arXiv:2304.02230v1 [math.GR] 5 Apr 2023

有限群的交换图与非交换图的 Zagreb 指数及 Hansen-Vuki ˇcevi´c 猜想

Shrabani Das、Arpita Sarkhel 和 Rajat Kanti Nath*

印度阿萨姆邦索尼特布尔纳帕姆 784028，特兹普尔大学数学科学系。电子邮箱：shrabanidas904@gmail.com（S. Das）；
arpitasarkhel17@gmail.com（A. Sarkhel）；
rajatkantinath@yahoo.com（R. K. Nath）

摘要

本文计算有限群的交换图与非交换图的第一和第二 Zagreb 指数，并确定若干类有限群，使得它们的交换图与非交换图满足 Hansen-Vukiˇcevi´c 猜想。

2010 年数学主题分类：20D60、05C25、05C09 关键词：交换图，Zagreb 指数，有限群

1 引言

设 G 为所有图的集合。拓扑指数是一个函数 $T : G \to \mathbb{R}$，使得当图 Γ_1 与 Γ_2 同构时，有 $T(\Gamma_1) = T(\Gamma_2)$。自 1947 年以来，人们利用图的不同参数定义了许多拓扑指数。Wiener 指数是第一个拓扑指数，由 Wiener [34]，引入，它是基于距离的指数。在基于度的拓扑指数中，最早的两个（称为 Zagreb 指数）由 Gutman 和 Trinajsti´c [17] 于 1972 年提出。最初，拓扑指数被用于描述分子的若干化学性质。特别地，Zagreb 指数被用于考察总 π-电子能量对分子结构的依赖关系。如 [26] , 所指出，Zagreb 指数也被用于研究分子复杂性、手性、ZE-异构以及杂体系等。此后，许多数学家也研究了各种拓扑指数的一般数学性质。关于 Zagreb 指数数学性质的综述可见于 [16]。一个有限的非交换图 $\mathcal{NC}(G)$ 的 Zagreb 指数计算公式

*通讯作者

群 G 已在 [22] 中得到。然而，由于存在形如 $\sum_{x\in G\setminus Z(G)} |C_G(x)|$ 以及 $\sum_{xy\in e(\mathcal{NC}(G))} |C_G(x)||C_G(y)|$ 的项，这些公式并非闭形式，其中 $C_G(x) = \{g \in G : xg = yg\}$（$x \in G$ 的中心化子），而 $e(\mathcal{NC}(G))$ 是 $\mathcal{NC}(G)$ 的边集。群的交换图的 Zagreb 指数尚未被研究。

设 Γ 为一个简单无向图，其顶点集为 $v(\Gamma)$，边集为 $e(\Gamma)$。Γ 的第一和第二 Zagreb 指数分别记作 $M_1(\Gamma)$ 和 $M_2(\Gamma)$，定义为

$$M_1(\Gamma) = \sum_{v\in v(\Gamma)} \deg(v)^2 \text{ and } M_2(\Gamma) = \sum_{uv\in e(\Gamma)} \deg(u)\deg(v),$$

其中，deg(v) 表示与 v关联的边的数量（称为 v的度）。比较第一 Zagreb 指数和第二 Zagreb指数后，Hansen和 Vukičević [18] 在 2007 年提出了以下猜想。

猜想 1.1. (Hansen-Vukičević 猜想) 对任意简单有限图 Γ ，

$$\frac{M_2(\Gamma)}{|e(\Gamma)|} \geq \frac{M_1(\Gamma)}{|v(\Gamma)|}. \tag{1}$$

已有研究 [18] 表明，当 $\Gamma = K_{1,5} \sqcup K_3$时，该猜想并不成立。然而，Hansen 和 Vukičević [18] 证明了猜想 1.1 对化学图成立。在 [32], 中，研究表明，当 Γ 为星图时，该猜想对在（1）式中取等号的树成立。在 [19], 中，研究表明，当图为圈时，该猜想对取等号的连通单环图成立。在 [33]中，对（1）式取等号的情形进行了广泛研究。关于 Zagreb 指数比较的综述可见 [20]。有趣的是，目前尚不清楚猜想 1.1 是否对有限群的交换图和非交换图成立。本文计算了若干类有限非阿贝尔群的交换图和非交换图的第一 Zagreb 指数和第二 Zagreb 指数，并检验了 Hansen-Vukičević 猜想的有效性。值得一提的是，在 [8] 中计算了交换共轭类图及其补图的 Zagreb 指数，并验证了猜想 1.1 对 [28,29, 30]中所考虑的有限群类成立。

有限非阿贝尔群 G 的交换图 $C(G)$ 是定义在 G\Z(G) 的元素上的图，当且仅当 $xy = yx$ 时，两个元素 x 和 y 相邻。$C(G)$（也记作 $C(G)$）的补图就是 $\mathcal{NC}(G)$。Brauer 和 Fowler 于 1955 年首次研究了交换图。关于各种有限非阿贝尔群类的交换图结构，请参阅 [10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 31], ，其中计算了 C(G) 的各种谱和能量。

2 交换图和非交换图的 Zagreb 指数

在本节中，我们考虑几类众所周知的有限群，并计算其交换图和非交换图的 Zagreb 指数。以下结果对计算很有帮助。

定理2.1。设 Γ 为图 Γ_1、Γ_2、...、Γ_n的不交并。若 $\Gamma_i = l_iK_{m_i}$，对于 i =1,2, ...,k，其中 K_{m_i}'s是具有m_i 个顶点的完全图，且$l_iK_{m_i}$ 是不交并 l_i个 K_{m_i}的并，则

$$M_1(\Gamma) = \sum_{i=1}^{k} l_i m_i(m_i-1)^2 \quad and \quad M_2(\Gamma) = \sum_{i=1}^{k} l_i \frac{m_i(m_i-1)^3}{2}.$$

证明。根据 $M_1(\Gamma)$ 和 $M_2(\Gamma)$ 的定义，我们有

$$M_1(\Gamma) = \sum_{i=1}^{k} M_1(\Gamma_i) \quad \text{and} \quad M_2(\Gamma) = \sum_{i=1}^{k} M_2(\Gamma_i). \tag{2}$$

若对 i = 1、2、.....、k 有 $\Gamma_i = l_i K_{m_i}$，则

$$M_1(\Gamma_i) = l_i M_1(K_{m_i}) \quad \text{and} \quad M_2(\Gamma) = l_i M_2(K_{m_i}). \tag{3}$$

因此，注意到这一点，由 (2) 和 (3) 可得该结果。

$$M_1(K_{m_i}) = m_i(m_i - 1)^2 \quad \text{and} \quad M_2(K_{m_i}) = \frac{m_i(m_i - 1)^3}{2}.$$

■

定理 m 2.2. (*[9],* 第575页和 *[7],* 引理3) 对于任意图 Γ 及其补图 $\overline{\Gamma}$，

$$M_1(\overline{\Gamma}) = |v(\Gamma)|(|v(\Gamma)| - 1)^2 - 4|e(\Gamma)|(|v(\Gamma)| - 1) + M_1(\Gamma) \quad \textit{and}$$

$$M_2(\overline{\Gamma}) = \frac{|v(\Gamma)|(|v(\Gamma)| - 1)^3}{2} + 2|e(\Gamma)|^2 - 3|e(\Gamma)|(|v(\Gamma)| - 1)^2 + \left(|v(\Gamma)| - \frac{3}{2}\right) M_1(\Gamma) - M_2(\Gamma).$$

我们首先针对群 $G = D_{2m}$、Q_{4n}、QD_{2^n}、SD_{8n} 和 V_{8n} 考察 $C(G)$ 和 $\mathcal{N}C(G)$。

定理 2.3. 如果 $G = D_{2m} = \langle f, g : f^m = g^2 = 1, g f g^{-1} = f^{-1} \rangle (m \geq 3)$, 那么

$$M_1(C(G)) = \begin{cases} (m-1)(m-2)^2, & \textit{when } m \textit{ is odd} \\ (m-2)(m-3)^2 + m, & \textit{when } m \textit{ is even,} \end{cases}$$

$$M_2(C(G)) = \begin{cases} \dfrac{(m-1)(m-2)^3}{2}, & \textit{when } m \textit{ is odd} \\ \dfrac{(m-2)(m-3)^3}{2} + \dfrac{m}{2}, & \textit{when } m \textit{ is even,} \end{cases}$$

$$M_1(\mathcal{N}C(G)) = \begin{cases} m(m-1)(5m-4), & \textit{when } m \textit{ is odd} \\ 5m^3 - 18m^2 + 16m, & \textit{when } m \textit{ is even} \end{cases}$$

and

$$M_2(\mathcal{N}C(G)) = \begin{cases} m(m-1)(4m^2 - 6m + 2), & \textit{when } m \textit{ is odd} \\ 4m^4 - 20m^3 + 32m^2 - 16m, & \textit{when } m \textit{ is even} \end{cases}$$

进一步，$M_2(\Gamma(G)) |e(\Gamma(G))| \geq M_1(\Gamma(G)) |v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{N}C(G)$，当 $m = 4$ 时取等号。

证明。情形 1。m 为奇数。

众所周知，$C(D_{2m}) = K_{m-1} \sqcup mK_1$。因此，$|v(C(D_{2m}))| = 2m-1$ 且 $|e(C(D_{2m}))| = \binom{m-1}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$。因此，根据定理 2.1，我们得到

$$M_1(C(D_{2m})) = (m-1)(m-1-1)^2 + m(1-1)^2 = (m-1)(m-2)^2 \quad \text{and}$$

$$M_2(C(D_{2m})) = \frac{(m-1)(m-1-1)^3}{2} + m \cdot \frac{1(1-1)^3}{2} = \frac{(m-1)(m-2)^3}{2}.$$

我们有

$$\frac{M_1(C(D_{2m}))}{|v(C(D_{2m}))|} = \frac{(m-1)(m-2)^2}{2m-1} \quad \text{and} \quad \frac{M_2(C(D_{2m}))}{|e(C(D_{2m}))|} = (m-2)^2.$$

Also，对于 $m \geq 3$ 我们有 $m - 1 < 2m - 1$ 因此 $(m-2)^2 > \frac{(m-1)(m-2)^2}{2m-1}$。因此，

$$\frac{M_2(C(D_{2m}))}{|e(C(D_{2m}))|} > \frac{M_1(C(D_{2m}))}{|v(C(D_{2m}))|}.$$

利用定理 2.2，我们有

$$\begin{aligned} M_1(\mathcal{NC}(D_{2m})) &= (2m-1)(2m-2)^2 - 4(2m-2)\frac{(m-1)(m-2)}{2} + (m-1)(m-2)^2 \\ &= (m-1)[(8m-4)(m-1) - 4(m-1)(m-2) + (m-2^2)] \\ &= m(m-1)(5m-4) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} M_2(\mathcal{NC}(D_{2m})) = \frac{(2m-1)(2m-2)^3}{2} &+ 2\frac{(m-1)^2(m-2)^2}{4} - 3\frac{(m-1)(m-2)}{2}(2m-2)^2 \\ &+ (2m-1-\frac{3}{2})(m-1)(m-2)^2 - \frac{(m-1)(m-2)^3}{2} \\ &= \frac{m-1}{2}(8m^3 - 12m^2 + 4m) \\ &= m(m-1)(4m^2 - 6m + 2). \end{aligned}$$

此外，$|v(\mathcal{NC}(D_{2m}))| = 2m - 1$ 和 $|e(\mathcal{NC}(D_{2m}))| = \binom{2m-1}{2} - |e(C(D_{2m}))| = \frac{m(m-1)}{2}$。我们有

$$\frac{M_1(\mathcal{NC}(D_{2m}))}{|v(\mathcal{NC}(D_{2m}))|} = \frac{m(m-1)(5m-4)}{2m-1} \text{ and } \frac{M_2(\mathcal{NC}(D_{2m}))}{|e(\mathcal{NC}(D_{2m}))|} = \frac{m(m-1)(8m^2-12m+4)}{3m(m-1)}.$$

因此

$$\frac{M_2(\mathcal{NC}(D_{2m}))}{|e(\mathcal{NC}(D_{2m}))|} - \frac{M_1(\mathcal{NC}(D_{2m}))}{|v(\mathcal{NC}(D_{2m}))|} = \frac{m^2(m-5)+4(2m-1)}{3m(m-1)(2m-1)} := \frac{f(m)}{g(m)}.$$

由于 $f(m), g(m) > 0$ 对所有 $m \geq 3$ 我们有 $\frac{f(m)}{g(m)} > 0$.

情形 2. m 为偶数。

众所周知，$C(D_{2m}) = K_{m-2} \sqcup \frac{m}{2} K_2$。因此，$|v(C(D_{2m}))| = 2m-2$ 和 $|e(C(D_{2m}))| = \binom{m-2}{2} + \frac{m}{2} = \frac{(m-2)(m-3)+m}{2}$。因此，利用定理 2.1，我们得到

$$M_1(C(D_{2m})) = (m-2)(m-2-1)^2 + \frac{m}{2} \cdot 2(2-1)^2 = (m-2)(m-3)^2 + m \quad \text{and}$$

$$M_2(C(D_{2m})) = \frac{(m-2)(m-2-1)^3}{2} + \frac{m}{2} \cdot \frac{2(2-1)^3}{2} = \frac{(m-2)(m-3)^3 + m}{2}.$$

我们有

$$\frac{M_2(C(D_{2m}))}{|e(C(D_{2m}))|} = \frac{(m-2)(m-3)^3+m}{(m-2)(m-3)+m} \quad \text{and} \quad \frac{M_1(C(D_{2m}))}{|v(C(D_{2m}))|} = \frac{(m-2)(m-3)^2+m}{2m-2}.$$

对于 m = 4，我们有

$$\frac{M_2(C(D_{2m}))}{|e(C(D_{2m}))|} = 1 = \frac{M_1(C(D_{2m}))}{|v(C(D_{2m}))|}.$$

对于 m ≥ 6，我们有

$$(m-3)^3 + 1 - (m-3) - (m-3)^2 = (m-3)((m-3)(m-4)-1) + 1 > 0.$$

因此,

$$(m-3)^3 + 1 > (m-3) + (m-3)^2.$$

将两边乘以 m(m − 2)，得到

$$(m-2)(m-3)^3 m + m(m-2) > m(m-2)(m-3) + m(m-2)(m-3)^2.$$

将 \((m\{v1\})\{v2\}(m\{v3\})\{v4\}m\{v5\}\) 相加,
我们得到

$$\begin{aligned}(m-2)(m-3)^3(2m-2) + m(2m-2)& \\ > (m-2)^2(m-3)^3 + m(m-2)(m-3) + m(m-2)(m-3)^2 + m^2& \\ = ((m-2)(m-3)+m)((m-2)(m-3)^2+m).&\end{aligned}$$

因此,

$$\frac{M_2(C(D_{2m}))}{|e(C(D_{2m}))|} = \frac{(m-2)(m-3)^3+m}{(m-2)(m-3)+m} > \frac{(m-2)(m-3)^2+m}{2m-2} = \frac{M_1(C(D_{2m}))}{|v(C(D_{2m}))|}.$$

利用定理 2.2，我们有

$$\begin{aligned}M_1(\mathcal{NC}(D_{2m})) &= (2m-2)(2m-3)^2 - 4(2m-3)\frac{(m-2)(m-3)+m}{2} + (m-2)(m-3)^2 + m \\ &= 5m^3 - 18m^2 + 16m\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}M_2(\mathcal{NC}(D_{2m})) = &\frac{(2m-2)(2m-3)^3}{2} + 2\frac{(m-2)^2(m-3)^2 + 2m(m-2)(m-3) + m^2}{4} \\ &- 3\frac{(m-2)(m-3)+m}{2}(2m-3)^2 + (2m-2-\frac{3}{2})((m-2)(m-3)^2+m) \\ &- \frac{(m-2)(m-3)^3+m}{2} \\ = &\frac{1}{2}(8m^4 - 40m^3 + 64m^2 - 32m) \\ = &\ 4m^4 - 20m^3 + 32m^2 - 16m.\end{aligned}$$

此外， $|v(\mathcal{NC}(D_{2m}))| = 2m - 2$ 和 $|e(\mathcal{NC}(D_{2m}))| = \binom{2m-2}{2} - |e(\mathcal{NC}(D_{2m}))| = 3m(m-2)$。我们有

$$\frac{M_1(\mathcal{NC}(D_{2m}))}{|v(\mathcal{NC}(D_{2m}))|} = \frac{5m^3 - 18m^2 + 16m}{2m-2}$$

and

$$\frac{M_2(\mathcal{NC}(D_{2m}))}{|e(\mathcal{NC}(D_{2m}))|} = \frac{8m^4 - 40m^3 + 64m^2 - 32m}{3m(m-2)}.$$

因此

$$\frac{M_2(\mathcal{NC}(D_{2m}))}{|e(\mathcal{NC}(D_{2m}))|} - \frac{M_1(\mathcal{NC}(D_{2m}))}{|v(\mathcal{NC}(D_{2m}))|} = \frac{m^3(m^2 - 12m + 28) + m^2(24m - 96) + 64m}{3m(m-2)(2m-2)} := \frac{f(m)}{g(m)}.$$

我们有 $g(m) > 0$ 对所有 $m \geq 4$，$f(4) = 0$，$f(6) = 384$ 和 $f(8) = 4608$。对于 $m \geq 10$ 我们有 $m^2 - 12m + 28 > 0$，$24m - 96 > 0$，因此 $f(m) > 0$。因此 $f(m)\,g(m) \geq 0$ 当 $m = 4$ 时取等号。■

推论 2.4. 若 $G = Q_{4n} = \langle f, g : f^{2n} = 1, g^2 = f^n, g f g^{-1} = f^{-1} \rangle (n \geq 2)$, 则

$$M_1(C(G)) = (2n-2)(2n-3)^2 + 2n, \quad M_2(C(G)) = (n-1)(2n-3)^3 + n,$$

$M_1(\mathcal{NC}(G)) = 40n^3 - 72n^2 + 32n$ 和 $M_2(\mathcal{NC}(G)) = 64n^4 - 160n^3 + 128n^2 - 32n$。此外，$M_2(\Gamma(G))\,|e(\Gamma(G))| \geq M_1(\Gamma(G))\,|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{NC}(G)$，当且仅当 $n = 2$ 时等号成立。

证明。众所周知，$C(Q_{4n}) = K_{2n-2} \sqcup nK_2 \cong C(D_{2\times 2n})$。因此，在定理 2.3 中令 $m = 2n$，即可得到所需结果。■

推论2.5.如果 $G = QD_{2^n} = \langle f, g : f^{2^n} = g^2 = 1, g f g^{-1} = f^{-1} \rangle (n \geq 3)$, 则 n

$$M_1(C(G)) = (2^{n-1} - 2)(2^{n-1} - 3)^2 + 2^{n-1}, \quad M_2(C(G)) = (2^{n-2} - 1)(2^{n-1} - 3)^3 + 2^{n-2},$$

$$M_1(\mathcal{NC}(G)) = 5 \cdot 2^{3n-3} - 18 \cdot 2^{2n-2} + 16 \cdot 2^{n-1} \quad \textit{and}$$

$$M_2(\mathcal{NC}(G)) = 4 \cdot 2^{4n-4} - 20 \cdot 2^{3n-3} + 32 \cdot 2^{2n-2} - 16 \cdot 2^{n-1}.$$

此外，$M_2(\Gamma(G))\,|e(\Gamma(G))| \geq M_1(\Gamma(G))\,|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{NC}(G)$，当且仅当 $n = 3$ 时等号成立。

证明。众所周知，$C(QD_{2^n}) = K_{2^{n-1}-2} \sqcup 2^{n-2}K_2 \cong C(D_{2\times 2^{n-1}})$。因此，将 $m = 2^{n-1}$ 代入定理 2.3，我们得到所需结果。■

T定理 2.6. 若 $G = V_{8n} = \langle f, g : f^{2n} = g^4 = 1, gf = g^{-1}f^{-1}, g^{-1}f = f^{-1}g \rangle$, 则

$$M_1(C(G)) = \begin{cases} (4n-4)(4n-5)^2 + 36n, & \textit{when } n \textit{ is even} \\ (4n-2)(4n-3)^2 + 4n, & \textit{when } n \textit{ is odd,} \end{cases}$$

$$M_2(C(G)) = \begin{cases} (2n-2)(4n-5)^3 + 54n, & \textit{when } n \textit{ is even} \\ (2n-1)(4n-3)^3 + 2n, & \textit{when } n \textit{ is odd,} \end{cases}$$

$$M_1(\mathcal{NC}(G)) = \begin{cases} 8n(40n^2 + 8n - 93), & \textit{when } n \textit{ is even} \\ 16n(20n^2 - 18n + 4), & \textit{when } n \textit{ is odd} \end{cases}$$

and

$$M_2(\mathcal{NC}(G)) = \begin{cases} 2n(512n^3 - 1180n^2 + 1024n - 229), \text{ when } n \text{ is even} \\ 64n(16n^3 - 20n^2 + 8n - 1), \text{ when } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

此外，$M_2(\Gamma(G))/e(\Gamma(G))| \geq M_1(\Gamma(G))/v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{NC}(G)$，当 $n = 1$、2 时等号成立。

证明。情形 1：n 为偶数。

众所周知，$C(G) = K_{4n-4} \sqcup nK_4$。因此，$|v(C(G))| = 8n - 4$ 且 $|e(C(G))| = \binom{4n-4}{2} + n \cdot \binom{4}{2} = (2n - 2)(4n - 5) + 6n$。因此，利用定理 2.1，我们得到

$$M_1(C(G)) = (4n - 4)(4n - 4 - 1)^2 + n \cdot 4(4 - 1)^2 = (4n - 4)(4n - 5)^2 + 36n \quad \text{and}$$

$$M_2(C(G)) = \frac{(4n - 4)(4n - 4 - 1)^3}{2} + n \cdot \frac{4(4 - 1)^3}{2} = (2n - 2)(4n - 5)^3 + 54n.$$

我们有

$$\frac{M_1(C(G))}{|v(C(G))|} = \frac{(4n - 4)(4n - 5)^2 + 36n}{8n - 4} \quad \text{and} \quad \frac{M_2(C(G))}{|e(C(G))|} = \frac{(2n - 2)(4n - 5)^3 + 54n}{(2n - 2)(4n - 5) + 6n}.$$

因此，

$$\frac{M_2(C(G))}{|e(C(G))|} - \frac{M_1(C(G))}{|v(C(G))|} = \frac{32n^4(2n - 11) + 32n^2(21n - 16) + 128n}{8n^2(n - 2) + 16n - 5} := \frac{f(n)}{g(n)}. \tag{4}$$

我们有 $g(n) > 0$ 对所有 $n \geq 2$，$f(2) = 0$ 和 $f(4) = \frac{10752}{315}$。当 $n \geq 6$ 时，有 $2n - 11 > 0$、$21n - 16 > 0$，因此 $f(n) > 0$。因此，$f(n)/g(n) \geq 0$，当 $n = 2$ 时等号成立。

使用定理 2.2，我们有

$$\begin{aligned} M_1(\mathcal{NC}(G)) &= (8n - 4)(8n - 5)^2 - 4(8n - 5)((2n - 2)(4n - 5) + 6n) \\ &\quad + (4n - 4)(4n - 5)^2 + 36n \\ &= 320n^3 - 576n^2 + 256n \\ &= 8n(40n^2 - 72n + 32) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} M_2(\mathcal{NC}(G)) &= \frac{(8n - 4)(8n - 5)^3}{2} + 2((2n - 2)^2(4n - 5)^2 + 12n(2n - 2)(4n - 5) + 36n^2) \\ &\quad - 3((2n - 2)(4n - 5) + 6n)(8n - 5)^2 + (8n - 4 - \frac{3}{2})((4n - 4)(4n - 5)^2 + 36n) \\ &\quad - (2n - 2)(4n - 5)^3 - 54n \\ &= 1024n^4 - 2560n^3 + 2048n^2 - 512n \\ &= 2n(512n^3 - 1280n^2 + 1024n - 256). \end{aligned}$$

此外，$|v(\mathcal{NC}(G))| = 8n - 4$ 且 $|e(\mathcal{NC}(G))| = \binom{8n-4}{2} - |e(C(G))| = 24n(n - 1)$。我们有

$$\frac{M_1(\mathcal{NC}(G))}{|v(\mathcal{NC}(G))|} = \frac{8n(40n^2 - 72n + 32))}{8n - 4} \text{ and } \frac{M_2(\mathcal{NC}(G))}{|e(\mathcal{NC}(G))|} = \frac{2n(512n^3 - 1280n^2 + 1024n - 256)}{24n(n - 1)}.$$

因此

$$\frac{M_2(\mathcal{NC}(G))}{|e(\mathcal{NC}(G))|}-\frac{M_1(\mathcal{NC}(G))}{|v(\mathcal{NC}(G))|}=\frac{64n^3(n-6)+64n(13n-12)+256}{24(n-1)(2n-1)}:=\frac{f(n)}{g(n)}. \tag{5}$$

对于$M_1(C(G))$、$M_2(C(G))$、$M_1(\mathcal{NC}(G))$和 $M_2(\mathcal{NC}(G))$。此外，对于所有 $n \geq 2$，我们有$g(n) > 0$；$f(2) = 0$，且$f(4) = 2304$。对于 $n \geq 6$，我们有 $f(n) > 0$。因此，$\frac{f(n)}{g(n)} \geq 0$，当 $n =$ ~~2 时~~等号成立。

情形 2。n 为奇数。

众所周知，$C(G) = K_{4n-2} \sqcup 2nK_2 \cong C(D_{2\times 4n})$。因此，在定理2.3中令$m = 4n$，我们得到$M_1(C(G))$、$M_2(C(G))$、$M_1(\mathcal{NC}(G))$和 $M_2(\mathcal{NC}(G))$的所需表达式。此外，$M_2(\Gamma(G))|e(\Gamma(G))| \geq M_1(\Gamma(G))|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{NC}(G)$，当 $n = 1$ 时等号成立。■

推论2.7. 若 $G = SD_{8n} = \langle f, g : f^{4n} = g^2 = 1, gfg = f^{2n-1}\rangle (n \geq 2)$, 则

$$M_1(C(G)) = \begin{cases}(4n-4)(4n-5)^2+36n, & when\ n\ is\ odd\\ (4n-2)(4n-3)^2+4n, & when\ n\ is\ even,\end{cases}$$

$$M_2(C(G)) = \begin{cases}(2n-2)(4n-5)^3+54n, & when\ n\ is\ odd\\ (2n-1)(4n-3)^3+2n, & when\ n\ is\ even,\end{cases}$$

$$M_1(\mathcal{NC}(G)) = \begin{cases}8n(40n^2+8n-93), & when\ n\ is\ odd\\ 16n(20n^2-18n+4), & when\ n\ is\ even\end{cases}$$

$$and \quad M_2(\mathcal{NC}(G)) = \begin{cases}2n(512n^3-1180n^2+1024n-229), & when\ n\ is\ odd\\ 64n(16n^3-20n^2+8n-1), & when\ n\ is\ even.\end{cases}$$

此外，$M_2(\Gamma(G))|e(\Gamma(G))| \geq M_1(\Gamma(G))|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{NC}(G)$，当 $n = 2$ 时等号成立。

证明。情形 1：n 为奇数。

众所周知，$C(SD_{8n}) = K_{4n-4} \sqcup nK_4$。因此，按照定理2.6（情形1）的证明，我们得到$M_1(C(G))$、$M_2(C(G))$、$M_1(\mathcal{NC}(G))$、$M_2(\mathcal{NC}(G))$ 的所需表达式以及方程（4）和 5。由于 $n \geq 3$，我们有 $M_2(\Gamma(G))|e(\Gamma(G))| > M_1(\Gamma(G))|v(\Gamma(G))|$。情形2。n 为偶数。

众所周知，$C(SD_{8n}) = K_{4n-2} \sqcup 2nK_2 \cong C(D_{2\times 4n})$。因此，在定理 2.3 中令 $m = 4n$，即可得到所需的 $M_1(C(G))$、$M_2(C(G))$、$M_1(\mathcal{NC}(G))$ 和 $M_2(\mathcal{NC}(G))$ 的表达式。此外，$M_2(\Gamma(G))|e(\Gamma(G))| \geq M_1(\Gamma(G))|v(\Gamma(G))|$，当 $n = 2$ 时取等号。■

注意，G ~~$Z(G)$~~ 同构于某个二面体群，条件是 G 本身是二面体群，或 $G = Q_{4n}$，QD_{2^n} 和 SD_{8n}（当 n 为偶数时）。这促使我们得出以下结果。

定理 2.8。设 G 是一个有限群，满足 $G/Z(G) \cong$ ~~D_{2m}~~，$m \geq 3$。则

$$M_1(C(G)) = n(m-1)(mn-n-1)^2+mn(n-1)^2,\ M_2(C(G)) = \frac{(mn-n)(mn-n-1)^3+mn(n-1)^3}{2},$$

$M_1(\mathcal{NC}(G)) = n^3(5m^3-9m^2+4m)$ 且 $M_2(\mathcal{NC}(G)) = n^4(4m^4-10m^3+8m^2-2m)$，其中 $n = |Z(G)|$。此外，$M_2(\Gamma(G))|e(\Gamma(G))| > M_1(\Gamma(G))|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{NC}(G)$。

证明。众所周知， $C(G) = K_{(m-1)n} \sqcup mK_n$，其中 $n = |Z(G)|$。因此， $|v(C(G))| = (2m-1)n$ 且 $|e(C(G))| = \binom{mn-n}{2} + m \cdot \binom{n}{2} = \frac{(mn-n)(mn-n-1)+mn(n-1)}{2}$。因此，利用定理 2.1，我们得到

$$M_1(C(G)) = n(m-1)(mn-n-1)^2 + mn(n-1)^2 \quad \text{and}$$

$$\begin{aligned} M_2(C(G)) &= \frac{(mn-n)(mn-n-1)^3}{2} + m \cdot \frac{n(n-1)^3}{2} \\ &= \frac{(mn-n)(mn-n-1)^3 + mn(n-1)^3}{2}. \end{aligned}$$

此外，

$$\frac{M_1(C(G))}{|v(C(G))|} = \frac{(m-1)(mn-n-1)^2 + m(n-1)^2}{2m-1}$$

and

$$\frac{M_2(C(G))}{|e(C(G))|} = \frac{(m-1)(mn-n-1)^3 + m(n-1)^3}{(m-1)(mn-n-1) + m(n-1)}.$$

我们有 $(mn-2)^2 - 4(mn-n-1)(n-1) = mn^2(m-4) + 4n^2 > 0$。因此，

$$(mn-2)^2 - 3(mn-n-1)(n-1) > (mn-n-1)(n-1).$$

将两边乘以 $(mn-2)$，得到

$$(mn-2)^3 - 3(mn-n-1)(n-1)(mn-2) > (mn-n-1)(n-1)(mn-2).$$

我们有 $(mn-2)^3 - 3(mn-n-1)(n-1)(mn-2) = (mn-n-1)^3 + (n-1)^3$，因此

$$(mn-n-1)^3 + (n-1)^3 > (mn-n-1)(n-1)(mn-2).$$

将两边乘以 $m(m-1)$，得到

$$f(m,n) := m(m-1)(mn-n-1)^3 + m(m-1)(n-1)^3 > m(m-1)(mn-n-1)(n-1)(mn-2).$$

再次，

$$f(m,n) = (m-1)(2m-1)(mn-n-1)^3 - (m-1)^2(mn-n-1)^3 + m(2m-1)(n-1)^3 - m^2(n-1)^2$$

因此

$$\begin{aligned} &(m-1)(2m-1)(mn-n-1)^3 + m(2m-1)(n-1)^3 \\ &\quad > (m-1)^2(mn-n-1)^3 + m^2(n-1)^2 + m(m-1)(mn-n-1)(n-1)(mn-2) \\ &\quad = ((m-1)(mn-n-1) + m(n-1))((m-1)(mn-n-1)^2 + m(n-1)^2). \end{aligned}$$

因此，

$$\frac{(m-1)(mn-n-1)^3 + m(n-1)^3}{(m-1)(mn-n-1) + m(n-1)} > \frac{(m-1)(mn-n-1)^2 + m(n-1)^2}{2m-1}$$

因此$M_2(C(G))|e(C(G))| > M_1(C(G))|v(C(G))|$。

利用定理 2.2，我们有

$$\begin{aligned} M_1(\mathcal{NC}(G)) &= (2mn-n)(2mn-n-1)^2 - 4(2mn-n-1)\frac{(mn-n)(mn-n-1)+mn(n-1)}{2} \\ &\quad + n(m-1)(mn-n-1)^2 + mn(n-1)^2 \\ &= 5m^3n^3 - 9m^2n^3 + 4mn^3 \\ &= n^3(5m^3-9m^2+4m) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} M_2(\mathcal{NC}(G)) &= \frac{(2mn-n)(2mn-n-1)^3}{2} + 2\times\frac{((mn-n)(mn-n-1)+(mn^2-mn))^2}{4} \\ &\quad - 3\times\frac{(mn-n)(mn-n-1)+(mn^2-mn)}{2}(2mn-n-1)^2 \\ &\quad + (2mn-n-\frac{3}{2})((mn-n)(mn-n-1)^2+mn(n-1)^2) \\ &\quad - \frac{(mn-n)(mn-n-1)^3+mn(n-1)^3}{2} \\ &= \frac{1}{2}(8m^4n^4-20m^3n^4+16m^2n^4-4mn^4) \\ &= n^4(4m^4-10m^3+8m^2-2m). \end{aligned}$$

此外，$|v(\mathcal{NC}(G))| = 2mn - n$，以及 $|e(\mathcal{NC}(G))| = \binom{2mn-n}{2} - |e(C(G))| = \frac{m^2n^2-3mn}{2}$。我们有

$$\frac{M_1(\mathcal{NC}(G))}{|v(\mathcal{NC}(G))|} = \frac{mn^2(5m^2-9m+4)}{2m-1} \quad \text{and} \quad \frac{M_2(\mathcal{NC}(G))}{|e(\mathcal{NC}(G))|} = \frac{4n^2(2m^3-5m^2+4m-1)}{3(m-1)}.$$

因此

$$\frac{M_2(\mathcal{NC}(G))}{|e(\mathcal{NC}(G))|} - \frac{M_1(\mathcal{NC}(G))}{|v(\mathcal{NC}(G))|} = \frac{n^2(m^3(m-6)+m(13m-12)+4))}{3(m-1)(2m-1)} := \frac{n^2h(m)}{g(m)}.$$

对于所有 m，我们有 $g(m) > 0 \geq 3$，对于所有 m，我们有 $h(m) > 0 \geq 6$。此外，$h(3) = 4 > 0$，$h(4) = 36$，以及 $h(5) = 144$。因此，$n^2h(m)\,g(m) \geq 0$，从而 $M_2(\mathcal{NC}(G))|e(\mathcal{NC}(G))| > M_1(\mathcal{NC}(G))|v(\mathcal{NC}(G))|$。■

推论 2.9. 若 $G = U_{6n} = \langle a,b : a^{2n} = b^3 = 1, a^{-1}ba = b^{-1}\rangle$，则

$$M_1(C(G)) = 2n(2n-1)^2+3n(n-1)^2, M_2(C(G)) = \frac{2n(2n-1)^3+3n(n-1)^3}{2}, M_1(\mathcal{NC}(G)) = 66n^3$$

以及 $M_2(\mathcal{NC}(G)) = 120n^4$。进一步地，$M_2(\Gamma(G))|e(\Gamma(G))| > M_1(\Gamma(G))|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{NC}(G)$。

证明。由于 $U_{6n} \cong D_6$，，考虑 $m = 3$，由定理 2.8可得结论。 ■

推论 2.10. 如果 $G = M_{2mn} = \langle a,b : a^m = b^{2n} = 1, bab^{-1} = a^{-1}\rangle$ ($m \geq 3$ 但不等于 4), 则

$$M_1(C(G)) = \begin{cases} n(m-1)(mn-n-1)^2+mn(n-1)^2, & \textit{when m is odd} \\ n(m-2)(mn-2n-1)^2+mn(2n-1)^2, & \textit{when m is even,} \end{cases}$$

$$M_2(C(G)) = \begin{cases} \dfrac{(mn-n)(mn-n-1)^3 + mn(n-1)^3}{2}, & \text{when } m \text{ is odd} \\ \dfrac{(mn-2n)(mn-2n-1)^3 + mn(2n-1)^3}{2}, & \text{when } m \text{ is even,} \end{cases}$$

$$M_1(\mathcal{NC}(G)) = \begin{cases} n^3(5m^3 - 9m^2 + 4m), & \text{when } m \text{ is odd} \\ n^3(5m^3 - 18m^2 + 16m), & \text{when } m \text{ is even} \end{cases}$$

and

$$M_2(\mathcal{NC}(G)) = \begin{cases} n^4(4m^4 - 10m^3 + 8m^2 - 2m), & \text{when } m \text{ is odd} \\ 4n^4(m^4 - 5m^3 + 8m^2 - 4m), & \text{when } m \text{ is even.} \end{cases}$$

此外，$M_2(\Gamma(G))|e(\Gamma(G))| > M_1(\Gamma(G))|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{NC}(G)$。

证明。若 m 为奇数，则 $|Z(M_{2mn})| = n$ 且 $M_{2mn}/Z(M_{2mn}) \cong D_{2m}$。因此，根据定理 2.8，我们得到 $M_1(C(G)) = n(m-1)(mn-n-1)^2 + mn(n-1)^2, M_2(C(G)) = \frac{(mn-n)(mn-n-1)^3 + mn(n-1)^3}{2}$，$M_1(\mathcal{NC}(G)) = n^3(5m^3 - 9m^2 + 4m)$ 和 $M_2(\mathcal{NC}(G)) = n^4(4m^4 - 10m^3 + 8m^2 - 2m)$。此外，$M_2(\Gamma(G))|e(\Gamma(G))| > M_1(\Gamma(G))|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{NC}(G)$。

如果 m 为偶数，则 $|Z(M_{2mn})| = 2n$ 和 $M_{2mn}/Z(M_{2mn}) \cong D_{2\times\frac{m}{2}}$。因此，在定理 2.8 中令 $n = 2n$ 且 $m = \frac{m}{2}$，我们得到 $M_1(C(G)) = n(m-2)(mn-2n-1)^2 + mn(2n-1)^2, M_2(C(G)) = \frac{(mn-2n)(mn-2n-1)^3 + 2(mn)^3}{2}, M_1(\mathcal{NC}(G)) = n^3(5m^3 - 18m^2 + 16m), M_2(\mathcal{NC}(G)) = 4n^4(m^4 - 5m^3 + 8m^2 - 4m)$。此外，$M_2(\Gamma(G))|e(\Gamma(G))| > M_1(\Gamma(G))|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{NC}(G)$。 ■

定理2.11. 设G为一个有限群，满足$G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$，其中p为素数。则 $M_1(C(G)) = (pn-n)(p+1)(pn-n-1)^2, M_2(C(G)) = \frac{1}{2}(p+1)(pn-n)(pn-n-1)^3, M_1(\mathcal{NC}(G)) = (p+1)(pn-n)(p^4n^2-2p^3n^2+p^2n^2)$ and $M_2(\mathcal{NC}(G)) = \frac{1}{2}(p+1)^2(pn-n)^2(p^4n^2-2p^3n^2+p^2n^2)$，其中 $n = |Z(G)|$。此外，$M_2(\Gamma(G))|e(\Gamma(G))| = M_1(\Gamma(G))|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{NC}(G)$。

证明。众所周知，$C(G) = (p+1)K_{(p-1)n}$，其中 $n = |Z(G)|$。因此，$|v(C(G))| = (p+1)(p-1)n = n(p^2-1)$，且 $|e(C(G))| = (p+1)\cdot\binom{pn-n}{2} = \frac{(p+1)(pn-n)(pn-n-1)}{2}$。因此，利用 2.1，得到

$$M_1(C(G)) = (p+1)(pn-n)(pn-n-1)^2 \quad \text{and} \quad M_2(C(G)) = \frac{(p+1)(pn-n)(pn-n-1)^3}{2}.$$

此外，

$$\frac{M_1(C(G))}{|v(C(G))|} = (pn-n-1)^2 = \frac{M_2(C(G))}{|e(C(G))|}.$$

利用定理 2.2，我们有

$$\begin{aligned} M_1(\mathcal{NC}(G)) &= (p^2n-n)(p^2n-n-1)^2 - 4(p^2n-n-1)\frac{(p^2n-n)(pn-n-1)}{2} \\ &\quad + (p^2n-n)(pn-n-1)^2 \\ &= (p^2n-n)(p^4n^2-2p^3n^2+p^2n^2) \\ &= (p+1)(pn-n)(p^4n^2-2p^3n^2+p^2n^2) \end{aligned}$$

and

$$
\begin{aligned}
M_2(\mathcal{NC}(G)) = \frac{(p^2n-n)(p^2n-n-1)^3}{2} &+ 2\frac{(p^2n-n)^2(pn-n-1)^2}{4} \\
&- 3\frac{(p^2n-n)(pn-n-1)}{2}(p^2n-n-1)^2 \\
&+ (p^2n-n-\frac{3}{2})(p^2n-n)(pn-n-1)^2 \\
&- \frac{(p^2n-n)(pn-n-1)^3}{2} \\
= \frac{p^2n-n}{2}&(p^6n^3-3p^5n^3+3p^4n^3-p^3n^3) \\
= \frac{(p+1)^2(pn-n)^2(p^4n^2-2p^3n^2+p^2n^2)}{2}&.
\end{aligned}
$$

此外，$|v(\mathcal{NC}(G))| = p^2n - n$ 和 $|e(\mathcal{NC}(G))| = \binom{p^2n-}{2} - |^n e(C(G))| = (p^2n-n)(p^2n-pn)\ 2$。我们有

$$
\frac{M_1(\mathcal{NC}(G))}{|v(\mathcal{NC}(G))|} = \frac{(p+1)(pn-n)(p^4n^2-2p^3n^2+p^2n^2)}{p^2n-n}
$$

and

$$
\frac{M_2(\mathcal{NC}(G))}{|e(\mathcal{NC}(G))|} = \frac{(p^2n-n)(p^2n-pn)(p^4n^2-2p^3n^2+p^2n^2)}{(p^2n-n)(p^2n-pn)}.
$$

因此

$$
\frac{M_1(\mathcal{NC}(G))}{|v(\mathcal{NC}(G))|} = p^4n^2-2p^3n^2+p^2n^2 = \frac{M_2(\mathcal{NC}(G))}{|e(\mathcal{NC}(G))|}.
$$

■

定理 2.12. 设 G 是有限群，且 G Z(G) ≅ S z(2)，其中 S z(2) 是由 $\langle a, b : a^5 = b^4 = 1, b^{-1}ab = a^2\rangle$ 表示的 Suzuki 群。则 $M_1(C(G)) = 4n(4n-1)^2 + 15n(3n-1)^2$, $M_2(C(G)) = \frac{1}{2}[4n(4n-1)^3 + 15n(3n-1)^3]$, $M_1(\mathcal{NC}(G)) = 4740n^3$，且 $M_2(\mathcal{NC}(G)) = 37440n^4$,，其中 $n = |Z(G)|$。此外，$M_2(\Gamma(G))\ |e(\Gamma(G))| \longrightarrow M_1(\Gamma(G))\ |v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{NC}(G)$。

证明。众所周知，$C = {}_{4n} \sqcup 5\ {}_{3n} = |\quad| \quad |C| = 4 + 5\cdot 3 = 19 \quad |C| = \binom{4n}{2} + 5\cdot\binom{3n}{2} = \frac{4\ 4\ -1}{2} + 5\cdot\frac{3\ 3\ -1}{2} = \frac{4\ 4\ -1\ +15\ 3\ -1}{2}$ (G) K K，其中 n Z(G)。因此，v((G)) n n n 且 e((G))$_{n(n)\ n(n)\ n(n)n(n)}$。因此，利用定理 2.1，我们得到

$$
M_1(C(G)) = 4n(4n-1)^2 + 5\cdot 3n(3n-1)^2 = 4n(4n-1)^2 + 15n(3n-1)^2
$$

and

$$
M_2(C(G)) = \frac{4n(4n-1)^3}{2} + 5\cdot\frac{3n(3n-1)^3}{2} = \frac{4n(4n-1)^3 + 15n(3n-1)^3}{2}.
$$

此外，

$$
\frac{M_1(C(G))}{|v(C(G))|} = \frac{4(4n-1)^2 + 15(3n-1)^2}{19} \quad \text{and} \quad \frac{M_2(C(G))}{|e(C(G))|} = \frac{4(4n-1)^3 + 15(3n-1)^3}{4(4n-1) + 15(3n-1)}.
$$

我们有 $(7n-2)^2-4(4n-1)(3n-1)=n^2>0$。因此,

$$(7n-2)^2-3(4n-1)(3n-1)>(4n-1)(3n-1).$$

两边同时乘以 $(7n-2)$，我们得到

$$(7n-2)^3-3(4n-1)(3n-1)(7n-2)>(4n-1)(3n-1)(7n-2).$$

我们有 $(7n-2)^3-3(4n-1)(3n-1)(7n-2)=(4n-1)^3+(3n-1)^3$ 因此

$$(4n-1)^3+(3n-1)^3>(4n-1)(3n-1)(7n-2).$$

Thus

$$60(4n-1)^3+60(3n-1)^3>60(4n-1)(3n-1)(7n-2).$$

再次,

$$60(4n-1)^3+60(3n-1)^3=76(4n-1)^3-16(4n-1)^3+285(3n-1)^3-225(3n-1)^3$$

因此

$$\begin{aligned}76(4n-1)^3+285(3n-1)^3&>16(4n-1)^3+225(3n-1)^3+60(4n-1)(3n-1)(7n-2)\\&=(4(4n-1)+15(3n-1))(4(4n-1)^2+15(3n-1)^2).\end{aligned}$$

因此,

$$\frac{4(4n-1)^3+15(3n-1)^3}{4(4n-1)+15(3n-1)}>\frac{4(4n-1)^2+15(3n-1)^2}{19}$$

因此 $M_2(C(G))|e(C(G))|>M_1(C(G))|v(C(G))|$。

利用定理 2.2，我们有

$$\begin{aligned}M_1(\mathcal{N}C(G))&=19n(19n-1)^2-4(19n-1)\frac{(61n^2-19n)}{2}+4n(4n-1)^2+15n(3n-1)^2\\&=6859n^3-2318n^3+64n^3+135n^3=4740n^3\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}M_2(\mathcal{N}C(G))&=\frac{19n(19n-1)^3}{2}+2\times\frac{(61n^2-19n)^2}{4}-3\times\frac{(61n^2-19n)}{2}(19n-1)^2\\&\quad+(19n-\frac{3}{2})(4n(4n-1)^2+15n(3n-1)^2)-\frac{4n(4n-1)^3+15n(3n-1)^3}{2}\\&=\frac{1}{2}\times74880n^4=37440n^4.\end{aligned}$$

此外，$|v(\mathcal{N}C(G))|=19n$ and $|e(\mathcal{N}C(G))|=\binom{19n}{2}-|e(C(G))|=150n^2$。我们有 $M_1(\mathcal{N}C(G))|v(\mathcal{N}C(G))|=4740n_{19}^3$ and $M_2(\mathcal{N}C(G))|e(\mathcal{N}C(G))|=37440n4\,150\,2n$。因此，$M_2(\mathcal{N}C(G))|e(\mathcal{N}C(G))|>M_1(\mathcal{N}C(G))|v(\mathcal{N}C(G))|$ since $3744n_{15}^2>4740n_{19}^2$。

■

由于 $S_z(2)$ 的中心是平凡的，我们得到如下推论。

推论 2.13. 如果 $G\cong S_z(2)$，那么 $M_2(\Gamma(G))|e(\Gamma(G))|>M_1(\Gamma(G))|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G)=C(G)$ 或 $\mathcal{N}C(G)$。

2.1 更多群的 $\mathcal{C}$(G) 与 $\mathcal{NC}$(G) 的 Zagreb 指数

在本小节中，我们计算Hanaki群、某些一般线性群和射影特殊线性群的 $\mathcal{C}$(G)和 $\mathcal{NC}$(G)的 Zagreb 指数。然而，我们首先从阶为 pq 的非阿贝尔群开始。

定理 2.14. 设 G 为阶为 pq 的有限非阿贝尔群，其中 p 与 q 为素数，且 p|(q − 1)。则

$$M_1(\mathcal{C}(G)) = (q-1)(q-2)^2+q(p-1)(p-2)^2, \quad M_2(\mathcal{C}(G)) = \frac{(q-1)(q-2)^3+q(p-1)(p-2)^3}{2},$$

$$M_1(\mathcal{NC}(G)) = p^3q^3 - 2p^2q^2 - pq^3 - p^3q^2 + pq^2 - 3q^2 - 3qp^2 + 2q + p^3q + q^3 - 4$$

and

$$M_2(\mathcal{NC}(G)) = \frac{1}{2}\Big(p^4q^4 - 7p^3q^3 + 41p^2q^2 - 51pq + 3p^4q^2 + 13q^2 - 16p^3q^2 + 14pq^2 + 2p^2q^3 - 16pq^3 + 8p^2q - 9q + 2pq^4 + 2p^3q + p^4q + 18\Big)$$

此外，$M_2(\Gamma(G))|e(\Gamma(G))| > M_1(\Gamma(G))|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = \mathcal{C}(G)$ 或 $\mathcal{NC}(G)$。

*Pro*的。众所周知，$\mathcal{C}(G) = K_{q-1} \sqcup qK_{p-1}$。因此，$|v(\mathcal{C}(G))| = pq - 1$ 且

$$|e(\Gamma_G\mathcal{C}(G))| = \binom{q-1}{2} + q \cdot \binom{p-1}{2} = \frac{(q-1)(q-2)+q(p-1)(p-2)}{2}.$$

因此，利用定理 2.1，我们得到

$$\begin{aligned} M_1(\mathcal{C}(G)) &= (q-1)(q-1-1)^2 + q(p-1)(p-1-1)^2 \\ &= (q-1)(q-2)^2 + q(p-1)(p-2)^2 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} M_2(\mathcal{C}(G)) &= \frac{(q-1)(q-1-1)^3}{2} + q \cdot \frac{(p-1)(p-1-1)^3}{2} \\ &= \frac{(q-1)(q-2)^3 + q(p-1)(p-2)^3}{2}. \end{aligned}$$

此外，

$$\frac{M_1(\mathcal{C}(G))}{|v(\mathcal{C}(G))|} = \frac{(q-1)(q-2)^2 + q(p-1)(p-2)^2}{pq-1} \quad \text{and}$$

$$\frac{M_2(\mathcal{C}(G))}{|e(\mathcal{C}(G))|} = \frac{(q-1)(q-2)^3 + q(p-1)(p-2)^3}{(q-1)(q-2)+q(p-1)(p-2)}.$$

我们有 $(p+q-4)^2 - 4(p-2)(q-2) = (p-q)^2 > 0$ 等等

$$(p+q-4)^2 - 3(p-2)(q-2) > (p-2)(q-2).$$

两边同时乘以 $(p+q-4)$，得到

$$(p+q-4)^3-3(p-2)(q-2)(p+q-4)>(p-2)(q-2)(p+q-4).$$

我们有$(p+q-4)^3-3(p-2)(q-2)(p+q-4)=(q-2)^3+(p-2)^3$ 因此

$$(q-2)^3+(p-2)^3>(p-2)(q-2)(p+q-4).$$

两边同乘 $q(q-1)(p-1)$，得到

$$f(p,q):=q(q-1)(p-1)(q-2)^3+q(q-1)(p-1)(p-2)^3>q(q-1)(p-1)(p-2)(q-2)(p+q-4).$$

再次,

$$f(p,q)=(q-1)(q-2)^3(pq-1)-(q-1)^2(q-2)^3+(p-1)(p-2)^3q(pq-1)-(p-1)^2(p-2)^3q^2.$$

因此,

$$\begin{aligned}&(q-1)(q-2)^3(pq-1)+(p-1)(p-2)^3q(pq-1)\\&\quad>(q-1)^2(q-2)^3+(p-1)^2(p-2)^3q^2+q(q-1)(p-1)(p-2)(q-2)(p+q-4)\\&\quad=\Big((q-1)(q-2)+q(p-1)(p-2)\Big)\Big((q-1)(q-2)^2+q(p-1)(p-2)^2\Big)\end{aligned}$$

因此

$$\frac{(q-1)(q-2)^3+q(p-1)(p-2)^3}{(q-1)(q-2)+q(p-1)(p-2)}>\frac{(q-1)(q-2)^2+q(p-1)(p-2)^2}{pq-1}.$$

因此 $\frac{M_2(C(G))}{v(C(G))}\geq\frac{|e(C(G))|}{M_1(C(G))}$。

利用定理 2.2，我们有

$$\begin{aligned}M_1(\mathcal{N}C(G))&=(pq-1)(pq-2)^2-4(pq-2)\frac{(q-1)(q-2)+q(p-1)(p-2)}{2}\\&\quad+(q-1)(q-2)^2+q(p-1)(p-2)^2\\&=p^3q^3-2p^2q^2-pq^3-p^3q^2+pq^2-3q^2-3qp^2+2q+p^3q+q^3-4\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}M_2(\mathcal{N}C(G))&=\frac{(pq-1)(pq-2)^3}{2}+2\frac{[(q-1)(q-2)+q(p-1)(p-2)]^2}{4}\\&\quad-3\frac{(q-1)(q-2)+q(p-1)(p-2)}{2}(pq-2)^2\\&\quad+(pq-1-\frac{3}{2})[(q-1)(q-2)^2+q(p-1)(p-2)^2]\\&\quad-\frac{(q-1)(q-2)^3+q(p-1)(p-2)^3}{2}\\&=\frac{1}{2}\Big(p^4q^4-7p^3q^3+41p^2q^2-51pq+3p^4q^2+13q^2-16p^3q^2+14pq^2+2p^2q^3\\&\quad-16pq^3+8p^2q-9q+2pq^4+2p^3q+p^4q+18\Big)\end{aligned}$$

此外， $|v(\mathcal{NC}(G))| = pq - 1$ 以及 $|e(\mathcal{NC}(G))| = \binom{pq-1}{2} - |e(C(G))| = \frac{p^2q^2-p^2q-q^2+q}{2}$。因此，

$$\begin{aligned}
&\frac{M_2(\mathcal{NC}(G))}{|e(\mathcal{NC}(G))|} - \frac{M_1(\mathcal{NC}(G))}{|v(\mathcal{NC}(G))|} \\
&= \frac{2p^4q^4(p-3) + p^2q^4(pq-2p-14) + p^3q^3(q^2-15p) + p^2q(q^4+p^3q^2-p^2) + 69pq}{pq^2(p^2q-q-p-p^2) + q(q-1) + pq(p+q)} \\
&+ \frac{pq^2(6pq-23) + p^4q^2(2p-4) + p^2q^2(51pq-83) + p^3q(23q-2) + pq(28q^2-12p)}{pq^2(p^2q-q-p-p^2) + q(q-1) + pq(p+q)} \\
&= \frac{A(p,q)}{B(p,q)},
\end{aligned}$$

其中 $A(p,q) := 2p^4q^4(p-3) + p^2q^4(pq-2p-14) + p^3q^3(q^2-15p) + p^2q(q^4+p^3q^2-p^2) + 69pq + pq^2(6pq-23) + p^4q^2(2p-4) + p^2q^2(51pq-83) + p^3q(23q-2) + pq(28q^2-12p)$，且 $B(p,q) := pq^2(p^2q-q-p-p^2) + q(q-1) + pq(p+q) = pq^2(q(p^2-1)-p(p+1)) + q(q-1) + pq(p+q)$。由于 $q(p^2-1) > p(p+1)$ 且 $q > 1$，我们有 $B(p,q) > 0$。为了确定 $A(p,q) > 0$ 与否，我们考虑以下情况。

情况 1. $p = 2$

我们有 $A(2,q) = q^4(20q-104) + q^2(280q-194) + 58q$，因此 $A(2,q) > 0$ 当 $q \geq 7$。此外，$A(2,3) = 2424$ 且 $A(2,5) = 27940$。

情况 2. $p \geq 3$。

We have $p-3 \geq 0$, $p(q-2) > 14$, $q^2 > 15p$, $q^2(q^2+p^3) > p^2$, $6pq > 23$, $2p > 4$, $51pq - 83$, $23q > 2$ and $28q^2 > 12p$ and so $A(p,q) > 0$.

因此，在所有情况下，$A(p,q) > 0$，从而 $B(p,q) > 0$。也就是说，$\frac{M_2(\mathcal{NC}(G))}{|e(\mathcal{NC}(G))|} \geq \frac{M_1(\mathcal{NC}(G))}{|v(\mathcal{NC}(G))|}$。

■

定理 2.15. 设 $F = GF(2^n), n \geq 2$，且 ν 是 F 的 Frobenius 自同构，即 $\nu(x) = x^2 \ \forall x \in F$。则群的交换图和非交换图的第一、第二 Zagreb 指数

$$A(n,\nu) = \left\{ U(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & \nu(a) & 1 \end{bmatrix} : a, b \in F \right\}$$

由 $M_1(C(A(n,\nu))) = 2^n(2^n-1)^3$, $M_2(C(A(n,\nu))) = 2^{n-1}(2^n-1)^4$, $M_1(\mathcal{NC}(A(n,\nu))) = 2^{5n}(2^n-5) + 2^{3n+2}(2^{n+1}-1)$ 和 $M_2(\mathcal{NC}(A(n,\nu))) = 2^{7n}(2^{n-1}-3) - 2^{6n}(2^{n-1}-9) - 2^{4n+1}(5\cdot 2^n - 2)$ 给出。进一步地，$M_2(\Gamma(A(n,\nu)))|e(\Gamma(A(n,\nu)))| = M_1(\Gamma(A(n,\nu)))|v(\Gamma(A(n,\nu)))|$，其中 $\Gamma(A(n,\nu)) = C(A(n,\nu))$ 或 $\mathcal{NC}(A(n,\nu))$。

证明。众所周知，$|C(\nu)| = 2^n - 1$ 2^n $|C(\nu)| = 2^n - 1$ $2^n = 2^{2n} - 2^n$ $|C(\nu)| = 2^n - 1$ $\binom{2^n}{2} = 2^{n-1}(2^n-1)$。因此，$v(A(n,\nu)) = 2^n - 1$ 且 $e(A(n,\nu)) = \binom{2^n}{2} = 2^{n-1}(2^n-1)$。所以，利用定理 . 我们得到

$$M_1(C(A(n,\nu))) = (2^n-1)2^n(2^n-1)^2 = 2^n(2^n-1)^3 \quad \text{and}$$

$$M_2(C(A(n,\nu))) = (2^n-1) \times \frac{2^n(2^n-1)^3}{2} = 2^{n-1}(2^n-1)^4.$$

因此，

$$\frac{M_1(C(A(n,\nu)))}{|v(C(A(n,\nu)))|} = (2^n-1)^2 = \frac{M_2(C(A(n,\nu)))}{|e(C(A(n,\nu)))|}.$$

利用定理 2.2，我们有

$$\begin{aligned} M_1(\mathcal{NC}(A(n,\nu))) &= (2^{2n}-2^n)(2^{2n}-2^n-1)^2 - 4(2^{2n}-2^n-1)(2^{n-1}(2^n-1)^2) + 2^n(2^n-1)^3 \\ &= 2^{6n} - 5\cdot 2^{5n} + 8\cdot 2^{4n} - 4\cdot 2^{3n} \\ &= 2^{5n}(2^n-5) + 2^{3n+2}(2^{n+1}-1) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} M_2(\mathcal{NC}(A(n,\nu))) &= \frac{(2^{2n}-2^n)(2^{2n}-2^n-1)^3}{2} + 2\cdot 2^{2n-2}(2^n-1)^4 \\ &\quad - 3\cdot 2^{n-1}(2^n-1)^2(2^{2n}-2^n-1)^2 + \left(2^{2n}-2^n-\frac{3}{2}\right)2^n(2^n-1)^3 - \frac{2^n(2^n-1)^4}{2} \\ &= 2^{8n-1} - 3\cdot 2^{7n} - 2^{7n-1} + 9\cdot 2^{6n} - 10\cdot 2^{5n} + 2^{4n+2} \\ &= 2^{7n}(2^{n-1}-3) - 2^{6n}(2^{n-1}-9) - 2^{4n+1}(5\cdot 2^n - 2). \end{aligned}$$

此外，$|v(\mathcal{NC}(A(n,\nu)))| = 2^{2n}-2^n$ 和 $|e(\mathcal{NC}(A(n,\nu)))| = \binom{2^{2n}-2^n}{2} - |e(C(A(n,\nu)))| = 2^n(2^n-2)(2^{2n}-2^n)$。因此

$$\begin{aligned} \frac{M_2(\mathcal{NC}(A(n,\nu)))}{|e(\mathcal{NC}(A(n,\nu)))|} &= \frac{2^{7n}(2^{n-1}-3) - 2^{6n}(2^{n-1}-9) - 2^{4n+1}(5\cdot 2^n-2)}{2^n(2^n-2)(2^{2n}-2^n)} \\ &= \frac{2^{5n}(2^n-5) + 2^{3n+2}(2^{n+1}-1)}{2^{2n}-2^n} \\ &= \frac{M_1(\mathcal{NC}(A(n,\nu)))}{|v(\mathcal{NC}(A(n,\nu)))|}. \end{aligned}$$

■

定理 2.16. 设 $F = GF(p^n)$，其中 p 为素数。那么该群的交换图和非交换图的第一和第二 Zagreb 指数。

$$A(n,p) = \left\{ v(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} : a,b,c \in F \right\}$$

由.....给出。

$$M_1(C(A(n,p))) = p^n(p^{2n}-1)(p^{2n}-p^n-1)^2, M_2(C(A(n,p))) = \frac{p^n(p^{2n}-1)(p^{2n}-p^n-1)^3}{2},$$

$$M_1(\mathcal{NC}(A(n,p))) = p^{8n}(p^n-2) + p^{5n}(2p^n-1)$$

and

$$M_2(\mathcal{NC}(A(n,p))) = \frac{(p^{3n}-p^n)[p^{8n}(p^n-3) + p^{6n}(3p^n-1)]}{2}.$$

此外，$M_2(\Gamma(A(n,p)))e(\Gamma(A(n,p)))| = M_1(\Gamma(A(n,p)))|v(\Gamma(A(n,p)))|$，其中 $\Gamma(A(n,p)) = C(A(n,p))$ 或 $\mathcal{NC}(A(n,p))$。

证明。众所周知， $C(A(n, p)) = (p^n + 1)K_{p^{2n}-p^n}$。因此， $|v(C(A(n, p)))| = (p^n + 1)(p^{2n} - p^n) = p^{3n} - p^n$ 以及 $|e(C(A(n, p)))| = (p^n + 1)\binom{p^{2n}-p^n}{2} = \frac{p^n(p^{2n}-1)(p^{2n}-p^n-1)}{2}$。因此，利用定理 2.1，我们得到

$$M_1(C(A(n, p))) = (p^n + 1)(p^{2n} - p^n)(p^{2n} - p^n - 1)^2 = p^n(p^{2n} - 1)(p^{2n} - p^n - 1)^2$$

and

$$M_2(C(A(n, p))) = (p^n + 1)\frac{(p^{2n} - p^n)(p^{2n} - p^n - 1)^3}{2} = \frac{p^n(p^{2n} - 1)(p^{2n} - p^n - 1)^3}{2}.$$

此外，

$$\frac{M_1(C(A(n, p)))}{|v(C(A(n, p)))|} = (p^{2n} - p^n - 1)^2 = \frac{M_2(C(A(n, p)))}{|e(C(A(n, p)))|}.$$

利用定理 2.2，我们得到

$$\begin{aligned} M_1(\mathcal{N}C(A(n, p))) &= (p^{3n} - p^n)(p^{3n} - p^n - 1)^2 - 4(p^{3n} - p^n - 1)\frac{p^n(p^{2n} - 1)(p^{2n} - p^n - 1)}{2} \\ &\quad + p^n(p^{2n} - 1)(p^{2n} - p^n - 1)^2 \\ &= p^{9n} - 2p^{8n} - p^{5n} + 2p^{6n} \\ &= p^{8n}(p^n - 2) + p^{5n}(2p^n - 1) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} M_2(\mathcal{N}C(A(n, p))) &= \frac{(p^{3n} - p^n)(p^{3n} - p^n - 1)^3}{2} + 2\frac{(p^{3n} - p^n)^2(p^{2n} - p^n - 1)^2}{4} \\ &\quad - 3\frac{(p^{3n} - p^n)(p^{2n} - p^n - 1)}{2}(p^{3n} - p^n - 1)^2 \\ &\quad + (p^{3n} - p^n - \frac{3}{2})(p^{3n} - p^n)(p^{2n} - p^n - 1)^2 \\ &\quad - \frac{(p^{3n} - p^n)(p^{2n} - p^n - 1)^3}{2} \\ &= \frac{(p^{3n} - p^n)}{2}(p^{9n} + 3p^{7n} - 3p^{8n} - p^{6n}) \\ &= \frac{(p^{3n} - p^n)(p^{8n}(p^n - 3) + p^{6n}(3p^n - 1))}{2}. \end{aligned}$$

此外， $|v(\mathcal{N}C(A(n, p)))| = p^{3n} - p^n$ 以及 $|e(\mathcal{N}C(A(n, p)))| = \binom{p^{3n}-p_2^n}{} - |e(C(A(n, p)))| = p_2^{2n}(p^n - 1)(p^{3n} - p^n)$。因此

$$\begin{aligned} \frac{M_2(\mathcal{N}C(A(n, p)))}{|e(\mathcal{N}C(A(n, p)))|} &= \frac{(p^{3n} - p^n)(p^{8n}(p^n - 3) + p^{6n}(3p^n - 1))}{p^{2n}(p^n - 1)(p^{3n} - p^n)} \\ &= \frac{p^{8n}(p^n - 2) + p^{5n}(2p^n - 1)}{p^{3n} - p^n} \\ &= \frac{M_1(\mathcal{N}C(A(n, p)))}{|v(\mathcal{N}C(A(n, p)))|}. \end{aligned}$$

■

定理 2.17.设G = GL(2,q)（一般线性群），其中 q = p^n > 2 且 p 是素数。则

$$M_1(C(G)) = q(q-1)(q^6 - 4q^5 + 4q^4 + 2q^3 - 4q^2 + q - 1),$$

$$M_2(C(G)) = \frac{q(q-1)}{2}(q^8 - 6q^7 + 14q^6 - 15q^5 + 3q^4 + 12q^3 - 16q^2 + 9q - 1),$$

$M_1(\mathcal{N}C(G)) = (q-1)(q^{11} - 2q^{10} - 4q^9 + 9q^8 + 5q^7 - 15q^6 + q^5 + 7q^4 - 2q^3 + q^2 - q)$ 和

$$M_2(\mathcal{N}C(G)) = \frac{q(q-1)}{2}(q^{14} - 3q^{13} - 4q^{12} + 19q^{11} - 47q^9 + 28q^8 + 43q^7 - 50q^6 + 11q^5 + 4q^4 - 12q^3 + 19q^2 - 11q + 2).$$

此外，$M_2(\Gamma(G))\,|e(\Gamma(G))| > M_1(\Gamma(G))\,|v(\Gamma(G))|$，其中 Γ(G) = C(G) 或 $\mathcal{N}C$(G)。

证明。众所周知，|G| = $(q^2-1)(q^2-q)$，|Z(G)| = q − 1 且 C(G) = q(q+1) 2 K_{q^2-3q+2} ⊔q(q−1) 2 K_{q^2-q} ⊔ (q + 1)K_{q^2-2q+1}。由此，|v(C(G))| = (q − 1)(q^3-q-1) 且 |e(C(G))| = q(q−1) 2 $(q^4 - 2q^3 - q^2 + 2q + 1)$。因此，利用定理 2.1，我们得到

$$\begin{aligned} M_1(C(G)) &= \frac{q(q+1)}{2}(q^2-3q+2)(q^2-3q+1)^2 + \frac{q(q-1)}{2}(q^2-q)(q^2-q-1)^2 \\ &\quad + (q+1)(q^2-2q+1)(q^2-2q)^2 \\ &= q(q-1)(q^6 - 4q^5 + 4q^4 + 2q^3 - 4q^2 + q - 1) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} M_2(C(G)) &= \frac{q(q+1)}{2}(q^2-3q+2)\frac{(q^2-3q+1)^3}{2} + \frac{q(q-1)}{2}(q^2-q)\frac{(q^2-q-1)^3}{2} \\ &\quad + (q+1)(q^2-2q+1)\frac{(q^2-2q)^3}{2} \\ &= \frac{q(q-1)}{2}(q^8 - 6q^7 + 14q^6 - 15q^5 + 3q^4 + 12q^3 - 16q^2 + 9q - 1). \end{aligned}$$

We have

$$\frac{M_1(C(G))}{|v(C(G))|} = \frac{q(q-1)(q^6 - 4q^5 + 4q^4 + 2q^3 - 4q^2 + q - 1)}{(q-1)(q^3 - q - 1)}$$

and

$$\frac{M_2(C(G))}{|e(C(G))|} = \frac{q^8 - 6q^7 + 14q^6 - 15q^5 + 3q^4 + 12q^3 - 16q^2 + 9q - 1}{q^4 - 2q^3 - q^2 + 2q + 1}.$$

因此，

$$\begin{aligned} &\frac{M_2(C(G))}{|e(C(G))|} - \frac{M_1(C(G))}{|v(C(G))|} \\ &\quad = \frac{2q^8(q-5) + q^5(14q^2 - 13) + q^3(24q^3 - q + 4) + q(8q-7) + 1}{q^5(q^2 - 2q - 2) + q(3q^3 - q - 3) + (4q^3 - 1)} := \frac{f(q)}{g(q)}. \end{aligned}$$

由于 $q > 2$，我们有 $q - 2 \geq 1$、$q^3 - q > 1$ 以及 $4q^3 - 1 > 0$。因此，$q(q-2) = q^2 - 2q > 2$，且 $3q^3 - 3 = 3(q^3 - 1) > q$，所以 $g(q) > 0$。对于 $q > 3$，我们有 $q - 5 > 0$、$14q^2 - 13 > 0$、$24q^3 - q + 4 > 0$ $8q - 7 > 0$，因此 $f(q) > 0$。此外，$f(3) = 18,\ 7880$。因此，$f(q) - g(q) > 0$。于是，$M_2(\mathcal{C}(G))\,|e(\mathcal{C}(G))| > M_1(\mathcal{C}(G))\,|v(\mathcal{C}(G))|$。

利用定理 2.2，我们得到

$$\begin{aligned}
M_1(\mathcal{NC}(G)) &= (q-1)(q^3-q-1)((q-1)(q^3-q-1)-1)^2 \\
&\quad - 4((q-1)(q^3-q-1)-1)\frac{q(q-1)}{2}(q^4-2q^3-q^2+2q+1) \\
&\quad + q(q-1)(q^6-4q^5+4q^4+2q^3-4q^2+q-1) \\
&= (q-1)(q^{11}-2q^{10}-4q^9+9q^8+5q^7-15q^6+q^5+7q^4-2q^3+q^2-q)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
M_2(\mathcal{NC}(G)) &= \frac{(q-1)(q^3-q-1)[(q-1)(q^3-q-1)-1]^3}{2} \\
&\quad + 2\times\frac{q^2(q-1)^2(q^4-2q^3-q^2+2q+1)}{4} \\
&\quad - 3\times\frac{q(q-1)}{2}(q^4-2q^3-q^2+2q+1)((q-1)(q^3-q-1)-1)^2 \\
&\quad + ((q-1)(q^3-q-1)-\frac{3}{2})(q(q-1)(q^6-4q^5+4q^4+2q^3-4q^2+q-1)) \\
&\quad - \frac{q(q-1)}{2}(q^8-6q^7+14q^6-15q^5+3q^4+12q^3-16q^2+9q-1) \\
&= \frac{q(q-1)}{2}(q^{14}-3q^{13}-4q^{12}+19q^{11}-47q^9+28q^8+43q^7-50q^6+11q^5+4q^4 \\
&\qquad - 12q^3+19q^2-11q+2) \\
&:= \frac{q}{2}A(q),
\end{aligned}$$

其中 $A(q) = (q-1)(q^{14}-3q^{13}-4q^{12}+19q^{11}-47q^9+28q^8+43q^7-50q^6+11q^5+4q^4-12q^3+19q^2-11q+2)$。此外，$|v(\mathcal{NC}(G))| = (q-1)(q^3-q-1)$ 和 $|e(\mathcal{NC}(G))| = \left(\frac{(q-1)(q^3-q-1)}{2}-1\right) - |e(\mathcal{C}(G))| = \frac{q}{2}(q^7-2q^6-2q^5+5q^4-4q^2+q^3+1)$。我们有

$$\frac{M_1(\mathcal{NC}(G))}{|v(\mathcal{NC}(G))|} = \frac{(q^{11}-2q^{10}-4q^9+9q^8+5q^7-15q^6+q^5+7q^4-2q^3+q^2-q)}{(q^3-q-1)}$$

and

$$\frac{M_2(\mathcal{NC}(G))}{|e(\mathcal{NC}(G))|} = \frac{A(q)}{(q^7-2q^6-2q^5+5q^4-4q^2+q^3+1)}.$$

因此

$$\begin{aligned}
&\frac{M_2(\mathcal{NC}(G))}{|e(\mathcal{NC}(G))|} - \frac{M_1(\mathcal{NC}(G))}{|v(\mathcal{NC}(G))|} \\
&= \frac{q^{11}(q-5)+q^8(14q-35)+q^5(15q-12)+q^4(5q^6-4)+q^3(18q^4-5)+16q^2-10q+2}{(q^5(q^2-2q-2)+q^2(5q^2-4)+q^3+1)(q^3-q-1)} \\
&:= \frac{f(q)}{g(q)}.
\end{aligned}$$

我们有g(q) > 0, f (3) = 33920 且f(4) = 2767770。对于 q ≥ 5 我们有 f(q) > 0。因此, f (q)g(q) > 0。于是, $M_2(\mathcal{NC}(G))$ > $M_1(\mathcal{NC}(G))$ 。■

定理 2.18。若 G = PS L(2, 2^k)（射影特殊线性群）, 其中 k ≥ 2, 则

$$M_1(C(G)) = 2^{5k} - 4 \cdot 2^{4k} + 4 \cdot 2^{3k} + 4 \cdot 2^{2k} - 5 \cdot 2^k - 4,$$

$$M_2(C(G)) = \frac{2^{6k} - 6 \cdot 2^{5k} + 14 \cdot 2^{4k} - 9 \cdot 2^{3k} - 15 \cdot 2^{2k} + 15 \cdot 2^k + 8}{2},$$

$$M_1(\mathcal{NC}(G)) = 2^{9k} - 5 \cdot 2^{7k} - 2^{6k} + 9 \cdot 2^{5k} - 5 \cdot 2^{3k} - 3 \cdot 2^{2k} + 3 \cdot 2^k$$

and

$$M_2(\mathcal{NC}(G)) = \frac{1}{2}(2^{12k} - 7 \cdot 2^{10k} - 2^{9k} + 21 \cdot 2^{8k} - 26 \cdot 2^{6k} - 2 \cdot 2^{5k} + 15 \cdot 2^{4k} + 3 \cdot 2^{3k} + 6 \cdot 2^{2k} - 8 \cdot 2^k).$$

此外, $M_2(\Gamma(G))$ > $M_1(\Gamma(G))$, 其中 Γ(G) = C(G) 或 $\mathcal{NC}$(G)。

证明。众所周知, C(G) = $(2^k + 1)K_{2^k-1} \sqcup 2^{k-1}(2^k + 1)K_{2^k-2} \sqcup 2^{k-1}(2^k - 1)K_{2^k}$。因此, |v($C$(G))| = $(2^k + 1)(2^k - 1) + 2^{k-1}(2^k + 1)(2^k - 2) + 2^{k-1}(2^k - 1)2^k = 2^{3k} - 2^k - 1$ 且

$$\begin{aligned} |e(C(G))| &= \frac{(2^k + 1)(2^k - 1)(2^k - 2)}{2} + \frac{2^{k-1}(2^k + 1)(2^k - 2)(2^k - 3)}{2} + \frac{2^{k-1}(2^k - 1)2^k(2^k - 1)}{2} \\ &= \frac{2^{4k} - 2 \cdot 2^{3k} - 2 \cdot 2^{2k} + 3 \cdot 2^k + 2}{2}. \end{aligned}$$

因此，根据定理 2.1，我们有

$$\begin{aligned} M_1(C(G)) &= (2^k + 1)(2^k - 1)(2^k - 1 - 1)^2 + 2^{k-1}(2^k + 1)(2^k - 2)(2^k - 2 - 1)^2 \\ &\qquad + 2^{k-1}(2^k - 1)2^k(2^k - 1)^2 \\ &= (2^k + 1)(2^k - 1)(2^k - 2)^2 + 2^{k-1}(2^k + 1)(2^k - 2)(2^k - 3)^2 + 2^{k-1}(2^k - 1)2^k(2^k - 1)^2 \\ &= 2^{5k} - 4 \cdot 2^{4k} + 4 \cdot 2^{3k} + 4 \cdot 2^{2k} - 5 \cdot 2^k - 4 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} M_2(C(G)) &= (2^k + 1)\frac{(2^k - 1)(2^k - 1 - 1)^3}{2} + 2^{k-1}(2^k + 1)\frac{(2^k - 2)(2^k - 2 - 1)^3}{2} \\ &\qquad + 2^{k-1}(2^k - 1)\frac{2^k(2^k - 1)^3}{2} \\ &= \frac{(2^k + 1)(2^k - 1)(2^k - 2)^3 + 2^{k-1}(2^k + 1)(2^k - 2)(2^k - 3)^3 + 2^{2k-1}(2^k - 1)^4}{2} \\ &= \frac{2^{6k} - 6 \cdot 2^{5k} + 14 \cdot 2^{4k} - 9 \cdot 2^{3k} - 15 \cdot 2^{2k} + 15 \cdot 2^k + 8}{2}. \end{aligned}$$

我们有

$$\frac{M_1(C(G))}{|v(C(G))|} = \frac{2^{5k} - 4 \cdot 2^{4k} + 4 \cdot 2^{3k} + 4 \cdot 2^{2k} - 5 \cdot 2^k - 4}{2^{3k} - 2^k - 1}$$

and

$$\frac{M_2(C(G))}{|e(C(G))|} = \frac{2^{6k} - 6 \cdot 2^{5k} + 14 \cdot 2^{4k} - 9 \cdot 2^{3k} - 15 \cdot 2^{2k} + 15 \cdot 2^k + 8}{2^{4k} - 2 \cdot 2^{3k} - 2 \cdot 2^{2k} + 3 \cdot 2^k + 2}.$$

因此,

$$\frac{M_2(C(G))}{|e(C(G))|} - \frac{M_1(C(G))}{|v(C(G))|} = \frac{2^{6k}(3 \cdot 2^k - 11) + 2^k(8 \cdot 2^{4k} - 6 \cdot 2^{2k} - 1) + 2^{2k}(8 \cdot 2^{2k} - 1)}{2^{5k}(2^{2k} - 2 \cdot 2^k - 3) + (4 \cdot 2^{4k} - 2^{2k} - 2) + 2^k(6 \cdot 2^{2k} - 5)} := \frac{f(k)}{g(k)}$$

对于 $k \geq 2$，我们有 $2 \cdot 2^{2k}(4 \cdot 2^{2k} - 3) > 1, 2^k(2^k - 2) > 3$ 以及 $2^{2k}(4 \cdot 2^{2k} - 1) > 2$。因此，~~$f(k)\ g(k) > 0$，所以 $M_2(C(G))\ |e(C(G))| > M_1(C(G))\ |v(C(G))|$~~。

根据定理 2.2，我们有

$$\begin{aligned} M_1(\mathcal{NC}(G)) &= (2^{3k} - 2^k - 1)(2^{3k} - 2^k - 2)^2 \\ &\quad - 4 \cdot (2^{3k} - 2^k - 2)\frac{(2^{4k} - 2 \cdot 2^{3k} - 2 \cdot 2^{2k} + 3 \cdot 2^k + 2)}{2} \\ &\quad + (2^{5k} - 4 \cdot 2^{4k} + 4 \cdot 2^{3k} + 4 \cdot 2^{2k} - 5 \cdot 2^k - 4) \\ &= 2^{9k} - 5 \cdot 2^{7k} - 2^{6k} + 9 \cdot 2^{5k} - 5 \cdot 2^{3k} - 3 \cdot 2^{2k} + 3 \cdot 2^k \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} M_2(\mathcal{NC}(G)) &= \frac{(2^{3k} - 2^k - 1)(2^{3k} - 2^k - 2)^3}{2} + 2 \cdot \frac{(2^{4k} - 2 \cdot 2^{3k} - 2 \cdot 2^{2k} + 3 \cdot 2^k + 2)^2}{4} \\ &\quad - 3 \cdot \frac{(2^{4k} - 2 \cdot 2^{3k} - 2 \cdot 2^{2k} + 3 \cdot 2^k + 2)}{2}(2^{3k} - 2^k - 2)^2 \\ &\quad + (2^{3k} - 2^k - 1 - \frac{3}{2})(2^{5k} - 4 \cdot 2^{4k} + 4 \cdot 2^{3k} + 4 \cdot 2^{2k} - 5 \cdot 2^k - 4) \\ &\quad - \frac{(2^{6k} - 6 \cdot 2^{5k} + 14 \cdot 2^{4k} - 9 \cdot 2^{3k} - 15 \cdot 2^{2k} + 15 \cdot 2^k + 8)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(2^{12k} - 7 \cdot 2^{10k} - 2^{9k} + 21 \cdot 2^{8k} - 26 \cdot 2^{6k} - 2 \cdot 2^{5k} + 15 \cdot 2^{4k} + 3 \cdot 2^{3k} \\ &\quad + 6 \cdot 2^{2k} - 8 \cdot 2^k). \end{aligned}$$

此外，$|v(\mathcal{NC}(G))| = 2^{3k} - 2^k - 1$ 以及 $|e(\mathcal{NC}(G))| = \binom{2^{3k} - 2^k - 1}{2} - |e(C(G))| = \frac{1}{2}(2^{6k} - 3 \cdot 2^{4k} - 2^{3k} + 3 \cdot 2^{2k})$。我们有。

$$\frac{M_1(\mathcal{NC}(G))}{|v(\mathcal{NC}(G))|} = \frac{2^{9k} - 5 \cdot 2^{7k} - 2^{6k} + 9 \cdot 2^{5k} - 5 \cdot 2^{3k} - 3 \cdot 2^{2k} + 3 \cdot 2^k}{2^{3k} - 2^k - 1}$$

and

$$\begin{aligned} &\frac{M_2(\mathcal{NC}(G))}{|e(\mathcal{NC}(G))|} \\ &= \frac{2^{12k} - 7 \cdot 2^{10k} - 2^{9k} + 21 \cdot 2^{8k} - 26 \cdot 2^{6k} - 2 \cdot 2^{5k} + 15 \cdot 2^{4k} + 3 \cdot 2^{3k} + 6 \cdot 2^{2k} - 8 \cdot 2^k}{2^{6k} - 3 \cdot 2^{4k} - 2^{3k} + 3 \cdot 2^{2k}}. \end{aligned}$$

因此

$$\frac{M_2(\mathcal{NC}(G))}{|e(\mathcal{NC}(G))|} - \frac{M_1(\mathcal{NC}(G))}{|v(\mathcal{NC}(G))|}$$
$$= \frac{2^{7k}(2^{5k} - 8\cdot 2^k - 4) + 2^{4k}(17\cdot 2^{2k} - 14) + 2^{3k}(14\cdot 2^{2k} - 18) + 2\cdot 2^{2k} + 8\cdot 2^k}{2^{6k}(2^{3k} - 4\cdot 2^k - 2) + 2\cdot 2^{3k}(3\cdot 2^{2k} - 1) + 2^{2k}(4\cdot 2^{2k} - 3)} := \frac{f(k)}{g(k)}.$$

对于 k ≥ 2，我们有 $2^k(2^{4k} - 8) > 4$ 且 $2^k(2^{2k} - 4) > 2$。因此，f(k) g(k) > 0 从而 $M_2(\mathcal{NC}(G))/|e(\mathcal{NC}(G))| > M_1(\mathcal{NC}(G))/|v(\mathcal{NC}(G))|$。■

我们以以下评注结束本节。

注记 2.1。本节的结果表明，猜想 1.1 对以下交换图和非交换图成立

(a)群D_{2m}、Q_{4n}、QD_{2^n}、V_{8n}、SD_{8n}、U_{6n}、M_{2mn}、$S_z(2)$、A(n, ν)、A(n, p)、GL(2,q)和 PS L(2, 2^k)。(b) 阶为 pq 的非阿贝尔群，其中 p 和 q 是满足 p|q − 1 的素数。(c) 满足 $G/Z(G) \cong D_{2m}$、$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ 或 $S_z(2)$ 的群。

3 若干推论

在本节 中，我们讨论第 节所得结果的以下推论 2.

定理 3.1. 设 G 是有限非阿贝尔群，且 |Z(G)| = n。

(a) 若 G 是 4-中心化子群，则 $M_1(C(G)) = 3n(n-1)^2$, $M_2(C(G)) = n(n-1)^3$, $M_1(\mathcal{NC}(G)) = 12n^3$ 且 $M_2(\mathcal{NC}(G)) = 18n^4$. (b) 若 G 是 5-中心化子群，则 $M_1(C(G)) \in \{8n(2n-1)^2, 2n(2n-1)^2 + 3n(n-1)^2\}$, $M_2(C(G)) \in \{4n(2n-1)^3, \frac{1}{2}(2n(2n-1)^2 + 3n(n-1)^2)\}$, $M_1(\mathcal{NC}(G)) \in \{288n^3, 66n^3\}$ 且 $M_2(\mathcal{NC}(G)) \in \{1152n^4, 120n^4\}$. (c) 若 G 是一个 (p + 2)-中心化子 p-群，则 $M_1(C(G)) = (pn - n)(p + 1)(pn - n - 1)^2$, $M_2(C(G)) = \frac{1}{2}(p+1)(pn-n)(pn-n-1)^3$, $M_1(\mathcal{NC}(G)) = (p+1)(pn-n)(p^4n^2 - 2p^3n^2 + p^2n^2)$ 且 $M_2(\mathcal{NC}(G)) = \frac{1}{2}(p+1)^2(pn-n)^2(p^4n^2 - 2p^3n^2 + p^2n^2)$. (d) 若 $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ 是 G 中一个具有最大基数的两两不交换元素集，则当 r = 3 时，$M_1(C(G)) = 3n(n-1)^2$, $M_2(C(G)) = n(n-1)^3$, $M_1(\mathcal{NC}(G)) = 12n^3$ 且 $M_2(\mathcal{NC}(G)) = 18n^4$；当 r = 4 时，$M_1(C(G)) \in \{8n(2n-1)^2, 2n(2n-1)^2 + 3n(n-1)^2\}$, $M_2(C(G)) \in \{4n(2n-1)^3, \frac{1}{2}(2n(2n-1)^2 + 3n(n-1)^2)\}$, $M_1(\mathcal{NC}(G)) \in \{288n^3, 66n^3\}$ 且 $M_2(\mathcal{NC}(G)) \in \{1152n^4, 120n^4\}$.

此外，$M_2(\Gamma(G))/|e(\Gamma(G))| \geq M_1(\Gamma(G))/|v(\Gamma(G))|$，其中在上述所有情况下，Γ(G) = C(G) 或 $\mathcal{NC}(G)$。

证明。(a) 根据 [5] 的定理2，当G 为4-中心化子群时，我们有GZ(G) $\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$。因此，利用定理2.11并考虑 $p = 2$，可得到$M_1(C(G))$、$M_2(C(G))$、$M_1(\mathcal{N}C(G))$ 和 $M_2(\mathcal{N}C(G))$的所需表达式。(b) 根据 [5] 的定理4，当 G为 5-中心化子群时，我们有 GZ(G) $\cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ 或 D_6。因此，利用定理2.11和定理2.8，分别考虑 $p = 3$ 和$m = 3$，可得到 $M_1(C(G))$、$M_2(C(G))$、$M_1(\mathcal{N}C(G))$ 和 $M_2(\mathcal{N}C(G))$ 的所需表达式。(c) 根据 [4]的引理 2.7，当 G 为一个 (p +2)-中心化子 p-群时，我们有 G Z(G) $\cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$。因此，由定理 2.11可得到 $M_1(C(G))$、$M_2(C(G))$、$M_1(\mathcal{N}C(G))$ 和 $M_2(\mathcal{N}C(G))$ 的所需表达式。(d) 根据 [2], 的引理2.4，当 $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ 是G中具有最大大小的两两不交换元素集合时，G是 4-中心化子群或 5-中心化子群，分别取决于 $r = 3$ 或 4。因此，根据 (a)和 (b) 两部分可得到 $M_1(C(G))$、$M_2(C(G))$、$M_1(\mathcal{N}C(G))$和$M_2(\mathcal{N}C(G))$的所需表达式。此外，根据定理2.11和定理 2.8，我们有 $M_2(\Gamma(G))\,|e(\Gamma(G))| \geq M_1(\Gamma(G))|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{N}C(G)$，在上述所有情形中均成立。■

定理 3.2. 设 G 为有限非阿贝尔群，其 Pr(G) 为 G 的交换度，且 |Z(G)| = n。

(a) 如果 p 是 |G|的最小素数因子且 $Pr(G) = p^2 + p^{-1} p^3$ 则 $M_1(C(G)) = (pn - n)(p + 1)(pn - n - 1)^2, M_2(C(G)) = \frac{1}{2}(p + 1)(pn - n)(pn - n - 1)^3, M_1(\mathcal{N}C(G)) = (p + 1)(pn - n)(p^4n^2 - 2p^3n^2 + p^2n^2)$ 且 $M_2(\mathcal{N}C(G)) = \frac{1}{2}(p + 1)^2(pn - n)^2(p^4n^2 - 2p^3n^2 + p^2n^2)$.
(b) 如果$Pr(G) \in n$ 514, 2 5,11 27 ,1 2 ,716, 58o则$M_1(C(G)) \in \{6n(6n - 1)^2 + 7n(n - 1)^2, 4n(4n - 1)^2 + 5n(n - 1)^2, 3n(3n - 1)^2 + 4n(n - 1)^2, 2n(2n - 1)^2 + 3n(n - 1)^2, 3n(n - 1)^2, 8n(2n - 1)^2\}$,$M_2(C(G)) \in n\frac{1}{2}(6n(6n - 1)^3 + 7n(n - 1)^3)$, 12 $(4n(4n - 1)^3 + 5n(n - 1)^3)$, 12 $(3n(3n - 1)^3 + 4n(n - 1)^3)$, 12 $(2n(2n - 1)^3 + 3n(n - 1)^3)$, 3 2$(n(n - 1)^3)$, $4n(2n - 1)^3$o, $M_1(\mathcal{N}C(G)) \in \{1302n^3, 420n^3, 192n^3, 66n^3, 12n^3, 288n^3\}$，以及 $M_2(\mathcal{N}C(G)) \in \{6552n^4, 1440n^4, 504n^4, 120n^4, 18n^4, 1152n^4\}$.

进一步，$M_2(\Gamma(G))\,|e(\Gamma(G))| \geq M_1(\Gamma(G))\,|v(\Gamma(G))|$，其中在上述两种情况下，$\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{N}C(G)$。

证明。(a) 由 [21] 的定理3，我们有$G\,Z(G) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ 当且仅当p是 |G| 的最小除数且$Pr(G) = p^2 + p - 1\ p^3$。因此，由定理2.11，我们得到$M_1(C(G))$、$M_2(C(G))$、$M_1(\mathcal{N}C(G))$和$M_2(\mathcal{N}C(G))$的所需表达式。
(b) 若 $Pr(G) \in n$ 514, 25, 1127, 12, 716, 58o，则由 [[27],页 246]和 [[23],页 451],我们有 $GZ(G)$同构于 D_{14}, D_{10}, D_8, D_6、$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 或 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ 之一。因此，由定理 2.8 和定理 2.11，我们得到 $M_1(C(G))$、$M_2(C(G))$、$M_1(\mathcal{N}C(G))$ 和 $M_2(\mathcal{N}C(G))$ 的所需表达式。

此外，根据定理 2.8 和定理2.11，在上述两种情况下，我们有 $M_2(\Gamma(G))\,|e(\Gamma(G))| \geq M_1(\Gamma(G))\,|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{N}C(G)$。■

定理 3.3. 设 G 是一个有限非阿贝尔群。如果 $C(G)$ 是可平面的，则 $M_2(\Gamma(G))/|e(\Gamma(G))| \geq M_1(\Gamma(G))/|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{NC}(G)$。

证明。由 [3] 的定理 2.2 可知，$C(G)$ 是平面图，当且仅当 G 同构于 $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, Q_8, Q12, \mathbb{Z}_2 \times D8, \mathbb{Z}_2 \times Q8, \mathcal{M}_{16}, \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_4, D_8 * \mathbb{Z}_4$, S G(16, 3), A_4, A_5, S 4, S L(2, 3) 或 S z(2)。若 $G \cong D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, Q_8, Q_{12}$ 或 S z(2)，则由定理 2.3、推论 2.4 和推论 2.13 可得 $M_2(\Gamma(G))/|e(\Gamma(G))| \geq M_1(\Gamma(G))/|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{NC}(G)$。

如果 $G \cong \mathbb{Z}_2 \times D8, \mathbb{Z}_2 \times Q8, \mathcal{M}_{16}, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4, D_8 * \mathbb{Z}_4$ 或 S G(16, 3)，则 $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$。因此，由定理2.11，我们有 $M_2(\Gamma(G))/|e(\Gamma(G))| \geq M_1(\Gamma(G))/|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{NC}(G)$。

如果 $G \cong A_4$ 则 $C(G) = K_3 \sqcup 4K_2$。因此，$|v(C(G))| = 11, |e(C(G))| = 7, M_1(C(G)) = 3(3-1)^2 + 4 \cdot 2(2-1)^2 = 20$ 且 $M_2(C(G)) = 3 \cdot (3-1)^3 + 4 \cdot 2(2-1)^3 = 16$。因此，

$$\frac{M_2(C(G))}{|e(C(G))|} = \frac{16}{7} > \frac{20}{11} = \frac{M_1(C(G))}{|v(C(G))|}.$$

此外，$|e(\mathcal{NC}(G))| = 48$、$M_1(\mathcal{NC}(G)) = 11(11-1)^2 - 4 \cdot 7(11-1) + 20 = 840$ 和 $M_2(\mathcal{NC}(G)) = 11(11-1)^3 + 2 \cdot 7^2 - 3 \cdot 7(11-1)^2 + (11 - \frac{3}{2})20 - 16 = 3672$。因此，

$$\frac{M_2(\mathcal{NC}(G))}{|e(\mathcal{NC}(G))|} = 76.5 > \frac{840}{11} = \frac{M_1(\mathcal{NC}(G))}{|v(\mathcal{NC}(G))|}.$$

若 $G \cong$ S L(2, 3)，则 $C(G) = 3K_2 \sqcup 4K_4$。因此，$|v(C(G))| = 22$、$|e(C(G))| = 27$、$M_1(C(G)) = 3 \cdot 2(2-1)^2 + 4 \cdot 4(4-1)^2 = 150$ 以及 $M_2(C(G)) = 3 \cdot 2(2-1)^3 + 4 \cdot 4(4-1)^3 = 219$。因此，

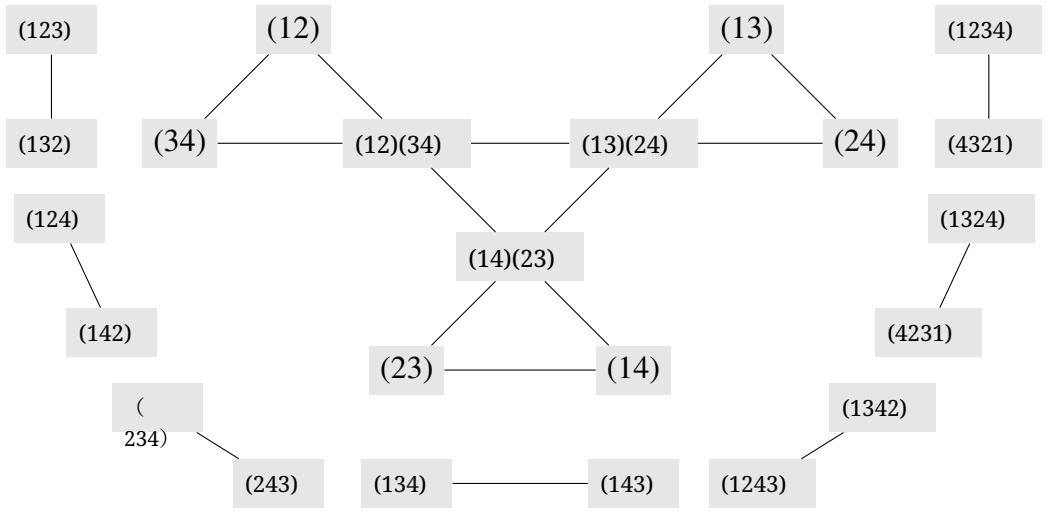
$$\frac{M_2(C(G))}{|e(C(G))|} = \frac{73}{9} > \frac{75}{11} = \frac{M_1(C(G))}{|v(C(G))|}.$$

另外，$|e(\mathcal{NC}(G))| = 204$，$M_1(\mathcal{NC}(G)) = 22(22-1)^2 - 4 \cdot 27(22-1) + 150 = 7584$ 以及 $M_2(\mathcal{NC}(G)) = 22(22-1)^3 + 2 \cdot 27^2 - 3 \cdot 27(22-1)^2 + (22 - \frac{3}{2})150 - 219 = 70464$。因此，

$$\frac{M_2(\mathcal{NC}(G))}{|e(\mathcal{NC}(G))|} = \frac{70464}{204} > \frac{7584}{22} = \frac{M_1(\mathcal{NC}(G))}{|v(\mathcal{NC}(G))|}.$$

如果 $G \cong A_5$ 则根据定理2.18 我们有$M_2(C(G))/|e(C(G))| \geq M_1(C(G))/|v(C(G))|$ 并且 $M_2(\mathcal{NC}(G))/|e(\mathcal{NC}(G))| \geq M_1(\mathcal{NC}(G))/|v(\mathcal{NC}(G))|$ 因为 $A_5 \cong$ PS L(2, 4)。

S_4 的交换图为



因此，如果 $G \cong S_4$ 则 $|v(C(G))| = 23, |e(C(G))| = 19, M_1(C(G)) = 86$ 且 $M_2(C(G)) = 115$。因此，

$$\frac{M_2(C(G))}{|e(C(G))|} = \frac{115}{19} > \frac{86}{23} = \frac{M_1(C(G))}{|v(C(G))|}.$$

此外，$|e(\mathcal{N}C(G))| = 234$，$M_1(\mathcal{N}C(G)) = 23(23-1)^2 - 4\cdot 19(23-1) + 86 = 9456$ 以及 $M_2(\mathcal{N}C(G)) = 23(23-1)_2^3 + 2\cdot 19^2 - 3\cdot 19(23-1)^2 + (23 - \frac{3}{2})86 - 115 = 97320$。因此，

$$\frac{M_2(\mathcal{N}C(G))}{|e(\mathcal{N}C(G))|} = \frac{97320}{234} > \frac{9546}{23} = \frac{M_1(\mathcal{N}C(G))}{|v(\mathcal{N}C(G))|}.$$

证明至此完成。 ■

定理 3.4。设 G 是一个有限非阿贝尔群。若 $C(G)$ 是环面，则 $M_2(\Gamma(G))|e(\Gamma(G))| \geq M_1(\Gamma(G))|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{N}C(G)$。

证明。由 [11] 的定理 3.3 可知，$C(G)$ 是环面，当且仅当 G 同构于 $D_{14}, D_{16}, Q_{16}, QD_{16}, D_6 \times \mathbb{Z}_3$、$A_4 \times \mathbb{Z}_2$ 或 $\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$。若 $G \cong D_{14}, D_{16}, Q_{16}$ 或 QD_{16}，则由定理 2.3、推论 2.4 和推论 2.5 可得 $M_2(\Gamma(G))|e(\Gamma(G))| \geq M_1(\Gamma(G))|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{N}C(G)$。~~若 $G \cong \mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$，~~则 G 是阶为 pq 的群，其中 p 和 q 是满足 $p|q-1$ 的素数。因此，由定理 2.14 可得 $M_2(\Gamma(G))|e(\Gamma(G))| \geq M_1(\Gamma(G))|v(\Gamma(G))|$，其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{N}C(G)$。

注意，$D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1}\rangle$ 是一个阿贝尔中心化子群，其中心为 $Z(D_6) = \{1\}$，而 $C_{D_6}(a) = \{1, a, a^2\}$、$C_{D_6}(ab) = \{1, ab\}$、$C_{D_6}(a^2b) = \{1, a^2b\}$ 和 $C_{D_6}(b) = \{1, b\}$ 是其非中心元素的不同的中心化子。因此，$D_6 \times \mathbb{Z}_3$ 也是一个阿贝尔中心化子群，其中心为 $Z(D_6 \times \mathbb{Z}_3) = \{1, a^2\} \times \mathbb{Z}_3$，而 $\{1, a, a^2\} \times \mathbb{Z}_3$、$\{1, ab\} \times \mathbb{Z}_3$、$\{1, a^2b\} \times \mathbb{Z}_3$ 和 $\{1, b\} \times \mathbb{Z}_3$ 是 $D_6 \times \mathbb{Z}_3$的非中心元素的不同的中心化子。因此，若 $G \cong D_6 \times \mathbb{Z}_3$，则由 [11], 的引理 2.1 可得 $C(G) = K_6 \sqcup 3K_3$。因此，$|v(C(G))| = 15$，$|e(C(G))| = 24$，$M_1(C(G)) = 6\cdot(6-1)^2 + 3\cdot 3(3-1)^2 = 186$ 以及 $M_2(C(G)) = 6\cdot(6-1)_2^3 + 3\cdot 3(3-1)_2^3 = 411$。因此，

$$\frac{M_2(C(G))}{|e(C(G))|} = 17.125 > 12.4 = \frac{M_1(C(G))}{|v(C(G))|}.$$

此外，$|e(\mathcal{N}C(G))| = 81$，$M_1(\mathcal{N}C(G)) = 15(15-1)^2 - 4\cdot 24(15-1) + 186 = 1782$ 以及 $M_2(\mathcal{N}C(G)) = 15(15-1)_2^3 + 2\cdot 24^2 - 3\cdot 24(15-1)^2 + (15 - \frac{3}{2})186 - 411 = 9720$。因此，

$$\frac{M_2(\mathcal{N}C(G))}{|e(\mathcal{N}C(G))|} = 120 > 118.8 = \frac{M_1(\mathcal{N}C(G))}{|v(\mathcal{N}C(G))|}.$$

我们有 $A_4 = \langle a, b : a^2 = b^3 = (ab)^3 = 1\rangle$ 是一个以 $Z(A_4) = \{1\}$ 为中心的阿贝尔中心化子群，并且 $C_{A_4}(a) = \{1, a, bab^2, b^2ab\}$、$C_{A_4}(ab) = \{1, ab, b^2a\}$、$C_{A_4}(aba) = \{1, aba, bab\}$、$C_{A_4}(b) = \{1, b, b^2\}$ 以及 $C_{A_4}(ba) = \{1, ba, ab^2\}$ 是其非中心元素的不同的中心化子。因此，$A_4 \times \mathbb{Z}_2$ 也是一个以 $Z(A_4 \times \mathbb{Z}_2) = \{1\} \times \mathbb{Z}_2$为中心的阿贝尔中心化子群，并且 $\{1, a, bab^2, b^2ab\} \times \mathbb{Z}_2$、$\{1, ab, b^2a\} \times \mathbb{Z}_2$、$\{1, aba, bab\} \times \mathbb{Z}_2$、$\{1, b, b^2\} \times \mathbb{Z}_2$ 以及 $\{1, ba, ab^2\} \times \mathbb{Z}_2$ 是 $A_4 \times \mathbb{Z}_2$的非中心元素的不同的中心化子。因此，若 $G \cong A_4 \times \mathbb{Z}_2$，则由 [11], 的引理 2.1 可得 $C(G) = K_6 \sqcup 4K_4$。由此，$|v(C(G))| = 22$、$|e(C(G))| =$

39,$M_1(C(G)) = 6 \cdot (6-1)^2 + 4 \cdot 4(4-1)^2 = 294$ 以及 $M_2(C(G)) = 6\frac{\cdot(6-1)}{2}^3 + 4 \cdot \frac{4(4-1)}{2}^3 = 591$。因此,

$$\frac{M_2(C(G))}{|e(C(G))|} = \frac{197}{13} > \frac{147}{11} = \frac{M_1(C(G))}{|v(C(G))|}.$$

此外, $|e(\mathcal{N}C(G))| = 192$, $M_1(\mathcal{N}C(G)) = 22(22-1)^2 - 4\cdot 39(22-1) + 294 = 6720$ 和 $M_2(\mathcal{N}C(G)) = \frac{22(22-1)}{2}^3 + 2 \cdot 39^2 - 3 \cdot 39(22-1)^2 + (22 - \frac{3}{2})294 - 591 = 58752$。因此,

$$\frac{M_2(\mathcal{N}C(G))}{|e(\mathcal{N}C(G))|} = 306 > \frac{3360}{11} = \frac{M_1(\mathcal{N}C(G))}{|v(\mathcal{N}C(G))|}.$$

这就完成了证明。 ■

定理3.5. 设 G 为有限非阿贝尔群。若 $\mathcal{N}C(G)$是平面图, 则 $M_2(\Gamma(G))|e(\Gamma(G))| \geq M_1(\Gamma(G))|v(\Gamma(G))|$, 其中 $\Gamma(G) = C(G)$ 或 $\mathcal{N}C(G)$。

证明。如果 $\mathcal{N}C(G)$ 是平面图, 则根据 [1] 的命题2.3, 我们有G 同构于 D_6, D_8 或Q_8。在上述任一情形下, 我们得到 $M_2(\Gamma(G))|e(\Gamma(G))| \geq M_1(\Gamma(G))|v(\Gamma(G))|$, 其中$\Gamma(G) = C(G)$或 $\mathcal{N}C(G)$, 由定理 2.3 和推论 2.4 得出。■

我们以如下推论结束本节。

推论 3.6. 设 G 为有限非阿贝尔群。

(a) 若 $C(G)$ 是平面的, 则 $M_1(C(G)) \in \{2, 6, 20, 36, 42, 86, 96, 108, 150, 296\}$, $M_2(C(G)) \in \{1, 3, 16, 54, 57, 114, 115, 162, 219, 394\}$, $M_1(\mathcal{N}C(G)) \in \{66, 96, 420, 528, 768, 840, 4740, 7584, 9546, 184988\}$ 且 $M_2(\mathcal{N}C(G)) \in \{120, 192, 1440, 1920, 3672, 4608, 37440, 70464, 97320, 5223424\}$。

(b) 如果 $C(G)$是环面的, 那么$M_1(C(G)) \in \{150, 158, 164, 186, 294\}$, $M_2(C(G)) \in \{375, 379, 382, 411, 591\}$, $M_1(\mathcal{N}C(G)) \in \{1302, 1536, 1782, 6299, 6720\}$ 以及 $M_2(\mathcal{N}C(G)) \in \{6552, 8064, 9720, 58752, 76127\}$。

(c) 若 $\mathcal{N}C(G)$是平面的, 则$M_1(C(G)) \in \{2, 6\}$、$M_2(C(G)) \in \{1, 3\}$、$M_1(\mathcal{N}C(G)) \in \{66, 96\}$ 且 $M_2(\mathcal{N}C(G)) \in \{120, 192\}$。

4 结论性意见

正如注记2.1 中所提到的, 我们发现猜想 1.1对若干族有限群的交换图和非交换图成立。在第3 节中, 我们发现当一个有限群满足某些条件时, 其交换图和非交换图也满足猜想 1.1。

此外, 利用以下 GAP程序, 我们发现, 阶不超过 1000 的有限非阿贝尔群的交换图和非交换图满足猜想 1.1。

```
LoadPackage("grape");
ComGraph:=function(G)
local vert,rel;
```

```
    ifIsAbelian(G) thenError("群必须是非阿贝尔群"); fi; vert:=
  Difference(G,Center(G)); rel:={x,y}->x<>y and x*y=y*x;
  returnGraph(Group(()),vert,{x,g}->x,rel,true); end;


HVCon:=function(Gr) local M1,M2,Grc; M1:=Sum(Vertices(Gr),v->
VertexDegree(Gr,v)^2)/Size(Vertices(Gr)); M2:=Sum(UndirectedEdges(Gr), e->
VertexDegree(Gr,e[1])*VertexDegree(Gr,e[2]))/Size(UndirectedEdges(Gr)); if
M2<M1 then return false; fi; Grc:=ComplementGraph(Gr); M1:=
Sum(Vertices(Grc),v->VertexDegree(Grc,v)^2)/Size(Vertices(Grc)); M2:=
Sum(UndirectedEdges(Grc),e->VertexDegree(Grc,e[1])*VertexDegree(Grc,e[2]))/
Size(UndirectedEdges(Grc)); if M2<M1 then return false; elsereturntrue; fi;
end; for din [1..1000] do Print(d,"\n"); for id in [1..NrSmallGroups(d)] do
G:=SmallGroup(d,id); if not IsAbelian(G) and not HVCon(ComGraph(G)) then
Print("found",[d,id],"\n"); fi; od; od; In
```

view of 上面的 d i 讨论 ion, 我们共同 ncl ude t hi s pape r with the following con jectu re.

猜想 4.1. 设 G 为有限非阿贝尔群。若 Γ(G) 表示 G 的交换图或非交换图，则

$$\frac{M_2(\Gamma(G))}{|e(\Gamma(G))|} \geq \frac{M_1(\Gamma(G))}{|v(\Gamma(G))|}.$$

致谢

第一作者感谢科学与工业研究委员会提供的奖学金（文件编号：09/0796(16521)/2023-E MR-I）。作者谨向BenjaminSambale、德国汉诺威 30167 莱布尼茨大学代数、数论与离散数学研究所（f¨ur；Universit¨at Hannover）表示感谢，感谢他协助编写 GAP 代码。

参考文献

[1] Abdollahi, A., Akbari, S. 与 Maimani, H. R. 群的非交换图, 《代数杂志》, 298(2), 468–492, 2006.[2] Abdollahi, A., Jafarain, S. M. 与 Hassanabadi, A. M. 具有特定中心化子个数的群, 《休斯顿数学杂志》, 33(1), 43–57, 2007.[3] Afkhami, M., Farrokhi, D. G. M. 与 Khashyarmanesh, K. 平面、环面与射影交换图和非交换图, 《代数通讯》, 43(7), 2964–2970, 2015.[4] Ashrafi, A. R. 关于具有给定中心化子个数的有限群, 《代数集刊》, 7(2), 139–146, 2000.[5] Belcastro, S. M. 与 Sherman, G. J. 有限群中中心化子的计数, 《数学杂志》, 67(5), 366–374, 1994.[6] Brauer, R. 与 Fowler, K. A. 关于偶阶群, 《数学年刊》, 62(2), 565–583, 1955.[7] Das, K. C., Gutman, I. 第二 Zagreb 指数的若干性质, MATCH 数学与计算机化学通讯, 52, 103–112, 2004.[8] Das, S. 与 Nath, R. K. 其交换共轭类图满足 Hansen-Vukiˇcevi´c 猜想的某些有限群, 预印本.[9] Das, K. C., Xu, K. 与 Nam, J. 图的 Zagreb 指数, 《中国数学前沿》, 10(3), 567–582, 2014.[10] Dutta, P., Bagchi, B. 与 Nath, R. K. 有限非阿贝尔群的交换图的各种能量, 《海亚姆数学杂志》, 6(1), 27–45, 2020.[11] Dutta, J. 与 Nath, R. K. 若干类有限群的交换图的谱, Matematika, 33(1), 87–95, 2017.[12] Dutta, J. 与 Nath, R. K. 交换图为整图的有限群, Matematiˇcki Vesnik, 69(3), 226–230, 2017.[13] Dutta, J. 与 Nath, R. K. 有限群的交换图的拉普拉斯谱与无符号拉普拉斯谱, 《海亚姆数学杂志》, 4(1), 77–87, 2018.[14] Dutta, P. 与 Nath, R. K. 若干超整群的交换图的各种能量, 《印度纯粹与应用数学杂志》, 52(1), 1–10, 2021.[15] Fasfous, W. N. T., Sharafdini, R. 与 Nath, R. K. 有限群的交换图的公共邻域谱, 《代数与离散数学》, 32(1), 33–48, 2021.

[16] Gutman,I. 和Das, K. C.《第一Zagreb指数》发表30 年后，MATCH 数学与计算机化学通讯，50，83–92，2004。[17] Gutman,I. 和Trinajst´c, N. 交替烃的总 π-电子能，《化学物理快报》，17，535–538，1972。[18] Hansen, P. 和 Vuki˘cevi´c, D. Zagreb 指数的比较，《克罗地亚化学学报》，80(2)，165–168，2007。[19] Liu, B. 关于比较 Zagreb指数的一个猜想，《Randic 指数理论的最新成果》，克拉古耶瓦茨大学，克拉古耶瓦茨，第 205–209 页，2008。[20] Liu, B. 和 You, Z.关于比较 Zagreb 指数的综述，MATCH 数学与计算机化学通讯，65，581–593，2011。[21] MacHale, D. 一个非交换群能够有多大程度上满足交换性？，《数学公报》，58，199–202，1974。[22]Mirzargar, M. 和Ashrafi,A. 非交换图的若干基于距离的拓扑指数，《哈杰特佩数学与统计学杂志》，41(4)，515–526，2012。[23] Nath, R. K. 一类有限群的交换度及其推论，《澳大利亚数学学会通报》，88(3)，448–452，2013。[24] Nath, R. K.、Fasfous, W.N.T.、Das, K. C. 和 Shang, Y. 有限群交换图的公共邻域能，《Symmetry》，13(9)，1651（12 页），2021。[25] Neumann,B.H.关于 PaulErd˝os的群问题，《澳大利亚数学学会杂志》，21(4)，467–472，1976。[26] Nikoli´c, S.、Kova˘cevi´c, G.、AnteMili˘cevi´c 和Trinajsti´c, N.Zagreb指数发表30年后，《克罗地亚化学学报》，76(2)，113–124，2003。[27] Rusin,D. J.有限群的两个元素交换的概率是多少？，《太平洋数学杂志》，82(1)，237–247，1979。[28] Salahshour, M. A. 当 $G\,Z(G) \cong D_{2n}$ 时的交换共轭类图，《数学跨学科研究》，1（2020），379-385。[29] Salahshour,M. A. 和Ashrafi,A.R. 有限群的交换共轭类图，《代数结构及其应用杂志》，7(2)（2020），135-145。[30] Salahshour, M.A. 和 Ashrafi,A.R. 有限 CA 群的交换共轭类图，《海亚姆数学杂志》，6(1)（2020），108-118。[31] Sharafdini,R.、Nath,R. K. 和 Darbandi, R.有限 AC群的交换图的能，《Proyecciones 数学杂志》，41(1)，263–273，2022。

[32]Vukičević，D.和Graovac，A. 比较无环分子的 ZagrebM_1 和 M_2 指数。MATCH数学与计算机化学通讯，57(3)，587–590，2007。[33] Vukičević，D.、Gutman，I.、Furtula，B.、Andova，V. 和Dimitrov，D.关于比较Zagreb指数的一些观察，MATCH数学与计算机化学通讯，66，627–645，2011。[34] Wiener，H.石蜡沸点的结构测定，《美国化学学会志》69，17–20，1947。[35] GAP 群，《GAP – 群、算法与编程》，4.12.2 版；2022，（https://www.gap-system.org）。