arXiv:2304.02237v1 [math.AP] 5 Apr 2023

单位圆盘中的快速旋转涡量

YUCHEN WANG[1,2]

Abstract. 本文在单位圆盘中获得了具有充分大角速度的匀速旋转涡量。该解由以下两种情形之一构成：一个高度集中于原点附近的小型近椭圆涡斑，或一种 $2+1$ 构型，其中另外两个涡旋分量非常接近流体区域边界。总涡量是预先给定的，并且涡旋区域的大小不必按相同的阶趋于零。

基于扰动论证的构造展示了这种高度旋转流体中的一个微妙的多尺度现象。

关键词：旋转涡斑；Kirchhoff椭圆斑块；集中涡量；共形映射；罗宾函数

1. 引言

考虑单位圆盘 $D := \{x \in \mathbf{R}^2 | \ |x| \leq 1\}$ 内满足滑移边界条件的二维不可压缩欧拉方程

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p, & x \in D, \\ \nabla \cdot u = 0, & \\ u \cdot \mathbf{N} = 0, & x \in S^1, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $u = (u^1, u^2)^t$ 是流体的速度， p 是压力，$\mathbf{N}$ 表示 ∂D 的单位外法向量。在较弱的光滑性条件下，等价地可以采用二维不可压缩欧拉方程的涡量形式

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0 \tag{1.2}$$

其涡量场为 $\omega := \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1$。这是一个众所周知的封闭偏微分方程组，对经典解而言具有整体适定性。尤多维奇于 [26] 得到了弱解 $\omega \in L^\infty(D)$ 的整体适定性。

特别关注如下形式的涡斑： $\omega = \lambda \mathrm{I}_K$ ，其中 λ 是非零常数， K 是有界区域，I 是特征函数。显然，根据尤多维奇的结果，涡斑在整个时间范围内定义了唯一的二维欧拉流。由于根据 (1.2)，涡量仅由欧拉流输运，因此涡斑的演化

本项目部分获国家自然科学基金（编号：11831009）及湖北省科学技术创新专项资金资助。

实际上就是由下式给出的涡旋区域的边界动力学:

$$\partial_t z(s,t)\cdot \mathbf{n} = u\left(z(s,t),t\right)\cdot \mathbf{n}, \quad s\in S^1, \tag{1.3}$$

其中， $z(s,t)$ 是 $\partial K(t)$ 的弧长参数化，n 表示 $\partial K(t)$ 的单位外法向量。该方程具有高度非线性和非局部性，因此其动力学行为将十分丰富。另一方面，只要初始数据 $\partial K(0) \in C^{k,\alpha}(S^1)$，$k\in\mathbb{N}, 0<\alpha<1$，Chemin 就在 [9] 中证明了涡斑的整体正则性，即排除了有限时间爆破的情形。Bertozzi 和 Constantin 在 [1] 中给出了另一种证明。

涡块动力学的核心问题是研究长时间动力学。作为第一步，充分理解方程 (1.3) 稳态的结构至关重要。由于具有 $SO(2)$ 不变性，我们将重点研究匀速旋转涡量或相对平衡，而非绝对平衡。

定义 1.1。设 ω_0 为初始数据。若满足以下条件，则称 ω 为匀速旋转涡量

$$\omega(t,x) = \omega_0(e^{-it\Omega}x), \quad x\in D, \tag{1.4}$$

该条件对某个角速度 $\Omega\in\mathbb{R}$ 成立。

显然，若涡斑 $\omega=\lambda\mathbf{I}_K$，则其为匀速旋转涡斑，当

$$-\Omega z^{\perp}\cdot\mathbf{n} = \partial_t z\cdot\mathbf{n} = u\cdot\mathbf{n}, \quad z\in\partial K(t), \quad x^{\perp}:=(x_2,-x_1), \tag{1.5}$$

而这完全由初始数据决定。显然，包括圆形涡块和环形涡块在内的径向解，对于任意 $\Omega\in\mathbb{R}$ 都是匀速旋转涡斑。通过仔细研究平凡涡斑上的线性化，借助局部分岔论证，在整个平面上得到了许多 m重非平凡旋转涡斑 [10], 例如参见 [3, 16, 13, 3] 及其中的参考文献。在单位圆盘中，de la Hoz、Hassainia、Hmidi 和 Mateu 在 [12]中得到了从圆形/环形涡斑出发的局部分岔曲线。

另一方面，在整个平面上还有另一种显式的非平凡旋转涡斑，称为基尔霍夫椭圆涡斑

$$\omega=\lambda\mathbf{I}_{E_{a,b}}, \text{ where } E_{a,b}:=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\Big|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}.$$

它以角速度 $0<\Omega=\frac{\lambda ab}{(a+b)^2}\le\frac{\lambda}{4}$ 旋转。众所周知，当 $b/a>\frac{1}{3}$ 时，基尔霍夫椭圆涡斑是线性稳定的；而当 $b/a<\frac{1}{3}$ 时，会出现不稳定模态并呈指数增长。Hmidi 和 Mateu [15]，以及 Castro、C´ordoba 和 G´omez-Serrano 在 [8] 得到了一个单重对称匀速旋转涡斑族，它在临界比值 $b/a=\frac{1}{3}$ 处从基尔霍夫椭圆涡斑分岔而来。注意，基尔霍夫椭圆斑块位于从圆盘出发的二重分岔分支上。这些结果证实了二次分岔的存在。

另一方面，随着流体区域的对称性降低，迄今为止还没有已知的显式平凡解满足(1.2)。为了构造稳态涡量，一种称为去奇异化的替代方法得到了广泛应用。其核心是基尔霍夫提出的著名涡点模型，该模型用于近似描述集中涡量的演化。关于涡点模型有效性的严格数学证明可见专著 [19]。注意，涡点系统是二维欧拉方程的有限维近似。一个关键观察是，稳态涡量会在稳态涡点构型附近持续存在。过去几十年中，人们发展了若干方法，例如奇异扰动论证 [25, 18], 、奇异扰动椭圆方程 [4, 5, 21] 和变分方法 [22, 7, 6, 23]。这些论文中构造的涡旋区域都是小圆盘的扰动。

本文获得了一类不同的旋转涡斑。它们高度集中于原点或流体区域边界附近，并且每个涡旋分量都具有非零的总涡量。它们表现为位于原点附近的近似椭圆涡斑，驱动流体快速旋转。更具体地说，我们首先考虑单连通涡斑。第一个结果如下所述

定理 1.2. 假设 $0 < Q < \frac{1}{2}$ 和 $s > \frac{3}{2}$。存在 $\epsilon_0 > 0$，使得对于任意$0 < \epsilon < \epsilon_0$，存在一族单重对称匀速旋转涡斑 $\omega = \frac{1}{\pi\epsilon^2}\mathbf{I}_K$，其角速度为 $\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon^2}(1 - Q^2)$，并具有给定的总涡量 $\int_D \omega = 1 - Q^2$。该涡斑集中于原点附近，并且 $\partial\left(\epsilon^{-1}K\right)$ 是一条 $O(\epsilon^2)$椭圆曲线扰动所得到的 H^s 闭曲线

$$\mathbf{S}_Q := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ \big| \frac{x^2}{(1+Q)^2} + \frac{y^2}{(1-Q)^2} = 1\}. \tag{1.6}$$

在 $H^s(S^1)$ 拓扑中。

注 1.3. 一个值得研究的问题是，这个近似椭圆形的涡斑是否位于由具有预设总涡量的小型兰金涡发出的分岔曲线上。我们认为，归一化边界 $\partial\left(\epsilon^{-1}K\right)$ 应当是超越的，而非代数的。

注 1.4. 旋转涡斑的线性/非线性（不）稳定性可以通过对整个平面上的情形 [24, 14] 进行略微修改而得到。关于旋转涡斑局部动力学的详细分析将在后续论文中给出。

如果涉及另一个涡旋区域，情况则更加微妙。一方面，很难预期一个偏离圆盘较远的涡旋区域在其位置远离原点时仍能保持稳态。另一方面，由于总涡量是预先给定的，一个小型基尔霍夫椭圆涡斑会高速旋转，因此另一个涡旋区域的位置将非常接近流体区域边界。

定理 1.5。假设 $0 < Q < \frac{1}{2}$、 $s > \frac{3}{2}$ 和 $\mu > 0$。存在 $\epsilon_0 > 0$，使得对于$\vec{r} = (r_0, r_1, r_2) \in \mathbf{R}^3_+$，其中 $|\vec{r}| < \epsilon_0$，且 r_1、$r_2 < \frac{r_0^2}{2}$，存在一族匀速

旋转涡量

$$\omega = \frac{1}{\pi r_0^2}\mathbf{I}_{D_0} + \omega_1 + \omega_2$$

以角速度 $\Omega = \frac{1-Q^2}{4\pi r_0^2} + \frac{\mu}{4\pi}$旋转，其中 $|D_0| = \pi r_0^2(1-Q^2)$ 和满足 (4.2) 的 ω_j 可以是分段常数涡斑或利普希茨连续涡量。此外， $\partial(r_0^{-1}D_0)$ 是椭圆曲线 S^Q 的一个 $O(r_0^2)$ 扰动，并且对于 $j = 1$，每个 $r_j^{-1}D_j$ 都是圆盘 B_1 在 H^s-拓扑下的一个 $O(|r_j|r_0)$ 扰动；2. 涡旋区域 D_j与流体区域边界之间的距离满足

$$d(D_j, \partial D) = \frac{2\mu}{1-Q^2}r_0^2 + O(r_0^4), \quad j = 1, 2.$$

注 1.6. 涡旋分量 ω_j 既不对称，也不具有相同的数量级，例如 $\omega_1 = \frac{\mu}{\pi r_j^2}\mathbf{I}_{D_1}$ 是一个涡斑，而 $\omega_2 = \omega_2(x)\mathbf{I}_{D_2} \in C^{0,\,1}(D)$，其中 $\int_{D_2}\omega_2 = \mu_\circ$ 额外涡旋分量的存在使角速度略微加快了一个 $O(1)$ 阶的项。条件 $\max\{r_1, r_2\} < \frac{r_0^2}{2}$旨在避免涡旋区域与边界发生碰撞。

本文结构安排如下。第2节介绍必要的背景知识，包括稳态和共形映射参数化。第3节研究快速旋转的单连通涡斑，并证明定理 1.2。第4节证明定理 1.5，该定理涉及具有多个涡旋分量的匀速旋转涡量。

2. Preliminaries

不可压缩条件以及流体区域的单连通性保证存在一个全局定义且唯一的流函数

$$-\Delta\Psi = \omega \ \text{ in } D, \quad \Psi = 0 \ \text{ on } \partial D, \tag{2.1}$$

使得 $u = \nabla^\perp\Psi$。因此，流函数可明确表示为

$$\Psi(x,t) = \int_D G_D(x,y)\omega(y,t)d\mu(y), \tag{2.2}$$

以及速度

$$u(x,t) = \nabla^\perp\Psi = \int_D \nabla_x^\perp G_D(x,y)\omega(y,t)d\mu(y), \tag{2.3}$$

其中， $d\mu$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 上的欧几里得勒贝格测度，且

$$G_D(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log|x-y| + \frac{1}{2\pi}\log\left||y|\left(x - \frac{y}{|y|^2}\right)\right|, \ x, y \in D, \tag{2.4}$$

表示单位圆盘的狄利克雷格林函数。

对于涡斑 $\omega = \lambda \mathrm{I}_K$，速度可由轮廓积分公式表示。事实上，将其视为复变量 $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ 的复值函数 $u = u^1(x_1, x_2) + iu^2(x_1, x_2)$，根据斯托克斯定理，有

$$\begin{aligned}\overline{u(z,t)} &= -\frac{i\lambda}{2\pi}\int_K \frac{1}{z-\xi}d\mu_\xi - \frac{i\lambda}{2\pi}\int_K \frac{\overline{\xi}}{1-z\overline{\xi}}d\mu_\xi \\ &= \frac{\lambda}{4\pi}\int_K \frac{1}{\xi - z}d\overline{\xi}\wedge d\xi + \frac{\lambda}{4\pi}\int_K \frac{\overline{\xi}}{1-z\overline{\xi}}d\xi\wedge d\overline{\xi} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi}\int_{\partial K}\frac{\overline{\xi}-\overline{z}}{\xi - z}d\xi - \frac{\lambda}{4\pi}\overline{\int_K \partial_{\overline{\xi}}\left(\frac{|\xi|^2}{1-\overline{z}\xi}d\xi\right)} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi}\int_{\partial K}\frac{\overline{\xi}-\overline{z}}{\xi - z}d\xi - \frac{\lambda}{4\pi}\int_{\partial K}\frac{|\xi|^2}{1-\overline{z}\xi}d\xi.\end{aligned} \tag{2.5}$$

回顾复域 $a\cdot b = \mathrm{Re}(\overline{a}b) = \mathrm{Im}(i\overline{a}b)$ 上的内积。(1.5) 意味着，如果 $\omega = \lambda \mathrm{I}_K$ 是一个匀速旋转涡斑，那么

$$\mathrm{Im}(i\overline{u}\mathbf{n}) = \mathrm{Im}(\Omega\overline{z}\mathbf{n}), \tag{2.6}$$

其中，\(n\) 表示 \(\partial K\) 的单位外法向量。将公式 (2.5) 代入 (2.6)，等价于 \(\partial K \) 是非线性泛函的零点。

$$\mathrm{Im}\left((2\Omega\overline{z} + I(z))\mathbf{n}\right) = 0,\ \forall z \in \partial K, \tag{2.7}$$

其中

$$I(z) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{\overline{\xi - z}}{\xi - z}d\xi - \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{|\xi|^2}{1-\overline{z}\xi}d\xi.$$

为了在适当的分析框架下表述该问题，我们采用未知区域的共形映射参数化。假设 ϵ 是一个较小的给定参数，$\epsilon^{-1}K$ 是一个具有给定测度 $|K| = \epsilon^2\pi(1-Q^2)$ 的单连通有界区域，且该区域与椭圆相差不大。

$$\mathbf{E}_Q := \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \big| \frac{x^2}{(1+Q)^2} + \frac{y^2}{(1-Q)^2} \le 1\},$$

在 H^s 拓扑意义下的边界扰动。根据黎曼映射定理，外部区域之间存在唯一的共形映射

$$\Phi(z) = A\epsilon\left(z + \frac{Q}{z} + \sum_{n\ge 2}\frac{B_n}{z^n}\right):\ \mathbf{R}^2\setminus D \to \mathbf{R}^2\setminus K,\quad \Phi(\infty) = \infty,\ A > 0, \tag{2.8}$$

以及由于 S^1-不变性而得到的 $B_n \in \mathbf{R}$。我们注意到，$\Phi(z)$ 由单位圆盘上迹的实部唯一确定

$$\phi(\theta) = \sum_{n\ge 2} B_n \cos n\theta \in \dot{H}^s(S^1),\quad s > \frac{3}{2}. \tag{2.9}$$

但相差一个希尔伯特变换，并且

$$A=\frac{(1-Q^2)}{(1-Q^2)-\left(\sum_{n\geq 2}nB_n^2\right)}=\frac{(1-Q^2)}{(1-Q^2)-\frac{1}{2\pi}\|\phi\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(S^1)}}. \tag{2.10}$$

这可由闭曲线所围成的面积这一事实得出。

$$\partial K=(x_1(\theta),x_2(\theta))=\left(\mathrm{Re}\Phi(e^{i\theta}),\mathrm{Im}\Phi(e^{i\theta})\right),\ \theta\in S^1$$

由下式给出

$$\pi(1-Q^2)=|K|=\frac{1}{2}\int_{S^1}\left(x_1(\theta)x_2'(\theta)-x_1'(\theta)x_2(\theta)\right)d\theta.$$

为简洁起见，除非另有说明，$\phi(z)=\sum_{n\geq 2}\frac{B_n}{z^n}$也用于表示复函数。

如果涉及更多涡旋分量，例如，

$$\omega=\omega_0\mathbf{I}_{D_0}+\omega_1(x)\mathbf{I}_{D_1}+\omega_2(x)\mathbf{I}_{D_2},$$

其中 ω_0是一个非零常数，且每个 $\omega_j\in C^\infty(D_j)\cap C^{0,1}(D)$，$j=1,2$ 的情况则更加微妙。首先，我们考虑相对流函数 $\psi=\Psi-\Omega_{\overline{2}}|x|^2$。与 [18], 中的引理 2.5 类似，我们有

引理 2.1. 假设 D_1,D_2互不相交且具有 H^s边界，$s>\frac{3}{2}$。对于$j=1,2$，假设 $-\Delta\psi=f_j(\psi)$ 在 D_j 上对某个 $f_j\in C^1$ 成立，且 ψ 沿 ∂D_0也为常数。那么 ω 是匀速旋转涡量。

我们希望将匀速旋转涡量的存在性问题归结为一个非线性泛函问题。由于对于近似圆盘形的涡旋区域，其位置和形状都是先验未知的，因此我们考虑以下共形映射参数化。

引理 2.2（ [18]中的引理 2.6）。设 $k\geq 2$ 为整数，且 $f\in C^k(\overline{D},\mathbb{C})$ 为共形映射，使得 $f|_{S^1}\in H^s(S^1,\mathbb{R})$，$s>k+\frac{1}{2}$。以及 $U=f(D)$。那么存在 $\alpha\in S^1$ 和 $c\in\mathbb{C}\cap D$，使得 $\partial_z f_1(c,\alpha,0)>0$ 且 $\partial_z^k f_1(c,\alpha,0)=0$，其中 $f_1(c,\alpha,z)=f\left(\alpha\frac{z+c}{1+\bar{c}z}\right)$。此外，若 $s>k+\frac{3}{2}$ 且共形映射 $f_0\in C^1(\overline{D})$ 满足

$$\partial_z^k f_0(0)=0,\quad |\partial_z^{k+1}f_0(0)|\neq k(k-1)|\partial_z^{k-1}f_0(0)| \tag{2.11}$$

那么，这样的（c，α）在 $C^1(\overline{D})$ 中关于 f 且在 f_0 附近是唯一的，并且 C^1。

设 $k=2$。每个满足以下条件的近似圆盘涡旋区域

$$|D_j|=\pi r_j^2,\mathrm{dist}(D_j)\leq 2.5r_j$$

都可以由一个局部唯一共形映射参数化

$$\Gamma(z)=x+a_1 r\left(z+\widetilde{\Gamma}(z)\right),\quad \widetilde{\Gamma}(z)=\sum_{n\geq 3}(A_n-iB_n)z^n, \tag{2.12}$$

其中，x 指定位置，$\widetilde{\Gamma}(z)$或等价地 $\beta(\theta)=\widetilde{\Gamma}(z)\big|_{S^1}$ 描述区域的形状，且 a_1 取决于 β，使得面积为 πr^2。更多详情请参见第4节。

3. Rapidly rotating simply-connected vortex patch

首先，我们聚焦于单连通涡斑。设 $0<Q<\frac{1}{2}$ 是一个给定参数， $0<\epsilon\ll 1-Q$ 是一个小参数。根据（2.6），我们考虑非线性泛函

$$\mathcal{F}(\epsilon\phi,\epsilon)(\theta):=\mathrm{Im}\left((2\Omega\overline{\Phi(z)}+I(\Phi(z)))\Phi'(z)z\right):X^s\to Y^{s-1} \tag{3.1}$$

其中 $\Omega=\frac{1-Q^2}{4\pi\epsilon^2}$，其中

$$X^s:=\{f\in\dot{H}^s(S^1)\ \big|\ f(\theta)=\sum_{n\geq 2}a_n\cos n\theta,\ a_n\in\mathbf{R}\},$$
$$Y^s:=\{f\in\dot{H}^s(S^1)\ \big|\ f(\theta)=\sum_{n\geq 1}b_n\sin n\theta,\ b_n\in\mathbf{R}\},$$

由于 S^1 不变性。受基尔霍夫椭圆涡斑的启发，我们希望得到面积为 $|K|=\pi\epsilon^2(1-Q^2)$ 的匀速旋转涡斑 $\omega=\frac{1}{\pi\epsilon^2}\mathrm{I}_K$，其中 $\epsilon^{-1}K$ 与 E_Q 相差不大。令

$$\Phi(z)=A\epsilon\left(z+\frac{Q}{z}+\epsilon\sum_{n\geq 2}\frac{B_n}{z^n}\right),\phi(z)=\sum_{n\geq 2}\frac{B_n}{z^n}. \tag{3.2}$$

非线性泛函 (3.1) 表示为

(3.3)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\epsilon\phi,\epsilon)=&\frac{A^2(1-Q^2)}{2\pi\epsilon}\mathrm{Im}\left(\overline{z+\frac{Q}{z}+\epsilon\phi(z)}\cdot(z-\frac{Q}{z}+\epsilon\phi'(z)z)\right)\\&+\frac{A^2}{2\pi^2\epsilon}\mathrm{Im}\left(-i\int_{S^1}\frac{\overline{\xi+\frac{Q}{\xi}-z-\frac{Q}{z}}+\epsilon(\overline{\phi(\xi)}-\overline{\phi(z)})}{\xi+\frac{Q}{\xi}-z-\frac{Q}{z}+\epsilon(\phi(\xi)-\phi(z))}(1-\frac{Q}{\xi^2}+\epsilon\phi'(\xi))d\xi\cdot(z-\frac{Q}{z}+\epsilon\phi'(z)z)\right)\\&-\frac{A^4\epsilon}{2\pi^2}\mathrm{Im}\left(-i\int_{S^1}\frac{|\xi+\frac{Q}{\xi}+\epsilon\phi(\xi)|^2}{1-A^2\epsilon^2(\xi+\frac{Q}{\xi}+\epsilon\phi(\xi))(z+\frac{Q}{z}+\epsilon\phi(z))}(1-\frac{Q}{\xi^2}+\epsilon\phi'(\xi))d\xi\cdot(z-\frac{Q}{z}+\epsilon\phi'(z)z)\right),\end{aligned}$$

根据 (2.10)， A 由 $\epsilon\phi$ 唯一确定。首先，我们讨论该泛函的正则性

引理 3.1. 设 $s>\frac{3}{2}$。假设 $\delta>0$ 是一个小量，且 $\mathrm{B}_{X^s,\delta}$ 是 X^s 中 0 的一个邻域，并且满足 $\|f\|_{X^s}<\delta$。那么非线性映射 $\mathcal{F}\in C^\infty\left(\mathrm{B}_{X^s,\delta}\times[0,\frac{1}{3})\ Y^{s-1}\right)$。证明。令

$$\psi(x,t)=\Psi(x,t)-\frac{\Omega}{2}|x|^2,\quad x\in D$$

是 $\omega=\frac{1}{\pi\epsilon^2}\mathrm{I}_K$ 的相对流函数。注意， $\mathcal{F}(\phi,\epsilon)$ 是 ψ 在涡旋区域 ∂K 边界上的切向导数，即

$$\mathcal{F}(\phi,\epsilon)=\frac{1}{|\partial_z\Phi(e^{i\theta})|}\partial_\theta\psi(\phi,\epsilon)(\theta).$$

考虑非线性泛函 $\psi(\varphi)(e^{i\theta})$ 关于 K 的边界变分的正则性是等价的。为此，我们考虑自由边界椭圆问题

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \frac{1}{\pi\epsilon^2}\mathbf{I}_K - \frac{1-Q^2}{2\pi\epsilon^2}, \\ \psi = f \text{ on } \partial K, \\ \psi = -\frac{1-Q^2}{8\pi\epsilon^2} \text{ on } \partial D. \end{cases} \tag{3.4}$$

显然， ψ在 K或 $D\setminus K$上是光滑的。标准椭圆正则性定理推出$\psi \in W^{2,\,p}(D)$，其中 $1 \le p < \infty$, 并且 $\psi \in C^{1,\,\alpha}$，这是由 Sobolev嵌入定理得到的。这意味着 ψ 两侧的法向导数应当相等，即

$$\mathbf{n}\cdot\nabla\left(\mathcal{H}_K(f) + \Delta_K^{-1}(\frac{1+Q^2}{2\pi\epsilon^2})\right) + \mathbf{n}\cdot\nabla\left(\mathcal{H}_{D\setminus K}(f) - \Delta_{D\setminus K}^{-1}(\frac{1-Q^2}{2\pi\epsilon^2})\right) = 0$$

其中 Δ_S 表示区域 S上的 Dirichlet拉普拉斯算子。这意味着

$$f = \left(\mathcal{N}_K + \mathcal{N}_{D\setminus K}\right)^{-1}\left(\mathbf{n}\cdot\nabla(\Delta_{D\setminus K}^{-1}(\frac{1-Q^2}{2\pi\epsilon^2}) - \Delta_K^{-1}(\frac{1+Q^2}{2\pi\epsilon^2}))\right)$$

因此， $\mathcal{F}(\phi,\epsilon)$的正则性可由 Dirichlet-Neumann算子的 C^∞ 正则性推出；关于边界变分的拉普拉斯算子是 C^∞ 光滑的，且算子 $\mathcal{N}_K + \mathcal{N}_{D\setminus K}$ 正定，参见 [20]的附录。□

另一个关键要素是对重新缩放后的 Kirchhoff椭圆斑块处的 $\mathcal{F}$ 进行线性化。

引理 3.2。设 $h(\theta) = \sum_{n\ge 2} B_n \cos n\theta \in X^s$。我们有

$$\mathcal{D}_\phi\mathcal{F}(0,0)h(\theta) = \sum_{n\ge 1} y_{n+1}\sin n\theta, \tag{3.5}$$

其中

$$\begin{aligned} y_2 &= -\frac{1}{2\pi}(1+Q)^2 B_2, \;\; y_3 = -\frac{2}{\pi}Q^2 B_3, \\ y_{n+1} &= \frac{1}{\pi}(\frac{1-Q^2}{2}n - 1 - Q^n)(B_{n+1} - QB_{n-1}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

此外，它是从 X^s 到 Y^{s-1} 的一个同构。

$$\frac{1-Q^2}{2}n - 1 - Q^n \neq 0, \quad \forall n \ge 3.$$

Pr 证明。记 $h(w)$ 为$= \sum_{n\ge 2}\frac{B_n}{w^n}$。根据 (3.3)，令 $\mathcal{F}(\epsilon\phi,\epsilon) = I_1 + I_2$其中

$$\begin{aligned} I_1(\epsilon\phi,\epsilon) := {} & \frac{A^2(1-Q^2)}{2\pi\epsilon}\mathrm{Im}\left(\overline{z + \frac{Q}{z} + \epsilon\phi(z)}\cdot(z - \frac{Q}{z} + \epsilon\phi'(z)z)\right) \\ & + \frac{A^2}{2\pi^2\epsilon}\mathrm{Im}\left(-i\int_{\mathbb{T}}\frac{\overline{\xi + \frac{Q}{\xi} - z - \frac{Q}{z}} + \epsilon(\overline{\phi(\xi)} - \overline{\phi(z)})}{\xi + \frac{Q}{\xi} - z - \frac{Q}{z} + \epsilon(\phi(\xi) - \phi(z))}(1 - \frac{Q}{\xi^2} + \epsilon\phi'(\xi))d\xi\cdot(z - \frac{Q}{z} + \epsilon\phi'(z)z)\right) \end{aligned}$$

$$I_2(\epsilon\phi,\epsilon):=-\frac{A^4\epsilon}{2\pi^2}\mathrm{Im}\bigg(-i\int_{\mathbb{T}}\frac{|\xi+\frac{Q}{\xi}+\epsilon\phi(\xi)|^2}{1-A^2\epsilon^2(\xi+\frac{Q}{\xi}+\epsilon\phi(\xi))(z+\frac{Q}{z}+\epsilon\phi(z))}(1-\frac{Q}{\xi^2}+\epsilon\phi'(\xi))d\xi$$
$$\cdot(z-\frac{Q}{z}+\epsilon\phi'(z)z)\bigg),$$

其中 $A(\epsilon\phi,\epsilon)=\frac{1-Q^2}{1-Q^2-\frac{\epsilon^2}{2\pi}\|\phi\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(S^1)}}$。不难验证，对于任意$h\in X^s$， $\mathcal{D}_\phi A(0,0)h=0$，因此在证明的其余部分只需令 $A=1$。另一方面，直接计算可得

$$\mathcal{D}_\phi I_2(0,0)h(\theta)=0,\quad \forall h\in X^s. \tag{3.7}$$

由于 ϵ 以线性项的形式存在于 $I_2(\epsilon\phi,\epsilon)$ 中，因此只需考虑 $I_1(\phi,\epsilon)$ 关于边界变分的线性化。我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\phi I_1(0,0)h(\theta)=&\frac{1-Q^2}{2\pi}\mathrm{Im}\left(\overline{z+\frac{Q}{z}}h(z)+\overline{h(z)}(z-\frac{Q}{z})\right)\\&+\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\left(-i\int_{S^1}\frac{\overline{\phi(\xi)}-\overline{\phi(z)}}{\xi+\frac{Q}{\xi}-z-\frac{Q}{z}}(1-\frac{Q}{\xi^2})d\xi\cdot(z-\frac{Q}{z})\right)\\&+\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\left(i\int_{S^1}\frac{\overline{\xi+\frac{Q}{\xi}-z-\frac{Q}{z}}}{(\xi+\frac{Q}{\xi}-z-\frac{Q}{z})^2}(1-\frac{Q}{\xi^2})(\overline{h(\xi)}-\overline{h(z)})d\xi\cdot(z-\frac{Q}{z})\right)\\&+\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\left(i\int_{S^1}\frac{\overline{\xi+\frac{Q}{\xi}-z-\frac{Q}{z}}}{\xi+\frac{Q}{\xi}-z-\frac{Q}{z}}h'(\xi)d\xi\cdot(z-\frac{Q}{z})\right)\\&+\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\left(i\int_{S^1}\frac{\overline{\xi+\frac{Q}{\xi}-z-\frac{Q}{z}}}{\xi+\frac{Q}{\xi}-z-\frac{Q}{z}}(1-\frac{Q}{\xi^2})d\xi\cdot h'(z)z\right),\quad \text{where } z=e^{i\theta}\end{aligned}$$

线性化公式确实可以由 [15] 的命题 2 推导得到，因此谱信息 (3.6) 也就直接成立。此外，令 $f_{n+1}=\frac{\pi}{\frac{1-Q^2}{2}n-1-Q^2}y_{n+1}$。由于
由 (3.6) 式可得

$$B_{n+1}=Q^{n-2}B_3+\sum_{0\le m\le n-3}Q^m f_{n+1-m}.$$

Th逆算子 $(\mathcal{D}_\phi I_1(0,0))^{-1}$ 的有界性： $Y^{s-1}\to X^s$ 由.....得出

$$\frac{1-Q^2}{2}n-1-Q^n\neq 0,\quad \forall n\ge 3.$$

证明完成了。 □

现在我们来证明定理 1.2。

定理 1.2 的证明。注意到有 $\mathcal{F}(0,0)=0$。令 $f(Q)=\frac{1-Q^2}{2}n-1-Q^n$。显然$Q=\frac{1}{2}, n=3$是 $f(Q)=0$的一个解。我们注意到，对于任意 $0<Q<\frac{1}{2}$, $f(Q)\neq 0$，对于任意$n\geq 3$。事实上，有

$$\frac{1-Q^2}{2}n-1-Q^n>\frac{3}{8}n-1-\left(\frac{1}{2}\right)^n>\frac{9}{8}-1-\left(\frac{1}{2}\right)^3=0$$

由于引理 3.2，我们有 $\mathcal{D}_\phi\mathcal{F}(0,0): X^s\to Y^{s-1}$ 是一个同构。对 $\mathcal{F}(\epsilon\phi,\epsilon)=0$ 应用隐函数定理，可知存在 $\epsilon_0>0$，使得对于任意 $0<\epsilon<\epsilon_0$，都有

$$\mathcal{F}(\epsilon\phi(\epsilon),\epsilon)=0.$$

这意味着 $\partial(\epsilon^{-1}K)$ 是缩放椭圆 E_Q 的一个 $O(\epsilon^2)$ 阶扰动。证明完成。□

4. Uniformly rotating vorticity with multiple vortical domains

在快速旋转的单连通涡斑存在的基础上，本节将继续构造具有多个涡旋分量的快速旋转涡斑。设 $0<Q<\frac{1}{2}$。如第 1 节所述，我们考虑涡量场

$$\omega=\frac{1}{\pi r_0^2}\mathbf{I}_{D_0}+\sum_{j=1}^{2}\omega_j, \tag{4.1}$$

其中 $|D_0|=\pi r_0^2(1-Q^2)$，且涡旋分量 ω_j 满足

$$\operatorname{supp}\omega_j=D_j,\ \mu:=\int_D\omega_j>0,\ |D_j|=\pi r_j^2,\ \operatorname{dist}(D_j)\leq 2.5r_j,\ j=1,2, \tag{4.2}$$

其中，$\vec{r}=(r_0,r_1,r_2)\in\mathbb{R}^3_+$ 是小参数。特别地，我们假设 $\max\{r_1,r_2\}<\frac{r_0^2}{2}$，因此 $|\vec{r}|:=\max\{r_0,r_1,r_2\}=r_0$。

流函数由下式给出

$$\Psi(x)=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_{D_0}G(x,y)d\mu_y+\sum_{j=1}^{2}\int_{D_j}G(x,y)\omega_j(y)d\mu_y. \tag{4.3}$$

因此，速度满足

$$u(x)=\nabla^\perp\Psi(x)=u_o(x)+u_e(x), \tag{4.4}$$

其中

$$u_o(x):=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_{D_0}\nabla_x^\perp G(x,y)d\mu(y),\quad u_e(x):=\sum_{j=1}^{2}\int_{D_j}\nabla_x^\perp G(x,y)\omega_j(y)d\mu(y).$$

由于 (2.5)， u_0 由轮廓积分公式给出。

$$\overline{u_o(z)}=\frac{1}{4\pi^2r_0^2}\int_{\partial D_0}\frac{\overline{\xi}-\overline{z}}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{4\pi^2r_0^2}\int_{\partial D_0}\frac{|\xi|^2}{1-\overline{z}\xi}d\xi. \tag{4.5}$$

By 引理 2.1， ω 是匀速旋转涡量，前提是满足以下条件。 :
(1) 相对流函数 $\psi = \Psi - \Omega_{\overline{2}}|x|^2$ 在每个涡旋区域 D_j 内满足 $-\Delta\psi = f_j(\psi)$，对应某些涡量分布 $f_j \in C^1, j = 1, 2$. (2) 涡斑 $\omega_0 = \frac{1}{\pi r_0^2}\mathbf{I}_{D_0}$ 满足

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}\left((2\Omega\overline{z} + I(z) + 2\overline{u_e})\,\mathbf{n}_0\right) = 0, \quad z \in \partial D_0, \\ &I(z) = \frac{1}{2\pi^2 r_0^2}\int_{\partial D_0}\frac{\overline{\xi}-\overline{z}}{\xi - z}d\xi - \frac{1}{2\pi^2 r_0^2}\int_{\partial D_0}\frac{|\xi|^2}{1-\overline{z}\xi}d\xi, \end{aligned} \tag{4.6}$$

其中，我们将 ∂D_0 的单位外法向量记为 $\mathbf{n}_0$。
本节其余部分，我们将主要关注涡斑的情形，即 $\omega_j = \frac{\kappa}{\pi r_j^2}\mathbf{I}_{D_j}, j = 1, 2$，并简要概述 $C^{0,1}$ 集中涡量情形下的证明。这是合理的，因为这两种分析的核心方面实际上都是涡量分量的位置。

4.1. 涡斑。假设 $\omega_j = \frac{\mu}{\pi r_j^2}\mathbf{I}_{D_j}, j = 1, 2$ 是分片常值涡斑，其总涡量为给定的 $\mu > 0$。如第 2 节所述，由于涡旋区域是主要的未知量，我们用共形映射对其进行参数化。

与第 3 节一样，我们通过共形映射 Γ_0 将 D_0 的外部区域参数化 ∂D_0，因此其边界 ∂D_0 表示为

$$\Gamma_0(z) = Ar_0\left(z + \frac{Q}{z} + \sum_{n\geq 2}\frac{B_n}{z^n}\right), \quad z := e^{i\theta} \in S^1, \tag{4.7}$$

它由下式唯一确定

$$\beta_0(\theta) = \sum_{n\geq 2} B_n \cos n\theta \in X^s \tag{4.8}$$

并且 A 依照式 (2.10) 依赖于 β_0。另一方面，对于涡旋区域 D_j、$j = 1$，令 $k = 2$ 取引理 2.2 中的值，可得涡旋区域 D_j 由共形映射唯一参数化

$$\Gamma_j(z) = x_j + a_1^j r_j\left(z + \widetilde{\Gamma}_j(z)\right), \quad j = 1, 2,$$

其中 Γ_j 描述区域 D_j 的形状，而 x_j 指定其位置。此外，由于 S^1-不变性，我们有 $\widetilde{\Gamma}_j(z) = \sum_{n\geq 3} A_n^j z^n$, $A_n^j \in \mathbb{R}$，它由下式唯一确定

$$\beta_j(\theta) \in Z_e^s := \left\{ f(\theta) = \sum_{n\geq 3} A_n \cos n\theta \in \dot{H}^s(S^1) \right\}, \tag{4.9}$$

并假设

$$x_1 = \left(1 - \frac{2\mu\pi}{1-Q^2}r_0^2(1 + r_0^2 y_1)\right), \quad x_2 = -\left(1 - \frac{2\mu\pi}{1-Q^2}r_0^2(1 + r_0^2 y_2)\right). \tag{4.10}$$

因为它们会相当接近边界。假设

$$W_o^s := \left\{ f(\theta) = \sum_{n\geq 2} A_n \sin n\theta \in H^s(S^1) \right\}.$$

令 $\vec{\beta} := (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$、 $Y := (y_1, y_2)$、 $\vec{r} = (r_0, r_1, r_2)$、 $M_{\vec{r}}\beta = (r_0\beta_0, r_1\beta_1, r_2\beta_2)$。受引理 2.1 和 (4.6) 的启发，我们考虑非线性泛函

$$\mathcal{F}\left(\vec{\beta}, Y, \vec{r}\right)(\theta) := (\mathcal{F}_0(\theta), \mathcal{F}_1(\theta), \mathcal{F}_2(\theta)) : X^s \times (Z_e^s)^2 \times \mathbf{R}_+^2 \times \mathbf{R}_+^3 \to Y^{s-1} \times (W_o^{s-1})^2,$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0(M_{\vec{r}}\beta, Y, \vec{r})(\theta) &:= \operatorname{Im}\left(\left(\Omega\overline{\Gamma_0(z)} + \frac{1}{2}I(\Gamma_0(z))\right)\frac{z\partial_z\Gamma_0(z)}{|\partial_z\Gamma_0(z)|}\right) \\ &+ \frac{1}{|\partial_z\Gamma_0(z)|}\partial_\theta\left(\sum_{j=1}^{2}\int_D \frac{\mu}{\pi r_j^2} G\left(\Gamma_0(z), \Gamma_j(y)\right)|\partial_z\Gamma_j(y)|^2 d\mu(y)\right), \quad z = e^{i\theta} \in S^1, \end{aligned} \tag{4.11}$$

and

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_j(M_{\vec{r}}\beta, Y, \vec{r})(\theta) := \\ &-\operatorname{Im}\left(\frac{1}{4\pi^2 r_0^2 i}\frac{z\partial_z\Gamma_j(z)}{|\partial_z\Gamma_j(z)|}\left(\int_{S^1}\frac{\overline{\Gamma_0(\xi)-\Gamma_j(z)}}{\Gamma_0(\xi)-\Gamma_j(z)}\partial_z\Gamma_0(\xi)d\xi - \int_{S^1}\frac{|\Gamma_0(\xi)|^2}{1-\overline{\Gamma_j(z)}\Gamma_0(\xi)}\partial_z\Gamma_0(\xi)d\xi\right)\right) \\ &+\frac{1}{|\partial_z\Gamma_j(z)|}\partial_\theta\left(\sum_{k=1}^{2}\frac{\mu}{\pi r_k^2}\int_D G(\Gamma_j(z),\Gamma_k(y))|\partial_z\Gamma_k(y)|^2 d\mu_y - \frac{\Omega}{2}|\Gamma_j(z)|^2\right), \quad z = e^{i\theta} \in S^1, j = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

与引理 3.1 类似，我们有

引理 4.1. 存在一个足够小的数 $\delta > 0$，使得非线性泛函 $\mathcal{F}(\vec{\beta}, X, ; \vec{r}) : B_{X^s\times(Z_e^s)^2,\delta} \times \mathbf{R}_+^2 \times [0, \frac{1}{3})^3 \to Y^{s-1} \times (W_o^{s-1})^2$ 是一个 C^∞ 映射。

记为

$$h_0(r_0\beta_0) := \mathrm{Im}\left(\left(\Omega\overline{\Gamma_0(z)} + \frac{1}{2}I(\Gamma_0(z))\right)\frac{z\partial_z\Gamma_0(z)}{|\partial_z\Gamma_0(z)|}\right),$$

$$H_0(\vec{\beta},Y,\vec{r}) = R_0(M_{\vec{r}}\beta,Y,\vec{r}) := \frac{1}{|\partial_z\Gamma_0(z)|}\partial_\theta\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{\mu}{\pi r_j^2}\int_D G(\Gamma_0(z),\Gamma_j(y))|\partial_z\Gamma_j(y)|^2 d\mu(y)\right),$$

$$h(r\beta)(\theta) := -\frac{\mu}{2\pi^2}\partial_\theta\int_D \log\left|\widetilde{\Gamma}(z)-\widetilde{\Gamma}(y)\right||1+\partial_z\widetilde{\Gamma}(z)|^2 d\mu_z,$$

$$\begin{aligned}H_j(\vec{\beta},Y,\vec{r}) = R_j(M_{\vec{r}}\beta,Y,\vec{r}) := -\mathrm{Im}\Bigg(&\frac{1}{4\pi^2 r_0^2 i}\frac{z\partial_z\Gamma_j(z)}{|\partial_z\Gamma_j(z)|}\Big(\int_{S^1}\frac{\overline{\Gamma_0(\xi)-\Gamma_j(z)}}{\Gamma_0(\xi)-\Gamma_j(z)}\partial_z\Gamma_0(\xi)d\xi\\ &-\int_{S^1}\frac{|\Gamma_0(\xi)|^2}{1-\overline{\Gamma_j(z)}\Gamma_0(\xi)}\partial_z\Gamma_0(\xi)d\xi\Big)\Bigg)\\ &+\frac{1}{|\partial_z\Gamma_j(z)|}\frac{\mu}{\pi r_j^2}\partial_\theta\left(\int_D g(\Gamma_j(z),\Gamma_j(y))|\partial_z\Gamma_j(y)|^2 d\mu_y - \frac{\Omega}{2}|\Gamma_j(z)|^2\right)\\ &+\frac{1}{|\partial_z\Gamma_j(z)|}\frac{\mu}{\pi r_j^2}\partial_\theta\left(\int_D G(\Gamma_j(z),\Gamma_k(y))|\partial_z\Gamma_k(y)|^2 d\mu_y\right),\ j=1,2,k\neq j.\end{aligned}$$

根据引理 3.2，若 $0<Q<\frac{1}{2}$，则 $\mathcal{D}h_0(0)$ 是一个从 X^s 到 Y^{s-1} 的同构。~另一方面，由于 $|1+\partial_z\Gamma_j(z)|$ 的变化线性依赖于 r_j，根据 [18], 的引理 3.1，可得

引理 4.2. 成立：$h\in C^\infty\left(B_{Z_e^s,\delta},W_o^{s-1}\right)$ 对于任意 $s>\frac{3}{2}$, $h(0)=0$和

$$\mathcal{D}h(0)\left(\sum_{n\geq 3}A_n\cos n\theta\right) = -\sum_{n\geq 2}\frac{n-1}{2\pi}A_{n+1}\sin n\theta. \tag{4.13}$$

另一方面，我们有

引理 4.3。 $H_j(\vec{\beta},Y,\vec{r})\in C^\infty\left(B_{X^s\times(Z_e^s)^2,\delta}\times\mathbb{R}_+^2\times[0,\frac{1}{3})^3,Y^{s-1}\times(W_o^{s-1})^2\right)$, $j=0,1,2$ 以及

$$H_0(\vec{\beta},Y,0) := \lim_{|\vec{r}|\to 0}R_0(M_{\vec{r}}\beta,Y,\vec{r}) = 0,\quad H_j(\vec{\beta},Y,0) := \lim_{|\vec{r}|\to 0}R_j(M_{\vec{r}}\beta,Y,\vec{r}) = \frac{1-Q^2}{4\pi^2\mu}y_j\sin\theta,\ \ j=1,2.$$

此外，记为 $\vec{H}=(H_1,H_2)^t$，则 $\mathcal{D}_Y\vec{H}(0,0,0)$ 可逆。

证明。注意到 $x_j=\pm(1-\frac{2\mu}{1-Q^2}r_0^2(1+r_0^2y_j))$。我们有 $x_j\to(\pm1,0)$ 作为 $\vec{r}\to 0$，这意味着 $\nabla_1G(x_j,x_k)=\nabla_1G(x_j,0)=0$，对于 $j\neq k$。于是有

$$H_0(\vec{\beta},Y,\vec{r}) = \frac{iz\partial_z\Gamma_0(z)}{|\partial_z\Gamma_0(z)|}\cdot\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{\mu}{\pi r_j^2}\int_D\nabla_1G(\Gamma_0(z),x_j+r_ja_1^j(z+\widetilde{\Gamma}_j(y)))r_j^2(a_1^j)^2r_j^2|1+\partial_z\widetilde{\Gamma}_j(y)|^2d\mu(y)\right).$$

由此可得

$$H_0(\vec{\beta}, Y, 0) = ie^{i\theta} \cdot \left(\sum_{j=1}^{2} \mu \nabla_1 G(0, x_j) \right) = 0.$$

另一方面，

注意到 $\Omega = \frac{1-Q^2}{4\pi r_0^2} + \frac{\mu}{4\pi}$，有的是

$$\begin{aligned}
H_j(0, Y, 0) &= \lim_{|\vec{r}|\to 0} (\mu \nabla_1 g(x_j, x_j) - \Omega x_j) \cdot ie^{i\theta} + \left(\mu \nabla_1 G(x_j, x_k) + (1-Q^2)\nabla_1 G(x_j, 0)\right) \cdot ie^{i\theta} \\
&= \lim_{|\vec{r}|\to 0} (\frac{\mu}{\pi(1-|x|^2)} - \Omega) x_j \cdot ie^{i\theta} \\
&= \lim_{|\vec{r}|\to 0} \left(\frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{\frac{2\mu}{1-Q^2} r_0^2} (1 - r_0^2 y_j)(1 + \frac{2\mu}{1-Q^2} \frac{r_0^2}{2}) - \Omega + O(r_0^2) \right) \cdot ie^{i\theta} \\
&= \lim_{|\vec{r}|\to 0} \left(\frac{1-Q^2}{4\pi} \frac{1}{r_0^2} (1 - r_0^2 y_j + \frac{2\mu}{1-Q^2} \frac{r_0^2}{2}) - \Omega + O(r_0^2) \right) \cdot ie^{i\theta} \\
&= \frac{1-Q^2}{4\pi} y_j \sin\theta.
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\mathcal{D}_Y \vec{H}(0,0,0) = \operatorname{diag}\left(\frac{1-Q^2}{4\pi^2} \sin\theta, \frac{1-Q^2}{4\pi^2} \sin\theta \right)$$

□

我们现在可以证明涡斑情形下的定理 1.5。

证明。根据引理 3.2、引理 4.2 和引理 4.3，我们有

$$\mathcal{D}_{\vec{\beta}, Y} \mathcal{F}(0,0,0) \in L\left(X^s \times (Z_e^s)^2 \times \mathbf{R}_+^2, Y^{s-1} \times (W_o^{s-1})^2\right)$$

是一个同构，并且 $\mathcal{F}(0,0,0) = 0$。隐函数定理意味着存在 $\epsilon_0 > 0$，使得 $\mathcal{F}(\vec{\beta}(r)\ Y(r)\ r) = 0$，当 $|\vec{r}| < \epsilon_0$ 时。□

4.2. 集中的 $C^{0,\,1}$ 涡量。与涡斑情形相比，构造集中的 $C^{0,\,1}$ 旋转涡量的主要区别在于涡量剖面的选择。由于 D_j 接近一个圆盘，我们从 D_j上的半线性椭圆方程着手。对于每个 $j = 1$，取 2，使得 f_j

$$f_j \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}),\ \text{odd}, \qquad f_j'(0) < 0, \quad f_j(\tau) > 0 \text{ on } \mathbf{R}^-, \tag{4.14a}$$

$$\exists \text{一个负径向解 } \psi_j^*, \text{ 满足 } \Delta\psi_j = f_j(\psi_j), \text{ 且属于 } D, \qquad \psi_j|_{S^1} = 0, \tag{4.14b}$$

and

$$\Delta - f_j'(\psi_j^*) \text{ is non-degenerate.} \tag{4.14c}$$

更具体地说，(4.14c) 要求将 $\Delta - f_j'(\psi_j^*)$ 视为作用于$L^2(D)$ 上的自伴算子时，其谱中不包含 0；这当然是一个一般性条件。事实上，

满足 (4.14) 的 f_j 类相当广泛（例如参见 [2, 11, 17]）。

与第 5 节类似，我们获得 Lipschitz集中稳态涡量 的步骤大致如下:

步骤 1. 通过共形映射坐标 Γ_j，考虑椭圆问题

$$\Delta\widetilde{\psi} = |1+\partial_z\widetilde{\Gamma}_j|^2 f_j(\widetilde{\psi}), \qquad \widetilde{\psi}: D\to\mathbf{R}, \quad \widetilde{\psi}|_{S^1}=0. \tag{4.15}$$

根据隐函数定理，存在一个在 ψ_j^* 附近的唯一解 ψ_j，其所在空间为 $H^{s+\frac{3}{2}}(D)$ 拓扑。令

$$\psi_j = \frac{\mu\widetilde{\psi}_j\circ\Gamma_j^{-1}\mathbf{I}_{\Gamma_j(D)}}{\int_D|1+\partial_z\widetilde{\Gamma}_j|^2 f_j(\widetilde{\psi}_j)d\mu}, \quad \omega_j = \frac{\mu\mathbf{I}_{\Gamma_j(D)}f_j(\widetilde{\psi}_j\circ\Gamma_j^{-1})}{(a_1^j r_j)^2\int_D|1+\partial_z\widetilde{\Gamma}_j|^2 f_j(\widetilde{\psi}_j)d\mu}. \tag{4.16}$$

显然

$$\omega_j = \Delta\psi_j \ \text{ on } \ D_j=\Gamma_j(D)=supp(\omega_j), \quad \int_{D_j}\omega_j d\mu=\mu. \tag{4.17}$$

步骤 2. 定义

$$\omega = \frac{1}{\pi r_0^2}\mathbf{I}_{D_0}+\sum_{j=1}^2\omega_j, \text{ and } \Psi=\Delta^{-1}\omega \tag{4.18}$$

在 $\Delta\psi=\Delta\psi_j$ 上，D_j，$j=1$，2。对于 $|\vec{r}|<<\delta$，区域 D_j 互不相交。因此，如果在每个 ∂D_j 上都有 $\psi=const$，那么在每个 D_j 上都有 $\psi-\psi_j=const$，从而根据引理 2.1，ω 是欧拉方程的一个稳态解。因此，考虑

$$\mathcal{F}_j(M_{\vec{r}}\beta,Y,\vec{r})(\theta)=\frac{1}{|\partial_z\Gamma_j(z)|}\partial_\theta\Psi\big(\Gamma_j(e^{i\theta})\big) \tag{4.19}$$

$$\mathcal{F}_0(M_{\vec{r}}\beta,Y,\vec{r})(\theta):=\mathrm{Im}\left(\left(\Omega\overline{\Gamma_0(z)}+\frac{1}{2}I(\Gamma_0(z))\right)\frac{z\partial_z\Gamma_0(z)}{|\partial_z\Gamma_0(z)}\right)$$

$$+\frac{1}{|\partial_z\Gamma_0(z)|}\partial_\theta\left(\sum_{j=1}^2\int_D G\left(\Gamma_0(z),\Gamma_j(y)\right)(\omega_j\circ\Gamma_j)(y)|\partial_z\Gamma_j(y)|^2 d\mu(y)\right), \quad z=e^{i\theta}\in S^1.$$

等价地，我们有

引理4.4。如果 $\mathcal{F}(\vec{\beta},Y,\vec{r}):=(\mathcal{F}_0(M_{\vec{r}}\beta,Y,\vec{r})\ \mathcal{F}_1(M_{\vec{r}}\beta,Y,\vec{r})\ \mathcal{F}_2(M_{\vec{r}}\beta,Y,\vec{r}))\equiv 0$，则相应的 ω 是均匀旋转涡量。

上述条件将通过选择适当的 Y 和 $\vec{\beta}\in(X^s)\times(Z_e^s)^2$ 来实现，其方法是采用与第4.1小节类似的扰动论证。这里我们只需指出线性化方面的差异。

$$h_j(r_j\beta_j)=\frac{1}{|\partial_z\Gamma_j(z)|}\partial_\theta\left(\int_D\log|\widetilde{\Gamma}_j(z)-\widetilde{\Gamma}_j(y)|(\omega_j\circ\Gamma_j)(y)|\partial_z\Gamma_j(y)|^2 d\mu(y)\right).$$

引理 4.5。存在 $\delta > 0$ 使得

$$\mathcal{D}h_j(0)\left(\sum_{n\geq 3} A_n \cos n\theta\right) = \sum_{n\geq 2} n\lambda_{j,n} A_{n+1} \sin n\theta \tag{4.20}$$

其中 $\lambda_{j,n} \in \mathbb{R}$、$|\lambda_{j,n}| \geq \delta$。

另一方面，假设

$$H_0(\vec{\beta}, Y, \vec{r}) = R_0(M_{\vec{r}}\beta, Y, \vec{r}) := \frac{1}{|\partial_z \Gamma_0(z)|}\partial_\theta \left(\sum_{j=1}^{2}\int_D G(\Gamma_0(z), \Gamma_j(y))(\omega_j \circ \Gamma_j)(y)|\partial_z \Gamma_j(y)|^2 d\mu(y)\right),$$

$$\begin{aligned} H_j(\vec{\beta}, Y, \vec{r}) &= R_j(M_{\vec{r}}\beta, Y, \vec{r}) \\ &:= -\mathrm{Im}\left(\frac{1}{4\pi^2 r_0^2 i}\frac{z\partial_z \Gamma_j(z)}{|\partial_z \Gamma_j(z)|}\left(\int_{S^1}\frac{\overline{\Gamma_0(\xi) - \Gamma_j(z)}}{\Gamma_0(\xi) - \Gamma_j(z)}\partial_z \Gamma_0(\xi) d\xi - \int_{S^1}\frac{|\Gamma_0(\xi)|^2}{1 - \overline{\Gamma_j(z)}\Gamma_0(\xi)}\partial_z \Gamma_0(\xi) d\xi\right)\right) \\ &+ \frac{1}{|\partial_z \Gamma_j(z)|}\partial_\theta\left(\int_D g(\Gamma_j(z), \Gamma_j(y))(\omega_j \circ \Gamma_j)(y)|\partial_z \Gamma_j(y)|^2 d\mu_y - \frac{\Omega}{2}|\Gamma_j(z)|^2\right) \\ &+ \frac{1}{|\partial_z \Gamma_j(z)|}\partial_\theta\left(\int_D G(\Gamma_j(z), \Gamma_k(y))(\omega_j \circ \Gamma_j)(y)|\partial_z \Gamma_k(y)|^2 d\mu_y\right), \ j = 1, 2, k \neq j. \end{aligned}$$

我们有

引理 4.6。 $R_j(M_{\vec{r}}\beta, Y, \vec{r}) \in C^\infty\left(B_{X^s \times (Z_e^s)^2, \delta} \times \mathbb{R}_+^2 \times [0, \frac{1}{3}]^3, Y^{s-1} \times (W_o^{s-1})^2\right)$, $j = 0, 1, 2$ and

$$H_0(\vec{\beta}, Y, 0) := \lim_{|\vec{r}|\to 0} R_j(M_{\vec{r}}\beta, Y, \vec{r}) = 0, \quad H_j(\vec{\beta}, Y, 0) := \lim_{|\vec{r}|\to 0} R_j(M_{\vec{r}}\beta, Y, \vec{r}) = \frac{1 - Q^2}{4\pi^2 \mu} y_j \sin\theta, \ \ j = 1, 2.$$

此外，记为 $\vec{H} = (H_1, H_2)^t$，则 $\mathcal{D}_Y \vec{H}(0, 0, 0)$ 可逆。

那么，针对 $C^{0,\ 1}$ 连续涡量的定理 1.5 的证明可由隐函数定理得出。

References

[1] A. L. Bertozzi 和 P. Constantin. 涡旋斑块的整体正则性. *Comm. Math. Phys.*, 152(1):19– 28, 1993. [2] H. Br´ezis 和 R. E. L. Turner. 关于一类超线性椭圆问题. *Comm. Partial Differential Equations* 2 6 601 614, 1977, ( ): – , [3] Jacob Burbea. 涡旋斑块的运动. *Letters in Mathematical Physics. A Journal for the Rapid Dissemination of Short Contributions in the Field of Mathematical Physics* 6 1 1 16, 1982 , ( ): – .

[4] Daomin Cao、Zhongyuan Liu 和 Juncheng Wei. 二维欧拉方程中点涡对的正则化. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 212(1):179–217, 2014. [5] Daomin Cao、Shuangjie Peng 和 Shusen Yan. 不可压稳态流中的平面涡旋斑块问题. *Adv. Math.*, 270:263–301, 2015. [6] Daomin Cao、Jie Wan、Guodong Wang 和 Weicheng Zhan. 圆盘内平面欧拉方程的旋转涡斑 . *J. Differential Equations*, 275:509–532, 2021.

[7] Daomin Cao 和 Guodong Wang. 平面理想流体中旋转方向相反的稳态涡斑.
Calc. Var. Partial Differential Equations, 58(2):第 75 号论文, 17, 2019. [8] 安赫尔·卡斯特罗、Diego Córdoba 和 Javier Gómez-Serrano. 主动标量的匀速旋转解析整体涡斑解. *Ann. PDE*, 2(1), 2016. [9] 让-伊夫·舍曼. 二维不可压缩流体中几何结构的保持。（法语）
[[ ]] *Ann.* 二维
Sci. École Norm. Sup 4 517 542, 1993
不可压缩流体中几何结构的保持 . , ( ): – . [10] 迈克尔·克兰德尔、拉比诺维茨和 H·保罗. 简单特征值分岔.
J. Functional Analysis, 8 321: –340, 1971. [11] D. G. 德菲格雷多、P.-L. 里昂斯和 R. D. 努斯鲍姆. 半线性椭圆方程正解的先验估计与存在性. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 61(1):41–63, 1982. [12] 弗朗西斯科·德拉奥斯、齐内卜·哈赛尼亚、陶菲克·赫米迪和胡安·马特乌. 圆盘内稳态涡斑的解析与数值研究. *Analysis & PDE*, 9(7):1609–1670, 2016. [13] 弗朗西斯科·德拉奥斯、陶菲克·赫米迪、胡安·马特乌和胡安·贝尔德拉. 平面欧拉方程的双连通 V态. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 48(3):1892–1928, 2016. [14] 郭岩、克里斯·霍尔斯特伦和丹尼尔·斯皮恩. 不稳定基尔霍夫椭圆附近的动力学.
Comm. , ( ): –
Math. Phys. 245 2 297 354, 2004
. [15] 陶菲克 · 赫米迪和胡安 · 马特乌 . 基尔霍夫涡旋分岔出的旋转涡斑 .
Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A 36 10 5401 5422, 2016
, ( ): –
. [16] 陶菲克 · 赫米迪、胡安 · 马特乌和胡安 · 贝尔德拉 . 旋转涡斑的边界正则性 .
Archive for Rational Mechanics and Analysis 209 1 171 208, 2013
, ( ):
– . [17] P.-L. 里昂斯 . 半线性椭圆方程正解的存在性 . *SIAM Rev.*, 24 4 441( ): –467, 1982. [18] 龙一鸣、YUCHEN WANG 和曾重春. 二维区域上欧拉方程的集中型稳态涡量及其线性稳定性. *J. Differential Equations*, 266(10):6661–6701, 2019. [19] 卡洛 · 马尔基奥罗和马里奥 · 普尔维伦蒂 .
Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids, 第 96 卷, *Applied Mathematical Sciences*. 施普林格出版社, 纽约, 1994. [20] 贾拉勒·沙塔、塞缪尔·沃尔什和曾重春. 具有紧支撑涡量的行进水波.
Nonlinearity, 26(6):1529–1564, 2013. [21] 迪迪埃·斯梅茨和让·范沙夫廷根. 欧拉方程中涡旋的去奇异化.
Arch. , ( ): –
Ration. Mech. Anal. 198 3 869 925, 2010
. [22] 布鲁斯 · 特金顿 . 二维稳态涡流, I 、 II. *Comm. Partial Differential Equations*, 8 9 999 1030, 1031 1071, 1983 ( ): – – . [23] Jie Wan. 圆盘内二维欧拉流的多尺度旋转涡斑. *J. Math. Fluid Mech.*, 23(4):论文第 101 号, 19, 2021. [24] 万业熙. 旋转涡斑的稳定性. *Comm. Math. Phys.*, 107(1):1–20, 1986. [25] 万业熙. 点涡系统的去奇异化. *Phys. D*, 32(2):277–295, 1988. [26] V·尤多维奇. 理想不可压缩流体的非定常流.
Z. Vycisl. Mat. i. Mat. Fiz (Russian), 3 1032 1066, 1963 : – .

[1] School of Mathematics and Statistics, Central China Normal University, Wuhan 430079, Hubei, China

[2] School of Mathematical Science, Tianjin Normal University, Tianjin, 300387, China
Email address: wangyuchen@mail.nankai.edu.cn