arXiv:2304.02178v1 [physics.optics] 5 Apr 2023

具有角动量的相干光子的表示论与拓扑学

Shinichi Saito

探索研究实验室中心，研究与开发集团，日立制作所，东恋洼1-280号，国分寺市，185-8601，日本东京。

投稿作者：shinichi.saito.qt@hitachi.com；

摘要

光子是光的基本粒子， [1, 2], 具有自旋 [3–5] 和轨道角动量 [6–16] 这两种内部自由度。自旋的性质称为偏振 [3–5, 17], ，广泛应用于太阳镜、液晶显示器和数字相干通信[18–21],；轨道角动量则适用于光镊、激光图案化和量子光学 [22–29]。然而，人们认为，在适当的规范不变意义下，光子的自旋和轨道角动量不可能分解为两个独立的自由度；自由空间中的平面波展开 [30] 证明了这一点。本文表明，只要传播模式充分限制在纤芯内，这些自由度在波导和自由空间中都是定义良好的量子观测量。我们发现，斯托克斯参数是相干光子的自旋期望值，并呈现出非平庸的拓扑特征 [33, 34] ，例如环面 [35], 、莫比乌斯带 [36], 和玻色狄拉克锥 [37]。我们应用 SU(N) 表示理论描述光子的自旋和轨道角动量，并通过实验展示了对完整庞加莱球的控制，以量子比特呈现富勒烯 C_{60} [38] 和地球。我们还将拓扑色荷归于光子的轨道角动量，其 SU(3)态 [39–41] 展示在所提出的 SO(8) 盖尔曼超球面上，而其参数可嵌入 SO(5)。我们还实现了光子的 SU(4) 单态和三重态，并成功地通过旋转偏振器将其投影为 SU(2)× SU(2)态。我们的结果表明，这一自旋和轨道角动量操控平台有助于探索光子量子色动力学及高阶宏观量子态。

关键词： 拓扑偏振态，光子的轨道角动量，盖尔曼超球面，李代数

推动量子技术发展的一个最引人入胜的动机，是理解为何我们的宏观世界受经典力学支配，尽管构成它的微观成分所遵循的物理基本定律是量子力学 [42–45]。大多数宏观物质都无法像基本粒子那样处于正交态之间的叠加态，这一点因薛定谔的猫这一著名悖论而广为人知¨ [42–45]。然而，也存在少数例外系统，能够在宏观尺度上观察到量子相干性，例如超导性 [46–49], 玻色–爱因斯坦凝聚（BEC）[50–52], 以及激光器 [3–5]。在这些系统中，连续对称性会在相变开始时自发破缺 [46–52] ，或者在泵浦超过激射阈值时自发破缺，整个系统可由单一波函数描述。然而，对于由广泛使用的激光光源发射的相干光子，人们通常认为其偏振态是经典的，由斯托克斯参数表征 [3]，这些参数位于拓扑平凡的庞加莱 球面上 [3], ；而这些参数则通过二维特殊酉群 SU(2) 所对应的二能级系统，采用量子力学方法计算 [4, 5]。

在此，我们通过将量子多体理论与李代数和李群的表示论相结合，解决了偏振究竟是经典现象还是量子力学现象这一表面上的矛盾。我们表明，相干光子可由 SU(N) 态的宏观波函数描述，其中自旋和轨道角动量是其内部自由度。基于相干光子的 SU(N) 理论，我们通过实验确认，宏观波函数的相位和振幅可通过标准光学元件的组合加以控制；旋转生成元的期望值则可作为斯托克斯参数乃至更高阶参数观测到。

1 SU(N) 态与 SO(N^2-1) 中期望值之间的关系

我们考虑一个具有 SU(N) 角动量对称性的相干光子光线，它由相干态波函数 [46, 47,53, 54] , 给出

$$|\alpha_1,\cdots,\alpha_N\rangle = \prod_{\sigma=1}^{N} \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha_\sigma|^2}{2}} \mathrm{e}^{\hat{a}_\sigma^\dagger \alpha_\sigma}|0\rangle, \tag{1}$$

其中，$\hat{a}_\sigma^\dagger$ ($\hat{a}_\sigma$) 是光子产生（湮灭）算符，满足玻色对易关系 $[\hat{a}_\sigma,\ \hat{a}_{\sigma'}^\dagger] = \delta_{\sigma,\sigma'}$；$\sigma$ 表示自旋和轨道角动量 SU(N) 自由度的第 σ 个分量；α_σ 是一个复数（$\mathbb{C}$），用于表示宏观波函数。SU(N) 自由度与希尔伯特空间中 N 个正交态之间的旋转对称性有关，其旋转由 $\mathfrak{su}(N)$ 李代数的指数映射给出，

$$\mathcal{D}_i(\theta) = \mathrm{e}^{-iX_i\theta}, \tag{2}$$

其中，X_i 是旋转生成元，由一个 $N \times N$的复矩阵构成，它满足 $[X_i, X_j] = i\sum_k f_{ijk}X_k$的对易关系，其结构常数为 f_{ijk}，表示绕第 i轴旋转 θ 的旋转量。一般而言，$\mathfrak{su}(N)$有（N^2-1）个生成元，使得 i,j,k =1, ⋯ ,(N^2-1)。$\mathcal{D}_i(\theta)$也是一个 $N\times N$的复矩阵；旋转后，它将$\hat{a}_\sigma^\dagger$变为$\sum_{\sigma'}\hat{a}_{\sigma'}^\dagger\mathcal{D}_{i\sigma'\sigma}(\theta)$，或者等价地说，它将初始态中的宏观波函数 $|\mathrm{I}\rangle = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)^{\mathrm{t}}$ 变为最终态 $|\mathrm{F}\rangle = \mathcal{D}_i(\theta)|\mathrm{I}\rangle$，其中$^{\mathrm{t}}$ 表示转置。

对于相干光子的自旋角动量，我们以表示水平–垂直（HV）线偏振态或左–右（LR）圆偏振态的 SU(2) 态作为基底 [3–5], ，旋转生成元由泡利矩阵 σ_i、i = 1、2、3 给出，它们满足 $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k$，其中 ϵ_{ijk} 是全反对称张量。我们已得到多体态中的自旋角动量算符，写作 $\hat{\mathrm{S}} = \hbar\hat{\boldsymbol{\psi}}^\dagger\boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{\psi}}$，其中 $\hat{\boldsymbol{\psi}}^\dagger = (\hat{a}^\dagger\mathrm{H}, \hat{a}^\dagger\mathrm{V})$ 和 $\hat{\boldsymbol{\psi}} = (\hat{a}_\mathrm{H}, \hat{a}_\mathrm{V})^{\mathrm{t}}$ 分别是 HV 基底中用于产生和湮灭光子的产生算符与湮灭算符的旋量表示，而 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2)$ 是自旋角动量的生成元。在 HV 基底中，宏观波函数表示为 $(\alpha_\mathrm{H}, \alpha_\mathrm{V}) = \sqrt{\mathcal{N}}(\cos\ \alpha, \sin\ \alpha\mathrm{e}^{i\delta})$，其中 $\mathcal{N}$ 是每秒通过波导横截面的光子平均密度，α 是辅助角，δ 是相位。随后可以直接计算 $\hat{\mathrm{S}}$ 的量子力学平均值，因为相干态是 $\boldsymbol{\psi}$ 的 $\langle\ \rangle_\mathrm{I}$ = $\hbar\mathcal{N}$ 2α 2α δ 2α δ $\hbar$ 本征态；由此得到 S (cos( ), sin( ) cos , sin( ) sin)，其中 是约化普朗克常数。$\langle\hat{\mathrm{S}}\rangle_\mathrm{I}$ 等价于归一化的斯托克斯参数 S = (S_1, S_2, S_3)，但我们还得到了总模长 $S_0 = \hbar\mathcal{N}$，这意味着普朗克常数（$h = 2\pi\hbar$）对于相干光子实际上变成了宏观量。

此外，上述 SU(N) 态与旋转生成元之间的关系导出了在旋转 θ 后最终态的期望值的一般公式：

$$\langle X_j\rangle_\mathrm{F} = \lim_{n\to\infty}\sum_k\left(1 - F_i\frac{\theta}{n}\right)_{jk}^n\langle X_k\rangle_\mathrm{I} = \sum_k\left(\mathrm{e}^{-F_i\theta}\right)_{jk}\langle X_k\rangle_\mathrm{I}, \tag{3}$$

其中 F_i 是一个伴随算符，其矩阵元变为（F_i）$_{jk} = f_{ijk}$，这是（N^2-1）×（N^2-1）的矩阵。这意味着.....的旋转

SU(N) 的希尔伯特空间中的波函数旋转，对应于 SO(N^2-1) 特殊正交群中的期望值旋转。对于 SU(2) 的自旋角动量，这对应于 SO(3) 中庞加莱球面上的斯托克斯参数旋转。

现在，我们理解了为什么庞加莱球上的斯托克斯参数能够描述由激光器发射的相干光子。´系统原有的旋转对称性在达到激光阈值时被打破，而受激发射会自然地选出单模（或少数几个模式，具体取决于腔的品质）。因此，整个系统可由一个唯一的宏观波函数描述，该波函数具有自旋角动量的内部自由度；对称性破缺时南部-安德森-希格斯-戈德斯通模的存在，保证我们仍可在不消耗能量的情况下旋转整个波函数 [55–57]。 $\mathcal{D}_i$因此，我们可以利用波片和移相器操控偏振态；它们在 SU(2) 中充当量子力学旋转算符，$\theta = \mathrm{e}^{-i\sigma_i\theta/2}$。我们还理解了角动量态 [3–5]与表示论之间的内在联系 [36]。

2 庞加莱旋转器

我们的下一步是在实验中实现相干光子的任意 SU(2) 旋转。众所周知，旋转半波片（HWP）实际上是伪旋转器，而非纯旋转器。因此，要实现对**S**的预期旋转，就必须知道输入态的 SU(2) 状态；但测量会投影 SU(2) 状态，而量子操作应当无需知道该状态即可实施。事实上，旋转 HWP 对应于镜面反射，它属于 O$^-$(2) 集合，其行列式为 -1。显然，O$^-$(2) 并不构成一个真正的群，因为两次镜面反射的结果是恒等操作**1**，而不是旋转的乘积。只需在施加旋转 HWP 之前再放置一片快轴（FA）固定于某一方向的 HWP，即可解决这一问题。两片 HWP 的操作对应于真正的旋转，从而构成 SO(2)=O$^+$(2)，其行列式为 1。对于波函数，这对应于施加 $U(1)$ 运算；这在左右旋基中显而易见，因为 $(\alpha_\mathrm{L},\ \alpha_\mathrm{R}) = (\mathrm{e}^{-i\phi/2}\cos(\theta/2),\ \mathrm{e}^{i\phi/2}\sin(\theta/2))$ 的相应波函数会在旋转后发生转动，使方位角 ϕ 改变，而极角 θ 保持不变。因此，只需将 HWP 与一片固定 HWP 配合旋转，我们就能在庞加莱球上实现绕 S_3 轴的任意角度旋转。只需在旋转器前后各加一片四分之一波片（QWP），我们也能实现任意相移。应将第一片 QWP 的 FA 对准反对角线方向，以将 S_2-S_3 平面转换为 S_1-S_2 平面，从而通过两片 HWP 施加旋转器运算；随后将最后一片 QWP 的 FA 对准对角线方向，使轴恢复到原来的

轴。因此，我们可以实现一个移相器，使**S** 能够绕 S_1 轴任意旋转。我们将这种装置称为庞加莱旋转器，因为它能够对偏振态实施任意 SU(2) 运算。我们验证了预期的被动操作，也能够通过使用光调制器施加 $U(1)$相移（而非进行物理旋转）来实现主动庞加莱旋转器。

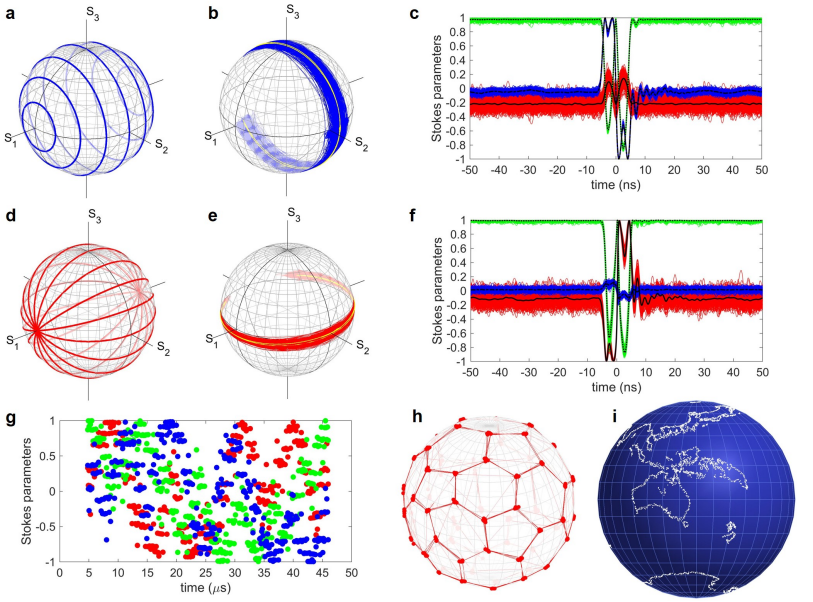


图 1 庞加莱旋转器，用于利用波长为1533纳米的激光器，实现相干光子自旋态的任意 SU(2)运算。(a)和(d)分别为移相器和旋转器运算的模拟轨迹。(b)和(c)为移相器运算，(e)和(f)为旋转器运算，均由施加到光调制器上的4.6伏输入电压获得。(g)和(h)为富勒烯C_{60}，，(i)为地球，对应9,865个点，以5兆赫的频率、5%的占空比运行。(c)、(f)和(g)分别显示 S_1 （红色）、 S_2 （绿色）和 S_3 （蓝色）的斯托克斯参数。

有源庞加莱旋转器运算如图 1 所示。移相器运算通过偏振分束器（PBS）将 HV态分开，然后利用 $LiNbO_3$ 光调制器进行相移，最后通过偏振合束器（PBC）重新合束，从而得到验证（图 1 (a)-(c)）。HV态的振幅则通过旋转器运算进行控制（图 1 (d)-(f)），具体方法是将另一个移相器与 2 个四分之一波片配合使用。此时，保真度低至 ~ 90 %，这是由于消色差波片的旋转角存在预期偏差所致。将移相器与旋转器结合后，我们能够实现任意 SU(2) 偏振态，对应于单量子比特运算。值得注意的是，对于图 1 (d) 中的旋转器运算，旋转轴会随相移而旋转；而移相器运算则始终沿着 S_1 轴

由于 PBS 在固定方向上进行分束。这自然使我们能够控制庞加莱 ´球上的极角和方位角。作为庞加莱 ´旋转器的演示，我们尝试在球面上绘制富勒烯 C_{60} (图 1 (g) 和 (h)) [38] 以及地球的海岸线（图 1 (i) ）。´本研究中使用的电子设备（如任意波形发生器和放大器）的性能限制了 5兆赫的运算速度。

3 拓扑偏振态

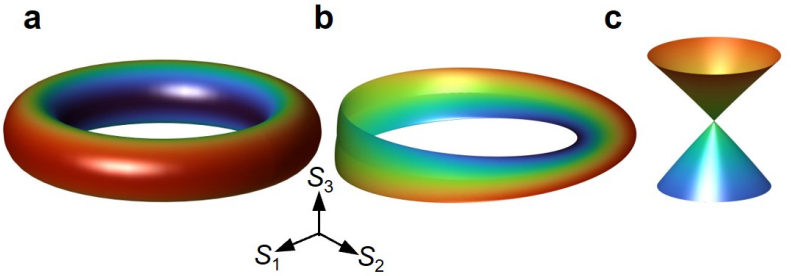


图 2 拓扑偏振态。理论计算了 (a) 环面、(b) M¨比乌斯带和 (c) 玻色狄拉克锥的斯托克斯参数。

无论如何展示来自激光光源的相干光子的 SU(2) 操作 [3–5], ，人们仍可能认为该状态是经典的，因为它由球面上的实可观测量 **S** 表征，其在 SO(3) 中拓扑平凡。然而，SU(2) 与 SO(3) 之间存在差异，因为 SU(2) 是 SO(3) 的二重覆盖群，表示为 $\mathrm{SU}(2)/\mathbb{S}^0 \cong \mathrm{SO}(3)$，其中 $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ 是零维球面，对应于旋转奇偶性。具体而言，这会为相干光子带来 $\mathcal{D}_i(2\pi) = -\mathbf{1}$: 经过一次旋转操作后，输出态的相位变化可通过与原始输入态的干涉观测到，且与 i 的旋转轴无关。我们还发现**S** 可以完全覆盖三维欧几里得空间，我们称之为斯托克斯空间；由于玻色-爱因斯坦统计，我们处理的是宏观数量的光子，而庞加莱球的半径对应于 $\mathcal{N}$。因此，我们可以将拓扑非平凡结构 [33, 34]实现为**S**的轨迹。

图 2 展示了拓扑偏振态的示例。环面[35] 的 $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 可以通过偏振无关分束器和合束器，以及移相器和旋转器来实现。分束器将输入光线分成两条光线，其中一条光线经半波片移相，另一条光线则保持其偏振态，随后两条光线在合束器处重新合束。这种简单的装置使我们能够通过干涉改变 $\mathcal{N}$ 的振幅，从而改变轨迹的半径，使其

形成一个圆，半径为 $\mathbb{S}^1$。随后，我们可以沿着垂直于半径的方向旋转偏振态，在斯托克斯空间中形成一个环面（图 2 (a)）。我们已在光纤偏振干涉仪中，通过使用半波片和四分之一波片等无源光学元件，实验验证了该环面。我们还可以实现更复杂的结构，例如莫¨比乌斯带（图 2 (b)） [36] 以及玻色子狄拉克锥（图 2 (c)） [37], ，其节点必须位于边缘，才能使拓扑非平凡的环面转变为拓扑平凡的球面，并满足高斯-博内定理 [58]，从而体现体边对应。

4 SU(3)态与盖尔曼超球面

我们从理论上确认，只要光线主要沿一个方向传播（z），就可以将自旋与轨道角动量分离。在这种情况下，光线必须在 xy 平面具有模式分布，可以是高斯模、拉盖尔-高斯模或其他模式，因此该模式会带有较小的纵向分量。通过考虑纵向分量，我们可以以适当的规范不变方式推导出自旋和轨道角动量的螺旋分量。基于角动量的旋转对称性，我们可以精确地得到渐变折射率（GRIN）波导中的自旋和轨道角动量算符 [59]，并在傍轴近似下近似地得到自由空间中的相应算符。我们还确认，升降算符能够正确作用于轨道角动量；这与李代数的嘉当-邓金图式类似，并可通过涡旋透镜在实验中实现 [9, 25]。

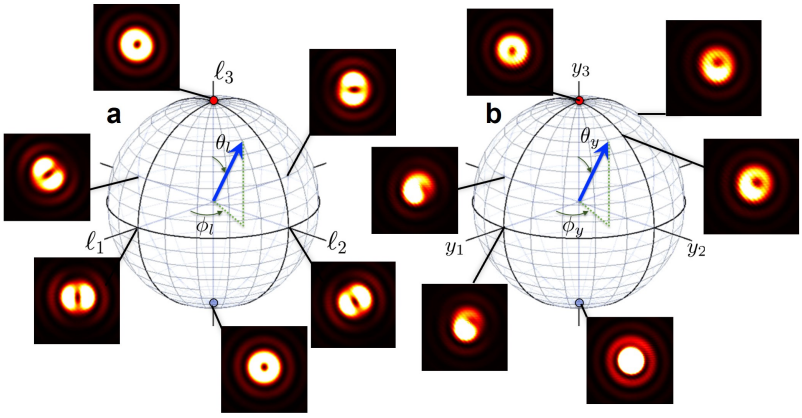


图 3 用于表征相干光子 SU(3)态的盖尔曼参数，这些态由左旋和右旋涡旋态与一个高斯态的叠加态实现。(a) 轨道角动量，$\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$，以及 (b) 超自旋，$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$。实验使用波长为 532nm 的激光器，并拍摄了远场图像。

我们下一步将利用轨道角动量来实现高阶 SU(3)态，以探索相干光子的宏观量子特性 [6–16]。我们考虑左涡旋态和右涡旋态，它们在模式中心的拓扑荷分别为 1 和 -1 ，并将不带涡旋的标准高斯模式也纳入考虑。我们为这些正交态赋予 SU(3)态；它们可通过拓扑色荷清楚地区分，类似于夸克 [39–41], ，同时我们认为它们具有相同的偏振态。

SU(3)态由 8 个旋转生成元 [39–41],表征，其量子力学期望值应当是可观测的，因为旋转生成元是厄米的。我们建议将这些参数称为盖尔曼参数，以纪念发现夸克的 Murray Gell-Mann。如式（3）所示，盖尔曼参数可以表示在 SO(8) 中的八维超球面上，其半径归一化为 $2/\sqrt{3}$，因为卡西米尔算符是常数。我们分析了盖尔曼参数，发现描述 SU(3)态并不需要全部 8 个参数；在归一化条件下，可在 $\mathbb{C}^3$ 上描述这些态，而无需考虑全局相位，因此 $\mathbb{S}^4$ 上的 4 个实参数就足够了，并嵌入 SO(5) 中。实际上，使用 2 个庞加莱球（图 3）来展示盖尔曼参数会很有用；一个用于轨道角动量（图 3（a））[7, 11] ，另一个用于超自旋（图 3（b）），我们将超自旋定义为描述涡旋模式与高斯模式之间耦合的量。

我们通过实验实现了 SU(3) 的这类叠加态，并获得了远场图像（图 3）。我们使用偏振庞加莱旋转器制备具有预期振幅和相位的光线，随后利用涡旋透镜生成左旋和右旋涡旋，并将它们重新组合，从而恢复为 1 条光线的量子相干性。该方案作为自旋轨道转换器正常工作，我们也实现了预期的左旋和右旋涡旋叠加态（图 3 (a)) [7, 11]。此外，我们还实现了有涡旋与无涡旋的叠加态，这在根本上具有研究意义，因为甜甜圈无法通过拓扑形变变成球体（图 3 (b)）。我们发现，这种叠加态的特征是拓扑荷的运动：改变振幅时，拓扑荷可以离开模式中心；而借助我们的庞加莱旋转器，可以通过相移控制其运动方向。

5 宏观单态与三重态

本文面临的最终挑战是同时利用相干光子的自旋和轨道角动量，实现宏观单态与三重态。正如我们已从理论和实验上确认的那样，只要相干光子的自旋和轨道角动量能够独立控制，它们至少可以构成 SU(2)×SU(2) 态。若能区分自旋和轨道角动量的全部 4 个正交态，即 $|\uparrow\rangle_s|\uparrow\rangle_o$、 $|\uparrow\rangle_s|\downarrow\rangle_o$、 $|\downarrow\rangle_s|\uparrow\rangle_o$ 和 $|\downarrow\rangle_s|\downarrow\rangle_o$，我们就应当能够实现 SU(4) 态。

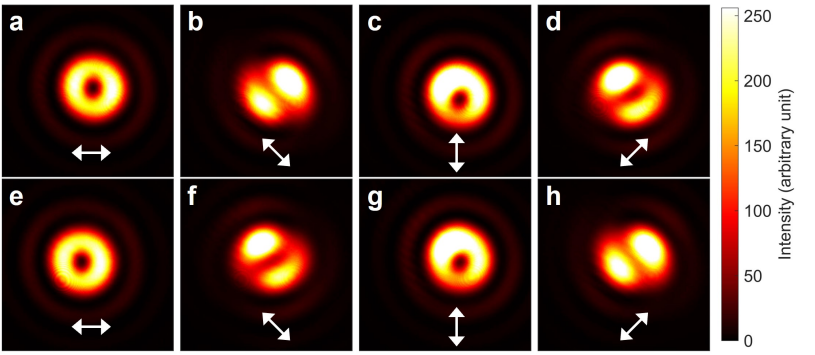


图 4 波长为 532nm 的激光器产生的相干光子的宏观单重态和三重态。远场图像分别显示了 (a)-(d) 单重态和 (e)-(h) 三重态。箭头表示偏振的投影方向。(a) 和 (e) 中的右手性涡旋态以及 (c) 和 (g) 中的左手性涡旋态，其手性并不明显。另一方面，(b) 和 (d) 中单重态的偶极子方向明显与偏振方向垂直，而 (f) 和 (h) 中三重态的偶极子方向则与偏振方向一致。

在这里，我们分别将自旋向上和向下态对应于偏振的水平和垂直态，而轨道角动量的向上和向下态则分别对应于左旋和右旋涡旋态。

单态定义为 $|\text{单态}\rangle = (|\uparrow\rangle_s|\downarrow\rangle_o - |\downarrow\rangle_s|\uparrow\rangle_o)/\sqrt{2}$，而三重态为 $|\text{三重态}\rangle = (|\uparrow\rangle_s|\downarrow\rangle_o + |\downarrow\rangle_s|\uparrow\rangle_o)/\sqrt{2}$。我们使用庞加莱旋转器和涡旋透镜，首次在实验上实现了这些态。为了确认这些态的实现，我们通过线偏振片将 SU(4)态投影到 SU(2)×SU(2)态（图 4）。通过偏振片后，与偏振方向对齐的偏振态被选出，因而轨道角动量的态也随之被选出。例如，如果 $|\text{单态}\rangle$ 被水平偏振态投影，投影态就变为 $|\uparrow\rangle_s|\downarrow\rangle_o/\sqrt{2}$，其必定是右旋涡旋态（图 5 (a)）。遗憾的是，仅凭图像我们无法区分左旋涡旋态（图 5 (c)）和右旋涡旋态（图 5 (a)），因为例如涡旋的手性会在强度中消失。若使用对角偏振片（图 5 (d) 和 (h)）及反对角偏振片（图 5 (b) 和 (f)）投影偏振态，便可克服这一问题。在这种情况下，轨道角动量态的偶极子图像应沿轨道角动量的方向排列。如果该态为单态，则总角动量必须为零，因此偶极子的方向必须与自旋方向垂直，并与偏振片对齐（图 5 (b) 和 (d)）。相反，如果该态为三重态，偶极子应与自旋沿相同方向排列（图 5 (f) 和 (h)）。我们成功观测到了预期的行为，这证明了宏观单态与三重态的实现。

6 结论

总之，我们从理论上证明了具有 SU(N)对称性的宏观相干态，其旋转生成元的期望值属于 SO($N^2 - 1$)。基于表示论，我们在实验上实现了庞加莱旋转器、拓扑偏振态、色荷态以及宏观单态和三重态。我们的假设是：由传统激光器发射的光子相干态由宏观波函数描述，并在宏观尺度上表现出量子力学行为。到目前为止，我们的结果与以下观点一致：相干光子至少具有一些作为角动量的内部自由度，并且可以应用标准量子力学框架来理解其期望值以及自旋与轨道角动量之间的耦合。利用我们的实验平台探索更高阶的量子态（如 SU(6)）及其向 SU(2)×SU(3)的投影，将有助于研究光子量子色动力学及更广泛的问题。

致谢。 本研究得到日本学术振兴会科研经费项目 JP 18K19958 的资助。作者谨向 I. Tomita 教授表示诚挚感谢，感谢他持续的讨论与鼓励。

参考文献

[1] Plank, M.：论正常光谱能量分布定律**2**，237–245（1900年）[2] Einstein, A.：关于光的发射与转化的一种启发式观点**17**，132（1905年）[3] Stokes, G.G.：论来自不同光源的偏振光束的合成与分解**9**，399–416（1851年）。https://doi.org/10.1017/CBO9780511702266.010[4] Jones, R.C.：用于处理光学系统的新演算 I：演算的描述与讨论**31**，488–493（1941年）。https://doi.org/10.1364/JOSA.31.000488[5] Fano, U.：在量子力学中处理偏振的斯托克斯参数方法**93**，121–123（1954年）。https://doi.org/10.1103/PhysRev.93.121[6] 艾伦, L., 贝耶斯贝亨, M.W., 斯普雷乌, R.J.C., 沃尔德曼, J.P.：光的轨道角动量及拉盖尔-高斯光束模式的变换**45**，8185–8189（1992年）。https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.8185[7] 帕吉特, M.J., 库蒂亚尔, J.：庞加莱′球面等效表示含轨道角动量的光束

。光学快报 24，430–432（1999年）。https://doi.org/10.1364/OL.24.000430[8] 艾伦, L., 帕吉特, M.J.：拉盖尔-高斯光束中的坡印廷矢量及其角动量密度的解释。光学通讯 184，67–71（2000年）。https://doi.org/10.1016/S0030-4018(00)00960-3[9] Golub, M.A., Shimshi, L., Davidson, N., Friesem, A.A.：用于检测具有螺旋相位的激光模式的模式匹配相位衍射光学元件。应用光学 46，7823–7828（2007年）。https://doi.org/10.1364/AO. 46.007823[10] Bliokh, K.：偏振光的几何动力学：贝里相位与梯度折射率介质中的自旋霍尔效应。光学 A：纯粹与应用光学 11，094009（2009年）。https://doi.org/10.1088/1464-4258/11/9/094009[11] Milione, G., Sztul, H.I., Nolan, D.A., Alfano, R.R.：高阶庞加莱´球面、斯托克斯参数与光的角动量。《物理评论快报》107，053601（2011年）。https://doi.org/10.1103/PhysRevLett. 107.053601[12] Bliokh, K.Y., Rodr´iguez-Fortu˜no, F.J., Nori, F., Zayats, A.V.：光的自旋-轨道相互作用。《自然·光子学》9，796–808（2015年）。https://doi.org/10.1038/NPHOTON.2015.201[13] Barnett, S.M., Allen, L., Cameron, R.P., Gilson, C.R., Padgett, M.J., Speirits, F.C., Yao, A.M.：关于光学角动量自旋部分与轨道部分的本质。《光学杂志》18，064004（2016年）。https://doi.org/ 10.1088/2040-8978/18/6/064004[14]Barnett, S.M., Babiker, M., Padgett, M.J.：光学轨道角动量。《英国皇家学会哲学汇刊 A 辑》375，20150444（2016年）。https://doi.org/10.1098/rsta.2015.0444[15] Bliokh, K.Y., Bekshaev, A.Y., Nori, F.：复杂介质中的光动量与角动量：从亚伯拉罕-闵可夫斯基争论到表面等离激元极化激元的特殊性质。《新物理学杂志》19，123014（2017年）。https://doi.org/10.1088/1367-2630/aa8913[16] Moreau, P.-A., Toninelli, E., Gregory, T., Aspden, R.S., Morris, P.A., Padgett, M.J.：贝尔型非局域行为的成像。《科学进展》5，2563（2019年）。https://doi.org/10.1126/sciadv.aaw2563[17] Sotto, M., Tomita, I., Debnath, K., Saito, S.：光子晶体线缺陷波导中的偏振旋转与模式分裂。《前沿物理学》6，85（2018年）。https://doi.org/10.3389/fphy.2018.00085

[18] Bull, J.D., Jaeger, N.A.F., Kato, H., Fairburn, M., Reid, A., Ghanipour, P.：用于光纤通信系统的 40 GHz 电光偏振调制器。载于：SPIE 会议录，Photonics North，第 5577 卷，第 133–143 页（2004年）。https://doi.org/10.1117/12.567640。SPIE[19] Goi, K., Kusaka, H., Oka, A., Ogawa, K., Liow, T.-Y., Tu, X., Lo, G.-Q., Kwong, D.-L.：采用低损耗单片硅基同相正交调制器与部分肋形偏振旋转器的 128 Gb/s 双偏振正交相移键控。载于：光纤通信会议（OFC），W1I.2。Optica 出版集团，旧金山。https://doi.org/10.1364/OFC.2014.W1I.2[20] Doerr, C.R.：电信领域的硅光子集成。《前沿物理学》3，37（2015年）。https://doi.org/10.3389/fphy.2015.00037[21] Kikuchi, K.：相干光纤通信基础。《光波技术杂志》34，157–179（2016年）。https://doi.org/10.1109/JLT.2015.2463719[22] Guan, B., Scott, R.P., Qin, C., Fontaine, N.K., Su, T., Ferrari, C., Cappuzzo, M., Klemens, F., Keller, B., Earnshaw, M., Yoo, S.J.B.：利用混合三维光子集成电路进行轨道角动量复用/解复用的自由空间相干光通信。《光学快报》22，145–156（2013年）。https://doi.org/10.1364/OE.22.000145[23] Sotto, M., Debnath, K., Khokhar, A.Z., Tomita, I., Thomson, D., Saito, S.：具有局部手性的反常零群速度光子键合态。《美国光学学会杂志 B》35，2356–2363（2018年）。https://doi.org/10.1364/JOSAB.35.002356[24] Sotto, M., Debnath, K., Tomita, I., Saito, S.：光子晶体波导中的光的自旋轨道耦合。《物理评论 A》99，053845（2019年）。https://doi.org/10.1103/PhysRevA.99.053845[25] Al-Attili, A.Z., Kako, S., Husain, M.K., Gardes, F.Y., Higashitarumizu, N., Iwamoto, S., Arakawa, Y., Ishikawa, Y., Ari moto, H., Oda, K., Ido, T., Saito, S.：悬置梁上锗微盘的回音壁模式共振。《材料前沿》2，43（2015年）。https://doi.org/10.3389/fmats.2015.00043[26] Devlin, R.C., Ambrosio, A., Rubin, N.A., Mueller, J.P.B., Capasso, F.：光的任意自旋角动量到轨道角动量转换。《科学》358，896–901（2018年）。https://doi.org/10.1126/science.aao5392[27] Saito, S.：涡旋光子的庞加莱旋转器。《前沿物理学》9，646228（2021年）。https://doi.org/10.3389/fphy.2021.646228[28] Angelsky, O.V., Bekshaev, A.Y., Dragan,G.S., Maksimyak, P.P., Zenkova,

C.Y., Zheng, J.：利用光学晶体进行结构光调控与诊断。《前沿物理学》**9**，715045（2021年）。https://doi.org/10.3389/fphy.2021.715045

[29]Andrews, D.L.：光学涡旋中的对称性与量子特性。《物理评论·对称性》**13**，1368（2021年）。https://doi.org/10.3390/sym.13081368

[30] v. Enk, S.J., Nienhuis,G.：辐射场中自旋与轨道角动量的对易规则和本征值。《现代光学杂志》**41**，963–977（1994年）。https://doi.org/10.1080/09500349414550911

[31] Chen, X.-S., L¨u, X.-F., Sun, W.-M., Wang, F., Goldman, T.：规范理论中的自旋与轨道角动量：重新审视核子自旋结构与多极辐射。《物理评论快报》**100**，232002（2008年）。https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.232002

[32] Leader,E., Lorc´e, C.：《角动量争议：究竟是什么，是否重要？》Phys. Rep.**541**，163–248（2014年）。https://doi.org/10.1016/j.physrep.2014.02.010

[33]Lu, L., Joannopoulos, J.D., Solija˘ci´c, M.：拓扑光子学。Nat. Photon.**8**，821–829（2014年）。https://doi.org/10.1038/NPHOTON.2014.248

[34] Price, H., Chong,Y.,Khanikaev, A., Schomerus, H., Maczewsky,L.J.,Kremer, M., Heinrich, M.,Szameit, A., Zilberberg, O., Yang, Y., Zhang,B., Al`u, A., Thomale, R., Carusotto, I., St-Jean, P., Amo, A., Dutt, A., Yuan, L., Fan, S., Yin, X., Peng, C., Ozawa, T., Blanco-Redondo, A.：《拓扑光子学路线图》。J. Phys Photonics **4**，032501（2022年）。https://doi.org/10.1088/2515-7647/ac4ee4

[35]Zdagkas, A., McDonnell, C., Deng, J., Shen, Y., Li, G., Ellenbogen, T., Papasimakis, N., Zheludev, N.I.：观察到环形光脉冲。《自然·光子学》**16**，523–528(2022). https://doi.org/10.1038/s41566-022-01028-5[36] Cisowski, C., G¨otte, J.B., Franke-Arnold, S.：综述：光的几何相位：纤维丛理论的启示。《现代物理评论》**94**,031001(2022). https://doi.org/10.1103/RevModPhys.94.0310015[37] Kumar, P.S., Herbut, I.F., Ganesh, R.：玻色谱的狄拉克哈密顿量。《物理评论研究》**2**，033035 (2020). https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.033035[38] Kroto, H.W., Heath, J.R., O'Brien, S.C., Curl, R.F., Smalley, R.E.：C_{60}：巴克敏斯特富勒烯。《自然》**318**,162–163 (1985).https://doi.org/10.1038/318162a0

[39] Gell-Mann, M.：《八重道：强相互作用对称性的理论》。https://doi.org/10.2172/4008239[40] Gell-Mann, M.：重子和介子的示意模型。《物理快报》8, 214–215 (1964)。https://doi.org/10.1016/S0031-9163(64)92001-3[41] Ne'eman, Y.：从规范不变性推导强相互作用。《核物理》26, 222–229 (1961)。https://doi.org/10.1016/0029-5582(61) 90134-1[42] Caldeira, A.O., Leggett, A.J.：耗散对宏观系统中量子隧穿的影响。《物理评论快报》46, 211 (1981)。https: //doi.org/10.1103/PhysRevLett.46.211[43] Leggett, A.J., Garg, A.：量子力学与宏观实在论：无人观察时磁通是否依然存在?《物理评论快报》54, 857 (1985)。https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.54.857[44] Leggett, A.J., Chakravarty, S., Dorsey, A.T., Fisher, M.P.A., Garg, A., Zwerger, W.：耗散双态系统的动力学。《现代物理评论》59, 1 (1995)。https://doi.org/10.1103/RevModPhys.59.1[45]Fr¨owis, F., Sekatski, P., D¨ur, W., Gisin, N., Sangouard, N.：宏观量子态：度量、脆弱性与实现。《现代物理评论》90, 025004 (2018)。https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90. 025004[46] Bardeen, J., Cooper, L.N., Schrieffer, J.R.：超导性理论。《物理评论》108, 1175–1204 (1957)。https://doi.org/10.1103/PhysRev.108. 1175[47] Anderson, P.W.：超导性理论中的随机相位近似。《物理评论》112, 1900–1916 (1958)。https://doi.org/10.1103/ PhysRev.112.1900[48] Bogoljubov, N.N.：超导性理论中的一种新方法。《新西门托杂志》7, 794–805 (1958)。https://doi.org/10.1007/BF02745585[49] Nozi`eres, P., Schmitt-Rink, S.：吸引性费米气体中的玻色凝聚：从弱耦合到强耦合超导性。《低温物理学杂志》59, 195–211 (1985)。https://doi.org/10.1007/BF00683774[50] Yang, C.N.：非对角长程序的概念以及液氦和超导体的量子相。《现代物理评论》34, 694–704 (1962)。https://doi.org/10.1103/RevModPhys.34.694

[51] Ketterle, W.：《诺贝尔演讲：当原子表现得像波：玻色-爱因斯坦

凝聚与原子激光器。《现代物理评论》74，1131–1151（2002）。https://doi.org/10.1103/RevModPhys.74.1131[52] Cornell, E.A., Wieman, C.E.：《诺贝尔演讲：稀薄气体中的玻色–爱因斯坦凝聚：前70年及近期的一些实验》。《现代物理评论》74，875–893（2002）。https://doi.org/10.1103/RevModPhys.74.875[53] Tomonaga, S.：场反作用对介子与核粒子相互作用的影响。III。《理论物理进展》2，6–24（1947）。https://doi.org/10.1143/PTP.2.6[54] Lee, T.D., Low, F.E., Pines, D.：极性晶体中慢电子的运动。《物理评论》90，297（1953）。https://doi.org/10.1103/PhysRev.90. 297[55] Higgs, P.W.：对称性破缺、无质量粒子和规范场。《物理快报》12，132–133（1962）。https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.13.508[56] Goldstone, J., Salam, A., Weinberg, S.：对称性破缺。《物理评论》127，965–970（1962）。https://doi.org/10.1103/PhysRev.127.965[57] Nambu, Y.：超导理论中的准粒子与规范不变性。《物理评论》117（648–663）（1960）。https://doi.org/10.1103/ PhysRev.117.648[58] Chern, S.-S.：厄米流形类。《数学年刊》47，85–121（1946）。https://doi.org/10.2307/1969037[59] Kawakami, S., Nishizawa, J.：具有最佳折射率分布的光波导及其波形失真。《IEEE微波理论与技术汇刊》16，814–818（1968）。https://doi.org/10.1109/TMTT.1968.1126797