arXiv:2304.02242v1 [math.RA] 5 Apr 2023

S' 型三维量子多项式代数的量子射影平面与 Beilinson 代数

AYAKO ITABA

ABSTRACT. 设 $A = \mathcal{A}(E,\sigma)$ 是一个三维量子多项式代数，其中 E 是 $\mathbb{P}^2$ 或 $\mathbb{P}^2$ 中的一个三次除子，且 $\sigma \in \mathrm{Aut}_k E$。Artin-Tate-Van den Bergh 证明了，当且仅当 σ 的阶 $|\sigma|$ 有限时， A 才是有限中心模。作为其结果的范畴类比，作者与 Mori 证明了以下条件等价: (1) $|\nu^*\sigma^3| < \infty$，其中 ν 是 A 的中山自同构。(2) σ 的范数 $\|\sigma\|$ 有限。(3) 量子射影平面 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}} A$ 是有限中心模。本文将证明，对于 S' 型代数 A ，以下条件等价：(1) $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}} A$ 是有限中心模。(2) A 的 Beilinson 代数 ∇A 是 2-表示驯性。(3) ∇A 上简单 2-正则模的同构类由 $\mathbb{P}^2$ 参数化。

1. INTRODUCTION

在本文中，我们固定一个特征为零的代数闭域 k 。所有代数和（非交换）概形均定义在 k 上。我们进一步假设，所有（分次）代数均在 k 上由有限多个（次数为 1 的）元素生成，即它们具有如下形式：$k\langle x_1, \ldots\ldots, x_n\rangle/I$，其中 $I \lhd k\langle x_1, \ldots\ldots, x_n\rangle$ 为某个（齐次）理想（其中对于每个 $i = 1, \ldots\ldots, n$，均有 deg $x_i = 1$）。

在非交换代数几何中，量子多项式代数是一类基础且重要的研究对象，它是交换多项式代数的非交换类比。量子射影空间是与量子多项式代数相关联的非交换射影概形，同时也是这一研究领域中一个基础且重要的研究对象。在非交换代数几何研究的初期，Artin-Tate-Van den Bergh [ATV1] 发现了三维量子多项式代数与几何对（E， σ）之间的一种优美对应关系，其中 E 是 $\mathbb{P}^2$ 或$\mathbb{P}^2$中的一个三次除子，并且 $\sigma \in \mathrm{Aut}_k E$。因此，这一结果使我们能够将三维量子多项式代数 A 表示为 $A = \mathcal{A}$（E， σ）的形式。

对于一个三维量子多项式代数 $A = \mathcal{A}(E,\sigma)$，Artin-Tate-Van den Bergh[ATV2] 在 A 关于其中心是有限模的情况下，给出了如下几何刻画。

定理 1.1（[ATV2，定理 7.1]）。设 $A = \mathcal{A}(E,\sigma)$ 是一个三维量子多项式代数。那么，以下条件等价:
(1) $|\sigma|$ 的阶是有限的。(2) A
在其中心上是有限的。

2020年数学主题分类。16W50、16S37、16D90、16E65。关键词和短语。量子多项式代数、几何代数、量子射影平面、卡拉比-丘代数。

为了表征在其中心上有限的几何量子射影空间，Mori [Mo4] 引入了以下概念：

定义 1.2（[Mo4，定义 4.6]）。对于一个几何对（E,σ），其中 $E \subset \mathbb{P}^{n-1}$ and$\sigma \in$Aut$_k E$，我们定义

$$\mathrm{Aut}_k(\mathbb{P}^{n-1}, E) := \{\phi|_E \in \mathrm{Aut}_k E \mid \phi \in \mathrm{Aut}_k \mathbb{P}^{n-1}\}, \text{ and}$$
$$\|\sigma\| := \inf\{i \in \mathbb{N}^+ \mid \sigma^i \in \mathrm{Aut}_k(\mathbb{P}^{n-1}, E)\},$$

这称为 σ 的范数。

作为定理 1.1 的一个范畴类比，作者与 Mori [IMo] 给出了如下结果：

定理 1.3（[IMo，定理 3.8]）。如果 $A = \mathcal{A}(E,\sigma)$ 是一个具有中山自同构 $\nu \in$ Aut$A$ 的三维量子多项式代数，那么 $||\sigma|| = |\nu^*\sigma^3|$，因此以下命题等价：

(1) $|\nu^*\sigma^3| < \infty$. (2) $||\sigma|| < \infty$.
(3) Proj$_{\mathrm{nc}}A$ 是有限中心的。

本文将证明关于 S' 型代数 $A = \mathcal{A}(E,\sigma)$ 的以下结果，其中 $E \subset \mathbb{P}^2$ 是一条直线与一条圆锥曲线的并集，二者交于两个点，且 $\sigma \in$ Aut$_k E$。

定理 1.4（定理 4.4）。对于一个 S' 型的三维量子多项式代数 A，以下各项等价：

(1) Proj$_{\mathrm{nc}}A$ 在其中心上是有限的。(2) A 的 Beilinson 代数 ∇A 在 Herschend-Iyama-Oppermann [HIO]的意义下是 2-表示驯性的。(3) ∇A 上的简单 2-正则模的同构类由 $\mathbb{P}^2$参数化。

请注意，这些等价关系是针对 [Mo4 中的 S 型代数 $A = \mathcal{A}(E,\sigma)$ 给出的，见定理 4.17、定理 4.21], ，其中 $E \subset \mathbb{P}^2$ 是一个三角形，且 $\sigma \in$ Aut$_k E$。

本文组织如下：在第 2 节中，我们回顾量子多项式代数、几何代数和量子射影空间的定义。此外，我们还描述了中心有限的量子多项式代数的刻画。在第 3 节中，为了证明我们的主要结果，我们计算了 S' 型代数 A 的中心（命题 3.2）。最后，在第 4 节中，我们证明了我们的主要结果（定理 4.2、定理 4.3、定理 4.4）。

2. Preliminaries

2.1. 量子多项式代数、几何代数与量子射影空间。首先，我们回顾量子多项式代数和几何代数的定义。

定义 2.1. 如果右诺特分次代数 A 满足以下条件，则称其为 d 维量子多项式代数。

(1) $A = d$ 的整体维数,

(2)（Gorenstein 条件）当 $i=d$ 时，$\mathrm{Ext}_A^i(k,A) \cong \begin{cases} k \end{cases}$；当 $i \neq d$ 时，$\mathrm{Ext}_A^i(k,A)$ 为 0；以及 (3) $H_A(t) := \sum_{i=0}^{\infty}(\dim_k A_i)t^i = (1-t)^{-d}$ ($H_A(t)$ 被称为 A 的希尔伯特级数。

注意，量子多项式代数是交换多项式代数的一种非交换类比。

定义 2.2（[Mo2，定义 4.3]）。几何对（E,σ）由一个射影概形 $E \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 和 $\sigma \in \mathrm{Aut}_k E$组成。对于二次代数 $A = k\langle x_1, \ldots\ldots, x_n\rangle / I$ 其中$I \lhd k\langle x_1, \ldots\ldots, x_n\rangle$ 是由二次元素生成的齐次理想，我们定义

$$\mathcal{V}(I_2) := \{(p,q) \in \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \mid f(p,q) = 0 \text{ for any } f \in I_2\}.$$

(1) 如果存在一个几何对（E,σ）使得……，我们称 A 满足 (G1)。

$$\mathcal{V}(I_2) = \{(p,\sigma(p)) \in \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \mid p \in E\}.$$

在这种情况下，我们记作 $\mathcal{P}(A) = (E,\sigma)$，并称 E 为 A的点概形 .

(2) 如果存在一个几何对（E,σ）使得……，我们称 A 满足 (G2)。

$$I_2 = \{f \in k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle_2 \mid f(p,\sigma(p)) = 0 \text{ for any } p \in E\}.$$

在这种情况下，我们记作 $A = \mathcal{A}(E,\sigma)$。

(3) 如果一个二次代数 A 满足 A 在 $A = \mathcal{A}(\mathcal{P}(A))$ 下同时满足 (G1) 和 (G2)，则称其为几何代数。

我们指出，三维量子多项式代数与三维二次 AS 正则代数完全相同。

定理 2.3（[ATV1]）。每个三维量子多项式代数都是一个几何代数，其点概形要么是射影平面 $\mathbb{P}^2$，要么是其中的一个三次除子 $\mathbb{P}^2$。

三维量子多项式代数 $A = \mathcal{A}(E,\sigma)$ 的类型是根据点概形 $E \subset \mathbb{P}^2$ 定义的（详情请参见 [IMa1，第 2.3] 小节）：

P 型：E 是 $\mathbb{P}^2$。S型：E 是一个三角形。S’ 型：E 是一直线与一条圆锥曲线的并集，并在两个点处相交。T 型：E 是三条直线的并集，并在一个点处相交。T’ 型：E 是一直线与一条圆锥曲线的并集，并在一个点处相交。NC型：E 是一条有节点三次曲线。CC 型：E 是一条有尖点三次曲线。TL 型：E 是一条三重直线。WL 型：E 是一条二重直线与一直线的并集。EC型：E 是一条椭圆曲线。

对于一个三维量子多项式代数 $A = \mathcal{A}(E,\sigma)$，Artin-Tate-Van den Bergh[ATV2] 利用几何数据给出了判定 $A = \mathcal{A}(E,\sigma)$ 是否是其中心上的有限模的判据。

定理 2.4（[ATV2，定理 7.1]）。设 $A = \mathcal{A}(E,\sigma)$ 为一个 3 维量子多项式代数。则以下条件等价：

(1) $|\sigma|$ 的 σ 阶是有限的。

(2) A 在其中心上有限。

非交换仿射概形和射影概形由 Artin-Zhang [AZ] 引入。在回顾非交换仿射概形和射影概形的定义之前，我们先回顾以下定义：

定义 2.5. 非交换概形（在 k 上）是一个二元组 $X = (\mathrm{mod}X, \mathcal{O}_X)$，由一个 K-线性阿贝尔范畴 $\mathrm{mod}X$ 和一个对象 $\mathcal{O}_X \in \mathrm{mod}X$ 组成。若两个非交换概形 $X = (\mathrm{mod}X, \mathcal{O}_X)$ 和 $Y = (\mathrm{mod}Y, \mathcal{O}_Y)$ 同构，记作 $X \cong Y$，则存在一个等价函子 $F\colon \mathrm{mod}X \to \mathrm{mod}Y$，使得 $F(\mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_Y$。

定义 2.6. 若 R 是一个右诺特代数，则定义与 R 相关联的非交换仿射概形为 $\mathrm{Spec}_{\mathrm{nc}}R = (\mathrm{mod}R, R)$，其中 $\mathrm{mod}R$ 是有限生成右 R-模的范畴，而 $R \in \mathrm{mod}R$ 是正则右模。

定义 2.7（[AZ]）。若 A 是一个右诺特分次代数，$\mathrm{grmod}A$ 是有限生成分次右 A-模的范畴，而 $\mathrm{tors}A$ 是 $\mathrm{grmod}A$ 的全子范畴，由 k 上的有限维模组成，则定义与 A 相关联的非交换射影概形为 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A = (\mathrm{tails}A, \pi A)$，其中 $\mathrm{tails}A := \mathrm{grmod}A/\mathrm{tors}A$ 是商范畴，$\pi : \mathrm{grmod}A \to \mathrm{tails}A$ 是商函子，而 $A \in \mathrm{grmod}A$ 是正则分次右模。若 A 是一个 d 维量子多项式代数，则称 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A$ 为量子 $\mathbb{P}^{d-1}$。特别地，若 $d = 3$，则称 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A$ 为量子射影平面。

这里，我们回顾非交换概形上的点的定义。

定义 2.8. 设 R 是一个代数。$\mathrm{Spec}_{\mathrm{nc}}R$ 中的一个点是一个简单右 R-模 $M \in \mathrm{mod}\, R$ 的同构类，满足 $\dim_k M < \infty$。若 $\dim_k M > 1$，则称点 M 为胖点。

定义 2.9. 设 A 为一个分次代数。$\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A$ 的一个点是形如 $\pi M \in \mathrm{tails}A$ 的单对象的一个同构类，其中 $M \in \mathrm{grmod}A$ 是一个分次右 A-模，满足 $\lim_{i\to\infty} \dim_k M_i < \infty$。若一个点 πM 满足 $\lim_{i\to\infty} \dim_k M_i > 1$，则称其为胖点；在这种情况下，$M$ 称为 A 上的胖点模。

备注 2.10. (1) 若 A 是一个分次交换代数，且 $p \in \mathrm{Proj}A$ 是一个闭点，则 $\pi(A/\mathfrak{m}_p) \in \mathrm{tails}A$ 是一个点，其中 $\mathfrak{m}_p$ 是 A中对应于 p的齐次极大理想。事实上，这给出了 $\mathrm{Proj}A$ 的闭点集与 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A$的点集之间的一个双射。在这个交换情形下，不存在胖点。

(2) 一般而言，尚不清楚胖点在 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A$ 的同构下是否保持不变。然而，胖点模在分次莫里塔等价下保持不变，因此，如果 A 和 A' 都是三维量子多项式代数，且 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A \cong \mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A'$，那么根据引理 2.12，$\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A$ 的胖点集合与 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A'$ 的胖点集合之间存在自然双射。

由于 A 在其中心上有限这一性质在非交换射影概形 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A$ 的同构下并不保持，我们在 [IMo]中引入了以下定义。

定义 2.11（[IMo，定义 2.6], 参见 [Mo4，定义 4.14]）。设 A 为一个 d 维量子多项式代数。若存在一个在其中心上有限的 d 维量子多项式代数 A'，使得 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A \cong \mathrm{Pro\,j}_{\mathrm{nc}}A'$，则称 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A$在其中心上有限。

注意，对于三维量子多项式代数，定义 2.11 与 [Mo4 中的原始定义 4.14]（由 [AOU 的推论 A.10] 给出）一致，如下所示：

引理 2.12（[AOU，推论 A.10]）。设 A 和 A' 为三维量子多项式代数。当且仅当 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A \cong$ 与 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A'$等价时，$\mathrm{grmod}A \cong$ 与 $\mathrm{grmod}A'$ 等价。

2.2. 有限生成于其中心之上的量子多项式代数的刻画。为刻画有限生成于其中心之上的“几何”量子射影空间，[Mo4] 中引入了以下概念：

定义 2.13（[Mo4，定义 4.6]）。对于一个几何对（E, σ），其中 $E \subset \mathbb{P}^{n-1}$ and$\sigma \in \mathrm{Aut}_k E$，我们定义

$$\mathrm{Aut}_k(\mathbb{P}^{n-1}, E) := \{\phi|_E \in \mathrm{Aut}_k E \mid \phi \in \mathrm{Aut}_k \mathbb{P}^{n-1}\}, \text{ and}$$
$$\|\sigma\| := \inf\{i \in \mathbb{N}^+ \mid \sigma^i \in \mathrm{Aut}_k(\mathbb{P}^{n-1}, E)\},$$

这称为 σ 的范数。

对于几何对 (E, σ)，显然 $\|\sigma\| \leq |\sigma|$。以下是 σ 的范数 $\|\sigma\|$ 的基本性质。

命题 2.14 ([MU，引理 2.5], [Mo4，引理 4.16 (1)])。设 A 和 A' 是满足 (G1) 的 d 维量子多项式代数，且 $\mathcal{P}(A) = (E, \sigma)$，以及 $\mathcal{P}(A') = (E', \sigma')$。
(1) 若 $A \cong A'$，则 $E \cong E'$ 和 $|\sigma| = |\sigma'|$。(2) 若 grmod $A \cong$ grmod A'，则 $E \cong E'$ 和 $||\sigma|| = ||\sigma'||$。
特别地，若 A 和 A' 是满足 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A \cong \mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A'$ 的三维量子多项式代数，则 $E \cong E'$（也就是说，A 和 A' 属于同一类型），且 $||\sigma|| = ||\sigma'||$。

在本小节末尾，我们准备阐述本文的目的。对于量子多项式代数，下述 Calabi-Yau 量子多项式代数更容易处理。

定义 2.15. 若量子多项式代数 A 的中山自同构 ν 是恒等映射，则称其为 Calabi-Yau。

下述引理指出，每个量子射影平面都以一个三维卡拉比-丘量子多项式代数作为齐次坐标环。

引理 2.16 ([IMa2, 定理 4.4]). 对于每个三维量子多项式代数 A，都存在一个三维卡拉比-丘量子多项式代数 A'，使得 $\mathrm{grmod}A \cong \mathrm{grmod}A'$，且 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A \cong \mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A'$。

以下结果是 [IMo] 中的主要定理。

引理 2.17（[IMo，定理 3.4]）。若 $A' = \mathcal{A}(E, \sigma')$ 是一个 3 维 Calabi-Yau 量子多项式代数，则 $||\sigma'|| = |\sigma'^3|$，因此以下条件等价：

(1) $|\sigma'| < \infty$。(2) $||\sigma'|| < \infty$。
(3) A' 有限于其中心。(4) Proj
$_{\mathrm{nc}}A'$ 有限于其中心。

引理 2.18（[IMo，定理 3.8]）。若 $A = \mathcal{A}(E, \sigma)$ 是一个三维量子多项式代数，其 Nakayama 自同构为 $\nu \in \mathrm{Aut}A$，则 $||\sigma|| = |\nu^*\sigma^3|$，因此以下条件等价：

(1) $|\nu^*\sigma^3| < \infty$。(2) $||\sigma|| < \infty$。
(3) $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A$ 在其中心上有限。

此外，若 A 属于 T 型、T'、CC、TL、WL，则 A 永远不会在其中心上有限。

引理 2.19（[IMo，定理 1.3]）。设 $A = \mathcal{A}(E, \sigma)$ 是一个三维量子多项式代数，且满足 $E \neq \mathbb{P}^2$，而 $\nu \in \mathrm{Aut}A$ 是 A 的 Nakayama 自同构。则$||\sigma|| = |\nu^*\sigma^3|$，因此以下条件等价：

(1) $|\nu^*\sigma^3| < \infty$。(2) $\|\sigma\| < \infty$。
(3) $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A$ 在其中心上有限。(
4) $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A$ 有一个胖点。

注意，如果 $E = \mathbb{P}^2$，那么 $||\sigma|| = 1$，但 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A$ 没有胖点。（参见 [IMo，引理 2.14]）。

引理 2.20（[IMo，推论 4.2]）。设 $A = \mathcal{A}(E, \sigma)$ 是一个 Nakayama 自同构为 $\nu \in \mathrm{Aut}A$ 的三维量子多项式代数。那么以下条件等价：
(1) $|\nu^*\sigma^3| = 1$ 或 ∞。(2) $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A$ 没有胖点。(3) Beilinson 代数 ∇A of$A$ 上简单 2-正则模的同构类由 $E \subset \mathbb{P}^2$ 的闭点集参数化。

特别地，如果 A 是 P 型、T 型、T' 型、CC 型、TL 型或 WL 型，那么 A 满足上述所有条件。

Beilinson 代数是由 Minamoto-Mori [MiMo 定理 4.12] 给出的一个典型的 $(d-1)$-表示无限代数。在这里，对于一个 a d 维量子多项式代数 A，我们将 A 的 Beilinson 代数定义为

$$\nabla A := \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{d-1} \\ 0 & A_0 & \cdots & A_{d-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_0 \end{pmatrix}.$$

定义 2.21（[HIO，定义 6.10], 参见 [Mo4，定义 4.9]）。我们称一个 d-表示无穷代数 R 是 d-表示驯的，如果 R 的前射影代数 $\Pi(R)$ 是右诺特的，且有限生成于其中心之上。

注 2.22. 我们回顾 [IMo，注 4.4] 中的内容。对于三维量子多项式代数 A，我们预期以下条件等价：

(1) $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A$在其中心上是有限的。(2) A 的 Beilinson 代数 ∇A 具有 2-表示驯性。(3) ∇A 上的简单 2-正则模的同构类由$\mathbb{P}^2$参数化。

事实上，以下文所述，定理 2.23 和定理 2.24 证明了这些等价关系对 S 型成立。本文旨在证明这些等价关系对 S' 型也成立（见第 4 节的定理 4.4）。

定理 2.23（[Mo4，定理 4.17]）。设 $A = \mathcal{A}(E,\sigma)$ 是一个 S 型三维量子多项式代数。那么下列命题等价:
(1) $\|\sigma\| < \infty$。(2) $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A$ 在其中心上有限。(3) A 的 Beilinson 代数 ∇A 是 2-表示温和的。

定理 2.24（[Mo4，定理 4.21]）。设 $A = \mathcal{A}(E,\sigma)$ 是一个 S 型三维量子多项式代数。

(1) 若 A 的 Beilinson 代数 ∇A 不具 2-表示驯性，则 ∇A 上简单 2-正则模的同构类由 $E \subsetneq \mathbb{P}^2$ 的点集参数化。(2) 若 A 的 Beilinson 代数 ∇A 具有 2-表示驯性，则 ∇A 上简单 2-正则模的同构类由 $\mathbb{P}^2$ 的点集参数化。

为了证明我们的主要结果，我们需要 Mo4] 中的以下引理:

引理 2.25（Mo4，定理 4.8]）。设 $A = \mathcal{A}(E,\sigma)$ 是一个 3 维量子多项式代数。若 $\|\sigma\| = 1$ 或 $\|\sigma\| = \infty$，则 ∇A 上简单 2-正则模的同构类由 E 的点集参数化。

设 A 是一个分次代数，且 $r \in \mathbb{N}^+$。我们回顾一下， A 的第 r 个 Veronese 代数是由 $A^{(r)} := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_{ri}$ 定义的分次代数。此外，在 Mo3 的定义 3.7]，中， A 的第 r 个准 Veronese 代数是由以下内容定义的分次代数

$$A^{[r]} = \begin{pmatrix} A^{(r)} & A(1)^{(r)} & \cdots & A(r-1)^{(r)} \\ A(-1)^{(r)} & A^{(r)} & \cdots & A(r-2)^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A(-r+1)^{(r)} & A(-r+2)^{(r)} & \cdots & A^{(r)} \end{pmatrix}$$

伴随乘法 $(a_{ij})(b_{ij}) := (\sum_{k-0}^{r-1} a_{kj}b_{ik})$。

引理 2.26（[Mo4，引理 4.10]）。对于一个分次代数 A 和 $r \in \mathbb{N}^+$， $Z(A^{[r]}) \cong Z(A)^{(r)}$ 作为分次代数。

引理 2.27（[Mo4，命题 4.11]）。设 A 是一个右诺特分次代数，并且$r \in \mathbb{N}^+$。如果 $Z(A)$ 是诺特的，且 A 在其中心 $Z(A)$ 上有限，那么 $A^{[r]}$ 是右诺特的，并且在其中心 $Z(A^{[r]})$ 上有限。

如果 A 是交换的 $\mathbb{N}$-分次代数，且 $u \in A$ 是一个正次数齐次元，那么 Proj $A \cong$ Proj $A/(u)$ $\bigsqcup$ Spec $A[u^{-1}]_0$。非交换版本也已知有类似的分解。

引理 2.28（[Mo4，定理 4.20]）。设 A 是一个满足 [Mo4，定义 3.7] 中 (H) 条件的右诺特连通分次代数，$u \in A$ 是一个正次数齐次正则正规化元（即 $uA = Au$），$f\colon A \to A/(u)$ 是自然满射，且 $g\colon A \to A[u^{-1}]$ 是自然嵌入。若 $A[u^{-1}]$ 是强分次的，则函子

$$\mathsf{Tails}\, A/(u) \to \mathsf{Tails}\, A;\ \pi_{A/(u)}M \mapsto \pi_A f_* M,$$
$$\mathsf{Mod}\, A[u^{-1}]_0 \to \mathsf{Tails}\, A;\ N \mapsto \pi_A g_*(N \otimes_{A[u^{-1}]_0} A[u^{-1}])$$

给出从 $|\mathbf{Proj}_{\mathrm{nc}}\, A/(u)| \bigsqcup \mathbf{Spec}_{\mathrm{nc}}\, A[u^{-1}]_0$ 到 $|\mathbf{Proj}_{\mathrm{nc}}\, A|$ 的双射。此外，在这一对应关系中，胖点对应于胖点。

3. Centers of 3-dimensional Calabi-Yau quantum polynomial algebras forType S'

在本节中，为了证明本文的主要定理，我们将计算一个 S' 型三维 Calabi-Yau量子多项式代数的中心。为了进行计算，我们回顾 [Mo1] 关于 S 型的结果。

例 3.1. 设 $A' = \mathcal{A}(E, \sigma') = k\langle x, y, z\rangle/(g_1, g_2, g_3)$ 为一个 S 型三维卡拉比-丘量子多项式代数，其中 $\begin{cases} g_1 = yz - \alpha zy \\ g_2 = zx - \alpha xz \\ g_3 = xy - \alpha yx \end{cases}$，，$(\alpha^3 \neq 0, 1)$。那么 $g :=$

$xyz \in Z(A')_3$。如果 A' 作为其中心 $Z(A')$上的有限模，则根据 Mo1 定理 3.3]，$Z(A') = k[x^n, y^n, z^n, g]$。另一方面，如果 A' 不是其中心 $Z(A')$上的有限模，则根据 Mo1 定理 3.3]（的证明），$Z(A') = k[g]$。

命题 3.2. 设 $A' = \mathcal{A}(E, \sigma') = k\langle x, y, z\rangle/(g_1, g_2, g_3)$ 是一个三维 Calabi-Yau S' 型量子多项式代数，其中 $\begin{cases} g_1 = yz - \alpha zy \\ g_2 = zx - \alpha xz \\ g_3 = xy - \alpha yx \end{cases}$，，$(\alpha^3 \neq 0, 1)$。定义

$g := xyz + (1 - \alpha^3)^{-1}x^3 \in A'_3$。
(1) 如果 A' 作为其中心 $Z(A')$上的模是有限生成的（即 $|\alpha|$ 是有限的），那么存在一个基 x, y, z，使得 A'_1 满足 $Z(A') = k[x^{|\alpha|}, y^{|\alpha|}, z^{|\alpha|}, g]$。(2) 如果 A' 作为其中心 $Z(A')$上的模不是有限生成的（即 $|\alpha|$ 是无限的），那么 Z满足$A'(= [g]$。

证明。首先，我们回顾 [IMo 中引理 3.2]的表1所列内容；

- $E = \mathcal{V}(x) \cup \mathcal{V}(x^2 - \lambda yz)\ \left(\lambda := \dfrac{\alpha^3 - 1}{\alpha}\right)$,
- $\begin{cases} \sigma'(0, b, c) = (0, b, \alpha c), \\ \sigma'(a, b, c) = (a, \alpha b, \alpha^{-1} c). \end{cases}$

由于

$$\begin{cases} (\sigma')^i(0, b, c) = (0, b, \alpha^i c), \\ (\sigma')^i(a, b, c) = (a, \alpha^i b, \alpha^{-i} c) = (\alpha^{-i} a, b, \alpha^{-2i} c), \end{cases}$$

$(\sigma')^i \in \mathsf{Aut}_k(\mathbb{P}^2, E)$ 当且仅当 $\alpha^{3i} = 1$，因此 $||\sigma'|| = |\alpha^3| = |(\sigma')^3|$ ([IMo，定理 3.3] 的证明)。因此，根据引理，$||\sigma'|| = |(\sigma')^3| = |\alpha^3| < \infty$ 当且仅当 A' 是有限中心扩张，当且仅当 $\mathbf{Proj}_{\mathrm{nc}}\, A'$ 是有限中心扩张。

我们将求出 A' 的中心的生成元。对非负整数 i、j 和 k 使用归纳法，可得以下方程成立；

- $yx^i = \alpha^{-i}x^i y$, $y^j x = \alpha^{-j}xy^j$,
- $zx^i = \alpha^i x^i z$, $z^k x = \alpha^k x z^k$,
- $zy^j = \alpha^{-j}y^j z + \alpha^{-3j+2}\left(\sum_{\nu=0}^{j-1}\alpha^{3\nu}\right)x^2y^{j-1}$, where we define $\sum_{\nu=0}^{j-1}\alpha^{3\nu} = 0$ when $j = 0$,
- $z^k y = \alpha^{-k}yz^k + \alpha^{-k}\left(\sum_{\nu=0}^{k-1}\alpha^{3\nu}\right)x^2z^{k-1}$.

因此，如果 $|\alpha|$ 是有限的，那么 $\sum_{\nu=0}^{|\alpha|-1}\alpha^{3\nu} = 0$，因此 $x^{|\alpha|}$、$y^{|\alpha|}$ 和 $z^{|\alpha|}$ 都是 A' 的中心元素。通过计算可知，无论 $|\alpha|$ 是否有限，$g := xyz + (1-\alpha^3)^{-1}x^3$ 也是 A' 的中心元素。

假设 $X = \sum_{i+j+k=d}\lambda_{i,j,k}x^iy^jz^k$ 是 A' 的中心元素。由于

$$\sum_{i+j+k=d}\lambda_{i,j,k}x^{i+1}y^jz^k = xX = Xx = \sum_{i+j+k=d}\alpha^{k-j}\lambda_{i,j,k}x^{i+1}y^jz^k,$$

$\lambda_{i,j,k} = \alpha^{k-j}\lambda_{i,j,k}$ 对每个 i、j 和 k 都成立。因此可得

(i)：如果 $|\alpha|$ 是有限的且 $\lambda_{i,j,k} \neq 0$，那么 $k-j$ 可被 $|\alpha|$ 整除；如果 $|\alpha|$ 是无限的且 $\lambda_{i,j,k} \neq 0$，那么 $j = k$。

此外，通过计算，

$$\begin{aligned}\sum_{i+j+k=d}\lambda_{i,j,k}x^iy^jz^{k+1} &= Xz = zX\\ &= \sum_{i+j+k=d}\left(\alpha^{i-j}\lambda_{i,j,k} + \alpha^{i-3j-3}\left(\sum_{\nu=0}^{j}\alpha^{3\nu}\right)\lambda_{i-2,j+1,k+1}\right)x^iy^jz^{k+1},\\ \sum_{i+j+k=d}\alpha^{-i}\lambda_{i,j,k}x^iy^{j+1}z^k &= yX = Xy\\ &= \sum_{i+j+k=d}\left(\alpha^{-k}\lambda_{i,j,k} + \alpha^{-2j-k-3}\left(\sum_{\nu=0}^{k}\alpha^{3\nu}\right)\lambda_{i-2,j+1,k+1}\right)x^iy^{j+1}z^k.\end{aligned}$$

因此我们有

$$\textbf{(ii):}\quad \left(1-\alpha^{i-j}\right)\lambda_{i,j,k} = \alpha^{i-3j-3}\left(\sum_{\nu=0}^{j}\alpha^{3\nu}\right)\lambda_{i-2,j+1,k+1},$$

$$\left(1-\alpha^{i-k}\right)\lambda_{i,j,k} = \alpha^{i-2j-k-3}\left(\sum_{\nu=0}^{k}\alpha^{3\nu}\right)\lambda_{i-2,j+1,k+1}$$

当 $j = k$ 时，这两个方程相等。

接下来，我们将对每个满足 $n < |\alpha|$ 的正整数 n，计算 $g^n = (xyz + (1-\alpha^3)^{-1}x^3)^n$。定义 $\kappa^1_{1,1,1} = 1$ 和 $\kappa^1_{3,0,0} = (1-\alpha^3)^{-1}$。那么 $\sum \kappa^1_{3-2j,j,j} x^{3-2j}y^j z^j$ 等于 $\sum_{j=0}^{n} xyz + (1-\alpha^3)^{-1}x^3$。令 $g^n = \left(xyz + (1-\alpha^3)^{-1}x^3\right)^n = \sum \kappa^n_{3n-2j,j,j} x^{3n-2j}y^j z^j$，并通过对 n 使用归纳法，证明对于每个 j，

$$\begin{aligned}(1-\alpha^{3n-3j})\,\kappa^n_{3n-2j,j,j} &= \alpha^{3n-5j-3}\left(\sum_{\nu=0}^{j}\alpha^{3\nu}\right)\kappa^n_{3n-2j-2,j+1,j+1}\\ &= \alpha^{3n-5j-3}(1-\alpha^3)^{-1}(1-\alpha^{3j+3})\kappa^n_{3n-2j-2,j+1,j+1}, \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

它表示 与 (ii) 的公式相同。当 $n = 1$ 时，确实如此。对于 $n+$ 1,

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{n+1}\kappa^{n+1}_{3n+3-2j,j,j}x^{3n+3-2j}y^j z^j\\ &= \left(xyz + (1-\alpha^3)^{-1}x^3\right)^{n+1}\\ &= \left(\sum_{j=0}^{n}\kappa^n_{3n-2j,jj}x^{3n-2j}y^j z^j\right)\left(xyz + (1-\alpha^3)^{-1}x^3\right)\\ &= \sum_{j=0}^{n}\kappa^n_{3n-2j,j,j}\left(x^{3n-2j+1}y^j\left(\alpha^{-j}yz^j + \alpha^{-j}\left(\sum_{\nu=0}^{j-1}\alpha^{3\nu}\right)x^2z^{j-1}\right)z + (1-\alpha^3)^{-1}x^{3n+3-2j}y^j z^j\right)\\ &= \sum_{j=0}^{n}\kappa^n_{3n-2j,j,j}\left(\alpha^{-j}x^{3n-2j+1}y^{j+1}z^{j+1} + \alpha^{-3j}(1-\alpha^3)^{-1}x^{3n+3-2j}y^j z^j\right)\\ &= \sum_{j=0}^{n+1}\left(\alpha^{-j+1}\kappa^n_{3n+2-2j,j-1,j-1} + \alpha^{-3j}(1-\alpha^3)^{-1}\kappa^n_{3n-2j,j,j}\right)x^{3n+3-2j}y^j z^j,\end{aligned}$$

其中 $\kappa^n_{3n+2,\ -1,\ -1} = \kappa^n_{n-2,\ n+1,\ n+1} = 0$。因此，对于每个 j，

$$\begin{aligned}\kappa^{n+1}_{3n+3-2j,j,j} &= \alpha^{-j+1}\kappa^n_{3n+2-2j,j-1,j-1} + \alpha^{-3j}(1-\alpha^3)^{-1}\kappa^n_{3n-2j,j,j}\\ &= \alpha^{-j+1}(1-\alpha^{3n-3j+3})^{-1}\alpha^{3n-5j+2}(1-\alpha^3)^{-1}(1-\alpha^{3j})\kappa^n_{3n-2j,j,j}\\ &\qquad + \alpha^{-3j}(1-\alpha^3)^{-1}\kappa^n_{3n-2j,j,j}\\ &= \alpha^{-3j}(1-\alpha^{3n+3})(1-\alpha^3)^{-1}(1-\alpha^{3n-3j+3})^{-1}\kappa^n_{3n-2j,j,j}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}&(1-\alpha^{3n+3-3j})\,\kappa^{n+1}_{3n+3-2j,j,j}\\ &= (1-\alpha^{3n+3-3j})\,\alpha^{-3j}(1-\alpha^{3n+3})(1-\alpha^3)^{-1}(1-\alpha^{3n-3j+3})^{-1}\kappa^n_{3n-2j,j,j}\\ &= \alpha^{-3j}(1-\alpha^{3n+3})(1-\alpha^3)^{-1}\left(1-\alpha^{3n-3j}\right)^{-1}\alpha^{3n-5j-3}(1-\alpha^3)^{-1}(1-\alpha^{3j+3})\kappa^n_{3n-2j-2,j+1,j+1}\\ &= \alpha^{3n-5j}(1-\alpha^3)^{-1}(1-\alpha^{3j+3})\alpha^{-3j-3}(1-\alpha^{3n+3})(1-\alpha^3)^{-1}\left(1-\alpha^{3n-3j}\right)^{-1}\kappa^n_{3n-2j-2,j+1,j+1}\\ &= \alpha^{3n-5j}(1-\alpha^3)^{-1}(1-\alpha^{3j+3})\kappa^{n+1}_{3n+1-2j,j+1,j+1}.\end{aligned}$$

(1)：情形 1。假设 $|\alpha|$ 是有限的，且 $|\alpha| = |\alpha^3|$，也就是说，$|\alpha|$ 不能被 3 整除。那么 $\sum_{\nu=0}^{|\alpha|-1}\alpha^{3\nu} = 0$，并且对于每个整数 $j < |\alpha| - 1$，都有 $\sum_{\nu=0}^{j}\alpha^{3\nu} \neq 0$。下面证明

中心中的任意元素 $X = \sum \lambda_{i,j,k} x^i y^j z^k$ 由 $x^{|\alpha|}$, $y^{|\alpha|}$, $z^{|\alpha|}$ 和 $_{i+j+k=d} g = xyz + (1-\alpha^3)^{-1} x^3$ 生成，这可通过对 d 和非零系数的个数作归纳法得到。设 i_0 是满足 λ_{i_0,j_0,k_0} 为非零系数且 $i_0 + j_0 + k_0 = d$ 的最大值。由 (i)，$k_0 - j_0$ 被 $|\alpha|$ 整除。此外，若 j_0 和 k_0 均非零，则由 (ii)$_{j_0-1}$ 以及 $\lambda_{i_0+2,j_0-1,k_0-1} = 0$ 这一事实可知 $\sum \alpha^{3\nu} = 0$。这意味着 j_0 被 $|\alpha|$, $_{\nu=0}$ 整除，因此 k_0 也被 $|\alpha|$ 整除。即使 j_0 或 k_0 为零，j_0 和 k_0 都被 $|\alpha|$ 整除。

由 (ii)，对每个 j,

$$\left(1 - \alpha^{i_0 - j_0 - 3j}\right) \lambda_{i_0-2j, j_0+j, k_0+j} = \alpha^{i_0 - 3j_0 - 3j - 3} \left(\sum_{\nu=0}^{j_0+j} \alpha^{3\nu} \right) \lambda_{i_0-2j-2, j_0+j+1, k_0+j+1}.$$

令 h 为小于 $|\alpha|$ 的非负整数，使得 $i_0 - j_0 - 3h$ 被 $|\alpha|^{j_0+h}$ $_h$ 整除（等价地，$i_0 - 3h$ 被 $|\alpha|$ 整除），或者 $\sum \alpha^{3\nu} = 0$（等价地，$\sum \alpha^{3\nu} = 0$，因此 $_{\nu=0}$ $_{\nu=0h}$ $h = |\alpha| - 1$）。根据 h 的选取，项 $\sum \lambda_{i_0-2j,j_0+j,}$ $_{k_0+j} x^{i_0-2j} y^{j_0+j} z^{k_0+j}$ 是 A' 中心的一个元素。由归纳假设，只需证明项 $_h \sum \lambda_{i_0-2j,j_0+j,}$ $_{k_0+j} x^{i_0-2j} y^{j_0+j} z^{k_0+j}$ 由 $x^{|\alpha|}$, $y^{|\alpha|}$, $z^{|\alpha|}$ 和 $xyz + (1-\alpha^3)^{-1} x^3$ 生成。$_{j=0}$假设 i_0 被 $|\alpha|$ 整除。那么根据 h 的选取，$h = 0$ 成立。因此，项 $_h \sum \lambda_{i_0-2j,j_0+j,k_0+j} x^{i_0-2j} y^{j_0+j} z^{k_0+j}$ 等于 $\lambda_{i_0,}$ $_{j_0,k_0} x^{i_0} y^{j_0} z^{k_0}$。由于 i_0、j_0 和 k_0 全都被 $|\alpha|$ 整除，$\sum \lambda_{i_0-2j,j_0+j,}$ $_{k_0+j} x^{i_0-2j} y^{j_0+j} z^{k_0+j} = \lambda_{i_0,j_0,k_0} x^{i_0} y^{j_0} z^{k_0}$ 由 $x^{|\alpha|}$, $y^{|\alpha|}$,$_{j=0} z^{|\alpha|}$ 生成。

假设 i_0 不能被 $|\alpha|$ 整除。然后，如上所见（$*$），该项的系数

$$\sum_{j=0}^{h} \lambda_{i_0-2j, j_0+j, k_0+j} x^{i_0-2j} y^{j_0+j} z^{k_0+j}$$

满足关于项 $(xyz + (1-\alpha^3)^{-1} x^3)^h$.$_h$ 的系数的相同关系。因此，项 $\sum \lambda_{i_0-2j,\ j_0+j,}$ $_{k_0+j} x^{i_0-2j} y^{j_0+j} z^{k_0+j}$ 等于 $_{j=0}$

$$\gamma \left(xyz + (1-\alpha^3)^{-1} x^3\right)^h x^{i_0-3h} y^{j_0} z^{k_0}$$

对于某个 $\gamma \in k$。根据 h 的选择以及 (ii)， $i_0 - 3h$、 j_0 和 k_0 均可被 $|\alpha|$ 整除。因此 ，
$\sum_{j=0}^{h} \lambda_{i_0-2j,\ j_0+j,\ k_0+j} x^{i_0-2j} y^{j_0+j} z^{k_0+j}$ 由 $x^{|\alpha|}$、 $y^{|\alpha|}$、 $z^{|\alpha|}$ 和 $xyz + (1-\alpha^3)^{-1}x^3$ 生成。

情形 2. 假设 $|\alpha|$ 是有限的且 $|\alpha| \neq |\alpha^3|$。那么 $|\alpha| = 3\,|\alpha^3|$ 成立，因此 $\sum_{\nu=0}^{|\alpha^3|-1} \alpha^{3\nu} = 0$、且对于每个整数 $j < |\alpha^3| - 1$, $\sum_{\nu=0}^{j} \alpha^{3\nu} \neq 0$，以下方程也成立；

$$yx^{|\alpha^3|} = \alpha^{-|\alpha^3|}x^{|\alpha^3|}y, \quad zx^{|\alpha^3|} = \alpha^{|\alpha^3|}x^{|\alpha^3|}z, \quad y^{|\alpha^3|}x = \alpha^{-|\alpha^3|}x^{|\alpha^3|}y,$$
$$z^{|\alpha^3|}x = \alpha^{|\alpha^3|}x^{|\alpha^3|}z, \quad zy^{|\alpha^3|} = \alpha^{-|\alpha^3|}y^{|\alpha^3|}z, \quad z^{|\alpha^3|}y = \alpha^{-|\alpha^3|}yz^{|\alpha^3|}.$$

因此， $x^{|\alpha^3|}y^{|\alpha^3|}z^{|\alpha^3|}$ 是 A的中心中的一个元素。如前所述，对于每个 $n < |\alpha^3|$，当 $\left(xyz + (1-\alpha^3)^{-1}x^3\right)^n$ 记作 $\sum_{j=0}^{n} \kappa^n_{3n-2j,j,j} x^{3n-2j} y^j z^j$ 时，对于每个 j,

$$\begin{aligned}(1-\alpha^{3n-3j})\,\kappa^n_{3n-2j,j,j} &= \alpha^{3n-5j-3}\left(\sum_{\nu=0}^{j}\alpha^{3\nu}\right)\kappa^n_{3n-2j-2,j+1,j+1}\\ &= \alpha^{3n-5j-3}(1-\alpha^3)^{-1}(1-\alpha^{3j+3})\kappa^n_{3n-2j-2,j+1,j+1},\end{aligned}$$

这表示与（ii）相同的公式。因此，当 $n = |\alpha^3|$ 时，对于满足 $1 \le j < |\alpha^3|$ 的每个整数 j， $\kappa^{|\alpha^3|}_{3|\alpha^3|-2j,\ j,\ j} = 0$ 成立。此外，通过对 n 使用归纳法，可以证明 $\kappa^n_{n,\ n,\ n} = \alpha^{-\frac{(n-1)n}{2}}$ 以及 $\kappa^n_{3n,\ 0,\ 0} = (1-\alpha^3)^{-n}$。因此，

$$\left(xyz + (1-\alpha^3)^{-1}x^3\right)^{|\alpha^3|} = \alpha^{-\frac{(|\alpha^3|-1)|\alpha^3|}{2}} x^{|\alpha^3|}y^{|\alpha^3|}z^{|\alpha^3|} + (1-\alpha^3)^{-|\alpha^3|}x^{3|\alpha^3|}.$$

因此

$$x^{|\alpha^3|}y^{|\alpha^3|}z^{|\alpha^3|} = \alpha^{\frac{(|\alpha^3|-1)|\alpha^3|}{2}}\left(xyz + (1-\alpha^3)^{-1}x^3\right)^{|\alpha^3|} - \alpha^{\frac{(|\alpha^3|-1)|\alpha^3|}{2}}(1-\alpha^3)^{-|\alpha^3|}x^{|\alpha|}.$$

我们来证明，中心中的任意元素 $X = \sum \lambda_{i,j,k} x^i y^j z^k$ of A' 都由 $x^{|\alpha|}$, $y^{|\alpha|}$, $z^{|\alpha|}$ 和 $xyz + (1-\alpha^3)^{-1}x^3$ 生成，证明采用对 d 以及非零系数的数量进行归纳。设 i_0 是满足 λ_{i_0,j_0,k_0} 为非零系数且 $i_0 + j_0 + k_0 = d$ 的最大者。根据（i）， $k_0 - j_0$ 被 $3|\alpha^3|\ (= |\alpha|)$ 整除。此外，如果 j_0 和 k_0 均非零，则由（ii）的第一个方程以及 $\lambda_{i_0+2,j_0-1,k_0-1} = 0_{j_0-1}$ 这一事实可知， $\sum \alpha^{3\nu} = 0$，这意味着 j_0 被 $|\alpha^3|$ 整除。同样地，根据（ii）的第二个方程$_{\nu=0}$，可知 k_0 被 $|\alpha^3|$ 整除。即使 j_0 或 k_0 为零， j_0 和 k_0 也都被 $|\alpha^3|$ 整除。令 $j_0 = |\alpha^3|(3j_1 + j_2)$ 和 $k_0 = |\alpha^3|(3k_1 + j_2)$，其中 $0 \le j_2 \le 2$。

令 h 为小于 $|\alpha|$ 的非负整数，使得 $i_0 - j_0 - 3h$ 被$_{j_0+h}$ $_{h}$ $3|\alpha^3|$ 整除（等价地， $i_0 - 3h$ 被 $|\alpha^3|$整除），或被 $\sum \alpha^{3\nu} = 0$ 整除（等价地，
$\sum \alpha^{3\nu} = 0$,$_{\nu=0}$ $_{\nu=0}$

$_h$因此 $h=|\alpha^3|-1$）。那么，根据 h的选取，项 $\sum \lambda_{i_0-2j,j_0+j,k_0+j}x^{i_0-2j}y^{j_0+j}z^{k_0+j}{}_{j=0}$ 是 A'的中心的一个元素。根据归纳假设，只需证明$_h$项 $\sum \lambda_{i_0-2j,j_0+j,k_0+j}x^{i_0-2j}y^{j_0+j}z^{k_0+j}$ 由 $x^{|\alpha|}$, $y^{|\alpha|}$, $z^{|\alpha|}$, $x^{|\alpha^3|}y^{|\alpha^3|}z^{|\alpha^3|}$和 $g=_{j=0}xyz+(1-\alpha^3)^{-1}x^3$生成。

假设 i_0-j_0 可被 $3|\alpha^3|$整除。根据 h 的选取， $h=0$，因此项 $_h\sum \lambda_{i_0-2j,\ j_0+j,\ k_0+j}x^{i_0-2j}y^{j_0+j}z^{k_0+j}$ 等于 $\lambda_{i_0,\ j_0,\ k_0}x^{i_0}y^{j_0}z^{k_0}$。令 $i_0=|\alpha^3|(3i_1+i_2)$，其中 $_{j=0}0\le i_2\le 2$。由于 i_0-j_0 可被 $3|\alpha^3|$整除， $i_2=j_2$。由于 $x^{|\alpha|}$、 $y^{|\alpha|}$、 $z^{|\alpha|}$ 和 $x^{|\alpha^3|}y^{|\alpha^3|}z^{|\alpha^3|}$是 $|\alpha|$的中心元素，且$|\alpha|=3|\alpha^3|$，可知存在某个 $\gamma\in k$,

$$\lambda_{i_0,j_0,k_0}x^{i_0}y^{j_0}z^{k_0}=\gamma\left(x^{|\alpha|}\right)^{i_1}\left(y^{|\alpha|}\right)^{j_1}\left(z^{|\alpha|}\right)^{k_1}\left(x^{|\alpha^3|}y^{|\alpha^3|}z^{|\alpha^3|}\right)^{i_2},$$

它由 $x^{|\alpha|}$、 $y^{|\alpha|}$、 $z^{|\alpha|}$ 和 $x^{|\alpha^3|}y^{|\alpha^3|}z^{|\alpha^3|}$生成，因此也由 $x^{|\alpha|}$、 $y^{|\alpha|}$、 $z^{|\alpha|}$ 和 $xyz+(1-\alpha^3)^{-1}x^3$ 生成。

假设 i_0-j_0 不能被 $3|\alpha^3|$ 整除，而 i_0-j_0-3h 能被 $3|\alpha^3|$整除。由于 j_0 能被 $|\alpha^3|$整除，因此 i_0-3h 能被 $|\alpha^3|$整除。由于 $j_0=|\alpha^3|(3j_1+j_2)$，存在一个非负整数 i_1，使得 $i_0-3h=|\alpha^3|(3i_1+j_2)$。由于 $x^{|\alpha|}$、 $y^{|\alpha|}$、 $z^{|\alpha|}$、 $x^{|\alpha^3|}y^{|\alpha^3|}z^{|\alpha^3|}$和 $xyz+(1-\alpha^3)^{-1}x^3$ 都是 A'的中心中的元素，与前一种情形一样，存在 $_h\gamma\in K$，使得 $\sum \lambda_{i_0-2j,\ j_0+j,\ k_0+j}x^{i_0-2j}y^{j_0+j}z^{k_0+j}$ 等于 $_{j=0}$

$$\gamma\left(xyz+(1-\alpha^3)^{-1}x^3\right)^h x^{|\alpha|i_1}y^{|\alpha|j_1}z^{|\alpha|k_1}\left(x^{|\alpha^3|}y^{|\alpha^3|}z^{|\alpha^3|}\right)^{i_2},$$

其由 $x^{|\alpha|}$、 $y^{|\alpha|}$、 $z^{|\alpha|}$、 $x^{|\alpha^3|}y^{|\alpha^3|}z^{|\alpha^3|}$ 和 $xyz+(1-\alpha^3)^{-1}x$ 生成。 ^{3}.

假设对于每个 $j<|\alpha^3|-1$， i_0-j_0-3j都不能被 $3|\alpha^3|$ 整除。那么 $h=|\alpha^3|-1$, 因此 $_h$，进而 $\sum \alpha^{3\nu}=0$，并由 (ii) 得 $\lambda_{i_0-2h,\ j_0+h,\ k_0+h}\neq 0$。因此，由 (ii) 得， i_0-j_0-3h 可被$_{\nu=0}{}_h$整除 $3|\alpha^3|$。所以，如前一段所述， $\sum \lambda_{i_0-2j,\ j_0+j,\ k_0+j}x^{i_0-2j}y^{j_0+j}z^{k_0+j}$ 由$_{j=0}x^{|\alpha|}$、 $y^{|\alpha|}$、 $z^{|\alpha|}$、 $x^{|\alpha^3|}y^{|\alpha^3|}z^{|\alpha^3|}$ 和 $xyz+(1-\alpha^3)^{-1}x^3$生成，故由 $x^{|\alpha|}$、 $y^{|\alpha|}$、 $z^{|\alpha|}$ 和$xyz+(1-\alpha^3)^{-1}x^3$生成。

(2)：情形 3。假设 $|\alpha|$是无限的。我们来证明，任意元素 $X=\sum \lambda_{i,j,k}x^iy^jz^k{}_{i+j+k=d}$

由归纳法可知， A'的中心由 $g=xyz+(1-\alpha^3)^{-1}x^3$ 生成，其中归纳变量为 d 以及非零系数的个数。根据 (i)，若 $j\neq k$，则 $\lambda_{i,\ j,\ k}$ 必须为 0。假设 i_0 是满足 $\lambda_{i_0,\ j_0,\ j_0}$ 为非零系数且 $i_0+2j_0=d$ 的最大值。若 j_0 非零，则由

j_0-1(ii) 以及 $\lambda_{i_0+2,\ j_0-1,\ j_0-1}=0$ 这一事实可知 $\alpha^{i_0-3j_0+2}\sum\alpha^{3\nu}=0$，这与 $\nu=0h$ 矛盾，因为 $|\alpha|$ 是无限的。因此 $j_0=0$。由此可得 $X=\sum\lambda_{i_0-2j,\ j,\ j}x^{i_0-2j}y^jz^j$，其中 h 是满足 $i_0-3h\in\{0,1,2\}$ 的$j=0h$ 整数。于是，项 $\sum\lambda_{i_0-2j,\ j,\ j}x^{i_0-2j}y^jz^jj=0$ 的系数满足与项 $(xyz+(1-\alpha^3)^{-1}x^3)^h$ 的系数相同的关系，因此

$$X=\gamma\left(xyz+(1-\alpha^3)^{-1}x^3\right)^h x^{i_0-3h}$$

对于某个 $\gamma\in k$。由于 X 和 $xyz+(1-\alpha^3)^{-1}x^3$ 是 A'的中心中的元素，且 $|\alpha|$ 是无限的，因此 $i_0=3h$ 成立。因此， X 由 $g=xyz+(1-\alpha^3)^{-1}x^3$生成。□

4. Main Results

最后，在本节中，我们证明注 2.22 中的猜想对 S' 型代数成立。为此，我们需要证明第 2.2 小节中定理 2.23 和定理 2.24 的相同结论。对于 S' 型三维量子多项式代数，我们有如下说明：

注 4.1. 设 $A=\mathcal{A}(E,\sigma)=k\langle x,y,z\rangle/(f_1,f_2,f_3)$ 为一个 S' 型三维量子多项式代数，其中

$$\begin{cases} f_1=yz-\alpha zy+x^2,\\ f_2=zx-\beta xz,\\ f_3=xy-\beta yx \quad (\alpha,\beta\in k,\ \alpha\beta^2\neq 0,1)\end{cases}$$

（参见 [IMa1、定理 3.2], [IMa2、命题 3.1]中的表1）。对于一个 S' 型三维量子多项式代数 $A=\mathcal{A}(E,\sigma)$，存在一个 S' 型三维 Calabi-Yau 量子多项式代数 A'，使得根据引理 2.16, $\mathrm{grmod}\,A\cong\mathrm{grmod}\ A'$，从而 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A\cong\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A'$，其中 $A'=\mathcal{A}(E,\sigma')=k\langle x,y,z\rangle/(g_1,g_2,g_3)$;

$$\begin{cases} g_1=yz-\alpha zy+x^2,\\ g_2=zx-\alpha xz,\\ g_3=xy-\alpha yx \quad (\alpha^3\neq 0,1)\end{cases}$$

（参见 [IMa2、定理 3.4]中的表2）。

定理 2.23 的相同结论对 S' 型代数也成立：

定理 4.2。设 $A=\mathcal{A}(E,\sigma)$ 是一个 S' 型三维量子多项式代数。那么以下命题等价：

（1） $\|\sigma\|<\infty$。（2）$\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A$ 在其中心上有限。（3） A 的 Beilinson 代数 ∇A 是 2-表示驯的。

证明。令 A 为一个 S' 型三维量子多项式代数，且令 A' 为如注 4.1 中所述的一个 S' 型三维 Calabi-Yau 量子多项式代数。

考虑到 ν 的中山自同构 A' 是恒等映射，因为 A' 是 Calabi–Yau 代数，根据 [Mo4、引理 4.16（4）、定理 1.6（2）], , 我们有

$$\Pi(\nabla A) \cong \Pi(\nabla A') \cong (A')^{[3]}$$

其中，Π（∇A）分别是 ∇A （$\nabla A'$）的前射影代数，而（A'）$^{[3]}$ 是 A' 的三阶准 Veronese 代数。

(1) $\Longleftrightarrow$ (2)：这由引理 2.18 得出。

(1) $\Longrightarrow$ (3)：如果 $\|\sigma\| < \infty$，那么根据引理 2.17 和命题 2.14 (2)，$|\sigma'|(= |\alpha^3|) = \|\sigma'\| = \|\sigma\| < \infty$。因此，根据定理 2.4，$A'$ 在 $Z(A')$ 上有限。由命题 3.2 (1)可知，当 $g = xyz + (1-\alpha^3)^{-1}x^3 \in A_3$ 时，$Z(A') = k[x^{|\alpha|}, y^{|\alpha|}, z^{|\alpha|}, g]$ 是诺特的。我们注意到，$|\sigma'| = |\alpha^3| < \infty \iff |\alpha| < \infty$。因此，根据引理 2.27，$(A')^{[3]}$ 是右诺特的，并且在其中心上有限。由 $(A')^{[3]} \cong \Pi(\nabla A') \cong \Pi(\nabla A)$ 可知，$\Pi(\nabla A)$是右诺特的，并且在其中心上有限。因此，根据定义 2.21，∇A 是 2-表示驯性的。

(3) $\Longrightarrow$ (1)：如果 $\|\sigma\| = \infty$，那么 $\|\sigma'\| = |\sigma'| = |\alpha| = \infty$，因此，根据命题 3.2 (2)，$Z(A') = k[g]$，其中 $g = xyz + (1-\alpha^3)^{-1}x^3 \in A_3$。根据引理 2.26，

$$Z(\Pi(\nabla A')) = Z((A')^{[3]}) = Z(A')^{[3]} = k[g]^{(3)} = k[w]$$

其中 $\deg w = 1$，$Z(A')^{[3]}$ 是 $Z(A')^{[3]}$ 的第 3 个准 Veronese 代数，而 $k[g]^{(3)}$ 是 $k[g]$ 的第 3 个准 Veronese 代数。注意，Gelfand–Kirillov 维数 $\Pi(\nabla A')$ = Gelfand–Kirillov 维数 $A' = 3$。另一方面，Gelfand–Kirillov 维数 $Z(\Pi(\nabla A'))$ = Gelfand–Kirillov 维数 $k[w] = 1$。因此，$\Pi(\nabla A') \cong \Pi(\nabla A)$ 在其中心上不是有限的。根据定义 2.21，∇A 不是 2-表示驯性。□

定理 2.24 的相同表述也适用于 S’ 型代数：

定理 4.3. 设 $A = \mathcal{A}(E, \sigma)$ 是一个 S’ 型三维量子多项式代数。

(1) 如果 A 的 Beilinson 代数 ∇A 不是 2-表示驯性，那么 ∇A 上简单 2-正则模的同构类由 $E \subsetneq \mathbb{P}^2$ 的点集参数化。(2) 如果 A 的 Beilinson 代数 ∇A 是 2-表示驯性的，那么 ∇A 上简单 2-正则模的同构类由 $\mathbb{P}^2$ 的点集参数化。

证明. 设 A 为一个 S’ 型三维量子多项式代数，A' 为一个如注 4.1 中所述的 S’ 型三维 Calabi-Yau 量子多项式代数。

(1)：如果 ∇A 不是 2-表示驯性的，那么根据定理 4.2，$\|\sigma\| = \infty$。因此，由引理 2.25，∇A 上简单 2- 正则模的同构类由 $E \subsetneq \mathbb{P}^2$ 的点集参数化。

(2)：如果 ∇A 是 2-表示驯性，那么根据定理 4.2，$\|\sigma\|(= |\alpha^3|) < \infty$。（注意，$|\alpha| := l < \infty$ 成立。）由于 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}} A \cong \mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}} A'$ 成立，因此 $|\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}} A| = |\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}} A'|$ 也成立。我们很容易验证 $x \in A'_1$ 是正规元。由引理 2.28 可知，

$$|\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}} A| = |\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}} A'| = |\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}} A'/(x)| \bigsqcup |\mathrm{Spec}_{\mathrm{nc}} A'[x^{-1}]_0|.$$

由于 $A'/(x) \cong k\langle y, z\rangle/(yz - \alpha zy)$ 是二维 AS-正则代数（[AS，第172]页），我们有 $|\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}} A'/(x)| = |\mathbb{P}^1|$。此外，我们断言 $A'[x^{-1}]_0 \cong k\langle u, v\rangle/(uv - \alpha^3 vu + \alpha)$,

其中 $\alpha^3 \neq 0$、1、 $u := yx^{-1}$、 $v := zx^{-1}$，而 $k\langle u、\ w\rangle/(uw - \alpha wu - 1)$ 被称为量子 Weyl 代数。事实上，

$$\begin{cases} x^{-1}g_1x^{-1} = x^{-1}yzx^{-1} - \alpha x^{-1}zyx^{-1} + 1, \\ x^{-1}g_2x^{-1} = x^{-1}z - \alpha zx^{-1}, \\ x^{-1}g_3x^{-1} = yx^{-1} - \alpha x^{-1}y. \end{cases}$$

因此，我们有如下关系；

$$\begin{aligned} uv &= (yx^{-1})(zx^{-1}) = yx^{-1}zx^{-1} \\ &= \alpha x^{-1}yzx^{-1} = \alpha x^{-1}(\alpha zy - x^2)x^{-1} \\ &= \alpha^2 x^{-1}zyx^{-1} - \alpha = \alpha^3 zx^{-1}yx^{-1} - \alpha \\ &= \alpha^3 vu - \alpha. \end{aligned}$$

（将该关系 $uv - \alpha^3 vu + \alpha = 0$ 两边除以 $-\alpha$（$\neq 0$），得到 $-\dfrac{1}{\alpha}uv + \alpha^2 vu - 1 = 0$。接下来，将 $w := -\alpha v$ 代入此方程，得到方程 $uw - \alpha wu - 1 = 0$。）由于 $A'[x^{-1}]_0 \cong k\langle u,\ w\rangle/$（$uw - \alpha wu - 1$），下列方程成立；

$$|\mathsf{Spec}_{\mathrm{nc}}\, A'[x^{-1}]_0| = |\mathsf{Spec}_{\mathrm{nc}}\, K\langle u, w\rangle/(uw - \alpha wu - 1)| = |\mathbb{A}^2|.$$

事实上，根据 [HW，命题 2.6]（[DGO，定理 5.6]），方程 $wu - \alpha uw = 1$ 的任意不可约矩阵解 (A, B)，其中 $BA \neq AB$，等价于解 $(U_\lambda, W_{\lambda,\ \eta})$ 或 (U, W_β)，其中 U_λ，$W_{\lambda,\ \eta}$，U 和 W_β 是矩阵 $l \times l$，对应于 $\lambda \in k\backslash\{0\}/\langle\alpha\rangle$，$\eta \in k\backslash\{0\}$，$\beta \in k$，如下所示；

$$U_\lambda = \lambda \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha^l \end{pmatrix},\ W_{\lambda,\eta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-\alpha)\alpha\lambda} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-\alpha)\alpha^2\lambda} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(1-\alpha)\alpha^{l-2}\lambda} & 1 \\ \eta & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(1-\alpha)\alpha^l\lambda} \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix},\ W_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta \\ \sum_{i=0}^{l-2}\alpha^i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{l-3}\alpha^i & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，方程 $wu - \alpha uw = 1$ 的不可约解集合对应于

$$X := \{(U_\lambda,\, W_{\lambda,\eta}) \mid \lambda \in k\backslash\{0\}/\langle\alpha\rangle,\, \eta \in k\backslash\{0\}\} \cup \{(U,\, W_\beta) \mid \beta \in k\}.$$

这里，我们考虑以下映射

$$\mathbb{A}^2 = \{(\lambda, \eta) \mid \lambda,\, \eta \in k\} \longrightarrow X;\ (\lambda, \eta) \longmapsto \begin{cases} (U_\lambda,\, W_{\lambda,\eta}) & \text{if } \lambda \in k\backslash\{0\}/\langle\alpha\rangle \text{ and } \eta \in k\backslash\{0\}, \\ (U,\, W_\lambda) & \text{if } \eta = 0. \end{cases}$$

那么，上述映射是一个双射，因此 $|\mathsf{Spec}_{\mathrm{nc}}\, k\langle u,w\rangle/(uw-\alpha wu-1)| = |\mathbb{A}^2|$ 成立。因此，

$$|\mathsf{Proj}_{\mathrm{nc}}A| = |\mathsf{Proj}_{\mathrm{nc}}A'| = |\mathbb{P}^1| \bigsqcup |\mathbb{A}^2| = |\mathbb{P}^2|.$$

□

根据定理 4.2 和定理 4.3，注 2.22 中的猜想对 S’ 型成立：

定理 4.4. 对于一个 S’ 型三维量子多项式代数 A，以下条件等价：

(1) $\mathsf{Proj}_{\mathrm{nc}}A$ 在其中心上是有限的。(2) A 的 Beilinson 代数 ∇A 是 2-表示驯性的。
(3) ∇A 上简单 2-正则模的同构类由 $\mathbb{P}^2$ 参数化。

致谢。作者获得了日本学术振兴会青年科学研究资助金（21K13781）的资助。

References

[AOU] T. Abdelgadir、S. Okawa 和 K. Ueda，《非交换射影平面的紧模空间》，预印本（arXiv:1411.7770）。[AS] M. Artin 和 W. Schelter，《全局维数为 3 的分次代数》，《数学进展》66（1987），171–216。[ATV1] M. Artin、J. Tate 和 M. Van den Bergh，《与椭圆曲线自同构相关的一些代数》，Grothendieck Festschrift，第 1 卷，Progress in Mathematics 第 86 卷（Birkhäuser，巴塞尔，1990），33–85。[ATV2] M. Artin、J. Tate 和 M. Van den Bergh，《维数 3 的正则代数上的模》，《数学发明》106（1991），第 2 期，335–388。[AZ] M. Artin 和 J. J. Zhang，《非交换射影概形》，《数学进展》109（1994），第 2 期，228–287。[DGO] Y. A. Drozd、B. L. Guzner 和 S. A. Ovsienko，《广义 Weyl 代数上的权模》，《代数杂志》184（1996），第 2 期，491–504。[HIO] M. Herschend、O. Iyama 和 S. Oppermann，《n-表示无限代数》，《数学进展》252（2014），292–342。[HW] B. Heider 和 L. Wang，《由矩阵给出的单位根处量子 Weyl 代数的不可约表示》，《代数通讯》42（2014），第 5 期，2156–2162。[IMa1] A. Itaba 和 M. Matsuno，《三维二次 AS-正则代数的定义关系》，《冈山大学数学杂志》63（2021），61–86。[IMa2] A. Itaba 和 M. Matsuno，《平面三次曲线的几何代数的 AS-正则性》，《澳大利亚数学会杂志》112（2022），第 2 期，193–217。[IMo] A. Itaba 和 I. Mori，《在其中心上有限的量子射影平面》，《加拿大数学通报》66（2023），第 1 期，53–67。[MiMo] H. Minamoto 和 I. Mori，《AS-Gorenstein 代数的结构》，《数学进展》226（2011），第 5 期，4061–4095。[Mo1] I. Mori，《某些量子射影平面的中心》，《代数杂志》204（1998），第 1 期，15–31。[Mo2] I. Mori，《非交换射影概形与点概形》，《代数、环及其表示》，World Scientific，新泽西州哈肯萨克（2006），215–239。[Mo3] I. Mori，《B-构造与 C-构造》，《代数通讯》41（2013），第 6 期，2071–2091。[Mo4] I. Mori，《S型二维量子 Beilinson 代数上的正则模》，《数学杂志》279（2015），第 3–4 期，1143–1174。[MU] I. Mori 和 K. Ueyama，《几何 AS-正则代数的分次莫里塔等价》，《格拉斯哥数学杂志》55（2013），第 2 期，241–257。

Institute of Arts and Sciences, Tokyo University of Science, 6-3-1 Niijuku, Katsushika-ku, Tokyo, 125-8585, Japan电子邮箱地址：itaba@rs.tus.ac.jp