arXiv:2304.02157v1 [astro-ph.EP] 4 Apr 2023

仅角度初始轨道确定问题的几何解法*

Michela Mancini[1*]、Timothy Duff[2], AntonLeykin[3] 和 John A. Christian[1*]1古根海姆航空航天工程学院，佐治亚理工学院，亚特兰大，30332，GA，美国。[2]数学系，华盛顿大学，西雅图，98195，WA，美国。[3]数学学院，佐治亚理工学院，亚特兰大，30332，GA，美国。

*通讯作者。电子邮件：mmancini32@gatech.edu；john.a.christian@gatech.edu；

摘要

基于视线（即方位角）测量的初始轨道确定（IOD）是天体动力学中的经典问题。事实上，当给定已知时刻的三次视线观测时，已有许多成熟方法可执行IOD任务。有趣的是，与这些现有方法不同，可利用代数几何概念得到纯几何解。该思想基于如下事实：一般位置观测者的方位角可直接恢复三维圆锥曲线（例如开普勒轨道）的形状与定向，而无需任何时间信息。一般而言，五个未知时刻的方位角足以恢复轨道——无需任何类型的初始猜测，也无需传播轨道。若已知轨道为（近似）圆形，则三个方位角即足以进行纯几何IOD。该方法已在不同场景中进行测试，包括额外观测使方程组超定的情形。

关键词：轨道确定、天体动力学、几何学、数值代数几何、航天器、同伦延拓

*本文的早期版本曾于2022年8月在美国航空航天学会（AAS）/美国航空航天学会（AIAA）天体动力学专家会议上作为论文 AAS 22-687 发表。

1 引言

初始轨道确定（IOD）是天体动力学中的经典问题之一。该问题吸引了许多著名数学家的关注，包括高斯 [1],拉普拉斯 [2], 和吉布斯 [3]——他们提出的算法至今仍在广泛使用，距今已有数百年。这些经典 IOD 算法针对不同的 IOD 情形，而每种情形对轨道确定可用的信息都有各自独特的假设。表 1列出了一些示例。

在表 1所列的经典问题（前三行）中，吉布斯问题独具特色，因为它纯粹是几何问题。具体而言，该问题求解一条经过空间中三个已知点的开普勒轨道（焦点位于原点的三维圆锥曲线），而无需明确知道轨道运行物体经过这三个点的时间。对于仅速度初始轨道确定问题，也已通过使用轨道速度图找到类似的几何解 [4]（见表 1第四行）。据我们所知，对于仅根据视线（即方位角）测量值进行 IOD 的情形，即所谓的“仅角度 IOD”情形，尚无此类纯几何解法。广受欢迎的仅角度 IOD 算法，包括高斯 [1], 拉普拉斯 [2], Gooding [5], 等人的算法 [6]，都需要利用时间来传播物体在轨道上特定点之间的运动（这些点对应于方位角测量值）。因此，本工作运用代数几何的概念，为仅角度初始轨道确定问题构造一种纯几何解法。具体而言，我们将 IOD 问题表述为求解一个多元多项式方程组。对至少五次观测（圆轨道情形下为三次观测）求解该多项式方程组后，只需检查有限个候选解，即可估计未知轨道参数。

表 1 常见 IOD 问题表述形式比较。

	观测 Type	**观测数量 观测**	**显式使用 时间**
仅角度（高斯、拉普拉斯 Double-R 和 Gooding） [6]	方位角	3	Y
兰伯特 [7]	位置	2	Y
吉布斯 [3, 6]	位置	3	N
速度图（向量） [4]	速度	3	N
速度图（角度） [8]	标题	4	Y
本工作	方位角	3 或 5	N

本文余下部分安排如下。我们首先回顾代数几何中的一些关键概念（例如二次曲面、直线和平面的对偶表示），并将这些思想与二体轨道力学和方位角观测问题联系起来。利用这些思想，我们将 IOD 问题重新表述为一个多项式方程组。随后介绍一种基于同伦延拓思想的解法。在这一框架内，求解过程十分直接；我们通过若干

示例轨道展示该方法的有效性，包括近圆轨道、高椭圆轨道和双曲线轨道。

2 开普勒轨道与视线测量的几何学

仅角度初始轨道确定问题无需使用观测时间即可求解，只需从几何（而非动力学）的角度来研究该问题。这种几何解释使我们将轨道视为空间圆锥曲线，并可用其圆盘二次曲面简洁地表示。因此，我们的讨论首先考虑如何将经典轨道根数与圆盘二次曲面联系起来，以及哪些轨道参数化方式最为理想。

考虑一个处于未知轨道、其轨道有待估计的粒子（例如航天器或天体）。假设其作开普勒运动，则航天器将沿圆锥曲线运动。该圆锥曲线所在平面必须经过引力体的中心（即原点），但其平面取向未知。此外，该圆锥曲线的一个焦点必须位于原点。

现在，假设我们获得了一组 n 来自 n一般位置的不同观测者对该轨道粒子的观测。每次观测都包括从观测者所在位置指向粒子所在位置的方位角（即视线方向）。因此，我们得到一组 n 直线，每条直线都穿过由航天器轨道和其中一个观测者位置所构成的圆锥曲线。如图1所示。

我们要施加的物理约束是视线与轨道必须相交。通过以这种方式重新表述初始轨道确定问题，我们能够摆脱与通常在将测量与时刻关联时所需的光行时修正相关的不准确性；这些不准确性可能导致程度往往难以预测的误差先验地。

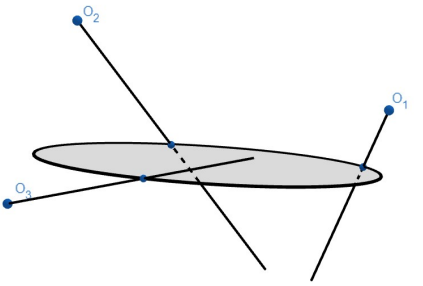


图1 几何学示意图。点 O_i 表示观测者的位置，直线表示观测到的视线。

2.1 作为圆盘二次曲面的开普勒轨道

开普勒轨道是一条三维空间圆锥曲线，可以用多种方式描述。例如，它可以表示为一个平面与二次曲面的交线，如圆锥面或椭球面。更简洁的描述方式是圆锥曲线的对偶表示，它描述了圆锥曲线的切平面轨迹。在二维空间中，这有时称为圆锥曲线包络；在三维空间中，通常称为圆盘二次曲面 [9]。如需了解二次曲面的更多细节，请参阅文献 [9–11]。

由于使用齐次坐标既方便又自然，我们将空间中的平面视为三维射影空间 $\mathbb{P}^3$. 中的一个子集。 $\mathbb{P}^3$ 中的平面可以用原始形式表示，此时平面上的点是某个4×3 矩阵的列空间中的向量；也可以用对偶形式表示为 4×1 矩阵的左零空间。 $\boldsymbol{\pi}$. 同样， $\mathbb{P}^3$ 中的直线可以用原始形式表示为某个 4×2 矩阵的列空间；也可以用对偶形式表示，此时包含该直线的平面是某个 4×2 矩阵的列空间中的向量。

圆盘二次曲面可由一个秩亏的 4×4 矩阵 $\boldsymbol{Q}^*$表示。用对偶形式表示，平面 $\boldsymbol{\pi}$ 位于圆盘二次曲面上，当且仅当

$$\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{Q}^* \boldsymbol{\pi} = 0. \tag{1}$$

这描述了对偶射影空间中的一个曲面。直观而言，圆盘二次曲面可以看作所有与一个被压扁成薄饼形状的椭球面相切的平面。

2.2 作为圆盘二次曲面的轨道

下面将圆盘二次曲面 $\boldsymbol{Q}^*$ 与更常用的轨道根数联系起来。因此，考虑一个轨道，其近焦坐标系由标准正交基向量 $\{\boldsymbol{p}、\boldsymbol{q}、\boldsymbol{w}\}$确定。我们采用如下约定：$\boldsymbol{p}$ 从原点（位于引力体中心）指向轨道近心点，而 $\boldsymbol{w}$ 垂直于轨道平面（方向与角动量向量一致）。单位向量$\boldsymbol{q}$ 补全为右手系。该坐标系如图 2所示。

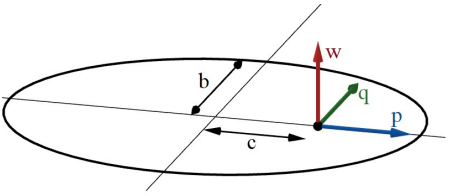


图 2 半短轴 b 和焦距 c 完全决定了轨道在轨道平面中的形状。$\boldsymbol{p}$ 轴和$\boldsymbol{q}$ 轴决定了轨道在空间中的方向。

若轨道的半长轴为 a ，偏心率为 e，则原点（必定位于椭圆的一个焦点）到轨道几何中心的距离为 $c = ea$。同样，半短轴 b 与 a 和 c 之间满足关系 $a^2 = b^2 + c^2$。因此，在近焦坐标系中，椭圆可表示为

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

或者，等价地，

$$b^2x^2 + 2b^2cx + b^2c^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0. \tag{3}$$

合并各项后，可写为

$$b^2x^2 + a^2y^2 + 2b^2cx + b^2(c^2 - a^2) = 0, \tag{4}$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 + 2b^2cx - b^4 = 0. \tag{5}$$

在齐次坐标$\boldsymbol{x}^T \propto [x,\ y,\ 1]$中，最后一个方程等价于

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{x} = 0, \tag{6}$$

其中$\boldsymbol{C}$是一个非零的 3×3 矩阵，其值仅确定到一个比例因子：

$$\boldsymbol{C} \propto \begin{bmatrix} b^2 & 0 & b^2c \\ 0 & a^2 & 0 \\ b^2c & 0 & -b^4 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

如果$\boldsymbol{C}$描述轨道的圆锥曲线轨迹，那么$\boldsymbol{C}^* \propto \boldsymbol{C}^{-1}$描述圆锥曲线包络（与轨道平面内圆锥曲线相切的直线）。因此，回想$a^2 = b^2 + c^2$,

$$\boldsymbol{C}^* \propto \boldsymbol{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 & c/(a^2b^2) \\ 0 & 1/a^2 & 0 \\ c/(a^2b^2) & 0 & -1/(a^2b^2) \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} 1 & 0 & c/b^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ c/b^2 & 0 & -1/b^2 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

现在的目标是将圆锥曲线包络与圆盘二次曲面（一种二次曲面包络）联系起来。为此，我们回顾参考文献 [12] 中的关系

$$\boldsymbol{Q}^* \propto \boldsymbol{H}\, \boldsymbol{C}^*\, \boldsymbol{H}^T \tag{9}$$

在这种情况下，可将$\boldsymbol{H}$计算为 4×3 矩阵

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{0}_{3\times 1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

执行所需的乘法运算后，得到一个圆盘二次曲面，其形式为

$$\boldsymbol{Q}^* \propto \boldsymbol{H}\,\boldsymbol{C}^*\,\boldsymbol{H}^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^T + \boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T & (c/b^2)\boldsymbol{p} \\ (c/b^2)\boldsymbol{p}^T & (-1/b^2) \end{bmatrix}. \tag{11}$$

因此，

$$\boldsymbol{Q}^* \propto \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^T + \boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T & (c/b^2)\boldsymbol{p} \\ (c/b^2)\boldsymbol{p}^T & (-1/b^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{3\times 3} - \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T & (c/b^2)\boldsymbol{p} \\ (c/b^2)\boldsymbol{p}^T & (-1/b^2) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

因此，描述圆盘二次曲面的 4×4 矩阵$\boldsymbol{Q}^*$ 由两个标量（b 和 c，它们描述轨道在轨道平面内的大小和形状）以及张成近心点轨道平面的两个正交单位向量（$\boldsymbol{p}$ 和$\boldsymbol{q}$）构成。由于$\boldsymbol{p}$ 和$\boldsymbol{q}$ 正交且为单位向量，因此有以下三个约束

$$\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{q} = 1, \quad \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{q} = 0. \tag{13}$$

式（**12**）中的 Q* 的两种参数化形式以及式（13）中的三个约束也曾在参考文献 [13] 中给出，但未作推导。用这些特定方式表示 $\boldsymbol{Q}^*$ 的困难在于，对椭圆轨道（此时 $\boldsymbol{p}$ 的方向有明确界定）和圆轨道（此时 $\boldsymbol{p}$ 的方向并无明确界定）需要采用不同的处理方式。因此，我们引入第三种$\boldsymbol{Q}^*$ 参数化形式，以避免这一缺陷。具体而言，定义向量 $\boldsymbol{g} = (c/b^2)\boldsymbol{p}$，它对椭圆轨道和圆轨道都定义良好。我们注意到，当 $e \to 0$ 时，在极限情况下 $c \to 0$ 且$\boldsymbol{g} \to \boldsymbol{0}_{3\times 1}$。因此，我们可以将圆盘二次曲面参数化为

$$\boldsymbol{Q}^* \propto \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{3\times 3} - \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T & \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{g}^T & (-1/b^2) \end{bmatrix}, \tag{14}$$

其中，参数 $\boldsymbol{w}$、$\boldsymbol{g}$ b满足以下两个约束条件

$$\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{w} = 1, \quad \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{g} = 0. \tag{15}$$

因此，鉴于其对近圆轨道的优势，后续推导采用$\boldsymbol{Q}^*$ 方程（14）中的参数化。

2.3 视线观测与切平面

在 $\mathbb{P}^3$ 中，由 $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^{4\times 1}$表示的平面与 $\boldsymbol{Q}$ 相切，当且仅当

$$\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{\pi} = 0. \tag{16}$$

观测线 $\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_n \subset \mathbb{P}^3$ 必须位于未知切平面$\boldsymbol{\pi}_1, \ldots, \boldsymbol{\pi}_n$，这些切平面在几何上由轨道平面内每条观测线与对应切线的张成空间得到。每个 $\boldsymbol{\pi}_i$ 以这种方式构造的$\boldsymbol{Q}^*$ 中的唯一平面 $\boldsymbol{\ell}_i$包含，如图3所示。

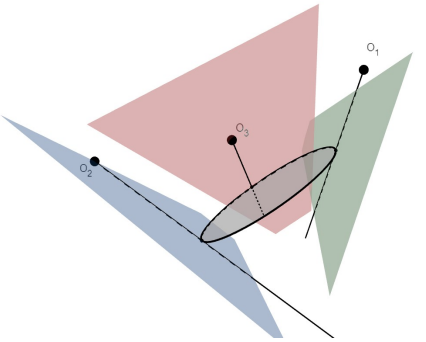


图 3 圆盘二次曲面中平面 $\boldsymbol{\pi}_1$，$\boldsymbol{\pi}_2$，$\boldsymbol{\pi}_3$ 的表示，这些平面包含来自三个观测者 O_1、O_2 和 O_3 的三条观测线。

每条观测线 $\boldsymbol{\ell}_i$ 都可以用原始坐标描述为以下 4×2 矩阵的列空间

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_i & \boldsymbol{i} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \tag{17}$$

这里，$\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^3$ 表示观测者点 O_i 的坐标，而$\boldsymbol{u}_i \in \mathcal{S}^2$ 表示单位球面上的一个点，代表一条视线测量。在无噪声情形下，方位角是从观测者指向轨道上各点的单位向量。

对偶地，$\boldsymbol{\ell}_i$ 可以表示为任意满秩 4×2 矩阵$\boldsymbol{A}_i$，使得 t

$$\boldsymbol{A}_i^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_i & \boldsymbol{u}_i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2\times 2}. \tag{18}$$

用于给出 $\boldsymbol{\ell}_i$ 的对偶表示的矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 有多种选择。在下一小节中，我们将介绍两种方法——一种代数方法，另一种数值方法——通过这两种方法，可以直接根据观测计算出合适的 $\boldsymbol{A}_i$。计算出 $\boldsymbol{A}_i$ 后，切平面 $\boldsymbol{\pi}_i$ 可写为

$$\boldsymbol{\pi}_i = \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{c}_i \tag{19}$$

对于一个 2×1 向量$\boldsymbol{c}_i$. 将此表达式代入式（16）可得

$$\boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{Q}^* \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{c}_i = 0. \tag{20}$$

非零向量 $\boldsymbol{c}_i$ 取决于未知切平面，可以从该方程中消去，从而得到一个仅取决于观测直线和未知圆盘二次曲面元素的约束。具体而言，

$$\det\left(\boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{Q}^* \boldsymbol{A}_i\right) = 0. \tag{21}$$

因此，每条观测直线 $\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_n$ 都会对三维圆锥曲线施加一个约束，该约束是 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{Q}^*$. 各元素的多项式。这些是确定未知轨道的基本约束。

2.3.1 视线观测的对偶表示

视线的对偶表示由矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 给出。为了用观测者向量 $\boldsymbol{x}_i$ 和方位向量 $\boldsymbol{u}_i$, 以代数形式表示 $\boldsymbol{A}_i$ ，将原始矩阵分块表示会更方便， $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_i & \boldsymbol{u}_i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_1 \\ \boldsymbol{S}_2 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

假设观测 $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{u}_i$ 足够一般，则两个 $\boldsymbol{S}_1$ 和 $\boldsymbol{S}_2$ 均可逆。因此，应用式（18）可将 $\boldsymbol{A}_i$ 参数化为

$$\boldsymbol{A}_i^T = \left[\boldsymbol{A}_i' \middle| -\boldsymbol{A}_i' \boldsymbol{S}_1 \boldsymbol{S}_2^{-1}\right], \tag{23}$$

其中， $\boldsymbol{A}_i'$ 可以取为任意可逆的 2×2 矩阵。记 $\boldsymbol{x}_i = \begin{bmatrix} x_{i,1} & x_{i,2} & x_{i,3} \end{bmatrix}^T$ 和 $\boldsymbol{u}_i = \begin{bmatrix} u_{i,1} & u_{i,2} & u_{i,3} \end{bmatrix}^T$。注意到 $\det \boldsymbol{S}_2 = u_{i,3}$, 我们发现选择 $\boldsymbol{A}_i' = u_{i,3} \boldsymbol{I}_{2\times 2}$. 更为方便。接下来计算

$$\boldsymbol{A}_i' \boldsymbol{S}_1 \boldsymbol{S}_2^{-1} = \begin{bmatrix} x_{i,1} & u_{i,1} \\ x_{i,2} & u_{i,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -u_{i,3} \\ -1 & x_{i,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{i,1} & x_{i,3}u_{i,1} - x_{i,1}u_{i,3} \\ -u_{i,2} & x_{i,3}u_{i,2} - x_{i,2}u_{i,3} \end{bmatrix}, \tag{24}$$

因此

$$\boldsymbol{A}_i = \begin{bmatrix} u_{i,3} & 0 \\ 0 & u_{i,3} \\ u_{i,1} & u_{i,2} \\ x_{i,1}u_{i,3} - x_{i,3}u_{i,1} & x_{i,2}u_{i,3} - x_{i,3}u_{i,2} \end{bmatrix}. \tag{25}$$

方程（对式(25) 中对偶表示的一种数值替代方法，可以通过对转置后的原始矩阵进行奇异值分解（奇异值分解）得到,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_i^T & 1 \\ \boldsymbol{u}_i^T & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{U}_i \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{V}_i^T = \boldsymbol{U}_i \begin{bmatrix} \sigma_{i,1} & 0 \\ 0 & \sigma_{i,2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_{i,1} & \boldsymbol{v}_{i,2} & \boldsymbol{v}_{i,3} & \boldsymbol{v}_{i,4} \end{bmatrix}^T. \tag{26}$$

由于 $\boldsymbol{A}_i$ 必须位于转置后的原始矩阵的零空间中，我们可以利用 $\boldsymbol{V}_i$的最后两列来选取 $\boldsymbol{A}_i$,

$$\boldsymbol{A}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_{i,3} & \boldsymbol{v}_{i,4} \end{bmatrix}^T. \tag{27}$$

2.3.2 代数约束的几何解释

方程中的代数约束。 21 可以通过考察相机的射影几何得到。假设视线测量值 $\boldsymbol{u}_i$ 是通过以下方式获得的

相机位于位置 $\boldsymbol{x}_i$。对于每台相机，令 $\boldsymbol{T}_i$ 为描述从惯性坐标系到相机坐标系旋转的正交矩阵。惯性坐标系中位置为 $\boldsymbol{r}_i$ 的轨道粒子，将成像于像平面坐标 $\boldsymbol{s}_i \in \mathbb{P}^2$ [10, 14]

$$\overline{\boldsymbol{s}}_i \propto \boldsymbol{T}_i \left(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{x}_i \right), \tag{28}$$

若令投影矩阵 $\boldsymbol{P}_i$ 为

$$\boldsymbol{P}_i = \left[\boldsymbol{T}_i \,\middle|\, -\boldsymbol{T}_i \boldsymbol{x}_i, \right] \tag{29}$$

我们也可以将投影变换写为

$$\overline{\boldsymbol{s}}_i \propto \boldsymbol{P}_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_i \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

现在，将轨道视为空间中的一条实际圆锥曲线。汇集所有从相机出发并穿过该圆锥曲线的视线方向，我们便会得到一个以相机位置为顶点的圆锥面。该圆锥面与像平面的交截会形成另一条圆锥曲线，它对应于整个轨道路径在像平面上的瞬时投影。现在，考虑一个与圆锥面相切的平面。根据构造，该平面也与轨道相切，因此必定是属于轨道圆盘二次曲面的一个平面。如图所示4，该平面与像平面相交于一条直线，此直线与投影圆锥曲线相切（即像平面圆锥曲线包络上的一条直线）。因此，我们发现，圆盘二次曲面投影为一个圆锥曲线包络 [10]，它是$\boldsymbol{Q}^*$的函数（即未知量$\boldsymbol{g}$、$\boldsymbol{w}$和 b），

$$\boldsymbol{C}_i^* \propto \boldsymbol{P}_i \boldsymbol{Q}^* \boldsymbol{P}_i^T. \tag{31}$$

对于相机，每个视线测量都对应一个像平面测量$\boldsymbol{s}_i$，该测量必须位于投影轨道的圆锥曲线轨迹上$\boldsymbol{C}_i \propto (\boldsymbol{C}_i^*)^{-1}$，因此满足以下约束：

$$\overline{\boldsymbol{s}}_i^T \boldsymbol{C}_i \overline{\boldsymbol{s}}_i = 0. \tag{32}$$

这就是圆锥曲线轨迹方程。可以验证，该多项式约束在展开并归一化后，等价于式（21）中的代数约束。关于这一点的详细证明可参见 M. Mancini 的理学硕士论文 [15]。简而言之，对 2×2 矩阵$\boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{Q}^* \boldsymbol{A}_i$ 施加秩亏约束，与将相机成像点到像平面上轨道路径投影之间的距离度量置零，会产生同类型的约束。

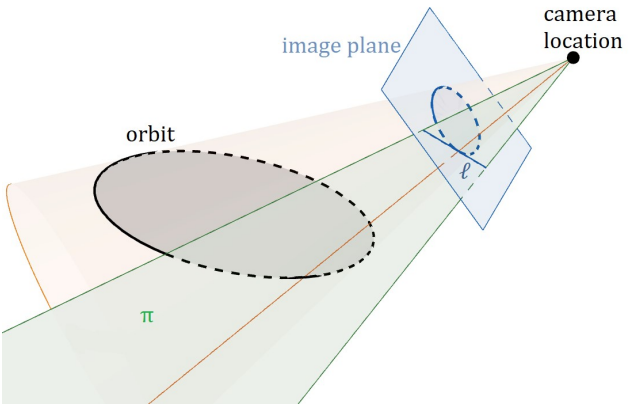


图4 圆盘二次曲面的平面 $\boldsymbol{\pi}$ 投影到像平面后形成一条直线 $\boldsymbol{\ell}$，该直线与投影圆锥曲线相切。

2.4 从圆盘二次曲面到轨道根数

获得圆盘二次曲面 $\boldsymbol{Q}^*$ 后，恢复经典轨道根数就很简单了。这本质上是式（12）所述关系的逆映射。给定圆盘二次曲面$\boldsymbol{Q}^*$，我们可以直接计算椭圆半短轴 b，其为

$$b = \sqrt{-1/Q^*_{33}} \tag{33}$$

焦距 c 为

$$c = b^2 \| \boldsymbol{Q}_{1:3,4} \| \tag{34}$$

利用关系式$a = b^2 + c^2$ 和 $e = c/a$，即可求得半长轴和偏心率。然后，可求得$\boldsymbol{p}$ 为

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{Q}_{1:3,4}}{\| \boldsymbol{Q}_{1:3,4} \|}, \tag{35}$$

并且我们可以写成

$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T = \boldsymbol{Q}^*_{1:3,1:3} - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^T. \tag{36}$$

利用$\boldsymbol{q}$ 是一个单位向量这一事实，我们最终得到，对于某些 $i = 1$，2，3，有

$$\boldsymbol{q} = \frac{\left(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T\right)_{1:3,i}}{\| \left(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T\right)_{1:3,i} \|}. \tag{37}$$

此处 i可以选择为使$\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T$中被选中的列具有最大的范数，从而避免数值问题。

确定 i、Ω 和 ω，可根据$\boldsymbol{p}$ 和$\boldsymbol{q}$ 使用标准关系式进行，这些关系式例如可见于 [16]。

确定与方位测量对应的真近点角还需要几个步骤。设 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{u}_0$ 分别为观测者的位置以及相对于该方位角的观测方向。轨道上观测点的坐标为

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{u}_0 \tag{38}$$

对于某个 $\lambda \in \mathbb{R}$。对应的 $\mathbb{P}^3$ 中的坐标为:

$$\overline{\boldsymbol{r}}_0 \propto \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{39}$$

由于卫星的位置必须是轨道平面 $\boldsymbol{\beta}$上的一个点，且 h

$$\boldsymbol{\beta} \propto \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

以下关系可用于确定 λ

$$\overline{\boldsymbol{r}}_0^T \boldsymbol{\beta} = 0 \tag{41}$$

由此可得

$$\lambda = -\frac{\boldsymbol{x}_0^T \boldsymbol{w}}{\boldsymbol{u}_0^T \boldsymbol{w}} \tag{42}$$

将此表达式代入 λ 式（38）中，最终即可求出与该方位角对应的真近点角，即近拱点方向（包含在$\boldsymbol{g}$ （或$\boldsymbol{p}$）中）与位置向量$\boldsymbol{r}_0$之间的夹角:

$$\nu_0 = \operatorname{atan2}\left(\frac{\|\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{r}_0\|}{\|\boldsymbol{g}\|\|\boldsymbol{r}_0\|}, \frac{\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r}_0}{\|\boldsymbol{g}\|\|\boldsymbol{r}_0\|} \right) \tag{43}$$

请注意， λ 也是观测者位置与卫星观测位置之间的距离。如有需要，可结合 λ以及单次测量的时间，对光行时进行修正。

3 通过多项式方程组求解进行轨道确定

3.1 多项式方程组表述

若在式（***14***）给出的Q* 参数化中取缩放因子为 1，则这七个未知轨道参数$\boldsymbol{w}$、$\boldsymbol{g}$ b将是由式（$2 + n$15）和（21）给出的方程组的解，其中 $i = 1$、...、 n. 对于足够

一般观测，预期当 $7 = 2 + n$、或 $n = 5$时，该方程组将有有限多个解。事实上，若在复数范围内计数，我们预期解的数量保持不变。这种“数量守恒”原理可视为代数学基本定理的一种推广；代数学基本定理讨论的是单个未知数对应的单个多项式。代数几何语言下的正式表述可见参考文献 [17, 定理 229]。

在前一段中，短语“足够一般”的确切含义是，所有观测组成的向量 $\left[\boldsymbol{x}_1^T \cdots \boldsymbol{x}_5^T \boldsymbol{u}_1^T \cdots \boldsymbol{u}_5^T\right] \in \mathbb{R}^{30}$位于适当定义的判别轨迹之外。该判别轨迹类似于广为人知的二次方程判别式，但很难明确描述（例如，参见 [18,第 3 节1]，其中给出了一个含两个未知数的例子。）

要看一个“不够一般”的例子，我们可以考虑来自任意完美圆轨道的任意 5 次观测。在这种情况下，真实轨道满足$\boldsymbol{g} = 0$，相应的解是奇异的；也就是说，在该解处计算得到的系统的 7×7雅可比矩阵是秩亏的。使用标准数值方法可能难以准确估计这样的奇异解。实际情况中近圆轨道产生的近奇异解也同样如此。

另一方面，如果我们通过要求$\boldsymbol{g} = 0$来施加圆轨道约束，那么 $n = 3$ 次观测足以将轨道确定到有限种可能性。在这一圆轨道模型下，我们得到另一组多项式方程，据此可以计算其余轨道参数$\boldsymbol{w}$ b。这种模型的优点是所需观测较少，而且在近圆轨道情况下，可能对真实轨道给出合理近似。

我们在命题1中总结了两种不同的轨道模型、相应的多项式方程组，以及一般数据下它们的解的数量。

命题1

1. *For* $n = 5$ *generic observations* $(x_i, u_i)_{i=1}^5$, *the elliptical model given byEqs.(15) and(21) for* $i = 1,\ldots,5$ *has a total of* **66** *complex solutions in theunknown matrix* Q^*, *each lifting to* 4 *solutions* $(\pm w, g \pm b)$ *in terms of the parameterization* 14 .
2. *For* $n = 3$ *generic observations* $(x_i, u_i)_{i=1}^3$, *the circular model given by Eq.for* $i = 1,\ldots,3$, *plus the additional constraints*

$$\mathbf{w}^T\mathbf{w} = 1, \quad \mathbf{g} = 0, \tag{44}$$

has a total of **12** *complex solutions in the unknown matrix* $\mathbf{Q}^*$, *each lifting to* 4 *solutions* $(\pm\mathbf{w}0, \pm b)$ *in terms of the parameterization* (14) 。

命题1中关于解的数量的断言，可以使用任何一种求解多项式系统的标准方法轻松验证，例如 Gröbner 基（概述见 [19, 第 2] 章），或

多项式同伦延拓 [20]。在我们的实验中，我们使用计算机代数系统 NAG4M 2 [21]中软件包提供的后一种方法的实现Macaulay2 [22]来求解与任一模型相关的系统。下一小节将概述同伦延拓。

Remark 1 对于实参数 $(\boldsymbol{x}_i、\ \boldsymbol{u}_i)_{i=1}^{n}$，命题1 中出现的方程组可能有一个或多个 *real* 解。对于我们的两个模型中的任意一个，“实解”的确切含义取决于哪些量被视为未知数。例如，下面给出的实圆盘二次曲面

$$\boldsymbol{Q}^{*}=\begin{bmatrix} 3/2 & 12 & 0 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

只能提升为复值参数

$$\boldsymbol{w}^{T}=(\pm i/\sqrt{2})\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{g}^{T}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad b=\pm 1.$$

3.2 用参数同伦求解多项式方程组

数值同伦延拓是一种通用方法，可用于求解多项式方程组，例如命题1中出现的方程组。该方法的基本思想如下：由于多项式的根会随其系数连续变化，我们可以通过估计解在将一个系统变形为另一个系统时的变化（起始系统），来利用一个解集已知的系统（目标系统）求解同一类系统中的另一个系统。我们用一个简短的例子来说明其主要思想。

Example 1 为求解由下式给出的二元$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}^{T}$ 目标系统

$$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}-x^3+2\,x+1 & -y^2+x+1\end{bmatrix}^{T}=0,$$

我们可以使用众所周知的 *total-degree* 起始系统 [20, 第 8.4 节。1]

$$\boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}x^3-1 & y^2-1\end{bmatrix}^{T}=0,$$

以及直线同伦

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X};\ t)=(1-t)\,\boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{X})+t\,\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X})=0,$$

这6个起始解具有形式 $\begin{bmatrix}e^{2\pi ik/3} & \pm 1\end{bmatrix}^{T}$ 对于 $k=1,2,3$。每一个为

solution path (t) t $0,$ $H(\ \ (t)\ \ t)=\boldsymbol{X}$确定一0.

个初始值，该值定义在附近并满足$\boldsymbol{X}$；对于这个特定的同伦，每条解路径对所有 $t\in[0,1]$,都有定义，并且每个值$\boldsymbol{X}\,(1)$给出六个目标解中的一个。例如，如果$\boldsymbol{X}(0)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^{T}$，则$\boldsymbol{X}$ $(1)\approx\begin{bmatrix}.246, -.712\end{bmatrix}^{T}$.

起始系统的选择是实现任何同伦延拓方法时的一个重要因素。通常，我们希望起始系统足够通用，以求解来自特定应用的任何可能的目标系统。选择起始系统时的另一个重要因素是其特异性，或起始解的数量。不同起始系统的选择在参考文献 [20,第 8], 章中进行了比较，其中确定了一个基本权衡：易于描述且能求解一大类系统的起始系统通常需要跟踪更多路径。例如，如果使用全次数起始系统来求解椭圆模型的一个实例，这需要跟踪 $4^5 \times 2^2 = 4096$ 条路径。这应与命题1所确立的最优数量66进行比较。如果使用全次数同伦来求解椭圆模型，那么我们将需要跟踪 $4096 - 66 = 4030$发散的解路径，其中$\boldsymbol{X}(t) \to \infty$ 当 $t \to 1^-$.

与总次数同伦不同，参数同伦 [23] 使我们能够在合理的假设下追踪最优数量的路径。命题1 中的系统在“多数”情况下具有相同数量的解，因此原则上可以任选一个实例作为起始系统。参数同伦可用于一般情形：我们有一个系统$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X};\ \boldsymbol{P}) = 0$，其方程数与未知数相同，并且同时关于未知数$\boldsymbol{X}$ 以及某些参数$\boldsymbol{P}$呈多项式关系；这些参数取决于观测。对于我们感兴趣的系统，参数的选取有一定灵活性。一种简单的选择是令目标参数$\boldsymbol{P}_1 \in \mathbb{R}^{8n}$ 由所有 n 直线的对偶坐标组成，即$\boldsymbol{P}_1 \in \mathbb{R}^{40}$ 对应椭圆模型，而$\boldsymbol{P}_0 \in \mathbb{R}^{24}$ 对应圆轨道模型。另一种方法是利用式（25），将观测者和方位向量直接编码到参数向量$\boldsymbol{P}_1 \in \mathbb{R}^{6n}$中，即$\boldsymbol{P}_1 \in \mathbb{R}^{30}$ 对应椭圆模型，而$\boldsymbol{P}_1 \in \mathbb{R}^{18}$ 对应圆轨道模型。以下关于参数同伦的说明同样适用于这两种选择。

一般而言，由一组观测编码的参数值 P_1 指定了参数同伦的目标系统 $\mathrm{F}(\mathrm{X};\mathrm{P}_1) = 0$。如果有$m$ 个参数值，即 $\mathrm{P}_1 \in \mathbb{R}^m$，那么起始系统也应是一个 $m \times 1$ 维向量 P_0.。对于起始系统 $\mathrm{F}(\mathrm{X};\mathrm{P}_0) = 0$，我们已知一组预先计算得到的 $d \in \{12, 66\}$ 个复数解 $\mathrm{X}_1(0), \ldots, \mathrm{X}_d(0)$，其坐标是未知轨道根数；除命题1中所述的符号对称性外，这些解两两不等价。为了将这些起始解延拓为解路径 $\mathrm{X}_1(t), \ldots, \mathrm{X}_d(t)$，我们通过参数同伦将起始系统“变形”为目标系统

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X};\ \boldsymbol{P}, t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X};\ t\boldsymbol{P}_1 + (1-t)\boldsymbol{P}_0) = 0. \tag{45}$$

每条解路径 $\boldsymbol{X}(t)$ 都是 t 的隐函数，满足方程（45）和非线性常微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{H}}{d\boldsymbol{X}}\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{H}}{dt} = 0. \tag{46}$$

该常微分方程与起始解 $\boldsymbol{X}_i(0)$之一共同构成未知解路径 $\boldsymbol{X}_i(t)$ 的初值问题，该解路径满足方程（45）。数值积分方法可以估计 $\boldsymbol{X}_i(t)$ 在 $t \in [0$处的值$1]$. 在实践中，我们使用数值预测校正方法来近似解路径。如果对于某个 $\boldsymbol{X}_i(t)$，其在某个 $t \in [0$处的值已知且误差在容差范围内$1]$，则 “预测步”（通常采用标准四阶龙格-库塔方法）利用方程（46）求得某个步长 Δt. 对应的 $\boldsymbol{X}_i(t + \Delta t)$ 的初始估计值。随后，使用牛顿法进行一次或多次迭代，通过“校正步”进一步修正该估计值。

参数同伦的一个关键性质是，在温和假设下，它们以概率一全局收敛。方程（45）中的参数同伦具有以下关键性质，这些性质是更一般的参数延拓定理的推论 [20, 定理 7.1。1]我们将这一一般结果专门用于我们特别关注的情形。对于足够一般的（因而几乎所有） $(\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1)$，有：

1. 每个起始解 $\boldsymbol{X}_i(0)$ 都可延拓为一条解路径 $\boldsymbol{X}_i(t)$，该路径对所有 $t \in [0, 1]$. 都是光滑的。2. 目标系统的每个解都可以从某条解路径的终点 $\boldsymbol{X}_i(1)$ $\boldsymbol{X}_i(t)$.得到，且仅相差符号对称性

此时，值得指出同伦延拓与更标准的局部方法（如牛顿法）之间的关键区别：同伦延拓是一种全局 求根方法。使用牛顿法时，我们会选取一个“起始解”$\boldsymbol{X}$，然后计算迭代值$\boldsymbol{X} \leftarrow \boldsymbol{X} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{P}_1)$，直到满足某个收敛条件，从而得到目标系统的一个解$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{P}_1) = 0$. 在实践中，如果$\boldsymbol{X}$的初始猜测与目标解不够接近，这种方法可能会遇到问题。

在同伦延拓中，“起始解”指的是预先计算得到的起始系统 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{P}_0) = 0$ 的解。无需要求这些起始解与目标系统的解“接近”，也无需要求起始参数和目标参数在所有参数构成的空间中彼此接近。只要预先计算的起始参数 $\boldsymbol{P}_0 \in \mathbb{C}^m$ 足够一般，就可以将所有起始解通过数值延拓从 $t = 0$延拓到 $t = 1.$。因此，我们可以计算目标系统 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{P}_1) =$0, 的全部解，前提是目标参数 $\boldsymbol{P}_1$ 也足够一般。

通常，为起始参数选择随机复数$\boldsymbol{P}_0$，就足以确保能够计算出由$\boldsymbol{P}_1$ 指定的目标系统的所有孤立解。由此可见，只要起始参数足够随机，其选择对计算所得目标解的精度预计影响较小。这里，“精度”指真实目标解与通过同伦延拓计算得到的近似解之间的距离。在没有测量噪声的情况下，通常可以将真实解恢复到机器精度。存在测量噪声时，精度取决于噪声的大小（即噪声越大，精度越低）。无论是否存在噪声（或噪声大小如何），都没有明确而简单的标准可用于挑选一个“良好”的起始系统，以便

获得更精确的结果。不过，起始参数有一些性质是我们可以尝试优化的。例如，如果每个起始解$d\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{X}\,(\boldsymbol{X}_i(0);\,\boldsymbol{P}_0)$ 对应的雅可比矩阵$\boldsymbol{X}_i(0)$条件良好，那么对于每条解路径，当 t 接近 0 时，我们可以预期预测/校正步会更加精确。基于这一考虑，我们选择起始系统的方法是：随机生成若干组不同的参数 $\boldsymbol{P}_0$ ，其坐标从复单位圆上均匀抽取；为每个系统计算一组完整的解；然后选取所有解中最大条件数最小的系统。为求解各模型中的参数系统，我们采用了基于单值性的方法来获得一组初始参数的解。该方法与参数同伦配合良好，并能自然地利用解的四重对称。有关这一方法的更多细节，请参阅文献 [24–26]。

在我们的实现中，我们使用公式（27）来确定表示每个视线观测对偶坐标的参数。求解前，我们将所有距离测量值重新缩放为以地球半径为单位，这通常会使 $\boldsymbol{Q}^*$ 中的各项具有相近的量级。除采用最小步长 $\Delta t = 1 \times 10^{-16}$ 外，我们使用 `NAG4M2`中的默认路径跟踪器设置。此外，对于 $t \approx 1$ 出现路径失败（虽不常见）的情况，我们使用柯西终局来估计奇异解 [20,第 10]章。

3.3 超定公式

对于 $n > 5$ 个观测，通常不存在满足公式（ $n + 2$ 21）和（15）中所有约束的精确解。不过，我们仍可尝试最小化某个代价函数 J，该函数取决于所有 n 测量值。根据公式（21），一个简单的选择是对方程残差求平方后求和：

$$J(\boldsymbol{Q}^*) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(det(\boldsymbol{A}_i\, \boldsymbol{Q}^*\, \boldsymbol{A}_i)\right)^2. \tag{47}$$

现在我们的任务是最小化 $J(\boldsymbol{Q}^*)$ ，同时满足式（15）中的约束。为求解这个受约束优化问题，我们采用拉格朗日乘数法计算所有复数临界点。对于 $n > 5$一般的观测，临界点的数量结果为 $4244 = 4 \times \mathbf{1061}$ 个临界点。在物理上合理的临界点中，成本最低的解可作为未知轨道的估计值。

为了从式（47）和（15）得到多项式方程，我们可以令 $\beta = -1/b^2$ ，并写出（齐次化的）拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{g}, \beta) = \lambda_0 J(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{w}, \beta) + \lambda_1(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{w} - 1) + \lambda_2(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{g}). \tag{48}$$

此时，一阶最优性条件为

$$\nabla_{\lambda_1, \lambda_2, w_1, \ldots, g_3, \beta}\mathcal{L} = \mathbf{0}_{9\times 1}. \tag{49}$$

施加一个一般的仿射线性方程

$$c_0\lambda_0 + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3 = 0, \tag{50}$$

我们得到一个包含 10 个方程（来自方程（49）和（50））的方程组，其中有 10 个未知数，取决于观测 $\boldsymbol{A}_1$、……、$\boldsymbol{A}_n$ 以及新参数 c_0、……、c_3.与之前一样，这些解具有四重对称性；我们可以使用参数同伦追踪 1061 条路径，从而计算一般参数值下的所有解。在这一通用设置下，可以按通常方式选择参数$(c_0$、c_1、c_2、$c_3) = (1$、0、0、$-1)$ 以得到 $\lambda_0 = 1$。然而，为了提高数值稳定性，[27, 第 4 节7], 在实验中，我们从 $\mathbb{R}^4$中的单位3球面上均匀随机地选取这四个参数。

4 实验

在所有实验中，我们考虑一个参数已知的轨道，即真实解，以圆盘二次曲面 $\boldsymbol{Q}^*$. 表示。所有距离均以地球半径为单位计算，因此$\boldsymbol{Q}^*$ 中的各项数量级相近。为了从同伦 d 延续求解器计算出的$\frown$　　$\frown$个解中估计真实解，这些解以圆盘二次曲面 $\boldsymbol{Q}_1^*$、……、$\boldsymbol{Q}_d^*$表示，我们选取距离最近的解

$$\widehat{\boldsymbol{Q}^*} = \underset{\widehat{\boldsymbol{Q}_1^*},\ldots,\widehat{\boldsymbol{Q}_d^*}}{\arg\min} \|\widehat{\boldsymbol{Q}_i^*} - \boldsymbol{Q}^*\|_2, \tag{51}$$

其中，$\|\bullet\|_2$表示复对称矩阵向量空间上的 ℓ_2埃尔米特向量范数，

$$\|\boldsymbol{Q}^*\| = \sqrt{\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 4} |Q_{i,j}^*|^2}. \tag{52}$$

我们用绝对误差来衡量对$\boldsymbol{Q}^*$ 在式（51）中的估计值的误差:

$$\Delta\boldsymbol{Q}^* = \|\widehat{\boldsymbol{Q}^*} - \boldsymbol{Q}^*\|_2, \tag{53}$$

另外，我们将把真实轨道的经典轨道根数$(a, e, i, \Omega\ \omega)$ 与它们的估计值 $(\hat{a}, \hat{e}, \hat{i}, \hat{\Omega}\ \hat{\omega})$进行比较。注意，由于$\boldsymbol{Q}^*$ 相对于$\boldsymbol{w}$符号的变化保持不变，我们将以 π的模糊度恢复升交点经度Ω和近地点幅角 ω，如果已知运动方向，则可以轻松解决该模糊度。

我们使用以下误差度量：

$$\begin{aligned}\Delta a &= \widehat{a} - a \\ \Delta e &= \widehat{e} - e \\ \Delta i &= \theta(\widehat{i}, i) \\ \Delta\Omega &= \theta(\widehat{\Omega}, \Omega) \\ \Delta\omega &= \theta(\widehat{\omega}, \omega)\end{aligned} \tag{54}$$

其中，θ 表示两个角度之间的有符号差值。

4.1 场景 1：近圆轨道

由于我们关注的大多数轨道都是近圆轨道，因此我们选择近圆轨道作为测试这种纯几何方法性能的第一个案例。具体而言，我们参考了 AQUA 任务中卫星所运行的轨道 [28]。其轨道根数见表 2。

表 2 近圆轨道上卫星的轨道根数。

a	e	i	Ω	ω
7080.6 千米	0.0015	98.20°	95.21°	120.48°

我们通过考虑由不同地面站采集的观测，生成了模拟观测者数据。给出了十个以地心坐标表示的观测者位置，单位为地球半径：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_{10}\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} .238 & .327 & .399 & .179 & .238 & -.018 & -.006 & -.089 & -.128 & -.186 \\ -.733 & -.913 & -.789 & -.980 & -.733 & .948 & .997 & .989 & .672 & .247 \\ .637 & .243 & .467 & .087 & -.637 & -.319 & .078 & .122 & .729 & .951 \end{bmatrix}.$$

根据轨道上的已知点，得到一组相应的单位长度方位角：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_{10}\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -.226 & -.587 & -.443 & -.381 & -.343 & .281 & -.288 & -.014 & .619 & .722 \\ -.755 & -.495 & -.451 & -.486 & -.645 & -.958 & .053 & .907 & .776 & -.624 \\ -.616 & -.641 & -.775 & -.786 & .683 & .060 & -.956 & -.421 & -.122 & .298 \end{bmatrix}.$$

真实轨道的圆盘二次曲面 $\boldsymbol{Q}^*$ 为

$$\boldsymbol{Q}^* \approx \begin{bmatrix} .0284 & -.0885 & .1406 & .0002 \\ -.0885 & .9919 & .0128 & -.0007 \\ .1406 & .0128 & .9797 & .0012 \\ .0002 & -.0007 & .0012 & -.8114 \end{bmatrix}.$$

由于轨道的偏心率为 $e = 1.5 \times 10^{-3}$，我们可能会预期圆轨道模型能够合理近似真实轨道。因此，为了初步评估在此 IOD 场景中使用参数同伦的可行性，我们同时考察了圆轨道模型和椭圆模型。在这项实验中，我们从圆轨道模型的总计 $120 = \binom{10}{3}$ 种可能性以及

$252 = \binom{10}{5}$ 椭圆模型的总计1 种可能性中，随机抽取了 100 组观测者—方位角对应关系，并求解了命题3中的相应多项式方程组。本实验所得圆盘二次曲面和轨道参数估计值的均值及标准差列于表3中。对于圆轨道模型，我们不报告近地点幅角 ω ，因为该参数未定义。

表 3 近圆轨道无噪声分析中圆轨道模型和椭圆模型的误差均值和标准差。

	圆形		椭圆	
	mean	std	mean	std
$\Delta \boldsymbol{Q}^*$	2.15×10^{-3}	5.08×10^{-5}	2.11×10^{-12}	4.68×10^{-17}
$\Delta a[km]$	-2.40	0.92	2.82×10^{-11}	2.73×10^{-12}
Δe	-1.50×10^{-3}	1.09×10^{-18}	1.49×10^{-14}	1.36×10^{-15}
$\Delta i[deg]$	2.80×10^{-2}	8.22×10^{-3}	2.61×10^{-13}	2.69×10^{-14}
$\Delta\Omega$ [度]	-1.30×10^{-2}	6.48×10^{-3}	9.15×10^{-14}	9.69×10^{-15}
$\Delta\omega$ [度]	–	–	1.72×10^{-11}	4.08×10^{-13}

两种模型的同伦求解器的运行时间都不到一秒。椭圆模型和圆轨道模型的平均运行时间分别为 0.67 秒和 0.13 秒，相差约 5 倍。这主要是因为椭圆模型中需要跟踪的路径数量是圆轨道模型的 $66/12 = 5.5$ 倍。此外，为了防止跟踪解路径时出现潜在失败，我们对预测/校正步的最小步长 Δt 采用了非常保守的取值 1×10^{-16} 。

在椭圆模型下，表 3 显示，在没有测量噪声的情况下，我们能够以接近机器精度的精度恢复真实轨道。由于模型不匹配，圆轨道模型下的误差普遍较大，但仍然很小。本节稍后将说明，在某些特定情况下，圆轨道模型有时可能更可取。

为了通过近圆情形中的一个示例说明我们提出的轨道确定方法，我们现在聚焦于一组特定的观测者及其方位角，这些内容见图 5，对应于上文观测者矩阵和方位角矩阵中的第 1、4、5、6、9 列。

请注意，所考虑的观测之一几乎与轨道平面共面；这种情况会导致求解器出现奇异性，并且预计会降低其在存在噪声时的精度。在理想观测的情况下，采用椭圆模型时，求解器得到的 66 个复数解中有 44 个对应实值圆盘二次曲面。然而，这些实值圆盘二次曲面中只有 3 个可以提升为实值轨道参数 $(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{g}\ b)$（见注释 1。）这些实数解在正负号不确定性的意义下可表示为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X}_1 &\approx \begin{bmatrix} -1.00 & -.033 & -.022 & .001 & .310 & -.527 & -1.136 \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{X}_2 &\approx \begin{bmatrix} -.970 & -.111 & .216 & .033 & -.068 & .112 & 1.171 \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{X}_3 &\approx \begin{bmatrix} -.986 & -.090 & .143 & .000 & -.001 & .001 & -1.110 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

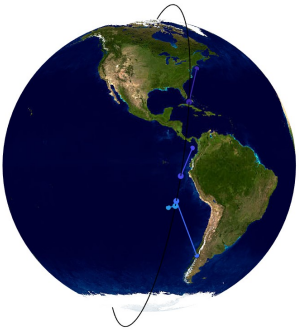


图 5 近圆轨道上卫星的五次观测中的四次，包括那次近共面的观测。

解 $\boldsymbol{X}_3$ 对应于真实轨道。为排除其他实数解，可以使用来自观测 $(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{u}_2)$ 的第六条直线。将这条直线代入方程 21 的左端，并分别在解 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 处求值，得到的残差误差分别为 3.9×10^{-3}，4.6×10^{-4}，和 6.2×10^{-16}。因此，解 $\boldsymbol{X}_3$ 对第六个观测的拟合最佳。

将圆轨道模型应用于同一示例（使用观测 1、5 和 6）后，现在有 6 个实数解，非零参数的符号存在歧义 $(\boldsymbol{w}\ b)$. 不过，现在可以使用全部 5 次原始观测来剔除 5 个多余解。与椭圆模型一样，评估这些额外解对约束条件 21的残差，可以帮助我们区分正确解。通过计算五个估计轨道点到原点的距离，也可以比较真实轨道与多余解。对于同伦求解器使用的三次观测，这些距离均为 b，但对于另外两次未使用的观测，这些距离可能明显不同。对于 6 个实数解中的每一个，我们都可以计算由三个距离组成的数据集的方差，其中包括 b 和未使用的观测。其一数值为 1×10^{-9}，其余值则在 1×10^{-3} 或更高的量级。这强烈表明了真实解的最佳近似，其表达式为

$$\boldsymbol{X} \approx \begin{bmatrix} -.986 & -.090 & .142 & 0 & 0 & 0 & -1.109 \end{bmatrix}.$$

4.2 情景 2：椭圆轨道

作为第二个测试案例，我们考虑一条接近磁层多尺度航天器（MMS）所运行轨道的轨道 [29]。这是一条高椭圆轨道，其轨道根数列于表4。

表 4 高椭圆轨道的轨道根数。

a	e	i	Ω	ω
83519.02 km	0.9082	28.50°	357.84°	298.22°

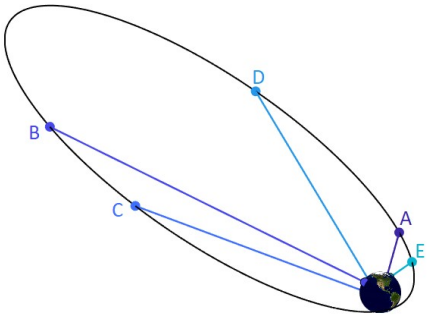


图6 三个地面站对卫星进行的五次观测。

在此情景中，我们使用地球表面的三个地面站获取了 10 次观测，并在 100 组各含五次无噪声观测的数据上评估了运行时间和精度。表5所示的汇总统计结果表明，椭圆模型的求解器在所有情况下都高效且精度很高。其平均运行时间为 0.56 秒。请注意，我们未考虑圆轨道模型。

表5 与高椭圆轨道相关的无噪声数据中求解器的均值和标准差。

	椭圆	
	mean	std
$\Delta \boldsymbol{Q}*$	3.03×10^{-14}	1.02×10^{-15}
$\Delta a[km]$	4.72×10^{-9}	1.76×10^{-10}
Δe	9.77×10^{-15}	3.14×10^{-16}
$\Delta i[deg]$	1.22×10^{-13}	3.84×10^{-15}
$\Delta\Omega[deg]$	-3.05×10^{-13}	$< 10^{-16}$
$\Delta\omega[deg]$	-2.03×10^{-13}	8.00×10^{-15}

图6 展示了卫星的 10 次视线观测中的 5 次。我们将在噪声观测的蒙特卡洛研究中使用这些观测。在本例中，求解椭圆模型得到 11 个实数解，其中 10 个通过检查第六条视线的残差即可轻松排除。考虑到在轨道形状未知先验时的模型选择问题，我们还研究了对其中三次观测求解圆轨道模型会产生什么结果。在这个简短的实验中，最终得到的 12 个解中有 4 个为实数解。然而，通过计算估计值 b的方差，我们发现了模型失配的明显信号；每个解对应的方差值都大于 1。

4.3 噪声观测及与其他方法的比较

为测试同伦求解器在各种情形下对噪声的鲁棒性，我们考虑以下噪声模型。对于每个方位向量 $\boldsymbol{u}$，一个带噪声的

扰动 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 定义为

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} + \epsilon \tag{55}$$

其中 $\epsilon \sim N(0, \boldsymbol{R})$。也就是说，$\epsilon$ 是均值为零的高斯噪声，其协方差遵循所谓的 QUEST 测量模型（QMM） [30, 31]

$$\boldsymbol{R} = E[\epsilon\epsilon^T] = \sigma^2 \left(\boldsymbol{I}_{3\times 3} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T\right), \tag{56}$$

其中 σ 是方位角误差的标准差，单位为弧度。请注意，$\boldsymbol{R}$ 是一个秩为 2 的 3×3 矩阵，其零空间方向为 $\boldsymbol{u}$。这意味着 ϵ 位于垂直于$\boldsymbol{u}$的平面内。如果 ϵ 较小，那么 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 在一阶近似下仍为单位向量。此时，测量方向将落在一个以真实方向为轴的圆锥面上，其张角取自标准差为 σ的正态分布。

对于所分析的所有情景，除非另有说明，我们均在上述噪声模型下进行了 10,000 次蒙特卡洛模拟，并设置 $\sigma = 1$ 角分的方位角噪声。以下研究旨在了解求解器在不同观测情景下的性能。此外，我们还研究椭圆模型和圆轨道模型的作用，以了解如何利用它们在某些观测条件下提升性能。我们将同伦延拓所得结果与 Double-R 法 [6] 或高斯法所得结果进行了比较；后两者的实现方式如 [16]所述。为初始化 Double-R 迭代，我们将位置向量半径的初始猜测设为真实值的四分之三。当该值小于地球半径时，则使用地球半径加上真实斜距的四分之一。此外，在这些标准 IOD 解法的实现中，我们假设观测时刻已被精确测量。请注意，每次进行比较时，所有参与比较的求解器都使用相同的含噪输入。

4.3.1 椭圆轨道

考虑图中已展示的轨道观测数据。6利用这五次观测，我们可以构建十组三次观测的组合，这些组合足以使用Double-R方法求解（同时需要测量时间）。表6比较了我们的求解器与Double-R在这10种情况下的性能。从表中可以看出，在大多数情况下，我们的方法更准确，而Double-R有两次未能收敛到真实解。图中对这两种方法进行了更全面的比较。7 针对ABE观测数据。

这项简短分析表明，对于高度椭圆轨道，在观测分布良好的情况下，该方法的表现可与一种先进的 IOD 算法相媲美。

表6 图中高椭圆轨道估计值的性能，针对图中所示的观测。 6。见图 7 ，其中放大展示了 ABE 观测的性能。结果是在 1 角分噪声下获得的。标记为“F”的行表示 Double-R 未能收敛的观测组合。

观测	初始轨道确定方法	σ_a $[km]$	σ_e	σ_i $[deg]$	σ_Ω $[deg]$	σ_ω $[deg]$
ABC	Double-R	4462	0.0032	0.147	0.230	1.256
ABD	Double-R	2227	0.0056	0.040	0.185	0.154
ABE	Double-R	1500	0.0024	0.012	0.057	0.128
ACD	Double-R	1243	0.0022	0.024	0.035	0.090
ACE	Double-R	F	F	F	F	F
ADE	Double-R	13223	0.0080	0.073	0.489	1.701
BCD	Double-R	F	F	F	F	F
BCE	Double-R	2552	0.0013	0.159	0.283	0.843
BDE	Double-R	685	0.0017	0.027	0.109	0.082
CDE	Double-R	591	0.0011	0.022	0.045	0.065
ABCDE	本工作	646	0.0012	0.015	0.049	0.084

4.3.2 近圆轨道

鉴于第 4.1 节所述卫星轨道的高度较低，我们使用五个不同的地面站进行了初步测试，以评估该方法的性能，每个观测位置对应一个地面站。

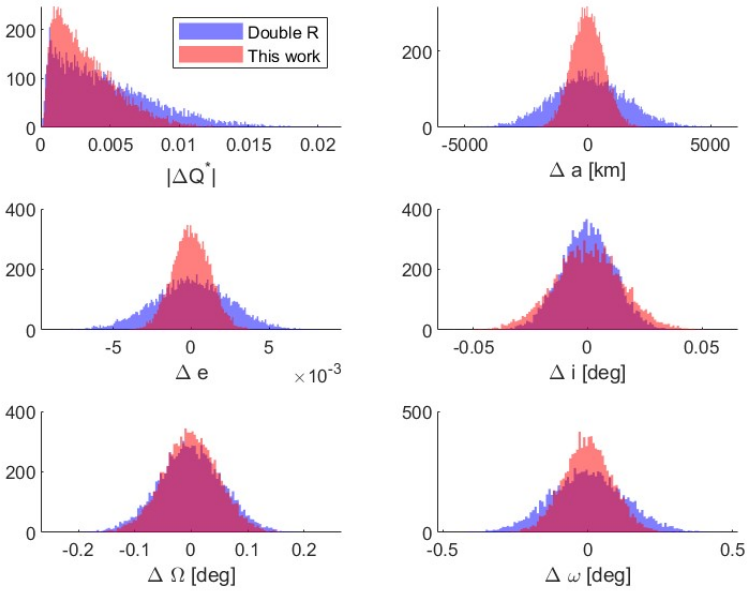
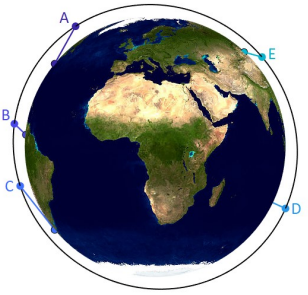


图7 针对图6中的 ABE观测数据，本工作所述方法与 Double-R迭代法产生的误差比较。请注意，另一组观测数据的统计结果见表6。噪声为 1 角分时的结果。

对该近圆轨道的分析有两个目标。首先，了解近圆轨道是否是基于同伦的算法的退化解。此外，我们想了解圆轨道模型在初始轨道确定过程中可能扮演的角色，以及如何用它来提高解的精度。

我们通过分析求解器对于图 8 中所示观测几何的性能完成了第一个目标。请注意，这些观测远非奇异。



F图 8 五个地面站收集的近圆轨道的五次观测 .

使用椭圆模型，所选测量值集产生的结果其性能如表7所示。在此，我们还将结果与Double-R产生的结果进行比较，针对从给定五个中采样的所有十种可能的三观测集。我们可以看到，我们的方法在大多数情况下都更优。图9给出了对其中一个观测性能的放大。

我们可以得出结论：对于近圆轨道的间隔良好的观测，本工作提出的方法也被证明能够与一种用于 IOD 的先进算法相媲美。

表7 图中所示观测数据采用 Double-R 方法与我们的方法所得误差标准差比较，参见图 8。图 9 更详细地展示了两种方法在 ACE 观测数据上的表现。结果是在噪声为 1 角分时得到的。

观测	初始轨道确定方法	σ_a $[km]$	σ_e	σ_i $[deg]$	σ_Ω $[deg]$
ABC	Double-R	9.20	0.00098	0.034	0.032
ABD	Double-R	0.41	0.00004	0.008	0.004
ABE	Double-R	14.25	0.00132	0.037	0.063
ACD	Double-R	0.67	0.00006	0.009	0.012
ACE	Double-R	3.03	0.00034	0.009	0.022
ADE	Double-R	5.78	0.00018	0.007	0.050
BCD	Double-R	18.85	0.00221	0.025	0.133
BCE	Double-R	1.99	0.00030	0.020	0.008
BDE	Double-R	0.15	0.00006	0.010	0.003
CDE	Double-R	4.39	0.00034	0.055	0.073
ABCDE	本工作	1.86	0.00015	0.006	0.017

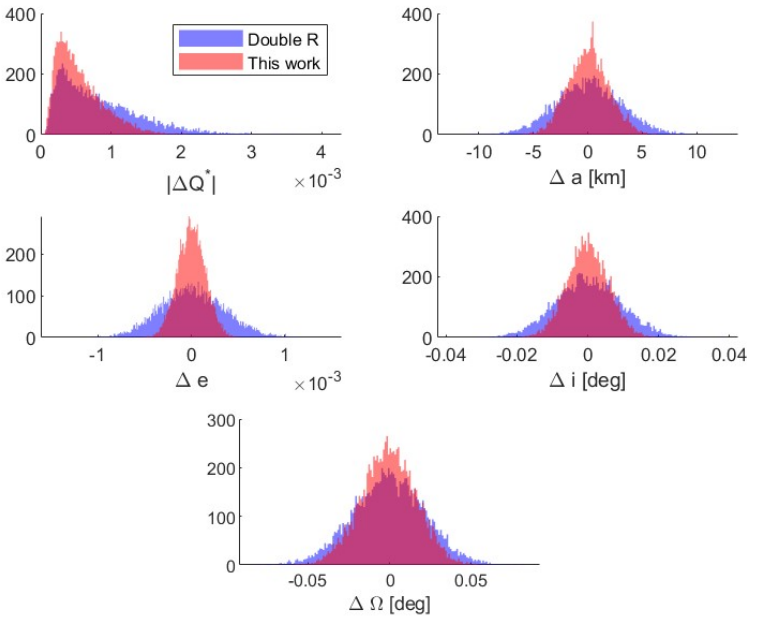


图9 本工作所述方法与应用于图中 ACE 观测的 Double-R 迭代法所得误差的比较8 在 1 角分噪声下的结果。更全面的比较见表7。

不过，最有意思的分析与理解求解器在无噪声实验中研究的相同情形下的行为有关。我们回顾一下，我们使用的是第 4.1 节给出的观测 1、4、5、6、9；如图 5 所示，由于其中一条视线（LOS）几乎与轨道平面共面，因此该问题的几何构型并非最优。

由于共面观测情形对求解器（以及其他经典的仅角度初始轨道确定解法 [32]）而言是奇异的，因此我们可以预期解的精度会下降。正如预测的那样，圆盘二次曲面的估计值误差能够整体反映估计精度，其量级相比之前分析的观测配置约增加了一个数量级。作为比较，我们使用相同的含噪输入测试了 Double-R：除包含近奇异观测的一种组合外，其余组合均发散。

此时，由于椭圆模型所得精度有所下降，因此有必要分析假设轨道完全为圆形是否能带来优势。在无噪声分析中，我们发现使用圆轨道模型会降低精度。然而，我们将证明，在存在噪声时，该模型有时可以改善解。

固定一个观测为近奇异观测，并从其余观测中随机抽取另外两个，我们实现了我们的圆轨道

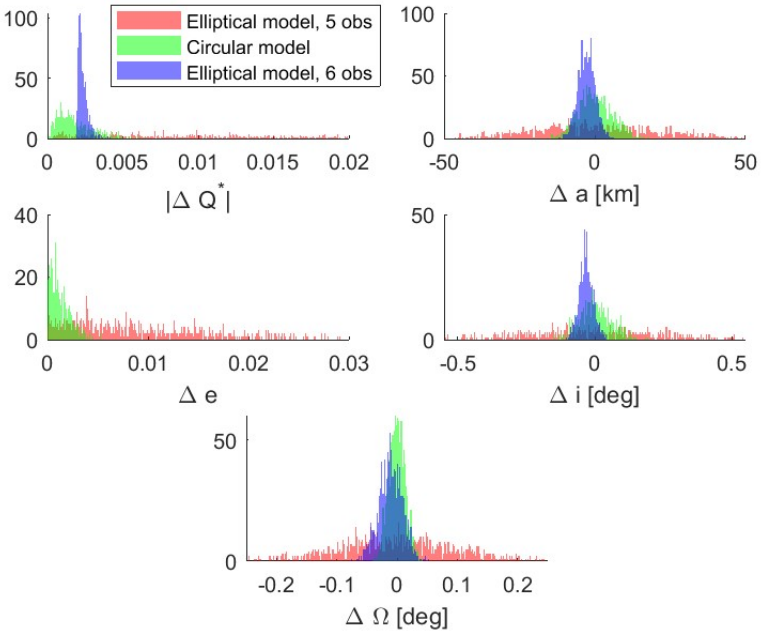


图10 针对近圆轨道的近奇异观测，采用文中介绍的三种模型得到的结果。请注意，未报告 Double-R 的相关结果，因为对于圆轨道模型中使用的三次观测，Double-R 均出现了发散。此外，请注意，未显示圆轨道模型产生的偏心率误差，因为在这种情况下，假设 $e \equiv 0$。

模型。图 10 展示了进行 1000 次运行的蒙特卡洛模拟结果。圆轨道模型显然有所改进：误差的量级更小。但其缺点是引入了偏差，这可能是由动力学模型不匹配所致。

因此，为了避免偏差，我们回到椭圆模型，并考虑了第六次观测。利用这次额外的观测，我们可以将问题表述为一个优化问题，如第3.3节所述。现在，从其他解中辨别出真实解不再是问题：真实解就是代价函数值最小的那个。结果表明，使用该模型得到的解达到了圆轨道模型所产生的精度，而且还具有不引入任何偏差的额外优势。图10对此进行了展示。优化形式带来的便利显而易见。对于任意形状的轨道，都可以使用单一模型（椭圆模型）求解该问题，从而克服观测近乎奇异的问题。

4.3.3 近距离观测

随着观测之间的间隔变小，求解器对噪声的容忍度会降低。我们使用三个地面站，在约65秒的时间间隔内采集近圆轨道卫星的观测数据，对本方法的性能进行了测试。观测的几何构型如图11所示，所用测量值如下：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -.390 & -.378 & -.392 & .186 & -.382 \\ .921 & .860 & .920 & .979 & .858 \\ .007 & -.342 & .007 & -.087 & -.342 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} .609 & .746 & .633 & -.868 & .699 \\ .348 & .639 & .372 & .267 & .621 \\ -.712 & .188 & -.679 & -.419 & .356 \end{bmatrix}.$$

表8 图中近距离观测情况下高斯法和我们的方法得出的标准差。11结果是在 1 角秒噪声下获得的。

观测	初始轨道确定方法	σ_a $[km]$	σ_e	σ_i $[deg]$	σ_Ω $[deg]$
ABC	高斯	97683	0.18556	11.695	3.500
ABD	高斯	3.22	0.00017	0.022	0.006
ABE	高斯	302.59	0.02664	1.328	0.364
ACD	高斯	18.22	0.00142	0.093	0.021
ACE	高斯	545.66	0.04581	2.082	0.395
ADE	高斯	0.83	0.00008	0.005	0.001
BCD	高斯	1.84	0.00017	0.012	0.003
BCE	高斯	134.69	0.01228	0.690	0.173
BDE	高斯	5.03	0.00068	0.031	0.007
CDE	高斯	1.10	0.00014	0.007	0.002
ABCDE	本工作	39.94	0.00324	0.174	0.039

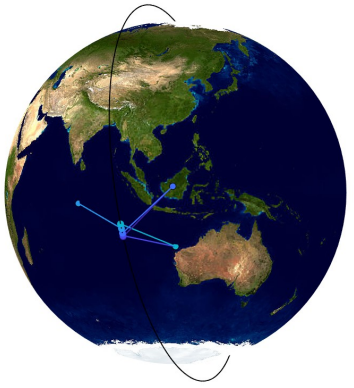


图11 对近圆轨道的近距离观测。观测点 A–E 按从南到北的顺序排列。

在这种情况下，对于 $\sigma = 1$ 角分，求解器给出的结果较差。而在 $\sigma = 1$ 角秒下，结果则较为合理。请注意，Double-R 在这种情况下未能收敛。另一方面，用于仅角度 IOD 的高斯方法 [1] 适用于从给定的五次观测中提取的所有十种可能的三次观测组合。在表 8中，我们比较了这两种方法的性能，而图 12 给出了与 ACD 观测相关的直方图，其中高斯求解器的精度略高于我们的方法。总体而言，高斯方法与我们的方法性能相当，难分高下。

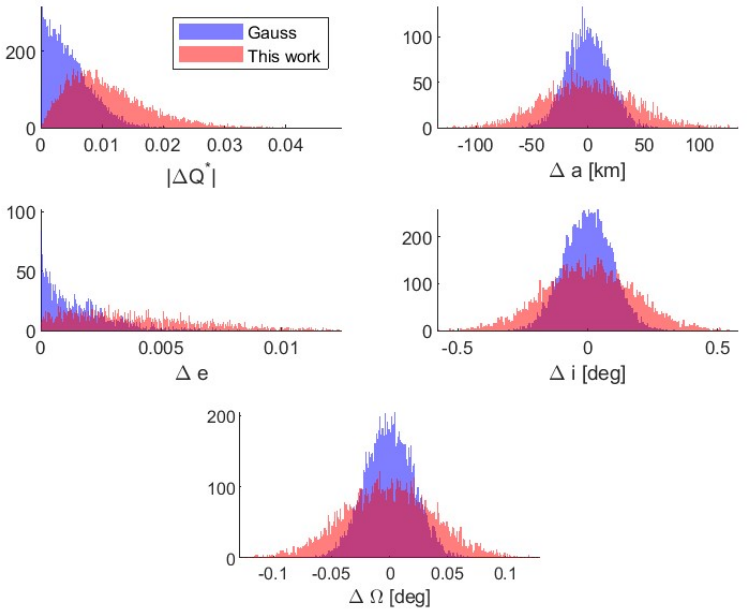


图12 图11所示 ACD观测在近距离观测条件下近圆轨道估计值的误差。首次观测与末次观测之间的时间跨度为65秒。在噪声为1角秒的条件下得到的结果。11 。

4.4 双曲线情形

如果我们要恢复的轨道是双曲线，上述步骤仍然有效。然而，一旦恢复了矩阵 $\boldsymbol{Q}^*$ ，其用$\boldsymbol{w}$、$\boldsymbol{g}$和 $1/b^2$ 表示的参数化与之前相比仅相差一个符号：

$$\boldsymbol{Q}^* \propto \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{3\times 3} + \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T & \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{g}^T & (-1/b^2) \end{bmatrix} \tag{57}$$

通过恢复首个被观测到的星际天体‘Oumuamua的轨道，对双曲线表述进行了分析 [33]。这个形状异常细长的天体，其起源行星系统尚不明确，于2017年被发现，并已沿双曲线轨道离开太阳系。其日心轨道根数列于表 9 ，模拟得到的五次观测见图13。该方法的性能如图 14所示。请注意，Double-R方法无法用于比较，因为在某些情况下，观测者与太阳之间的距离大于小行星与太阳之间的距离。

表9 ‘Oumuamua 小行星的轨道根数。

a	e	i	Ω	ω
-1.9034×10^8 千米	1.20	122.74°	24.60°	241.81°

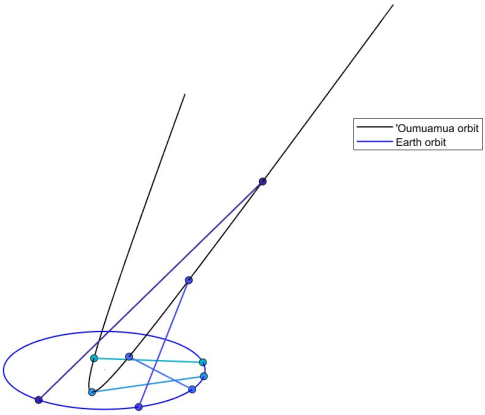


图13 ‘Oumuamua 轨道的模拟观测。

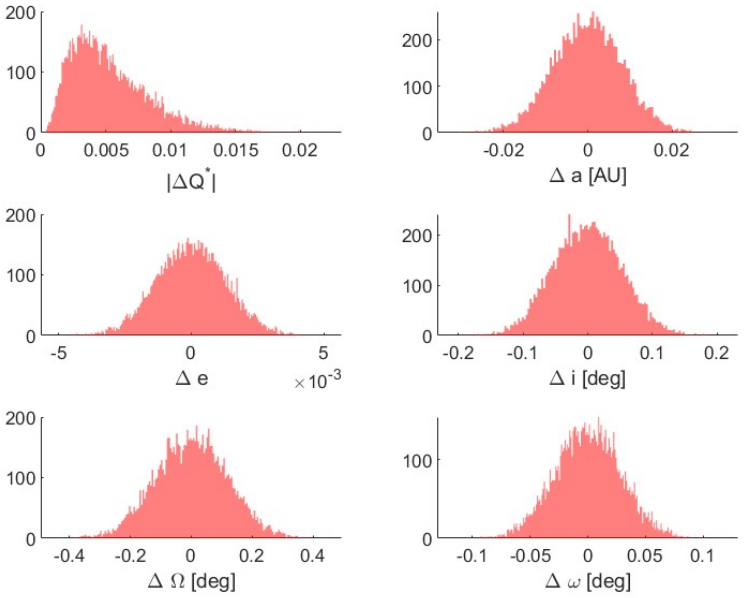


图14 在'Oumuamua测试案例中，加入1角分噪声后进行10,000次运行所得到的结果。

5 结论

本工作提出了一种纯几何方法，用于在假设物体做开普勒运动的条件下求解仅角度初始轨道确定（IOD）问题。据我们所知，与现有的仅角度方法相比，本方法独树一帜，因为其他方法都需要时间信息以及某种形式的轨道传播。

实验表明，本方法的精度可与一种标准初始轨道确定方法（Double R）相媲美，有时甚至更高。使用同伦延拓求解未知圆锥曲线的一个显著优点是 $\boldsymbol{Q}^*$ 在方程（21）中，它提供了一种真正的全局方法——完全不需要初始猜测。在另一组（未报告的）实验中，我们发现，对于某些构型，Double-R迭代可能强烈依赖于半径的初始猜测。此外，一般而言，初始化不佳可能会导致该方法完全无法收敛。因此，我们的方法不仅可作为独立的初始轨道确定求解器，也有望用于为其他方法的参数提供初始猜测。此类初始化方案可能提高这些现有方法的精度或收敛概率。

当轨道形状未知 *a priori* 时，处理如何在圆轨道模型与椭圆模型之间进行选择的问题也很重要。

目前的分析使我们能够确定以下策略。无论闭合轨道的形状如何，通常都可以使用椭圆模型，而且该模型能够可靠地给出解。如果其解对应的轨道偏心率较低，我们可以考虑使用圆轨道模型来另行估计该轨道。一般而言，圆轨道模型得到的解不一定比椭圆模型给出的解精度更高。然而，当部分观测接近与轨道共面的奇异构型时，我们发现椭圆模型的表现有所下降，此时圆轨道模型的表现更好。尽管如此，当可用观测多于五个时，仍应优先将 IOD 问题设为优化问题。事实上，这样可以使用统一的模型求解 IOD 问题，从而提高精度，并避免引入圆轨道模型造成的偏差。

类似地，我们回想一下：$n = 5$（或 $n = 3$）观测通常只能确定 $\boldsymbol{Q}^*$ 为有限种可能，因为命题1 中的系统可能有多个实数解（确切数量取决于具体情形）。我们讨论了两种简单策略，通过增加观测来排除“伪解”。此外，也可以依据一般类型的考量排除一些错误解。例如，近心点低于所绕行星表面的轨道、对应于观测方向错误的轨道，或必须穿过某个物理物体才能实现的轨道，通常都可以排除。

对于双曲线轨道，圆盘二次曲面的参数化中符号不同；若使用椭圆轨道的参数化，恢复出的解无法提升为参数 b 的实数值。这提示我们，应采用双曲线参数化来分析所得的圆盘二次曲面。

最后，一旦确定了圆盘二次曲面，并且已知运动方向，我们就可以毫无歧义地恢复所有轨道要素。

6 致谢

M. Mancini 和 J. Christian 的工作部分得到了美国空军科学研究办公室通过太空大学研究计划（资助编号 FA95502210092）提供的支持。T. Duff 的工作得到了美国国家科学基金会（NSF）数学科学博士后研究奖学金（DMS-2103310）的支持。A. Leykin 的工作部分得到了 NSF DMS-2001267 的支持。作者谨向各位资助方表示衷心感谢。

7 利益冲突

作者代表所有作者声明，通讯作者不存在利益冲突。

参考文献

[1] 高斯, C.F.:《圆锥曲线中绕日天体运动理论》。F. Perthes and I.H. Besser，汉堡（1809年）[2]拉普拉斯, S.: 关于确定轨道的回忆录。数学与物理回忆录，13–72（1780年）[3] 吉布斯, J.: 基于三次完整观测确定椭圆轨道。美国国家科学院回忆录**4(8)**, 79–104（1889年）[4] Hollenberg, C.L., Christian, J.A.: 基于速度的轨道确定问题的几何解法。《宇航科学杂志》**67**, 188–224（2019年）。https://doi.org/10.1007/s40295-019-00170-7[5] Gooding, R.H.: 一种新的方法，用于解决仅依据三条视线进行最小轨道确定这一经典问题。《天体力学与动力学天文学》**66**, 387–423（1997年）[6] Escobal, P.R.:《轨道确定方法》，第2版。Robert E. Krieger Publishing Company，马拉巴尔，佛罗里达州（1976年）[7]Lambert, I.H.:《彗星轨道的重要特性》（1761年）。Kessinger's LegacyReprints. Kessinger Publishing，怀特菲什，蒙大拿州（2010年）[8] Christian, J.A.: 仅凭航向测量进行初始轨道确定。《航天器与火箭杂志》（2023年）。https://doi.org/10.2514/1.A35593[9] Semple, J.G., Kneebone, G.T.:《代数射影几何》，第47–48页。牛津大学出版社，英国牛津（1952年）

[10] Hartley, R., Zisserman, A.：《多视图几何》，第 2 版。剑桥大学出版社，英国剑桥（2003）[11]Christian, J.A.：基于地平线的光学导航与空间成像系统姿态确定教程。《IEEE Access》，19819–19853（2021年）。https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3051914[12] Christian, J.A., Derksen, H., Watkins, R.：数字图像中的月球陨石坑识别。《航天科学学报》**68**，1056–1144（2021年）。https://doi.org/10.1007/s40295-021-00287-8 [13] Christian, J.A.：利用数字图像中的卫星轨迹进行解析初始轨道确定。载于：AAS/AIAA 天体动力学专家会议（2021年）[14] Henry, S., Christian, J.A.：用于空间探索的绝对三角测量算法。《制导、控制与动力学杂志》**46**（1），21–46（2023）。https://doi.org/10.2514/1.G006989[15] Mancini, M.：代数几何在初始轨道确定问题中的应用分析。硕士论文，佐治亚理工学院（2022）[16] Vallado, D.A.：《天体动力学与应用基础》（2013）[17] Shafarevich, I.R.：《基础代数几何》。第 1 卷，第 2 版，第 303 页。Springer，柏林（1994）。射影空间中的簇；译自 1988 年俄文版，附 Miles Reid 注释[18] Sturmfels, B.：《多项式方程组求解》。CBMS 数学区域会议系列，第 97 卷。由数学科学会议委员会为其出版，华盛顿特区；美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州出版[19] Cox, D.A., Little, J., O'Shea, D.：《理想、簇与算法：计算代数几何与交换代数导论》，第 4 版。《数学本科教材》，第 646 页。Springer，Cham（2015）。https://doi.org/10.1007/978-3-319-16721-3[20] Sommese, A., Wampler, C.：《工程与科学中多项式方程组的数值解》，第 2005 卷（2005）。https://doi.org/10.1142/9789812567727[21] Leykin, A.：数值代数几何。《代数几何软件杂志》**3**，5–10（2011年）。https://doi.org/10.2140/jsag.2011.3.5[22]Grayson, D.R., Stillman, M.E.：Macaulay2，一种用于

代数几何研究。可访问：http://www.math.uiuc.edu/ Macaulay2/[23] Morgan, A.P., Sommese, A.J.：系数参数多项式延拓。应用数学与计算 29(2, part II)，123–160（1989）。https: //doi.org/10.1016/0096-3003(89)90099-4[24] Duff, T., Hill, C., Jensen, A., Lee, K., Leykin, A., Sommars, J.：通过同伦延拓和单值性求解多项式方程组。IMA 数值分析杂志 39(3)，1421–1446（2019）。https://doi.org/10.1093/imanum/dry017[25] Duff, T., Korotynskiy, V., Pajdla, T., Regan, M.H.：用于分解三维重建中最小问题的伽罗瓦群/单值性群。arXiv（2021）。https://doi.org/10.48550/ARXIV.2105.04460. https://arxiv.org/abs/2105.04460[26] Am´endola, C., Lindberg, J., Rodriguez, J.I.：利用可分解投影求解参数化多项式方程组。arXiv（2016）。https://doi.org/10.48550/ARXIV.1612.08807. https://arxiv.org/abs/1612.08807 [27] Bates, D.J., Hauenstein, J.D., Sommese, A.J., Wampler, C.W.：使用 Bertini 数值求解多项式方程组。软件、环境与工具，第25卷，第352页。工业与应用数学学会（SIAM），宾夕法尼亚州费城（2013年）[28] Parkinson, C.L.：Aqua：一项用于考察水及其他气候变量的地球观测卫星任务。《IEEE 地球科学与遥感汇刊》41(2)，173–183（2003年）[29] Fuselier, S.A., Lewis, W.S., Schiff, C., Ergun, R., Burch, J.L., Petrinec, S.M., Trattner, K.J.：磁层多尺度科学任务简介与运行。《空间科学评论》，77–103（2014年）。https://doi.org/ 10.1007/s11214-014-0087-x[30] Shuster, M.D., Oh, S.D.：根据矢量观测进行三轴姿态确定。《制导与控制杂志》4(1)，70–77（1981年）。https: //doi.org/10.2514/3.19717[31] Shuster, M.D.：航天器姿态的最大似然估计。《航天科学杂志》37(1)，79–88（1989年）[32]Baker, R.M.L., Jacoby, N.H.：一种不存在共面奇点的初步轨道确定方法”。《天体力学》15，137–160（1977年）。https://doi.org/10.1007/BF01228460

[33] Bannister, M., 等：‘Oumuamua 的自然史。《自然天文学》**3**（7），594–602（2019年）。https://doi.org/10.1038/s41550-019-0816-x