1)} S_j^{-1}$。

证明。根据假设 2.2 及其后的讨论，我们可以将 $A^{(j+1)}$ 写作

$$A^{(j+1)} = \mathbb{K}[x_1] \dots [x_j; \sigma_j, \delta_j][x_{j+1}; \sigma_{j+1}^{(j+1)}] \dots [x_N; \sigma_N^{(j+1)}].$$

定义

$$A_{j-1}^{(j+1)} := \mathbb{K}[x_1][x_2;\sigma_2,\delta_2]\dots[x_{j-1};\sigma_{j-1},\delta_{j-1}].$$

若 $\delta_j = 0$，则 $A^{(j)} = A^{(j+1)}$，结论显然成立。因此，假设 $\delta_j \neq 0$，并将引理 2.1 应用于 $A^{(j+1)} = A_{j-1}^{(j+1)}[x_j;\ \sigma_j,\delta_j][x_{j+1};\ \sigma_{j+1}^{(j+1)}]\dots[x_N;\ \sigma_N^{(j+1)}]$，得到

$$A^{(j+1)} = A_{j-1}^{(j+1)}[x_{j+1};\sigma_{j+1}^{(j+1)*}]\dots[x_N;\sigma_N^{(j+1)*}][x_j;\sigma_j',\delta_j'], \tag{4}$$

其中

(a) 对所有 $i \in [\![j+1,N]\!]$，均有 $\sigma_i^{(j+1)*}|_{A_{j-1}^{(j+1)}} = \sigma_i^{(j+1)}|_{A_{j-1}^{(j+1)}}$，且 $\sigma_i^{(j+1)*}(x_l) = \sigma_i^{(j+1)}(x_l) = \lambda_{i,l}x_l$ 对所有 $l \in [\![j+1,i-1]\!]$ 均成立；(b) $\sigma_j'|_{A_{j-1}^{(j+1)}} = \sigma_j$ 且 $\delta_j'|_{A_{j-1}^{(j+1)}} = \delta_j$；

(c) $\sigma_j'(x_l) = \lambda_{j,l}x_l = \lambda_{l,j}^{-1}x_l$ and $\delta_j'(x_l) = 0$ for all $l \in [\![j+1,N]\!]$.

特别地，δ_j' 可扩展为定义在 $A_{j-1}^{(j+1)}\langle x_{j+1}^{\pm1}$ 上的一个 h.q_j-s.σ_j'-d.，$\{d_{j,n}'\}_{n=0}^{\infty}$，...，$x_N^{\pm1}\rangle$，其中

$$d_{j,n}'|_{A_{j-1}^{(j+1)}} = d_{j,n} \quad (\forall\ n \geq 0), \tag{5}$$

$$d_{j,n}'(x_l) = 0 \qquad (\forall\ l \in [\![j+1,N]\!] \text{ and } n \geq 1). \tag{6}$$

定义

$$\widehat{A^{(j+1)}} := A_{j-1}^{(j+1)}[x_{j+1};\sigma_{j+1}^{(j+1)*}]\dots[x_N;\sigma_N^{(j+1)*}]$$

于是方程（4）变为

$$A^{(j+1)} = \widehat{A^{(j+1)}}[x_j;\sigma_j',\delta_j'].$$

将 Hay08，定理 3.7]应用于 $A^{(j+1)}$，得到同构：

$$\begin{aligned} f : \widehat{A^{(j+1)}}[x_j^{\pm1};\sigma_j'] &\longrightarrow \widehat{A^{(j+1)}}[x_j;\sigma_j',\delta_j']S_j^{-1} \\ \widehat{A^{(j+1)}} \ni\ a &\longmapsto f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} q_j^{\frac{n(n+1)}{2}}(q_j-1)^{-n}d_{j,n}' \circ (\sigma_j')^{-n}(a)x_j^{-n} \\ x_j &\longmapsto x_j. \end{aligned}$$

注意，对所有 $l \in [\![j+1,N]\!]$，都有 $f(x_l) = x_l$，因为根据（6），对所有 $n \geq 1$，$d_{j,n}'(x_l) = 0$。若 $l \in [\![1,j-1]\!]$，则 x_l 且 $(\sigma_j')^{-n}(x_l) \in A_{j-1}^{(j+1)}$。因此，根据（5）及上文的（b），我们可在 $f(x_l)$ 中将 σ_j' 和 $d_{j,n}'$ 替换为 σ_j 和 $d_{j,n}$，从而得到

$$f(x_l) = \sum_{n=0}^{\infty} q_j^{\frac{n(n+1)}{2}}(q_j-1)^{-n}d_{j,n} \circ \sigma_j^{-n}(x_l)x_j^{-n} = y_l,$$

如 (3) 中所定义。因此，对于任意 $l \in [\![1,\ N]\!]$，我们可知，

$$f(x_l) = \begin{cases} x_l & l \geq j; \\ y_l & l < j. \end{cases}$$

因此，同构 f 将 x_l 映射到 y_l，对所有 $l \in [\![1,\ N]\!]$ 均成立。

根据 [Hay08 定理 3.7]，我们发现将 f 限制到 $A^{(j+1)}[x_j;\ \sigma'_j]$ 即可得到 [Hay08 命题 3.4] 中定义的删除导子同态。因此

$$\mathrm{Im}(f) \cong \widehat{A^{(j+1)}}[x_j;\sigma'_j], \tag{7}$$

其中 $\mathrm{Im}(f) = f(\widehat{A^{(j+1)}}[x_j;\ \sigma'_j])$ 是由 x_j 和 $f(\widehat{A^{(j+1)}})$ 生成的 $\widehat{A^{(j+1)}}[x_j^{\pm 1};\ \sigma'_j, \delta'_j]$ 的子代数。由于 $f(A^{(j+1)})$ 由 $\mathbb{K}$ 和 $\{y_l \mid l \neq j\}$ 生成，且由于 $x_j = y_j$，这仅仅说明

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}\langle y_1, \dots, y_N\rangle = A^{(j)}.$$

利用 (7)，我们可以看出

$$A^{(j)} = \mathrm{Im}(f) \cong \mathbb{K}[x_1]\dots[x_{j-1};\sigma_{j-1},\delta_{j-1}][x_{j+1};\sigma_{j+1}^{(j+1)*}]\dots[x_N;\sigma_N^{(j+1)*}][x_j;\sigma'_j],$$

因此，

$$A^{(j)} = \mathbb{K}[y_1]\dots[y_{j-1};\sigma_{j-1},\delta_{j-1}][y_{j+1};\sigma_{j+1}^{(j+1)*}]\dots[y_N;\sigma_N^{(j+1)*}][y_j;\sigma'_j]. \tag{8}$$

最后，我们应用 [Hay08, 命题 3.6]，得出 S_j 是 $A^{(j+1)}$ 和 $A^{(j)}$ 中正则元的乘法封闭集，满足双边 Ore 条件，并且

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f)S_j^{-1} &= \widehat{A^{(j+1)}}[x_j;\sigma'_j,\delta'_j]S_j^{-1},\\ A^{(j)}S_j^{-1} &= A^{(j+1)}S_j^{-1}.\end{aligned}$$

因此，断言 (III) 得证。

性质 $y_l y_j = \lambda_{l,j} y_j y_l$，以及 $\lambda_{l,j} = \lambda_{j\,l}^{-1}$，这一事实，使我们可以重排 (8)，得到

$$A^{(j)} = \mathbb{K}[y_1]\dots[y_{j-1};\sigma_{j-1},\delta_{j-1}][y_j;\sigma_j^{(j)}][y_{j+1};\sigma_{j+1}^{(j)}]\dots[y_N;\sigma_N^{(j)}]. \tag{9}$$

定义

$$A_{j-1}^{(j)} := \mathbb{K}[y_1]\dots[y_{j-1};\sigma_{j-1},\delta_{j-1}]$$

我们看到 $A_{j-1}^{(j)} \cong A_{j-1}$，并且存在一个同构。

$$\begin{aligned}A^{(j)} &= \mathbb{K}[y_1]\dots[y_{j-1};\sigma_{j-1},\delta_{j-1}][y_j;\sigma_j^{(j)}][y_{j+1};\sigma_{j+1}^{(j)}]\dots[y_N;\sigma_N^{(j)}]\\ &\cong \mathbb{K}[X_1]\dots[X_{j-1};\sigma_{j-1},\delta_{j-1}][X_j;\sigma_j^{(j)}][X_{j+1};\sigma_{j+1}^{(j)}]\dots[X_N;\sigma_N^{(j)}]\end{aligned} \tag{10}$$

将 y_l 发送到 X_l，对所有 $l \in [\![1, N]\!]$ 均如此，其中映射（定义在 $A^{(j)}$ 的适当子代数上）如下：

(a′) $\sigma_j^{(j)} = \sigma'_j|_{A_{j-1}^{(j)}} = \sigma_j$;

(b′) $\sigma_i^{(j)}|_{A_{j-1}^{(j)}} = \sigma_i^{(j+1)*}|_{A_{j-1}^{(j)}} = \sigma_i^{(j+1)}|_{A_{j-1}^{(j)}}$ for all $i \in [\![j+1, N]\!]$;

(c′) $\sigma_i^{(j)}(y_l) = \lambda_{i,l} y_l$ for all $i \in [\![j+1, N]\!]$ and $l \in [\![1, i-1]\!]$.

利用 (10) 中的同构以及上述观察 (a′)–(c′)，我们可以证明对于所有 $i \in [\![j, N]\!]$，断言 (II) 均成立：当 $i = j$ 时，观察 (a′) 证明了断言 (II) 的两个部分，因为根据定义，σ_j 满足断言 (II)（见 H1.2.1 和 H1.2.4）。当 $i \in [\![j+1, N]\!]$ 时，观察 (b′) 证明了 (II)(ii)，因为 $\sigma_i^{(j+1)}$ 满足 H2.2.2；观察 (c′) 则证明了 (II)(i)。

□

注 2.4. 如果 A 是满足假设 1.2 的代数，那么对于 $j = N + 1$，假设 2.2 成立。因此，定理 2.3 推出对于所有 $j \in [\![2, N + 1]\!]$，假设 2.2 也成立。

推论 2.5。代数 $A' := A^{(2)}$ 是一个量子仿射空间。更准确地说，对所有 $i \in [\![1、 N]\!]$，令 $T_i := X_i^{(2)}$，并令 $\Lambda:=(\lambda_{i,j}) \in M_N(\mathbb{K})$ 为乘法反对称矩阵，我们得到：

$$A' = \mathbb{K}_\Lambda[T_1, \ldots, T_N].$$

注 2.6。对于所有 $j \in [\![1、 N]\!]$，我们称 $A^{(j+1)}$ 是经过 $N - j$ 步消去导子算法从 A 得到的代数。

2.2 分式环

为了能够沿着消去导子算法跟踪完全素理想，我们需要以下两个关于算法每一步中的代数 $A^{(j)}$ 的分式除环的结果。这些结果已在一般情形下的 [Cau03a 第 3.3] 小节中得到证明，并且得益于上述结果，可以直接应用于我们的情形。

令 A' 中由元素 T_1、.....、T_N 生成的乘法封闭集为 Σ。对于 $j \in [\![2、 N]\!]$，定义集合 Σ_j：

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &:= \Sigma, \\ \Sigma_{j+1} &= A^{(j+1)} \cap \Sigma_j \quad \text{for } j \in [\![2, N]\!]. \end{aligned}$$

命题 2.7. 对所有 $j \in [\![2, N + 1]\!]$，以下结论均成立：

(i) Σ_j 是 $A^{(j)}$ 中包含 $X_{j-1}^{(j)}, .., X_N^{(j)}$ 的正则元乘法封闭集 ;

(ii) Σ_j 在 $A^{(j)}$ 中满足双边 Ore 条件；

(iii) 代数 $A^{(j)}\Sigma_j^{-1}$ ⊂Frac(A) 全都相等。

证明。我们对 j 使用归纳法。当 $j = 2$ 时，由 Σ 的定义，以及量子仿射空间的生成元（及这些生成元的单项式）都是正则元和正规元这一事实，结论 (i) 和 (ii) 显然成立。设 $j \in [\![2, N]\!]$，并假设结论 (i) 和 (ii) 对 j 成立。我们将证明它们对 $j + 1$ 也成立，并且 $A^{(j)}\Sigma_j^{-1} = A^{(j+1)}\Sigma_{j+1}^{-1}$。

回忆上一节的记号：$\{x_i\}_i = \{X_i^{(j+1)}\}_i$ 和 $\{y_i\}_i = \{X_i^{(j)}\}_i$，其中$x_i = y_i$对所有 $i \geq j$都成立。根据归纳假设，Σ_j是 $A^{(j)}$中包含 y_{j-1}、.....、y_N的正则元乘法封闭集。因此，$\Sigma_{j+1} = A^{(j)} \cap \Sigma_j$是 $A^{(j+1)}$中包含 $y_j = x_j$、.....、 $y_N = x_N$的正则元乘法封闭集，从而证明了命题 (i)。

回忆集合 $S_j = \{x_j^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{y_j^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \Sigma_j \cap \Sigma_{j+1}$，并利用定理 2.3(III) 得到以下包含关系

$$A^{(j+1)} \subset A^{(j+1)}S_j^{-1} = A^{(j)}S_j^{-1} \subset A^{(j)}\Sigma_j^{-1}. \tag{11}$$

由于 $\Sigma_{j+1} \subset \Sigma_j$，因此 Σ_{j+1} 在 $A^{(j)}\Sigma_j^{-1}$中必定可逆。利用这一点，我们证明元素$a \in A^{(j)}\Sigma_j^{-1}$可以改写为 $A^{(j+1)}\Sigma_{j+1}^{-1}$中的一个元素。设 $a = yu^{-1}$，其中 $y \in A^{(j)}$ 且$u \in \Sigma_j$。由于

$$\Sigma_j \subset A^{(j)} \subset A^{(j)}S_j^{-1} = A^{(j+1)}S_j^{-1},$$

我们可以写作 $u = vs_1^{-1}$和 $y = xs_2^{-1}$，其中 v、$x \in A^{(j+1)}$ 和 s_1、$s_2 \in S_j$。于是 a 变为

$$a = xs_2^{-1}(vs_1^{-1})^{-1} = xs_2^{-1}s_1v^{-1} = xs_1s_2^{-1}v^{-1} = xs_1(vs_2)^{-1}.$$

注意，由于 $u \in \Sigma_j$ 和 s_1、$s_2 \in S_j \subset \Sigma_j$，有 $vs_2 = (vs_1^{-1})s_1 s_2 = us_1 s_2 \in \Sigma_j$。此外，$v \in A^{(j+1)}$和 $s_2 \in S_j \subset A^{(j+1)}$，因此 $vs_2 \in A^{(j+1)} \cap \Sigma_j = \Sigma_{j+1}$。类似地，$xs_1 \in A^{(j+1)}$，所以我们可以写作

$$a = bc^{-1} \in A^{(j+1)}\Sigma_{j+1}^{-1},$$

其中 $b = xs_1 \in A^{(j+1)}$ 和 $c = vs_2 \in \Sigma_{j+1}$。根据归纳假设，我们知道 $A^{(j)}\Sigma_j^{-1} = \Sigma_j^{-1}A^{(j)}$，因此如果 $a \in A^{(j)}\Sigma_j^{-1}$，那么 $a \in \Sigma_j^{-1}A^{(j)}$也必然成立。我们还知道，根据定理 2.3(III)，S_j 是 $A^{(j)}$ 中的 Ore 集，且 $A^{(j+1)}$，因此 $A^{(j)}S_j^{-1} = S_j^{-1}A^{(j)}$ 和$A^{(j+1)}S_j^{-1} = S_j^{-1}A^{(j+1)}$。利用这些结果，我们可以沿用之前的类似方法，将$a \in A^{(j)}\Sigma_j^{-1} = \Sigma_j^{-1}A^{(j)}$ 改写为

$$a = c'^{-1}b' \in \Sigma_{j+1}^{-1}A^{(j+1)},$$

其中 $c' \in \Sigma_{j+1}$ 和 $b' \in A^{(j+1)}$。

如果我们能证明 Σ_{j+1} 是 $A^{(j+1)}$ 中的双侧奥尔集，那么上述推导表明 $A^{(j)}\Sigma_j^{-1} \subseteq A^{(j+1)}\Sigma_{j+1}^{-1}$。此外，$A^{(j+1)} \subset A^{(j)}\Sigma_j^{-1}$ 且 $\Sigma_{j+1} \subset \Sigma_j$，所以我们还有$A^{(j+1)}\Sigma_{j+1}^{-1} \subseteq A^{(j)}\Sigma_j^{-1}$。因此，只要能证明陈述 (ii) 成立，陈述 (iii) 就成立。

由包含关系 $A^{(j+1)}\Sigma_{j+1}^{-1} \subseteq A^{(j)}\Sigma_j^{-1}$，我们可以将任意 $a = bc^{-1} \in A^{(j+1)}\Sigma_{j+1}^{-1}$ 写成 $a \in A^{(j)}\Sigma_j^{-1}$，并且应用上述推导过程，可以看出存在 $c' \in \Sigma_{j+1}$ 和 $b' \in A^{(j+1)}$，使得 $a = c'^{-1}b' \in \Sigma_{j+1}^{-1}A^{(j+1)}$。这验证了在 $\Sigma_{j+1} \subset A^{(j+1)}$ 上成立的双边 Ore 条件，这是证明命题 (ii) 所必需的，并根据前面的说明，也能证明命题 (iii)。□

由上述命题可清楚看出:

定理 2.8. (i) 存在一个由正则元构成的乘法封闭集 $S \subseteq A$，使得 $AS^{-1} = A'\Sigma^{-1} = \mathbb{K}_\Lambda[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_N^{\pm 1}]$。

(ii) 对所有 $j \in [\![2, N+1]\!]$，$A^{(j)}$ 的分式域 Frac($A^{(j)}$) = Frac(A)；特别地，Frac(A) = Frac(A')。

(iii) 对所有 $i, j \in [\![1, N]\!]$，A 是 PI 代数当且仅当 $\lambda_{i,\,j}$是单位根；在这种情况下，PI-deg(A) = PI-deg(A')。

证明。令 $S = \Sigma_{N+1}$。命题 2.7(iii)表明 $AS^{-1} = A'\Sigma^{-1}$，且所有代数$A^{(j)}$ 都有共同的局部化，从而证明了 (i) 和 (ii)。CP93，命题 7.1] 指出，对于所有 $1 \leq i, j \leq N$，A' 是 PI 代数当且仅当 $\lambda_{i,\,j}$ 是单位根；而 Hay08，推论 4.7] 对 A给出了相同的结论。因此，由于它们的全分式环相同，它们具有相同的 PI 度。这就证明了 (iii)。□

3 完全素商上的消去导子算法

本节中，我们建立一个典范嵌入 ψ : C.Spec(A) →C.Spec(A')，将 A 的完全素谱映射到 A' 的完全素谱，并以此将上一节的算法扩展到商代数。我们还定义了判据，用于判断某个理想 $Q \in$ C.Spec(A') 是否属于 ψ 的像。

本节的许多结果与一般情形 [Cau03a 第 4 节和第 5] 节中的结果相对应；得益于上一节的结果，它们的证明几乎完全相同。关于第 3.2 小节中典范嵌入的成员判定准则的证明，与泊松情形中的证明十分相似，后者见 [LL17 第 2.3 节和第 2.4] 节。

3.1 完全素谱的典范嵌入与划分 a

3.1.1 嵌入

设 A 满足假设 1.2，并定义以下集合；我们在这些集合上赋予诱导的扎里斯基拓扑：

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_j^0(A^{(j)}) &:= \{P \in \mathrm{C.Spec}(A^{(j)}) \mid y_j \notin P\},\\ \mathcal{P}_j^1(A^{(j)}) &:= \{P \in \mathrm{C.Spec}(A^{(j)}) \mid y_j \in P\},\\ \mathcal{P}_j^0(A^{(j+1)}) &:= \{P \in \mathrm{C.Spec}(A^{(j+1)}) \mid x_j \notin P\},\\ \mathcal{P}_j^1(A^{(j+1)}) &:= \{P \in \mathrm{C.Spec}(A^{(j+1)}) \mid x_j \in P\}.\end{aligned}$$

在以下结果中，我们所说的“递增”是指同胚相对于理想的包含关系保持序。我们所说的“双递增”是指同胚及其逆映射都是递增同胚。

引理 3.1. 存在一个递增同胚 $\psi_j^0 : \mathcal{P}_j^0(A^{(j+1)}) \to \mathcal{P}_j^0(A^{(j)})$，其定义为$\psi_j^0(P) := PS_j^{-1} \cap A^{(j)}$。其逆映射定义为 $(\psi_j^0)^{-1}(Q) := QS_j^{-1} \cap A^{(j+1)}$，且也是递增的。因此，$\psi_j^0$ 是双递增的。

证明. 扩张与收缩映射给出了 C.Spec($A^{(j)}S_j^{-1}$) 与 $\mathcal{P}_j^0(A^{(j)})$ 之间的双递增逆同胚。类似地，我们得到 $\mathcal{P}_j^{(0)}$ ($A^{(j+1)}$) 与 C.Spec($A^{(j+1)}S_j^{-1}$) 之间的双递增同胚。由于 $A^{(j)}S_j^{-1} = A^{(j+1)}S_j^{-1}$，它们的完全素谱作为拓扑空间是相等的。因此，此处定义的两个双递增同胚给出了本引理陈述中的双递增同胚。 □

接下来，我们将注意力转向集合 $\mathcal{P}_j^1(A^{(j)})$ 和 $\mathcal{P}_j^1(A^{(j+1)})$。

引理 3.2. 存在一个满代数同态 g_j: $A^{(j)} \to A^{(j+1)}/\langle x_j\rangle$，它将 $y_i \mapsto x_i + \langle x_j\rangle$ 映至 $1 \le i \le N$ 中的所有元素，其中 $x_i + \langle x_j\rangle$ 是 x_i 在 $A^{(j+1)}/\langle x_j\rangle$ 中的典范像。

证明. 根据定理 2.3，我们有

$$\begin{aligned}A^{(j+1)} &:= \mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_N\rangle \cong \mathbb{K}[X_1]\cdots[X_j;\sigma_j,\delta_j][X_{j+1};\sigma_{j+1}^{(j+1)}]\cdots[X_N;\sigma_N^{(j+1)}],\\ A^{(j)} &:= \mathbb{K}\langle y_1, \dots, y_N\rangle \cong \mathbb{K}[X_1]\cdots[X_{j-1};\sigma_{j-1},\delta_{j-1}][X_j;\sigma_j^{(j)}]\cdots[X_N;\sigma_N^{(j)}].\end{aligned}$$

将这些代数限制到 $R := \mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_{j-1}\rangle$ 和 $S := \mathbb{K}\langle y_1, \dots, y_{j-1}\rangle$，我们看到存在一个同构 $S \to R$，它对所有 $i \in [\![1, j-1]\!]$ 都将 $y_i \mapsto x_i$ 映至相应元素。由于 $R \subseteq A^{(j+1)}$，我们可以将此同构与自然满射 $A^{(j+1)} \to A^{(j+1)}/\langle x_j\rangle$ 复合，从而得到代数同态 f: $S \to A^{(j+1)}/\langle x_j\rangle$，对所有 $i \in [\![1, j-1]\!]$ 都将 $y_i \mapsto x_i + \langle x_j\rangle$ 映至相应元素。利用 $A^{(j+1)}$ 的交换关系以及 $x_j + \langle x_j\rangle = 0$ 这一事实，我们看到 $(x_j + \langle x_j\rangle)(x_i + \langle x_j\rangle) = \lambda_{j,\,i}(x_i + \langle x_j\rangle)(x_j + \langle x_j\rangle) = 0$ 对所有 $i \in [\![1, j-1]\!]$ 都成立。因此，$x_i + \langle x_j\rangle \in A^{(j+1)}/\langle x_j\rangle$ 上的关系与 $y_i \in S[y_j$ 上的关系一致；对于所有 $i \in [\![1, N]\!]$，有 $\sigma_j^{(j)}]\cdots[y_N;\sigma_N^{(j)}] = A^{(j)}$。应用 Ore 扩张的泛性质，我们便可完成满同态 g_j 的构造。 □

引理 3.3. 存在一个递增单射映射 ψ_j^1: $\mathcal{P}_j^1(A^{(j+1)}) \to \mathcal{P}_j^1(A^{(j)})$，将 $P \mapsto \psi_j^1(P) := g_j^{-1}(P/\langle x_j\rangle)$，其中 $P/\langle x_j\rangle$ 表示 P 在 $A^{(j+1)}/\langle x_j\rangle$ 中的典范像；该映射在 $\mathcal{P}_j^1(A^{(j+1)})$ 与像 $\psi_j^1(\mathcal{P}_j^1(A^{(j+1)}))$ 之间诱导出一个双递增同胚。

证明. 利用代数第一同构定理，将引理 3.2 中的映射 g_j 限制后得到一个同构 $g'_j: A^{(j)}/\ker(g_j) \xrightarrow{\sim} A^{(j+1)}/\langle x_j\rangle$。这在赋予扎里斯基拓扑的集合之间诱导出以下双递增同胚:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathcal{P}_j^1(A^{(j+1)}) &\longrightarrow \mathrm{C.Spec}(A^{(j+1)}/\langle x_j\rangle), \\ f_2 : \mathrm{C.Spec}(A^{(j+1)}/\langle x_j\rangle) &\longrightarrow \mathrm{C.Spec}(A^{(j)}/\ker(g_j)), \\ f_3 : \mathrm{C.Spec}(A^{(j)}/\ker(g_j)) &\longrightarrow \{Q \in \mathrm{C.Spec}(A^{(j)}) \mid \ker(g_j) \subseteq Q\}. \end{aligned}$$

这些映射的复合构成了一个双递增同胚。

$$\begin{aligned} f_3 \circ f_2 \circ f_1 : \mathcal{P}_j^1(A^{(j+1)}) &\longrightarrow \{Q \in \mathrm{C.Spec}(A^{(j)}) \mid \ker(g_j) \subseteq Q\} \\ P &\longmapsto g_j^{-1}(P/\langle x_j\rangle). \end{aligned}$$

注意，$g_j(y_j) = x_j + \langle x_j\rangle = 0$ 因此 $\langle y_j\rangle \subseteq \ker(g_j)$，这导出了包含关系。

$$\{Q \in \mathrm{C.Spec}(A^{(j)}) \mid \ker(g_j) \subseteq Q\} \subseteq \mathcal{P}_j^1(A^{(j)}).$$

因此，根据 $f_3 \circ f_2 \circ f_1$，我们可以定义一个递增单射映射

$$\begin{aligned} \psi_j^1 : \mathcal{P}_j^1(A^{(j+1)}) &\longrightarrow \mathcal{P}_j^1(A^{(j)}) \\ P &\longmapsto g_j^{-1}(P/\langle x_j\rangle), \end{aligned}$$

这在其像上诱导出一个双递增同胚，$\{Q \in \mathrm{C.Spec}(A^{(j)}) \mid \ker(g_j) \subseteq Q\}$。 □

利用前面两个结果，我们定义映射 $\psi_j : \mathrm{C.Spec}(A^{(j+1)}) \to \mathrm{C.Spec}(A^{(j)})$，其中，对于 $P \in \mathrm{C.Spec}(A^{(j+1)})$，我们令

$$\psi_j(P) := \begin{cases} \psi_j^0(P) = PS_j^{-1} \cap A^{(j)} & \text{if } P \in \mathcal{P}_j^0(A^{(j+1)}); \\ \psi_j^1(P) = g_j^{-1}(P/\langle x_j\rangle) & \text{if } P \in \mathcal{P}_j^1(A^{(j+1)}). \end{cases}$$

下一个结果立即得出。

命题 3.4. 对于 $j \in [\![2, N]\!]$，映射 ψ_j: $\mathrm{C.Spec}(A^{(j+1)}) \to \mathrm{C.Spec}(A^{(j)})$ 是单射。对于 $\epsilon \in \{0, 1\}$, ψ_j，它通过限制诱导出一个双递增同胚 $\mathcal{P}_j^\epsilon(A^{(j+1)}) \to \psi_j(\mathcal{P}_j^\epsilon(A^{(j+1)}))$，而后者是 $\mathcal{P}_j^\epsilon(A^{(j)})$ 的闭子集。

利用这些映射，我们定义典范嵌入:

定义 3.5. 令 $\psi := \psi_2 \circ \cdots \circ \psi_N$ 为单射 ψ: $\mathrm{C.Spec}(A) \longrightarrow \mathrm{C.Spec}(A')$。我们称 ψ 为从 $\mathrm{C.Spec}(A)$ 到 $\mathrm{C.Spec}(A')$ 的典范嵌入。

3.1.2 C.Spec(A) 的划分

令 $\mathcal{W} := \mathbb{P}([\![1, N]\!])$ 表示 $[\![1, N]\!]$ 的幂集，并对所有 $w \in \mathcal{W}$，设

$$\mathrm{C.Spec}_w(A') := \{Q \in \mathrm{C.Spec}(A') \mid Q \cap \{T_1, \dots T_N\} = \{T_i \mid i \in w\}\},$$

其中 $\{T_i\}_{i=1}^N$ 是量子仿射空间 A'的生成元。根据 [GL98，第 2.1] 节，我们得到:

引理 3.6. 集合 $\{\mathrm{C.Spec}_w(A')\}_{w\in\mathcal{W}}$ 构成了 $\mathrm{C.Spec}(A')$ 的一个划分。

我们使用 ψ 将此划分拉回到 C.Spec(A) 上。对于每个 $w \in \mathcal{W}$，我们定义

$$\mathrm{C.Spec}_w(A) := \psi^{-1}(\mathrm{C.Spec}_w(A'))$$

并令 $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$ 表示所有满足 C.Spec$_w$(A) $\neq \emptyset$ 的 $w \in \mathcal{W}$ 的集合。（注意，$\mathcal{W}'$ 取决于代数 A 作为迭代 Ore 扩张的表达式。）我们立即得到 C.Spec(A) 的一个划分。

定理 3.7. 集合 C.Spec(A) 可按族 $\mathcal{W}'$ 划分，使得，

$$\mathrm{C.Spec}(A) = \bigsqcup_{w \in \mathcal{W}'} \mathrm{C.Spec}_w(A), \quad \textit{where } |\mathcal{W}'| \leq |\mathcal{W}| = 2^N.$$

定义 3.8. 我们称划分 $\{\text{C.Spec}_w(A)\}_{w \in \mathcal{W}'}$ 为 C.Spec(A) 的典范划分，并称其中每个 $w \in \mathcal{W}'$ 为 A 的 Cauchon 图。

3.2 典范嵌入的性质

为了利用消去导子算法计算商代数的 PI 度，我们需要能够判断 A' 的一个完全素理想是否属于典范嵌入的像。

引理 3.9. 固定某个 $j \in [\![2, N]\!]$，并令 $Q \in$ C.Spec($A^{(j)}$)。那么，

$$Q \in \mathrm{Im}(\psi_j) \iff [\textit{Either } x_j = y_j \notin Q \textit{ or } \ker(g_j) \subseteq Q].$$

证明。分别将引理 3.1 和 3.3 应用于情形 $y_j \notin Q$ 和 $y_j \in Q$。 □

我们定义单射 f_j: C.Spec($A^{(j+1)}$) $\to$ C.Spec(A')，对所有 $j \in [\![1, N]\!]$，其中 $f_1 :=$ id$_{\mathrm{C.Spec}(A')}$ 是 C.Spec(A') 上的恒等映射；并且对所有 $j \in [\![2, N]\!]$, $f_j := \psi_2 \circ \cdots \circ \psi_j$，使得 $f_N = \psi$。命题 3.10。设 $Q \in$C.Spec(A')。以下条件等价：

- $Q \in$ Im(ψ)。
- 对于所有 $j \in [\![2, N]\!]$，我们有 $Q \in$Im(f_{j-1})，且以下两者之一成立：$X_{(j)j} = X_{(j+1)j} \notin f_{j-1}^{-1})$($Q$) 或 ker($g_j$) $\subseteq f_{j-1}^{-1}$(Q)。

证明。设 $Q \in$ C.Spec(A')。假设 $Q \in$ Im(ψ)。则对于某个 $P \in$ C.Spec(A)，有 $Q = \psi(P)$。由于 $\psi = f_{j-1} \circ \psi_j \circ \cdots \psi_N$，因此对于所有 $j \in [\![2, N]\!]$，都有 $Q = f_{j-1}(P_j)$，其中 $P_j = \psi_j \circ \cdots \circ \psi_N(P)$。因此，对于所有 $j \in [\![2, N]\!]$，都有 $Q \in$Im(f_{j-1})。由此可知，对于所有 $j \in [\![2, N]\!]$，$f_{j-1}^{-1}(Q) \in$Im(ψ_j)，并且我们将引理 3.9 应用于 $f_{j-1}^{-1}(Q)$，从而得出结论：要么 $X_j^{(j)} = X_j^{(j+1)} \notin f_{j-1}^{-1}(Q)$，要么 ker($g_j$) $\subseteq f_{j-1}^{-1}$(Q)。

现在假设第二个陈述成立。由引理 3.9，$f_{j-1}^{-1}(Q) \in$Im(ψ_j) 对所有 $j \in [\![2, N]\!]$ 均成立。令 $P' := f_{N-1}^{-1}(Q)$，使得 $P' \in$Im(ψ_N)。那么，对于某个 $P \in$C.Spec(A)，有 $P' = \psi_N(P)$，并且

$$Q = f_{N-1}(P') = f_{N-1}(\psi_N(P)) = \psi(P) \in \mathrm{Im}(\psi).$$

□

我们通过给出一个充分条件来结束本小节，该条件用于判断 A' 中的一个完全素理想是否属于典范嵌入的像。然而，本文并未使用接下来的两个结果，但为了方便感兴趣的读者，我们仍在此列出（证明可见 [Rog19，第 4] 节）。

定理 3.11。 *[Rog19, 定理 4.17]* 设 $w \in \mathcal{W}'$。那么 ψ(C.Spec$_w$(A)) 是 C.Spec$_w$(A') 的一个（非空）闭子集，并且映射 ψ 通过限制诱导出一个从 C.Spec$_w$(A) 到 ψ(C.Spec$_w$(A)) 的双递增同胚。

命题 3.12。 *[Rog19，命题 4.18]* 设 $w \in \mathcal{W}'$, $P \in$ C.Spec$_w$(A)，且 $Q \in$ C.Spec$_w$(A')。若 $\psi(P) \subseteq Q$ 则 $Q \in$ Im(ψ)。

3.3 完全素商

在本小节中，我们将第 2 节中的算法扩展到量子幂零代数的完全素商代数。前几节的结果使我们能够以类似于 [Cau03a，第 5.3] 节中所用的方法构造证明。此扩展算法将使我们能够把 A'/Q 上的某些不可约表示（第 5 节中对此作了阐明）拉回到 A/P 上的不可约表示。

3.3.1 $A^{(j)}/P$ 与 $A^{(j+1)}/\psi_j(P)$

我们先将算法的一步扩展到完全素商。对于某些 $j \in [\![2, N]\!]$，令 $P \in \text{C.Spec}(A^{(j+1)})$ 和 $Q = \psi_j(P) \in \text{C.Spec}(A^{(j)})$ 为其在典范嵌入下的像。设

$$B^{(j+1)} := A^{(j+1)}/P, \quad B^{(j)} := A^{(j)}/Q.$$

我们分别用 $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_N \in B^{(j+1)}$ 和 $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N \in B^{(j)}$ 表示 $B^{(j+1)}$ 中生成元 $x_1, \ldots, x_N \in A^{(j+1)}$ 以及 $B^{(j)}$ 中生成元 $y_1, \ldots, y_N \in A^{(j)}$ 的典范像。

引理 3.13. 假设 $\bar{x}_j = 0$。则存在一个代数同构 $B^{(j)} \to B^{(j+1)}$，对所有 $i \in [\![1, N]\!]$ 均将 $\bar{y}_i \mapsto \bar{x}_i$ 映为

证明。由于 $x_j \in P$，因此 $Q = \psi_j^1(P) = g_j^{-1}(P/\langle x_j \rangle)$。将 g_j 与自然满射 π : $A^{(j+1)}/\langle x_j \rangle \to A^{(j+1)}/P$ 复合，可得如下满代数同态:

$$\begin{array}{ccccc} A^{(j)} & \xrightarrow{g_j} & A^{(j+1)}/\langle x_j \rangle & \xrightarrow{\pi} & A^{(j+1)}/P \\ y_i & \longmapsto & x_i + \langle x_j \rangle & \longmapsto & \bar{x}_i, \end{array}$$

注意到 $\ker(\pi \circ g_j) = g_j^{-1}(P/\langle x_j \rangle) = Q$ 后，即可构造所需的同构。

□

引理 3.14. 设 $\bar{x}_j \neq 0$，并令 $Z_j := \{\bar{x}_j^n \mid n \in \mathbb{N}\}$。则有以下结论:

(i) Z_j 是 $B^{(j+1)}$ 的正则元乘法集，并满足双边 Ore 条件。

(ii) 存在一个单射代数同态 $\gamma : B^{(j)} \to B^{(j+1)} Z_j^{-1}$，它在 $B^{(j)}$ 的生成元上的定义如下:

$$\gamma(\bar{y}_i) = \begin{cases} \bar{x}_i & \text{if } i \geq j; \\ \sum_{n=0}^{\infty} q_j^{\frac{n(n+1)}{2}} (q_j - 1)^{-n} \lambda_{j,i}^{-n} \overline{d_{j,n}(x_i)} \bar{x}_j^{-n} & \text{if } i < j, \end{cases}$$

其中，$\overline{d_{j,\,n}(x_i)}$ 表示 $d_{j,\,n}(x_i)$ 在 $B^{(j+1)}$ 中的典范像。

(iii) 如果我们将 $B^{(j)}$ 与其像 $\gamma(B^{(j)}) \subseteq B^{(j+1)} Z_j^{-1}$ 视为同一对象，那么 Z_j 是 $B^{(j)}$ 中满足双边 Ore 条件的正则元乘法集。此外，$B^{(j)} Z_j^{-1} = B^{(j+1)} Z_j^{-1}$。

证明。由于 $x_j \notin P$，因此 $Q = \psi_j^0(P) = P S_j^{-1} \cap A^{(j)}$，其中 $S_j = \{x_j^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是 $A^{(j+1)}$ 中满足双边 Ore 条件的正则元的乘法封闭集（定理 2.3(III)）。将子代数 $A^{(j+1)} S_j^{-1} = A^{(j)} S_j^{-1} \subseteq F$ 记为 Ω，将完全素理想 $P S_j^{-1} = Q S_j^{-1}$ 记为 $\Theta \lhd \Omega$。注意到 $\Theta \cap A^{(j+1)} = P$ 且 $\Theta \cap A^{(j)} = Q$。

我们定义一个单射代数同态 $\gamma'\colon B^{(j+1)} \longrightarrow \Omega/\Theta;\quad a+P \longmapsto a1^{-1}+\Theta$，并将 $B^{(j+1)}$ 与其像等同。由于 $Z_j = \{\bar{x}_j^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x_j^n + P \mid n \in \mathbb{N}\} = S_j + P$，其在 γ' 下的像变为

$$\gamma'(Z_j) = Z_j 1^{-1} + \Theta = (S_j + P)1^{-1} + \Theta = S_j 1^{-1} + \Theta \subseteq B^{(j+1)} \subseteq \Omega/\Theta.$$

将 Z_j 与其像 $\gamma'(Z_j)$ 相对应的元素等同起来，我们注意到集合 Z_j 中的所有元素在 $B^{(j+1)}$ 中都是可逆的。因此，我们可以将任意元素 $b \in \Omega/\Theta$ 写成

$$b = a_1 s_1^{-1} + \Theta = s_2^{-1} a_2 + \Theta, \tag{12}$$

其中 a_1、$a_2 \in A^{(j+1)}$ 和 s_1、$s_2 \in S_j$。令 b_1、$b_2 \in B^{(j+1)}$ 和 z_1、$z_2 \in Z_j$ 使得

$$b_1 = a_1 1^{-1} + \Theta, \quad b_2 = a_2 1^{-1} + \Theta, \quad z_1 = s_1 1^{-1} + \Theta, \quad z_2 = s_2 1^{-1} + \Theta.$$

利用 (12)，我们看到，对于所有 $b \in \Omega/\Theta$,

$$b = b_1 z_1^{-1} = z_2^{-1} b_2.$$

这表明集合 $Z_j \subset B^{(j+1)}$ 满足双边 Ore 条件，从而证明了引理的性质 (i)。我们还证明了等式 $B^{(j+1)} Z_j^{-1} = \Omega/\Theta$，即 $(A^{(j+1)}/P)Z_j^{-1} = A^{(j+1)} S_j^{-1}/P S_j^{-1}$。

对于第 (ii) 部分，我们利用 $\Theta \cap A^{(j)} = Q$ 和 $B^{(j+1)} Z_j^{-1} = \Omega/\Theta$ 这一事实来定义一个单射同态

$$\begin{aligned} \gamma : B^{(j)} &\longrightarrow \Omega/\Theta \\ a+Q &\longmapsto a1^{-1}+\Theta. \end{aligned}$$

回顾一下，生成元 $y_i \in A^{(j)}$ 定义如下:

$$y_i := \begin{cases} x_i & \text{if } i \geq j; \\ \sum_{n=0}^{\infty} q_j^{\frac{n(n+1)}{2}} (q_j - 1)^{-n} \lambda_{j,i}^{-n} d_{j,n}(x_i) x_j^{-n} & \text{if } i < j. \end{cases}$$

It 不难验证，$\gamma(\bar{y}_i) = y_i 1^{-1} + \Theta$ 对 $i < j$ 和 $i \geq j$ 得出所需结果。通过将 $B^{(j)}$ 与其像 $\gamma(B^{(j)})$ 对应起来，可用与 (i) 相同的方法证明 (iii)。 □

引理 3.13 和 3.14 推出:

引理 3.15。$\mathrm{Frac}(B^{(j+1)}) = \mathrm{Frac}(B^{(j)})$。

3.3.2 A/P 与 $A'/\psi(P)$

我们继续扩展该算法，使其适用于完全素商 A/P。令 $P \in \mathrm{C.Spec}(A)$ 且 $Q = \psi(P) \in \mathrm{C.Spec}(A')$，并作如下记号:

- $B := A/P$ 并令 $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_N \in B$ 为 $X_1, \ldots, X_N \in A$ 的典范像。
- $B' := A'/Q$ 并令 $t_1, \ldots, t_N \in B'$ 为 $T_1, \ldots, T_N \in A'$ 的典范像。
- 对于 $j \in [\![2, N+1]\!]$，记 $P_j := \psi_j \circ \cdots \circ \psi_N(P) \in \mathrm{C.Spec}(A_{(j)})$ 为 P 的像，之后 r $N - j + 1$ 消去导子算法的步骤。

• 对于每个 $j \in [\![2, N+1]\!]$，定义代数 $B^{(j)} := A^{(j)}/P_j$，并将 $\bar{X}_1^{(j)}, \ldots, \bar{X}_N^{(j)}$ 记为 $X_1^{(j)}, \ldots, X_N^{(j)}$ 在 $B^{(j)}$ 中的典范像。注意：$B^{(N+1)} = B$，其中 $(\bar{X}_1^{(N+1)}, \ldots, \bar{X}_N^{(N+1)}) = (\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_N)$，且 $B^{(2)} = B'$，其中 $(\bar{X}_1^{(2)}, \ldots, \bar{X}_N^{(2)}) = (t_1, \ldots, t_N)$。

命题 3.16. 对于每个 $j \in [\![2, N+1]\!]$，$B^{(j)}$ 都是由 $\bar{X}_1^{(j)}$，…，$\bar{X}_N^{(j)}$ 生成的 Frac(B) 的一个子代数，并且存在一个代数同态，

$$\begin{aligned} f_j : \quad A^{(j)} &\longrightarrow \mathrm{Frac}(B) \\ X_i^{(j)} &\longmapsto \bar{X}_i^{(j)} \end{aligned}$$

含像 $B^{(j)}$ 和核 P_j。

证明。由于 $B^{(j)}$ 是由 $\bar{X}_1^{(j)}$、…、$\bar{X}_N^{(j)}$ 生成的分式域 Frac($B^{(j)}$) 的一个（平凡的）子代数，引理 3.15 表明，$B^{(j)}$ 是由这些相同元素生成的 Frac(B) 的一个子代数。同态 f_j 是自然嵌入 $B^{(j)} \hookrightarrow$ Frac(B) 与典范满射 $\pi_j : A^{(j)} \to A^{(j)}/P_j = B^{(j)}$ 的复合。所述像和核很容易验证。 □

命题 3.17。令 $j \in [\![2, N+1]\!]$。

(i) If $\bar{X}_j^{(j+1)} = 0$ *then* $\bar{X}_i^{(j)} = \bar{X}_i^{(j+1)}$ *for all* $i \in [\![1, N]\!]$.

(ii) 假设 $\bar{X}_j^{(j+1)} \neq 0$，并令 $(x_1, \ldots, x_N) := (X_1^{(j+1)}, \ldots, X_N^{(j+1)})$。那么 $B^{(j)}$ 的生成元可以按如下方式得到：

$$\bar{X}_i^{(j)} = \begin{cases} \bar{X}_i^{(j+1)} & \text{if } i \geq j; \\ \sum_{n=0}^{\infty} q_j^{\frac{n(n+1)}{2}} (q_j - 1)^{-n} \lambda_{j,i}^{-n} f_{j+1} \circ d_{j,n}(x_i) (\bar{X}_j^{(j+1)})^{-n} & \text{if } i < j, \end{cases}$$

其中，f_{j+1} 是命题 3.16 中定义的映射。

(iii) 假设 $\bar{X}_j^{(j+1)} \neq 0$，并令 $Z_j = \{(\bar{X}_j^{(j+1)})^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{(\bar{X}_j^{(j)})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 为 $B^{(j)}$ 和 $B^{(j+1)}$ 中由正则元构成的乘法封闭集。那么，Z_j 在 $B^{(j)}$ 和 $B^{(j+1)}$ 中均满足双边 Ore 条件，并且我们有 $B^{(j)} Z_j^{-1} = B^{(j+1)} Z_j^{-1}$。

证明。引理 3.13 和 3.15 证明了部分 (i)。注意到$f_{j+1} \circ d_{j,\ n}(x_i) = d_{j,\ n}(x_i) \cdot 1^{-1} \in$ 分式域(B)，根据引理 3.14 即可得出部分 (ii)。部分 (iii) 也可由引理 3.14 直接得出。 □

设 $w \in \mathcal{W}'$ 满足 $P \in$ C.Spec$_w$(A) 且 $Q = \psi(P)$。根据 C.Spec$_w$(A') 的定义，我们有：$T_i \in Q$ 当且仅当 $i \in w$，或者等价地，$t_i = 0$ 当且仅当 $i \in w$。设 $i \in \bar{w} := \{1, \ldots, N\} \backslash w$，使得 $t_i \neq 0$。于是，由于 T_i 在 A' 中是正规元，且 Q 是完全素的，t_i 在 B'中是正规元和正则元，因此它在分式域(B') =分式域(B)中可逆。我们将由所有满足 $i \in \bar{w}$ 的 t_i 生成的 B' 中正则元的乘法封闭集记为 Σ。基于此集合，我们按如下方式递归定义集合 $\Sigma_j \subset B^{(j)}$（其中 $j \in [\![2, N+1]\!]$）：

$$\Sigma_2 := \Sigma, \quad \Sigma_{j+1} := B^{(j+1)} \cap \Sigma_j.$$

下一个结果将命题 2.7 推广到了商代数。

命题 3.18。对于每个 $j \in [\![2, N+1]\!]$，以下陈述均成立：

(i) Σ_j 是 $B^{(j)}$ 中的正则元乘法封闭集，并包含子集$\{\bar{X}_i^{(j)} \mid i \in [\![j-1, N]\!]$ 和 $\bar{X}_i^{(j)} \neq 0\}$；

(ii) Σ_j 在 $B^{(j)}$ 中满足双边 Ore 条件;

(iii) 将代数 $B^{(j)}\Sigma_j^{-1}$ 视为分式域 Frac(B) 的子代数时，它们都相等。

证明。我们通过对 j 进行归纳法来推进。当 $j=2$ 时，根据本命题之前的讨论，陈述 (i) 和 (ii) 立即成立。固定 $j \in [\![2, N]\!]$，并假设陈述 (i) 和 (ii) 成立。我们证明，当将 j 替换为 $j+1$ 且 $B^{(j)}\Sigma_j^{-1} = B^{(j+1)}\Sigma_{j+1}^{-1}$ 时，这些性质同样成立。我们考虑两种情形: $\bar{X}_j^{(j+1)} = 0$ 和 $\bar{X}_j^{(j+1)} \neq 0$。

当 $\bar{X}_j^{(j+1)} = 0$ 我们应用命题 3.17(i)，得到 $\bar{X}_i^{(j)} = \bar{X}_i^{(j+1)}$，对所有 $i \in [\![1, N]\!]$均成立。因此 $B^{(j)} = B^{(j+1)}$，而结论 (i) 和 (ii) 则由归纳假设以及 $\Sigma_{j+1} \subseteq \Sigma_j$这一事实立即得出。

现在假设 $\bar{X}_j^{(j+1)} \neq 0$。应用命题 3.17(ii)可得，对于所有 $i \geq j$，都有 $\bar{X}_i^{(j)} = \bar{X}_i^{(j+1)}$；并且根据归纳假设，我们知道

$$\{\bar{X}_i^{(j)} \mid i \in [\![j-1, N]\!],\ \bar{X}_i^{(j)} \neq 0\} \ \subseteq\ \Sigma_j.$$

因此,

$$\begin{aligned}\Sigma_{j+1} := B^{(j+1)} \cap \Sigma_j \ &\supseteq\ B^{(j+1)} \cap \{\bar{X}_i^{(j)} \mid i \in [\![j-1, N]\!],\ \bar{X}_i^{(j)} \neq 0\} \\ &=\ \{\bar{X}_i^{(j+1)} \mid i \in [\![j, N]\!],\ \bar{X}_i^{(j+1)} \neq 0\}.\end{aligned}$$

根据归纳假设，集合 Σ_j 是乘法封闭的，这意味着 Σ_{j+1} 是乘法封闭的；又因为 P_{j+1} 是一个完全素理想，它包含正则元。因此，$B^{(j+1)}$ 是一个整环，其中所有非零元都是正则元。这证明了 (i) 部分。

注意， $Z_j \subset \Sigma_{j+1}$ 且 $Z_j \subset \Sigma_j$。应用命题 3.17(iii)，我们看到

$$B^{(j+1)} \subset B^{(j+1)}Z_j^{-1} = B^{(j)}Z_j^{-1} \subset B^{(j)}\Sigma_j^{-1}.$$

这些包含关系与 (11) 中的包含关系相对应，我们可以应用
命题 利用命题 2.7 得出本命题的 (ii) 和 (iii) 部分。 □

由此命题可立即得出，在 $P \in$ C.Spec$_w$(A) 的情形下，我们现在可以证明 A/P 和 $A'/\psi(P)$ 的全分式环等价，其中 $w \in \mathcal{W}'$ 为某个元素。

定理 3.19. 设 $w \in \mathcal{W}'$, $P \in$ C.Spec$_w$(A)，且 $Q = \psi(P) \in$ C.Spec$_w$(A')。设 Σ 是 A'/Q 中由所有满足 $i \in \bar{w} = \{1, \ldots, N\} \backslash w$ 的生成元 t_i 生成的乘法封闭集，其中 t_i 是 T_i 在 A'/Q 中的典范像。那么,

(i) Σ 是 A'/Q 中由正则正规元构成的乘法封闭集。

(ii) 存在一个由正则元构成的乘法封闭集 Γ，它包含于 A/P 中，在 A/P 中满足双边 Ore 条件，并且使得 $(A/P)\Gamma^{-1} = (A'/Q)\Sigma^{-1}$。

(iii) 分式域(A/P) $=$分式域(A'/Q)。此外，若所有 $\lambda_{i,j}$ 均满足 $i, j \in \bar{w}$ 是单位根，则 A/P 和 A'/Q 是 PI 代数；在此情况下，PI 次数(A/P) $=$ PI 次数(A'/Q)。

定义以下理想供后续使用，因为它们确保在对 A/P 执行消去导子算法后，最终得到量子仿射空间 $A'/\psi(P)$。

定义 3.20. 设 $w \in \mathcal{W}'$。我们称 $P_w \in$ C.Spec$_w$(A) 为 Cauchon 理想，如果 $\psi(P_w) = J_w := \langle T_i \in A' \mid i \in w \rangle \in$ C.Spec$_w$(A')。

注 3.21. 可以证明， A 上的有理环面作用会在 A' 上诱导一个有理环面作用，并且 ψ 将 A 中的环面不变完全素理想映射为 A'中的环面不变完全素理想。这与一般情形 [Cau03a] 和泊松情形 [LL17]中的类似结果相符。与这些情形不同的是，这一观察并不能直接得出结果，使我们能够明确确定对于特定代数 A， W' 是什么。因此，我们在本文中省略这些结果。

4 单位根处量子矩阵完全素商的 PI 度

本节中，我们考虑满足假设 1.2 且处于单位根情形的迭代 Ore 扩张 $A = \mathbb{K}[X_1][X_2; \sigma_2, \delta_2] \dots [X_N; \sigma_N, \delta_N]$。也就是说，我们假设假设 1.2 中的所有参数 $\lambda_{i,j}$ 都是单位根。

在这种情况下，由 [Hay08，定理 1.2] 可知，代数 A 是 PI 代数，并且按照上一节的记号：

$$\text{PI-deg}(A) = \text{PI-deg}(A').$$

本节的目标是提供计算 A 的完全素商的 PI 度的方法。具体而言，我们将重点讨论 A 为单参数量子矩阵代数（处于单位根情形）的情况。

4.1 A 的完全素商的 PI 度

在我们的假设下， A 是 PI 代数，因此 A 的每个完全素商也都是 PI 代数。接下来，我们将计算由 Cauchon 理想取商所得代数的 PI 度，并构造最大维数的不可约表示。

4.2 Cauchon 理想的商的 PI 度

在 P_w 是与 Cauchon 图 $w \in \mathcal{W}'$ 相关联的 Cauchon 理想的情况下，我们得到 $\psi(P_w) = \langle T_i \mid i \in w \rangle$，因此 A'/Q 是一个量子仿射空间。具体而言， $A'/Q = \mathcal{O}_{\mathbf{\Lambda_w}}(\mathbb{K}^{N-|w|})$，其中 $\mathbf{\Lambda_w}$ 是通过删除由 w 中的元素所索引的行和列，从 $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_{ij})$ 中导出的矩阵。

鉴于定理 3.19(iii) 及上述讨论，我们得到以下结果。

定理 4.1. 设 P_w 为与 Cauchon 图 $w \in \mathcal{W}'$ 相关联的 Cauchon 理想。则 PI次数(A/P_w) = PI次数$(\mathcal{O}_{\mathbf{\Lambda_w}}(\mathbb{K}^{N-|w|}))$。

De Concini 和 Procesi 开发了用于计算量子仿射空间的 PI 度的技术。更准确地说，他们证明了以下结果。

定理4.2。 *[CP93，命题7.1]* 设 $S = (s_{ij})$是一个系数取自 $\mathbb{K}$的乘法反对称 $n \times n$矩阵。那么：

1. 如果所有 s_{ij} 都是单位根，那么存在一个本原单位根 $q \in \mathbb{K}^\times$ 和整数 a_{ij}，使得对于所有 i、j，都有 $s_{ij} = q^{a_{ij}}$。
2. 假设对于所有 i、j， $s_{ij} = q^{a_{ij}}$ 成立，其中 q 是一个本原 ℓ 次单位根，并且对于所有 i、j， $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ 成立。令 $M := (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$；这是一个反对称矩阵。那么.....的 PI 度是

对应的量子仿射空间 $\mathcal{O}_{q^M}(\mathbb{K}^n) := \mathcal{O}_S(\mathbb{K}^n)$ 是 $\sqrt{h}$，其中 h 是同态的像的基数

$$\mathbb{Z}^n \xrightarrow{M} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\pi} (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n,$$

其中， π 表示典范满同态。

上述结果结合定理 4.1，使我们能够计算 Cauchon 理想的商的 PI 度。

在下一节中，我们将以 A 为单参数量子矩阵代数的情形来说明这一点。

4.3 单参数量子矩阵代数的 Cauchon 理想商的 PI 次数

在本节中，我们假设对所有 i、 j， $\lambda_{ij} = q^{m_{ij}}$，其中 q 是一个本原的 ℓ 次单位根，并且对所有 i、 j， $m_{ij} \in \mathbb{Z}$。在此情形下，我们称 A 为单参数的。我们令 $M := (m_{ij}) \in M_N(\mathbb{K})$，使得 M 是一个斜对称整数矩阵。一个众所周知的结果是，每个斜对称整数矩阵 S 都合同于（按照 [New72，第 IV 章] 的含义）其斜标准形，也就是说，合同于如下形式的分块对角矩阵。

$$S = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & h_1 \\ -h_1 & 0 \end{smallmatrix} & & & & \\ & \begin{smallmatrix} 0 & h_2 \\ -h_2 & 0 \end{smallmatrix} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{smallmatrix} 0 & h_s \\ -h_s & 0 \end{smallmatrix} & \\ & & & & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

其中，0 是一个维数为 dim(ker(S)) 的零方阵，因此 $2s = N$ –dim(ker(S))，而 h_1、 h_1、 h_2、 h_2、 …、 h_s、 $h_s \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 称为 M 的不变因子。由于它们总是成对出现，从现在起我们将避免重复，只将不变因子列为 h_1、 h_2、 …、 h_s。它们具有如下性质：对于所有 $i \in [\![1, s-1]\!]$， $h_i | h_{i+1}$。

定理 4.3. 假设 A 是一个满足假设 1.2 的单参数迭代 Ore 扩张，其参数 q 为本原 ℓ 次单位根。设 $w \in \mathcal{W}'$ 和 $P_w := \psi^{-1}(J_w)$ 为相应的 Cauchon 理想。那么

$$\text{PI-deg}(A/P_w) = \prod_{i=1}^{\frac{N-\dim(\ker(M(w)))}{2}} \frac{\ell}{\gcd(h_i, \ell)},$$

其中， h_i 是通过删除 M 中由 w 索引的行和列后，从矩阵 $M(w)$ 中导出的不变因子。

我们通过研究单参数量子矩阵的情形来结束本节。也就是说，我们假设 $A = \mathcal{O}_q(M_{m,\,n}(\mathbb{K}))$，其中 q 是一个本原 ℓ 次单位根。回顾一下，定义在 $\mathbb{K}$ 上的 $m \times n$ 矩阵的量子化坐标环记作 $\mathcal{O}_q(M_{m,\,n}(\mathbb{K}))$，它是由 $m \times n$ 个不定元 $\{X_{i,j}\}_{i=1,\,j=1}^{m,\,n}$ 生成的 $\mathbb{K}$-代数，并满足以下关系：对于 $(1, 1) \leq (i, j) < (s, t) \leq (m, n)$（按字典序排列），有

$$X_{i,j}X_{s,t} = \begin{cases} X_{s,t}X_{i,j} & i < s,\ j > t; \\ qX_{s,t}X_{i,j} & (i = s,\ j < t) \text{ or } (i < s,\ j = t); \\ X_{s,t}X_{i,j} + (q - q^{-1})X_{i,t}X_{s,j} & i < s,\ j < t. \end{cases}$$

根据我们的假设， q 是一个本原 ℓ 次单位根，代数 $A = \mathcal{O}_q(M_{m,\ n}(\mathbb{K}))$ 是满足假设 1.2 的单参数迭代 Ore 扩张（生成元按字典序添加）；详见 [Hay08，第 5 节。3]

设 w 为一个 Cauchon 图， P_w 为 A中对应的 Cauchon 理想。由上述结果可知，要计算 A/P_w的 PI 度，我们需要计算 ker($M(w)$) 的维数以及 $M(w)$) 的不变因子。这分别由 [BCL12] 和 [BLR22] 完成。在陈述主要结果之前，我们先回顾这两篇文章中的必要结果。

给定任意图 $w \in \mathcal{W}$，我们关联一个 $m \times n$ 图 $D(w)$，其中 $D(w)$ 是 $m \times n$网格，其位置 (i, j) 处的方格在 $(i, j) \in w$时涂为黑色，在 $(i, j) \notin w$时涂为白色。按照 [BCL12 第 4 节.1], 中的定义，我们可以通过在方格上铺设管道来计算其环面置换 $\tau = \tau_w$：在每个黑色方格上放置一个“交叉”，在每个白色方格上放置一条“渐近线”。我们用数字 $1, \ldots, m + n$ 标记图的各边，使每对相对边上的标签顺序相同。然后，通过定义 $\tau_w(i)$ 为沿着从右侧或底边的标签 i 出发的管道所到达的 $D(w)$ 左侧或顶边上的标签，即可从该图中读出置换 τ_w。图 1 给出了一个 τ =(17)(26384) 的示例图。

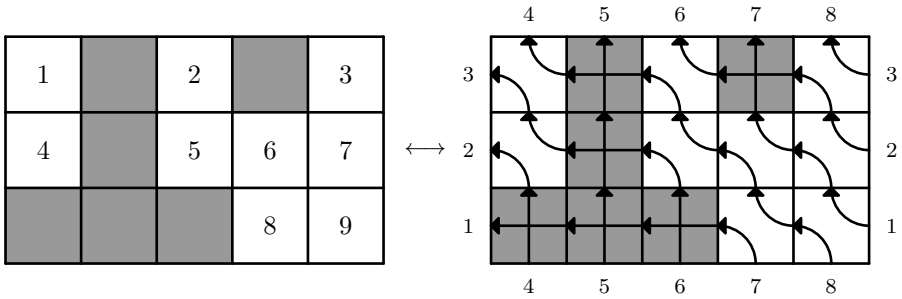

图 1：与图 {(1, 2), (1, 4), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)} 相关联的标记 3×5 图（左）及其管道梦构造（右），位于 $\mathcal{O}_q(M_{3,5}(\mathbb{K}))$ 中。

文献 [BCL12] 证明了，dim(ker($M(w)$)) 等于其对应的环面置换 τ_w 的不相交循环分解中奇数长度循环的数量 $r(w)$。此外， [BLR22 的定理 2.6] 表明， $M(w)$ 的所有不变因子都是 2 的幂。

综合以上结果，我们得到如下结论。

定理 4.4. 设 q 是一个本原的 ℓ 阶单位根，且 ℓ 为奇数。令 w 为 $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\mathbb{K}))$ 的一个 Cauchon 图，并令 P_w 为对应的 Cauchon 理想。则

$$\text{PI-deg}(\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\mathbb{K}))/P_w) = \sqrt{\ell^{mn-r(w)}},$$

其中 $r(w)$ 是环面置换的不相交循环分解中奇数长度循环的数量。
结合的至 w

注意，我们无需明确描述 $\mathcal{W}'$ Cauchon 图的集合，即可得到上述结果。为完整起见，我们指出， $\mathcal{W}'$ 与 $m \times n$ Cauchon-Le 图的集合一致（详细信息请参见 [Rog19 的定理 4.37]）。

5 最大维数的不可约表示

除非另有说明，我们将 $1 \neq q \in \mathbb{K}^*$ 视为任意元素。设 A 是满足假设 1.2 的代数，使得对于某个反对称矩阵 $M = (m_{i,j})$，有 $\lambda_{i,j} = q^{m_{i,j}}$ $(\mathbb{Z})$。固定某个 Cauchon 图 $w \in \mathcal{W}'$，取 $P \in \mathrm{C.Spec}_w(A)$。我们运用删除导子算法，在给定 $A'/\psi(P)$ 的一个“合适的”不可约表示时，构造 A/P 的一个不可约表示。当 A 是 PI 代数（若 q 是单位根，则这一条件成立）且 $\mathbb{K}$ 代数闭时，事实证明 $A'/\psi(P)$ 的任意不可约表示都是“合适的”。

回顾第 3.3 节中设定的记号：$B := A/P$，其生成元为 $X_i := X_i + P$；以及 $B' := A'/\psi(P)$，其生成元为 $t_i := T_i$。再次令 $\Sigma := \Sigma_2 \subseteq B'$ 为由 t_i 生成的（双边）Ore 集，其中 $i \in [\![1, N]\!] \backslash w$，然后对所有 $j \in [\![2, N]\!]$, Σ_{j+1} 递归定义 $= B^{j+1} \cap \Sigma_j$，其中$\Gamma := \Sigma_{N+1}$ 是 B 中的一个（双边）Ore 集。

命题 5.1. 设 A 是满足假设 1.2 的 $\mathbb{K}$-代数，$P \in \mathrm{C.Spec}_w(A)$，其中某个$w \in \mathcal{W}'$ 成立，并设 (ϕ', V) 是 B' 的一个不可约表示，其中对每个 $e \in \Sigma$，都存在某个 $\xi = \xi_e \in \mathbb{K}^*$ 和 $\ell = \ell_e \in \mathbb{N}_{>1}$，使得 $\phi'(e)^\ell = \xi \mathrm{Id}_V$。那么

1. 对于任意 $b \in B$，存在某些 $b' \in B'$ 和 $e \in \Sigma$，使得

$$b = b'e^{-1} \in B'\Sigma^{-1}$$

并且 ϕ' 在 V 上诱导出 B 的一个不可约表示（维数相同），该表示由代数同态定义

$$\begin{aligned} \phi : B &\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \\ b &\longmapsto \xi^{-1}\phi'(b')\phi'(e)^{\ell-1}. \end{aligned}$$

2. 对于每个 $g \in \Gamma$，存在某些 $\xi' \in \mathbb{K}^*$ 和 $\ell' \in \mathbb{N}_{>1}$，使得 $\phi(g)^{\ell'} = \xi' \mathrm{Id}_V$。

证明。设 (ϕ', V) 是 B' 的一个不可约表示，且满足命题的条件。关于 ϕ' 的条件意味着 $\phi'(e)^{-1} = \xi_e^{-1}\phi'(e)^{\ell_e - 1}$，并诱导出 $B'\Sigma^{-1}$的一个表示，

$$\begin{aligned} \hat{\phi} : B'\Sigma^{-1} &\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \\ b' &\longmapsto \phi'(b') \\ e^{-1} &\longmapsto \xi_e^{-1}\phi'(e)^{\ell_e - 1}, \end{aligned}$$

由此可见，对于所有 $e \in \Sigma$，$\hat{}\,\phi(e)^{-1} = \xi_e^{-1}\hat{}\,\phi(e)^{\ell_e - 1}$。包含关系 $B' \subseteq B'\Sigma^{-1}$ 确保 $\hat{}(\phi, V)$ 是不可约的。

由命题 3.18 和定理 3.19 可知，$B'\Sigma^{-1} = B\Gamma^{-1}$，因此 $B\Gamma^{-1}$ 中的每个元素都可以用 $B'\Sigma^{-1}$ 中的元素表示，反之亦然。这使我们能够将 $\hat{}\,\phi$ 视为一个代数同态 $\hat{}\,\phi : B\Gamma^{-1} \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$，因此 $(\hat{}\,\phi, V)$ 定义了 $B\Gamma^{-1}$ 的一个不可约表示。

每个元素 $b \in B$ 都可以写成元素 $b \cdot 1^{-1} \in B\Gamma^{-1}$，我们将其简写为$b \in B\Gamma^{-1}$。根据局部化相等，$b$ 也可以写成 $B'\Sigma^{-1}$中的元素，即 $b = b'e^{-1} \in B'\Sigma^{-1}$。将 $\hat{}\,\phi$ 限制到 B 上，可得到以下代数同态:

$$\begin{aligned} \phi : B &\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \\ b &\longmapsto \hat{\phi}\left(b'e^{-1}\right) = \xi^{-1}\phi'(b')\phi'(e)^{\ell-1}. \end{aligned}$$

这定义了 B 在 V上的一个（不一定不可约的）表示。为证明该表示不可约，我们注意到 $\Gamma \subseteq \Sigma$。因此，对于所有 $g \in \Gamma$，都存在某个 $\xi' \in \mathbb{K}^*$ 和 $\ell' \in \mathbb{N}$，使得 $\hat{\phi}(g)^{\ell'} = \xi' \mathrm{Id}_V$，故

$$\phi(g)^{\ell'} = \hat{\phi}(g)^{\ell'} = \xi' \, \mathrm{Id}_V \, .$$

利用恒等式 $B\Gamma^{-1} = B'\Sigma^{-1}$，我们可以将任意元素 $b' \in B'$ 写成 $b' = bg^{-1} \in B\Gamma^{-1}$。因此

$$\phi'(b') = \hat{\phi}(b') = \hat{\phi}\left(bg^{-1}\right) = \xi'^{-1}\hat{\phi}(b)\hat{\phi}(g)^{\ell'-1} = \phi(\xi'^{-1}bg^{\ell'-1}),$$

这表明 $\phi'(B') \subseteq \phi(B)$。因此，由于 (ϕ', V) 是不可约的，(ϕ, V) 也不可约。 □

备注 5.2. 如果我们在命题 5.1 中取 $P = \{0\}$，那么便得到 $B' = A'$ 和 $B = A$，并且根据命题 2.7 和定理 2.8 的结果与记号，可以类似地陈述该结论。这意味着，只要我们在 (ϕ', V) 上有一个不可约表示满足条件 $\phi'(e)^{\ell_e} = \xi_e \, \mathrm{Id}_V$，对由 $\{T_i\}_{i=1}^N$ 生成的 A' 中 Ore 集的所有元素 e 以及某个 $\ell \in \mathbb{N}_{>1}$ 均成立，我们就可以在 A 上构造一个不可约表示。

将代数 A 限制到单位根情形，并取 $\mathbb{K}$ 为代数闭域（证明中使用舒尔引理所必需），我们看到，B' 上的任意不可约表示都将满足命题 5.1 的条件。

定理 5.3。取 $\mathbb{K}$为代数闭域。设 A 为满足假设 1.2 的 $\mathbb{K}$-代数，并假设 H1.2.1 中的 $\lambda_{i,j}$ 具有如下形式：$\lambda_{i,j} = q^{m_{i,j}}$，其中 $M = (m_{i,j})_{i,j} \in M_N(\mathbb{Z})$ 是某个反对称矩阵，且 $q \in \mathbb{K}^*$ 是满足 $\ell \in \mathbb{N}_{>1}$的 ℓ^{th}阶本原单位根。那么：

1. B' 的任意不可约表示 (ϕ', V) 都满足命题 5.1 的条件。
2. B' 的任意不可约表示 (ϕ', V) 都诱导出 B的一个不可约表示 (ϕ, V)，且维数相同。

证明。

1. A' 是一个素仿射 PI 代数（定理 2.8(iii)），B'也是如此，因此 B' 的任意不可约表示（ϕ', V）都是有限维的。假设对于某个 $w \in \mathcal{W}'$，有 $P \in \mathrm{C.Spec}_w(A)$。那么，商代数 $B' = A'/\psi(P)$由所有满足 $i \in [\![1, N]\!] \backslash w$的 t_i生成，其中$t_i := T_i + \psi(P)$。因此，对于所有 $i, j \in [\![1, N]\!] \backslash w$，都有 $t_i t_j = q^{m_{i,j}} t_j t_i$。我们推得，对于所有 $i \in [\![1, N]\!] \backslash w$，有 $t_i^\ell \in Z(B')$，因此，根据舒尔引理，存在某个 $\xi_i \in \mathbb{K}^*$，使得 $\phi'(t_i)^\ell = \xi_i \mathrm{Id}_V$。由于 Σ 被定义为由 $\{t_i \mid i \in [\![1, N]\!] \backslash w\}$生成的乘法封闭集，因此命题 5.1 的条件均得到满足。

2. 由命题 5.1 可得。

□

注记 5.4。当 P 是 Cauchon 理想（$P = P_w$ 对某个 $w \in \mathcal{W}'$）时，根据定义，B' 成为量子仿射空间。若 A 随后满足定理 5.3 的条件（即我们取一个单位根处的量子幂零代数，q），那么

$$\text{PI-deg}(B') = \prod_{i=1}^{\frac{N - \dim(\ker(M(w)))}{2}} \frac{\ell}{\gcd(h_i, \ell)},$$

其中，h_i 是通过删除由 w 索引的行和列，从 M 得到的矩阵 $M(w)$ 的不变因子（见定理 4.3）。我们可以构造一个

利用 [BLR22, 命题 3.4]，构造一个B' 的最大维数不可约表示。根据定理 5.3，这将通过命题 5.1 的方法诱导出 B 的一个不可约表示。因此，对于给定的$w \in \mathcal{W}'$，这些结果提供了一种构造 B 的显式最大维数不可约表示的方法。

命题 5.1 和定理 5.3 是针对删导数算法中的两个极端代数陈述的。在实际应用中，我们通常会一次处理删导数算法中的一个步骤，也就是说，我们会根据 $A^{(j)}/P_j$ 的不可约表示推导出 $A^{(j+1)}/P_{j+1}$ 的不可约表示。

5.1 示例： $U_q^+(\mathfrak{so}_5)/\langle z$ 的极大不可约表示 $'\rangle$

为说明注记 5.4，我们将构造 $A := U_q^+(\mathfrak{so}_5)$ 的一个商的不可约表示，其中商去除了理想 $\langle z'\rangle$（将在本节稍后定义）。此示例需要分别在 A（定理 2.3）和 $A/\langle z'\rangle$（定理 3.19）上应用消去导子算法，通过典范嵌入（第 3.2 节）计算 $\langle z'\rangle$ 的像，以及计算 $A/\langle z'\rangle$ 的 PI 度（定理 4.3）。这些计算的完整细节因其直接但冗长而略去，不过可在 [Rog19，第 5.3.1 节和第 7.3 节中找到。2]

在此例中，我们取 q 为满足 $\ell \notin \{2, 4\}$ 的本原 ℓ^{th} 单位根。

5.1.1 代数的定义

$U_q^+(\mathfrak{so}_5)$ 是由两个不定元 E_1, E_2 生成的 $\mathbb{C}$-代数，并满足以下关系：

$$E_1^3E_2 - (q^2 + 1 + q^{-2})E_1^2E_2E_1 + (q^2 + 1 + q^{-2})E_1E_2E_1^2 - E_2E_1^3 = 0$$
$$E_2^2E_1 - (q^2 + q^{-2})E_2E_1E_2 + E_1E_2^2 = 0.$$

$U_q^+(\mathfrak{so}_5)$ 存在一个 PBW 基，它由单项式 $E_1^{k_1}E_4^{k_4}E_3^{k_3}E_2^{k_2}$ 构成，其中 k_1、k_2、k_3、k_4 是非负整数，而 E_3、E_4 是某些根向量。例如，可以在[Lau06 的第 2 节中找到这一结果4]。同一篇论文还将该代数表示为一个迭代 Ore 扩张，其生成元为这四个不定元，并按照 E_1、E_4、E_3、E_2 的顺序排列。为了便于应用消去导子算法，我们对这些不定元重新进行标记：

$$X_1 := E_1, \quad X_2 := E_4, \quad X_3 := E_3, \quad X_4 := E_2.$$

[Lau06] 中 X_1、X_2、X_3、X_4 之间的关系于是变为

$$X_2X_1 = q^{-2}X_1X_2,$$
$$X_3X_1 = X_1X_3 - (q + q^{-1})X_2, \qquad X_3X_2 = q^{-2}X_2X_3,$$
$$X_4X_1 = q^2X_1X_4 - q^2X_3, \qquad X_4X_2 = X_2X_4 - \frac{q^2 - 1}{q + q^{-1}}X_3^2, \qquad X_4X_3 = q^{-2}X_3X_4.$$

因此，我们可以将 $A := U_q^+(\mathfrak{so}_5)$ 表示为以下迭代 Ore 扩张：

$$U_q^+(\mathfrak{so}_5) = \mathbb{C}[X_1][X_2; \sigma_2][X_3; \sigma_3, \delta_3][X_4; \sigma_4, \delta_4]$$

其中，采用记号 $A_j := \mathbb{C}\langle X_1, .., X_j\rangle \subseteq A$，自同构 σ_i 和斜导子 δ_i 在生成元上的定义如下：

$$\begin{aligned}
&\sigma_2 : A_1 \longrightarrow A_1; \quad X_1 \longmapsto q^{-2}X_1, \\
&\sigma_3 : A_2 \longrightarrow A_2; \quad X_1 \longmapsto X_1 && \delta_3 : A_2 \longrightarrow A_2; \quad X_1 \longmapsto -(q+q^{-1})X_2 \\
&\qquad\qquad\ \ X_2 \longmapsto q^{-2}X_2, && \qquad\qquad\ \ X_2 \longmapsto 0, \\
&\sigma_4 : A_3 \longrightarrow A_3; \quad X_1 \longmapsto q^2X_1 && \delta_4 : A_3 \longrightarrow A_3; \quad X_1 \longmapsto -q^2X_3 \\
&\qquad\qquad\ \ X_2 \longmapsto X_2 && \qquad\qquad\ \ X_2 \longmapsto -\frac{q^2-1}{q+q^{-1}}X_3^2 \\
&\qquad\qquad\ \ X_3 \longmapsto q^{-2}X_3, && \qquad\qquad\ \ X_3 \longmapsto 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

5.1.2 验证 $U_q^+(\mathfrak{so}_5)$ 满足假设 1.2

根据 [Hay08、定理 2.8 和引理 5.3] 对这些映射进行常规计算，可知 A满足假设 1.2 的所有性质。具体而言：

(H1.2.1) $\lambda_{i,j}$与式 (13) 中的相同。

(H1.2.2) $\lambda_{i,j} = q^{m_{i,j}}$，其中 $m_{i,j}$ 定义反对称矩阵

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}).$$

(H1.2.3) (σ_3, δ_3) 是 q^2-斜的，且 (σ_4, δ_4) 是 q^4-斜的。因此我们令 $q_3 = q^2$ 和 $q_4 = q^4$。

(H1.2.4) 高阶 q_j-斜σ_j-导数定义如下：

$$d_{j,n}(X_l) = \begin{cases} X_l & n = 0; \\ \delta_j(X_l) & n = 1; \\ 0 & n > 1, \end{cases} \tag{14}$$

对于 $j \in \{3, 4\}$ 和 $l \in [\![1,\ j-1]\!]$。

由于存在两个非零导子，我们两次应用定理 2.3，得到 $A' = \mathbb{C}_{q^M}[T_1, T_2, T_3, T_4]$，其中

$$T_4 := X_4, \quad T_3 := X_3, \quad T_2 := X_2 - \frac{q^4}{(q^2+1)(q+q^{-1})}X_3^2X_4^{-1}, \quad T_1 := X_1 - \frac{q^2(q+q^{-1})}{q^2-1}X_2X_3^{-1}. \tag{15}$$

5.1.3 求 $U_q^+(\mathfrak{so}_5)/\langle z'\rangle$ 的 PI 度

考虑理想 $\langle z'\rangle \lhd A$，它由中心元生成（参见 [Lau06，第 2.4] 节）

$$z' := -(q^2-q^{-2})(q+q^{-1})X_2X_4 + q^2(q^2-1)X_3^2.$$

利用局部化理论、命题 2.7(iii)，以及反复应用命题 3.4 和引理 3.1，可以证明 $\psi^{-1}(\langle T_2\rangle) = \langle z'\rangle$。特别是，这证明了 $\langle z'\rangle \in \mathrm{C.Spec}^{\{2\}}(A)$，因此 $\{2\} \in \mathcal{W}'$。事实上，由于 $A'/\langle T_2\rangle = \mathbb{C}_{q^{M'}}[t_1, t_3, t_4]$，其中 $t_i := T_i + \langle T_2\rangle$ 对所有 $i \in \{1, 3, 4\}$都成立，因此 $\langle z'\rangle$ 是一个 Cauchon 理想。

根据定理 3.19,

$$\text{PI-deg}(U_q^+(\mathfrak{so}_5)/\langle z'\rangle) = \text{PI-deg}(A'/\langle T_2\rangle) = \text{PI-deg}(\mathbb{C}_{q^{M'}}[t_1,t_3,t_4])$$

其中，$M' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 由 M删除第二行和第二列得到。容易验证，M'的斜对称标准形为 $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$，因此 M'的核维数为 1，且有一对不变因子：$h_1 = 2$。取 $P_{\{2\}} = \langle z'\rangle$ 应用定理 4.3，得到：

$$\text{PI-deg}(A/\langle z'\rangle) = \prod_{i=1}^{\frac{3-1}{2}} \frac{\ell}{\gcd(h_i,\ell)} = \frac{\ell}{\gcd(2,\ell)} = \begin{cases} \ell & \ell \text{ is odd;} \\ \ell/2 & \ell > 4 \text{ is even.} \end{cases}$$

5.1.4 构造 $U_q^+(\mathfrak{so}_5)/\langle z'\rangle$ 的最大维数不可约表示

回顾一下，$B' := \mathbb{C}_{q^{M'}}[t_1,t_3,t_4]$，$B := U_q^+(\mathfrak{so}_5)/\langle z'\rangle$，并令 $\Sigma \subseteq B'$为由 $\{t_1,t_3,t_4\}$生成的乘法封闭集。与 S相关联的量子仿射空间为 $D := \mathbb{C}_{q^S}[x_1,y_1,z_1]$。根据 [BLR22，命题 3.4(ii)]，存在一个 ℓ维的 $\mathbb{C}$向量空间 V，$\lambda,\xi \in \mathbb{C}^*$ 以及一个代数同态 $\varphi: D \to \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$。固定一组基$v_1,\dots,v_\ell \in V$后，$\varphi$ 在 D的生成元上的像可表示为如下矩阵：

$$\varphi(x_1) = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ & \lambda q^2 & & & \\ & & \lambda q^4 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda q^{(\ell-1)2} \end{pmatrix}, \qquad \varphi(y_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi(z_1) = \xi \,\text{Id}_V\,.$$

对偶组（φ，V）定义了 D 的不可约表示。

为了定义 $\mathbb{C}_{q^{M'}}[t_1,t_3,t_4]$ 的一个不可约表示，我们利用 [BLR22，命题 3.4(iii)]，其中 $E^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$，且 $E \in M_3(\mathbb{Z})$ 是满足 $EM'E^T = S$ 的可逆矩阵。由此得到的代数同态 ϕ'：$\mathbb{C}_{q^{M'}}[t_1,t_3,t_4] \to \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 定义在 t_1、t_3、t_4 上如下：

$$\begin{aligned} \phi'(t_1) &= \varphi(x_1^1 y_1^0 z_1^1) = \varphi(x_1)\varphi(z_1) = \xi\varphi(x_1), \\ \phi'(t_3) &= \varphi(x_1^{-1} y_1^0 z_1^0) = \varphi(x_1)^{-1} = \lambda^{-\ell}\varphi(x_1^{\ell-1}), \\ \phi'(t_4) &= \varphi(x_1^0 y_1^{-1} z_1^0) = \varphi(y_1)^{-1} = \varphi(y_1^{\ell-1}), \end{aligned} \tag{16}$$

并且它定义了 $\mathbb{C}_{q^{M'}}[t_1,t_3,t_4]$ 在 V 上的一个不可约表示。根据 φ 的定义，我们看到

$$\begin{aligned} \phi'(t_1)^\ell &= \xi^\ell \varphi(x_1)^\ell = (\xi\lambda)^\ell \,\text{Id}_V, \\ \phi'(t_3)^\ell &= \lambda^{-\ell^2}\varphi(x_1)^{\ell^2-\ell} = \lambda^{-\ell^2}\lambda^{\ell^2-\ell}\,\text{Id}_V = \lambda^{-\ell}\,\text{Id}_V, \\ \phi'(t_4)^\ell &= \varphi(y_1)^{\ell^2-\ell} = \text{Id}_V, \end{aligned}$$

因此，命题 5.1 的条件均已满足。应用该命题，只要知道如何用生成元 t_1、t_3、$t_4 \in B'$ 表示生成元 X_1、……、$X_4 \in B$，我们就可以定义 $\bar{}$ $\bar{}$ B的一个不可约表示。由 (15) 可知，

$$t_4 := \bar{X}_4, \quad t_3 = \bar{X}_3, \quad t_2 = \bar{X}_2 - \frac{q^4}{(q^2+1)(q+q^{-1})}\bar{X}_3^2\bar{X}_4^{-1}, \quad t_1 = \bar{X}_1 - \frac{q^2(q+q^{-1})}{q^2-1}\bar{X}_2\bar{X}_3^{-1}.$$

重新整理这些恒等式，并注意到 $t_2 = 0$，即可得到

$$\bar{X}_4 = t_4, \quad \bar{X}_3 = t_3, \quad \bar{X}_2 = \frac{q^4}{(q^2+1)(q+q^{-1})} t_3^2 t_4^{-1}, \quad \bar{X}_1 = t_1 + \frac{q^4}{q^4-1} t_3 t_4^{-1}.$$

应用命题 5.1 并利用 (16)，我们推得存在一个代数同态 $\phi : B \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$，其在生成元上的定义为

$$\begin{aligned}
\phi(\bar{X}_4) &= \phi'(t_4) = \varphi(y_1)^{-1}, & \phi(\bar{X}_3) &= \phi'(t_3) = \varphi(x_1)^{-1}, \\
\phi(\bar{X}_2) &= \phi'\left(\frac{q^4}{(q^2+1)(q+q^{-1})} t_3^2 t_4^{-1}\right) & \phi(\bar{X}_1) &= \phi'\left(t_1 + \frac{q^4}{q^4-1} t_3 t_4^{-1}\right) \\
&= \frac{q^4}{(q^2+1)(q+q^{-1})} \varphi(x_1)^{-2} \varphi(y_1), & &= \xi\varphi(x_1) + \frac{q^4}{q^4-1} \varphi(x_1)^{-1} \varphi(y_1).
\end{aligned}$$

这定义了 B 的一个不可约表示 (ϕ, V)。将 $\varphi(x_1)$ 和 $\varphi(y_1)$ 的矩阵代入，并例如取 $\ell = 5$，即可得到该不可约表示的显式形式：

$$\phi(\bar{X}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \phi(\bar{X}_3) = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1}q^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1}q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1}q^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1}q^2 \end{pmatrix},$$

$$\phi(\bar{X}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(q^2+1)^2\lambda^2} \\ \frac{q}{(q^2+1)^2\lambda^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q^2}{(q^2+1)^2\lambda^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{q^3}{(q^2+1)^2\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{q^4}{(q^2+1)^2\lambda^2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi(\bar{X}_1) = \begin{pmatrix} \xi\lambda & 0 & 0 & 0 & \frac{q^4}{(q^4-1)\lambda} \\ \frac{q^2}{(q^4-1)\lambda} & \xi\lambda q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(q^4-1)\lambda} & \xi\lambda q^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{q^3}{(q^4-1)\lambda} & \xi\lambda q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{q}{(q^4-1)\lambda} & \xi\lambda q^3 \end{pmatrix}.$$

参考文献

[BCL12] J. P. Bell、K. Casteels 和 S. Launois。关于量子矩阵中 $\mathcal{H}$-层按维数的计数。《组合论杂志 A辑》，119(1):83–98，2012年。

[BLR22] J. Bell、S. Launois 和 A. Rogers。量子行列式环及其相关量子舒伯特簇的 PI 度与不可约表示。arXiv.2212.03799v2[BG02] K. A. Brown 和 K. R. Goodearl。《代数量子群讲义》。高级数学课程。巴塞罗那数学研究中心。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2002年。[BY17] K. A. Brown 和 M. T. Yakimov。PI代数的阿祖玛雅点集与判别式理想。《数学进展》，340: 1219–1255，2018年。[Cas14] K. Casteels。通过路径研究量子矩阵。《代数与数论》，8(8):1857–1912，2014年。[Cau03a] G. Cauchon。量子代数的导子消去与素谱。《代数杂志》，260(2):476–518，2003年。[Cau03b] G. Cauchon。 $O_q(M_n(k))$ 的素谱：典范像与正规分离。《代数杂志》，260(2):519–569，2003年。[CPWZ15] S. Ceken、J. H. Palmieri、Y.-H. Wang 和 J. J. Zhang。判别式控制非交换代数的自同构群。《数学进展》，269:551– 584，2015 年。[CPWZ16] S. Ceken、J. H. Palmieri、Y.-H. Wang 和 J. J. Zhang。判别式判据与量子化代数的自同构群。《数学进展》，286:754–801，2016年。[CP93] C. De Concini 和 C. Procesi。量子群。载于《 D-模、表示论与量子群》（威尼斯，1992年），《数学讲义》丛书第1565卷，第31–140页。施普林格，柏林，1993年。[GY14] J. Geiger 和 M. Yakimov。通过表示论与环论研究量子舒伯特胞腔。《密歇根数学杂志》，63: 125–157，2014年。[GLL19] K. R. Goodearl、S. Launois 和 T. H. Lenagan。量子幂零代数的 Tauvel 高度公式。《代数通讯》，47(10): 4194–4209，2019年。[GL98] K. R. Goodearl 和 E. S. Letzter。多参数量子仿射空间的素谱与本原谱。载于《环论新趋势》（米什科尔茨，1996年），CMS会议论文集第22卷，第39–58页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1998年。[GW04] K. R. Goodearl 和 R. B. Warfield, Jr.《非交换诺特环导论》，伦敦数学会学生教材第61卷。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2004年。[GY16] K. R. Goodearl 和 M. T. Yakimov。通过非交换唯一分解整环，从量子 Ore 扩张到量子环面。《数学进展》，300: 672–716，2016年。[Hay08] H. Haynal。 q-斜多项式环中的 PI次数奇偶性。《代数杂志》，319(10):4199–4221，2008年。[KLR04] A. C. Kelly、T. H. Lenagan 和 L. Rigal。量子格拉斯曼代数的环论性质。《代数及其应用杂志》，3(1):9–30，2004年。[Lau06] S. Launois。关于幂零李代数的 q-包络代数的自同构群。载于《从李代数到量子群》会议论文集，2006年。

[LL17] S. Launois、C. Lecoutre。泊松删导数算法与泊松谱。《代数通讯》，45(3):1294–1313，2017年。[LLN19] S. Launois、T. H. Lenagan 和 B. Nolan。全正性是一种量子现象：格拉斯曼流形情形。即将发表于《美国数学会回忆录》，2019年。[LLR06] S. Launois、T. H. Lenagan 和 L. Rigal。量子唯一因子分解整环。《伦敦数学会杂志》第二辑，74(2):321–340，2006年。[LR06] T. H. Lenagan 和 L. Rigal。具有直化律的量子分次代数，以及量子行列式环和量子格拉斯曼流形的 AS-科恩-麦考利性质。《代数杂志》，301(2):670–702，2006年。[LR08] T. H. Lenagan 和 L. Rigal。格拉斯曼流形中舒伯特簇的量子类比。《格拉斯哥数学杂志》，50(1):55–70，2008年。[LM11] A. Leroy 和 J. Matczuk。关于满足多项式恒等式的 q-斜迭代 Ore 扩张。《代数及其应用杂志》，10(4):771–781，2011年。[MR01] J. C. McConnell 和 J. C. Robson。《非交换诺特环》，《数学研究生教材》第30卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001年修订版。L. W. Small 协助编写。[New72] M. Newman。《整矩阵》。学术出版社，纽约-伦敦，1972年。纯粹与应用数学，第45卷。[Pos06] A. Postnikov。全正性、格拉斯曼流形与网络。arXiv 数学预印本，页码 math/0609764，2006年9月。[Rog19] A. Rogers。《单位根处量子幂零代数的不可约表示及其完全素商》。博士论文，肯特大学，2019年。