arXiv:2304.02254v1 [math.AP] 5 Apr 2023

缓慢收敛演化方程的渐近性

BEOMJUN CHOI 和 PEI-KEN HUNG

Abstract. 我们研究椭圆型或抛物型非线性演化方程的缓慢收敛解。这些方程源于对几何变分问题中孤立奇点的研究。在假设阿达姆斯–西蒙正性条件的情况下，已有研究构造出了缓慢收敛解。在本研究中，我们确定了缓慢收敛解存在的一个必要条件，并将其称为阿达姆斯–西蒙非负性条件。此外，我们刻画了这些解的收敛速率和收敛方向。我们的结果部分证实了托姆关于无限维问题背景下的梯度猜想。

1. Introduction

分析解在奇点附近的行为，对于理解极小曲面、调和映射和平均曲率流等几何方程至关重要。许多未解决问题都可归结为对奇点形成及其渐近行为的研究。在 LeonSimon的开创性工作中 [Sim83, Sim85], , 首次提出了使用来自实代数几何的 Lojasiewicz梯度不等式 [Loj63] ，并证明了某类椭圆型和抛物型方程的吹胀极限的唯一性。这种唯一性表明，当解趋近于奇点或无穷远处时，它会收敛到唯一的切锥或切流。

一个自然的后续问题是研究收敛速率，以及描述解与极限之间差异的下一阶渐近行为。这往往是进一步分析的重要起点。例如，近年来关于几何流古解分类 [SAS20][DH21][BCS22][CM22] 以及极小曲面的完备非紧解 [SS86] 的研究进展，都建立在高阶渐近分析及其改进之上。对于抛物型问题中的奇点形成，奇点处的高阶渐近行为给出了奇点集在其邻域内的结构性结果[SX22][Gan21]。由于吹起极限的唯一性意味着到达时间函数二阶可微 [CM15, CM18], ，高阶渐近行为和收敛速率与到达时间函数的进一步正则性密切相关 [KS06][Ses08]。

当解以指数速率收敛时，收敛速率和方向（即极限处的割线）大多已得到理解。这是因为解指数衰减时，方程可以很好地由其线性化近似。然而，如果极限不具可积性，解就可能以代数方式缓慢收敛。在 [AS88], 中，Adams 和 Simon 发现了极限上的一个充分条件（后来称为 Adams-Simon 正性条件，或简称 AS_p 条件），并据此构造了形如（1.1）的椭圆方程的缓慢收敛解。Carlotto、Chodosh 和 Rubinstein [CCR15]找到了满足 AS_p 条件的归一化 Yamabe 泛函临界点的显式例子，并构造了缓慢收敛的归一化 Yamabe 流。正如 [CCR15, p.1533], 中提出的问题，理解缓慢收敛解的一般行为很有意义。更具体地说，可以探究这类解是否必然满足 Adams-Simon 正性条件，以及其高阶渐近行为是否遵循 [AS88] 和 [CCR15] 构造中采用的设想。

我们通过证明 Adams-Simon 的“非负性”条件是缓慢收敛解存在的必要条件来回答这个问题。此外，当满足正性条件时，收敛速率和高阶渐近行为与此前构造的例子一致。（详细陈述见定理 2.3 和 2.5。）我们关注以下形式的椭圆方程和抛物方程

$$u'' - mu' + \mathcal{M}_\Sigma u = N_1(u), \tag{1.1}$$

and

$$u' - \mathcal{M}_\Sigma u = N_2(u). \tag{1.2}$$

其中， $\mathcal{M}_\Sigma$ 是解析泛函 $\mathcal{F}_\Sigma$ 的 Euler-Lagrange 算子，如 (2.2)-(2.3) 所示； m 是一个非零常数；并假设 $N_1(u)$和 $N_2(u)$满足结构条件 (2.6)。非零常数 m的出现，说明方程 (1.1) 会出现在几何变分问题孤立奇点的研究中，或用于描述无穷远处的渐近行为。特别是，极小曲面、调和映射 [Sim83, Sim85, AS88] 以及 G_2 流形 [Che18] 都属于这一类。方程 (1.2) 描述一种几何流，当 t 趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$. 时，该流收敛到一个平稳解。例如，（重标度的）平均曲率流（见附录 B）和调和映射热流 [CM22] 都可以用 (1.2) 描述。我们的结果也适用于归一化 Yamabe 流。更多详情见注释 2.9 (3)。

本文的主要结果，即定理 2.3–2.6，可视为对 Thom 梯度猜想的推广，我们将在本段中讨论该猜想。设 $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是具有解析势 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的梯度流 $x' = -\nabla f(x)$ 的一个解，并假设当 $t \to \infty$ 时 x 收敛到原点。在 [Tho89], Thom 猜想中，割线 $x/|x|$ 应在 $t \to \infty$ 时收敛到某一方向 $\theta_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ 。Kurdyka-Mostowski-Parusi ´nski [KKP00] 通过证明一个更强的结果——割线在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 中具有有限长度——解决了这一猜想。然而，精确的收敛速率尚未被完全揭示。若 θ_0不属于 $\ker(\nabla^2 f(0))$，则可得出 θ_0必须是 Hessian 对应于正特征值 λ 的特征向量，并且解以高阶渐近 $|x(t) - ce^{-\lambda t}\theta_0| = o(e^{-\lambda t})$ 衰减，对某个 $c \in \mathbb{R}$。然而，若 θ_0 属于 Hessian 的核，我们仅仅知道收敛发生在代数速率 $t^{-\alpha_1} \lesssim |x| \lesssim t^{-\alpha_2}$ 之间，对某个 $0 < \alpha_2 \le \alpha_1 \le 1$。目前尚不清楚每个解是否具有特定的收敛速率 $|x| \sim t^{-\gamma}$ 某个 $\gamma > 0$。

让我们简要总结一下本文的主要动机和结果。在缓慢衰减的情形下，该方程可以很好地近似为 $\mathcal{L}_\Sigma$的核上的梯度流，其中 $\mathcal{M}_\Sigma$ at$u \equiv 0$的线性化为 $\mathcal{L}_\Sigma$。势函数 $f : \ker \mathcal{L}_\Sigma \approx \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$ 由通过 Lyapunov-Schmidt 约化对 $\mathcal{F}_\Sigma$ 的拉回给出（见命题 2.1）。在原点附近，流的动力学将由势函数 f展开中出现的第一个非常数齐次多项式决定。我们将这个多项式记为 f_p。我们用 $p \ge 3$ 表示该多项式的次数，并称其为可积阶。当考察梯度流 $x' = -\nabla f_p(x)$时，只要存在一个临界点 $f_p := f_p|_{\mathbb{S}^{J-1}}$ 且其临界值为正，就可以直接找到一个趋于原点的径向解。 [AS88] 和 [CCR15] 的缓慢衰减解，是通过对这类径向拟设进行扰动得到的。

在定理 2.3 和 2.5 中，我们证明了缓慢衰减的解 $u(\omega, t)$ 的收敛速率存在二分性：要么 $t^{\frac{1}{p-2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^2}$ 收敛到一个正数，要么发散到无穷大。在第一种情况下，我们进一步证明 $u(\cdot,t)/\|u(\cdot,t)\|_{L^2}$ 光滑地收敛到 f_p 的一个临界点，即 $v \in \ker \mathcal{L}_\Sigma$，且临界值为正。这表明割线 $u(\cdot,t)/\|u(\cdot,t)\|_{L^2}$ 存在极限，并证实了相关情形下的 Thom 梯度猜想。注意，该定理也可以解释为高阶渐近关系 $u(t) = ct^{-\frac{1}{p-2}}v + o(t^{-\frac{1}{p-2}})$，其中 c 是 p 和 $f_p(v)$ 的一个常数。其次，第二种情形表明，某个解的衰减速率甚至可能比 $t^{-\frac{1}{p-2}}$ 更慢。正如势函数 $f = x_1^4 + x_2^8$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的经典梯度流所显示的那样（这里 $p = 4$，但某个解可能以速率 $t^{-\frac{1}{8-2}}$ 衰减），第二种情形确实可能发生。我们证明，只有当 f_p 存在临界值为零的临界点，并且割线 $u(\cdot,t)/\|u(\cdot,t)\|_{L^2}$ 随着 $t \to \infty$ 在这些临界点上聚积时，第二种情形才会发生。在第二种情形下，割线 $u(\cdot,t)/\|u(\cdot,t)\|_{L^2}$ 是否具有唯一极限仍是一个悬而未决的问题；因此，Thom 猜想是否对所有缓慢衰减的解都成立，也尚未得到解决。我们还想指出，定理 2.5 对有限维梯度流而言同样是新的。对于由 $x' = -\nabla f(x)$ 给出的有限维梯度流，该定理表明，存在一个仅依赖于 f 的整数 $p \ge 3$ ，使得任何缓慢收敛的解都满足：对于某个 $c \in (0,\infty)$，要么 $t^{\frac{1}{p-2}}|x| = c(1 + o(1))$，要么 $t^{\frac{1}{p-2}}|x| \to \infty$。

在定理 2.4 和 2.6 中，我们分别证明了椭圆方程和抛物方程的快速（指数）衰减解的高阶渐近行为。研究人员一直期待这类结果，并且已针对 [SS86][CM22] 等具体问题得到相关结论。然而，我们未能找到涵盖一般形式 (1.1) 和 (1.2) 的适当文献，因此在第 4 节给出了证明。

椭圆方程 (1.1) 可视为二阶常微分方程 $u''-mu'+\mathcal{L}_\Sigma u=0$ 的扰动。假设$\mathcal{L}_\Sigma$ 存在一个大于 $4^{-1}m^2$ 的特征值，则某个解可能在指数衰减的同时发生振荡。对于 Simons 锥上的极小图，这类解已在 $\mathbb{R}^4$ 和 $\mathbb{R}^6$中构造出来。更多细节见 [CP18, 注 1.21] 和 [BDGG69] 。因此，Thom 梯度猜想的原始形式在椭圆问题中并不成立。此外，如果 $4^{-1}m^2$ 是 $\mathcal{L}_\Sigma$ 和 $m<0$的特征值，则可能发生共振，从而产生以速率 $te^{2^{-1}mt}$衰减的解。值得注意的是， [HS85] 讨论了稳定（但非严格稳定）极小锥上的极小图中出现这种情况的可能性。

本文结构如下。第 2 节介绍记号、条件、线性化算子 $\mathcal{L}_\Sigma$ 的谱性质以及主要定理。第 3 节将椭圆问题 (1.1) 写成函数空间上的一阶常微分方程组。第 4 节分别证明定理 2.4 和定理 2.6，它们涉及椭圆方程和抛物方程的指数衰减解。第 5 节通过命题 5.1 说明，(1.1) 的缓慢收敛解受一个带小扰动的有限维梯度流支配。抛物型对应结果——命题 6.1——在第 6 节证明。第 7 节通过分析一个带小扰动的有限维梯度流，运用受 [KKP00] 启发的 Lojasiewicz 论证，完成定理 2.3 和定理 2.5 的证明。附录 A 收录了本文所需的辅助工具。附录 B 说明（经重标度的）平均曲率流可以写成形式 (1.2)。

2. Preliminary

下面介绍研究 (1.1) 和 (1.2) 所需的框架，并陈述主要结果。设 Σ 是一个闭的 n 维黎曼流形， $d\mu$ 是 Σ 上的光滑体积形式，且与度量诱导的体积形式相互绝对连续。设 $\mathrm{V}\to\Sigma$ 是一个光滑向量丛，配备光滑内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。对于 $u\in\mathrm{V}$，记 $|u|^2:=\langle u,u\rangle$。对于 $\omega\in\Sigma$，用 V_ω 表示其上的纤维。设 ∇ 是 V 上与内积相容的联络。

我们用 $L^2(\Sigma;\mathrm{V})$ 表示 V 的 L^2 截面空间，其中的截面相对于 $d\mu$ 定义。也就是说，截面 u 属于 $L^2(\Sigma;\mathrm{V})$ 当且仅当

$$\|u\|_{L^2}^2:=\int_\Sigma |u|^2\,d\mu<\infty.$$

对于 $\ell\in\mathbb{N}_0$，我们用 $H^\ell(\Sigma;\mathrm{V})$ 表示满足以下条件的截面集合

$$\|u\|_{H^\ell}^2:=\sum_{i=0}^{\ell}\int_\Sigma \left|\nabla^i u\right|^2\,d\mu<\infty.$$

对于 $-\infty<a<b\le\infty$，我们定义 $Q_{a,b}:=\Sigma\times[a,b)$，并在 $Q_{a,b}$ 上赋予乘积度量。我们将 V 经投影 $Q_{a,b}\to\Sigma$ 的拉回丛记为 $\widetilde{\mathrm{V}}$。对于 $u\in C^s(Q_{a,b};\mathrm{V})$ 和 $t\in[a,b)$，$u(t)\in C^s(\Sigma;\mathrm{V})$ 通过 $u(t)(\omega):=u(\omega,t)$ 定义。其 H^ℓ-范数记为

$$\|u\|_{H^\ell}(t):=\|u(t)\|_{H^\ell}.$$

此外，

$$\|u\|_{C^s}(t):=\sup_{\omega\in\Sigma}\sup_{k+\ell\le s}\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}\nabla^\ell u(\omega,t)\right|. \tag{2.1}$$

这里请注意，时间导数的范数包含在 $\|\cdot\|_{C^s}(t)$ 的定义中。我们经常用 u' 作为 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 的缩写。

我们对 $\mathcal{M}_\Sigma$ 的假设与 [Sim83]中的假设几乎完全相同。唯一的区别在于，体积形式 $d\mu$不一定是由黎曼度量诱导的。设 $\mathcal{F}_\Sigma$ 是定义在 $u\in C^1(\Sigma;\mathrm{V})$上的泛函，其满足

$$\mathcal{F}_\Sigma(u):=\int_\Sigma F(\omega,u,\nabla u)\,d\mu. \tag{2.2}$$

此处，被积函数 F 满足以下条件：

(1) $F=F(\omega,z,p)$ 是定义在 $\mathrm{V}\times(T\Sigma\otimes\mathrm{V})$ 的一个包含零截面的开集上的光滑函数。

(2) 对每个 $\omega \in \Sigma$, $F(\omega,\cdot,\cdot)$ 在 $\mathrm{V}_\omega \times (T_\omega\Sigma \otimes \mathrm{V}\omega)$ 上解析。(3) F 满足 Legendre-Hadamard 椭圆性条件

$$D_p^2 F(\omega,0,0)[\eta\otimes\xi,\eta\otimes\xi] \geq c|\eta|^2|\xi|^2,$$

对于 $c>0$，其独立于 $\omega\in\Sigma$、$\eta\in T_\omega\Sigma$ 和 $\xi\in \mathrm{V}\omega$。

$\mathcal{M}_\Sigma$ 是定义定义为 $\mathcal{F}_\Sigma$ 的负欧拉–拉格朗日算子。也就是说，对于任意 $\zeta\in C^\infty(\Sigma;\mathrm{V})$,

$$\int_\Sigma \langle \mathcal{M}_\Sigma(u),\zeta\rangle \, d\mu = -\frac{d}{ds}\mathcal{F}_\Sigma(u+s\zeta)|_{s=0}. \tag{2.3}$$

我们进一步假设 0是 $\mathcal{F}_\Sigma$ 的临界点。也就是说，我们假设 $\mathcal{M}_\Sigma(0)=0$。我们将 $\mathcal{L}_\Sigma$ 记为 $\mathcal{M}_\Sigma$ 在0处的线性化。显然，$\mathcal{M}_\Sigma(u)$ 与 $\mathcal{L}_\Sigma u$ 之间的差是一个形如

$$\mathcal{M}_\Sigma u - \mathcal{L}_\Sigma u = \sum_{j=0}^{2} c_j\cdot \nabla^j u, \tag{2.4}$$

其中，$c_j = c_j(\omega,u,\nabla u)$ 是光滑的，并且 $c_j(\omega,0,0)=0$。Legendre–Hadamard条件意味着 $\mathcal{L}_\Sigma$ 是椭圆的。特别地，存在一个常数 $C>0$，使得对于任意 $u\in C^2(\Sigma;\mathrm{V})$,

$$\int_\Sigma -\langle \mathcal{L}_\Sigma u,u\rangle + C|u|^2\, d\mu \approx \|u\|_{H^1}^2. \tag{2.5}$$

此外，$\mathcal{L}_\Sigma$ 关于 $d\mu$是自伴的。这可由下式看出:

$$\int_\Sigma \langle \mathcal{L}_\Sigma u, v\rangle \, d\mu = -\frac{\partial^2}{\partial s_1\partial s_2}\mathcal{F}_\Sigma(s_1u+s_2v)\Big|_{s_1=s_2=0}.$$

我们假设 (1.1) 和 (1.2) 中的 $N_1(u)$ 与 $N_2(u)$ 具有如下形式:

$$\begin{aligned} N_1(u) =& a_1\cdot Du' + a_2\cdot u' + a_3\cdot \mathcal{M}_\Sigma(u),\\ N_2(u) =& b_1\cdot \mathcal{M}_\Sigma(u). \end{aligned} \tag{2.6}$$

这里，$a_i = a_i(\omega,u,\nabla u,u')$ 和 $b_1 = b_1(\omega,u,\nabla u)$ 是光滑的，且 $a_i(\omega,0,0,0)=0$ and $b_1(\omega,0,0)=0$; $D=\left\{\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right\}$。

设 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots$ 为 $\mathcal{L}_\Sigma$ 的特征值，$\varphi_1,\varphi_2,\ldots$ 为相应的特征截面，它们构成 $L^2(\Sigma;\mathrm{V})$的一组完备正交基。根据特征值，我们将 $\mathbb{N}$ 分为四部分。

$$\begin{aligned} I_1 :=& \{i\in\mathbb{N}:\lambda_i > 4^{-1}m^2\},\ I_2 := \{i\in\mathbb{N}:\lambda_i = 4^{-1}m^2\},\\ I_3 :=& \{i\in\mathbb{N}:\lambda_i = 0\},\ I_4 := \mathbb{N}\setminus(I_1\cup I_2\cup I_3). \end{aligned} \tag{2.7}$$

注意，I_1, I_2和 I_3是（可能为空的）有限集，且 $\ker\mathcal{L}_\Sigma$ 由 $\{\varphi_i\}_{i\in I_3}$张成。设 J为 I_3的基数，即 $\ker\mathcal{L}_\Sigma$的维数。这意味着对某个 $\iota\in\mathbb{N}_0$，有 $I_3=\{\iota+1,\iota+2,\ldots,\iota+J\}$。

我们分别用 Π^T和 $\Pi^\perp$ 表示 $L^2(\Sigma;\mathrm{V})$到 $\ker\mathcal{L}_\Sigma$和 $(\ker\mathcal{L}_\Sigma)^\perp$ 的正交投影。以下是隐函数定理的一个版本。参见 [Sim96, §3]。

命题2.1（李雅普诺夫–施密特约化）。令 B_ρ 为 $L^2(\Sigma;\mathrm{V})$ 中半径为 ρ 的开球。存在 $\rho>0$ 和一个映射

$$H:\ker\mathcal{L}_\Sigma\cap B_\rho\to C^\infty(\Sigma;\mathbf{V})\cap(\ker\mathcal{L}_\Sigma)^\perp$$

使得以下陈述成立。首先，对于任意 $k\geq 2$ 和 $\alpha\in(0,1)$，H 是从 $\ker\mathcal{L}_\Sigma\cap B_\rho$到 $C^{k,\,\alpha}(\Sigma;\mathrm{V})$的解析映射。其次,

$$H(0)=0,\ DH(0)=0.$$

最后,

$$\begin{cases} \Pi^\perp\mathcal{M}_\Sigma(v+H(v))=0,\\ \Pi^T\mathcal{M}_\Sigma(v+H(v)) = -\nabla f(v). \end{cases}$$

此处 f: $\ker\mathcal{L}_\Sigma\cap B_\rho\to\mathbb{R}$ 由 $f(v):=\mathcal{F}_\Sigma(v+H(v))$ 给出。

函数 f 在本文中起着至关重要的作用，我们将其称为约化泛函。约化泛函 f是实解析的，且满足 $\nabla f(0) = 0$和 $\nabla^2 f(0) = 0$。通过上述恒等关系，我们可以将 f视为定义在 $\mathbb{R}^J$ 中一个开球上的解析函数。

$$(x_1, x_2, \dots, x^J) \mapsto \sum_{j=1}^{J} x_j \varphi_{\iota+j}. \tag{2.8}$$

让我们回顾一下可积条件。如果对于任意 $v \in \ker \mathcal{L}_\Sigma$，都存在一族 $\{v_s\}_{s\in(0,1)} \subset C^2(\Sigma; V)$，使得 $v_s \to 0$ 属于 $C^2(\Sigma; V)$， $\mathcal{M}_\Sigma(v_s) \equiv 0$ 且 $\lim_{s\to 0} v_s/s = v$ 属于$L^2(\Sigma; V)$，那么核 $\ker \mathcal{L}_\Sigma$ 就称为可积。众所周知 [AS88, 引理 1] 指出，当且仅当约化泛函f 为常数时，$\ker \mathcal{L}_\Sigma$ 是可积的。此外，若满足可积条件，则方程 (1.1) 或 (1.2) 的任何衰减解都呈指数衰减 [AS88, CCR15]。因此，在考虑非指数衰减解时，可积条件必然不成立。也就是说，约化泛函 f 不是常函数。特别地，存在一个整数 $p \geq 3$ 使得

$$f = f(0) + \sum_{j\geq p} f_j, \tag{2.9}$$

其中， f_j 是次数为 j 和 $f_p \not\equiv 0$的齐次多项式。这个整数 p 称为可积性阶数 [CCR15]。

如引言中所述， f_p 的梯度流在渐近行为中起主导作用。令$\hat{f}_p$ 为 f_p 在 $\{w \in \ker \mathcal{L}_\Sigma$ 上的限制：$\|w\|_{L^2} = 1\} \approx \mathbb{S}^{J-1}$。考虑 $\hat{f}_p$的临界点：

$$\mathbf{C} := \left\{ w \in \ker \mathcal{L}_\Sigma \,:\, \|w\|_{L^2} = 1 \text{ and } w \text{ is a critical point of } \hat{f}_p \right\}. \tag{2.10}$$

如果 $w \in$C 满足 $f_p(w) > 0$，则可以验证得出。

$$x(t) = [p(p-2) f_p(w)(t+c)]^{-\frac{1}{p-2}} w$$

成为流 $x' = -\nabla f_p(x)$的径向解。定理 2.3 和 2.5 中的高阶渐近行为将以此类解为模型。

定义 2.2（Adams–Simon 条件。参见 [AS88] 中的 (4.1)）。若存在 $w \in$ C 使得 $f_p(w) \geq 0$，则称 Σ 满足方程 (1.2) 的 Adams–Simon 非负性条件。若存在 $w \in$ C 使得 $m^{-1} f_p(w) \geq 0$，则称 Σ 满足方程 (1.1) 的 Adams–Simon 非负性条件。

在这两个方程中，Adams-Simons 正性条件的定义方式类似，均要求临界值为正。

我们陈述关于衰减解渐近行为及收敛速率的主要结果。先从椭圆方程 (1.1) 开始。

~定理 2.3（椭圆方程中的慢衰减）。设 $u \in C^\infty(Q_{0,\infty}, V)$ 是方程 (1.1) 的一个解，且 $\|u\|_{C^1}(t) = o(1)$，当 $t \to \infty$ 时不呈指数衰减。那么 Σ 满足方程 (1.1) 的 Adams-Simon 非负条件。此外，以下两种情况之一成立：

(1) 有

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/(p-2)} \|u(t)\|_{L^2} = \beta \in (0, \infty).$$

此外，

$$\lim_{t\to\infty} u(t)/\|u(t)\|_{L^2} = w \text{ in } C^\infty(\Sigma; \mathbf{V}),$$

其中 $w \in$ C 满足 $m^{-1}\hat{f}_p(w) = 1/(p(p-2)\beta^{p-2}) > 0$。

（2）我们有

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/(p-2)} \|u(t)\|_{L^2} = \infty.$$

此外，

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}_{C^k}\left(u(t)/\|u(t)\|_{L^2} \,,\, \mathbf{C} \cap \{w : \hat{f}_p(w) = 0\} \right) = 0 \text{ for all } k \in \mathbb{N}.$$

~定理 2.4（椭圆方程的快速衰减）。设 ~(Q0, ∞, V) 是方程 (1.1) 的一个解，其中 ‖u‖C1(t) =O(e−εt)，对某个 ε > 0 而言，as t → ∞。若 u 不是零截面，则以下情况之一成立：(1) 存在 LΣ 的一个特征值 λ < 4−1m2，使得

$$\gamma^+ < 0 \text{ and } \lim_{t\to\infty} e^{-\gamma^+ t}\|u(t)\|_{L^2} \in (0,\infty),$$

or

$$\gamma^- < 0 \text{ and } \lim_{t\to\infty} e^{-\gamma^- t}\|u(t)\|_{L^2} \in (0,\infty).$$

此处 $\gamma^\pm = 2^{-1}m \pm \sqrt{4^{-1}m^2-\lambda}$. 此外，对于某个特征截面 w，满足 LΣw = λ w,

$$\lim_{t\to\infty} u(t)/\|u(t)\|_{L^2} = w \text{ in } C^\infty(\Sigma;\mathbf{V}).$$

(2) 我们有

$$m < 0 \text{ and } \lim_{t\to\infty} t^{-1}e^{-2^{-1}mt}\|u(t)\|_{L^2} \in (0,\infty).$$

此外，对于某个特征子空间 w，具有 LΣw = 4−1m2w,

$$\lim_{t\to\infty} u(t)/\|u(t)\|_{L^2} = w \text{ in } C^\infty(\Sigma;\mathbf{V}).$$

(3) 我们有

$$m < 0 \text{ and } \limsup_{t\to\infty} e^{-2^{-1}mt}\|u(t)\|_{L^2} \in (0,\infty).$$

此外，存在 $w_i \in \mathbb{C}$ 对于 $i \in I_1$ 以及 $c_i \in \mathbb{R}$ 对于 $i \in I_2$ 使得

$$\lim_{t\to\infty}\left(e^{-2^{-1}mt}u(t) - \sum_{i\in I_1}\mathrm{Re}\left(w_i e^{\mathbf{i}\beta_i t}\right)\varphi_i - \sum_{i\in I_2} c_i\varphi_i\right) = 0 \text{ in } C^\infty(\Sigma;\mathbf{V}).$$

Here $\beta_i = \sqrt{\lambda_i - 4^{-1}m^2}$ *and* $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$.

接下来，我们考虑抛物型方程（1.2）的衰减解。

~定理 2.5（抛物型方程中的慢衰减）。设 u ∈ C∞(Q0,∞,V)是满足(1.2)且‖u‖Hn+4(t) = o(1)的解，该解在 t → ∞ 不呈指数衰减。则 Σ 满足(1.2) 的Adams-Simon 非负性条件。此外，以下两种情形之一成立：

(1) 我们有

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/(p-2)}\|u(t)\|_{L^2} = \beta \in (0,\infty).$$

此外，

$$\lim_{t\to\infty} u(t)/\|u(t)\|_{L^2} = w \text{ in } C^\infty(\Sigma;\mathbf{V}),$$

其中 w ∈ ker LΣ 且 w 是 ˆ fp 的一个临界点，满足 ˆ fp(w) = 1/(p(p − 2)βp−2) > 0 .

(2) 我们有

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/(p-2)}\|u(t)\|_{L^2} = \infty.$$

此外，

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}_{C^k}\left(u(t)/\|u(t)\|_{L^2}\ ,\ \mathbf{C}\cap\{w : \hat{f}_p(w) = 0\}\right) = 0 \text{ for all } k \in \mathbb{N}.$$

~定理 2.6（抛物型方程的快速衰减）。设 u ∈ C∞(Q0, ∞, V) 是方程 (1.2) 的一个解，且对于某个 ε > 0 ，当 t → ∞ 时有‖u‖Hn+4(t) = O(e−εt)。那么，存在 LΣ 的一个负特征值 λ ，使得

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t}\|u(t)\|_{L^2} \in (0,\infty).$$

此外，对于某个满足 LΣw = λw 的特征截面 w ，

$$\lim_{t\to\infty} u(t)/\|u(t)\|_{L^2} = w \text{ in } C^\infty(\Sigma;\mathbf{V}).$$

事实上，即使存在不可积核，也可能不存在缓慢收敛的解。例如，参见 [CCK21][CS20]。定理 2.3 和 2.5 给出了这一非存在性结果的判据。

~推论 2.7。设 $u \in C^\infty(Q_{0,\infty}, V)$ 是方程 (1.1) 的一个解，且 $\|u\|_{C^1}(t) = o(1)$ 当 $t \to \infty$。假设方程 (1.1) 的 Adams-Simon 非负条件不成立。那么 u 指数衰减。

~推论 2.8。设 $u \in C^\infty(Q_{0,\infty}, V)$ 是方程(1.2) 的一个解，且$\|u\|_{H^{n+4}}(t) = o(1)$ 作为 $t \to \infty$。假设方程(1.2) 不满足 Adams-Simon 非负条件。那么 u呈指数衰减。

备注2.9。我们注意到，主要结果，即定理 2.3-2.6，可以推广以涵盖其他情形。

(1) 我们可以考虑定义在 $t \in (-\infty, 0]$ 上、当 t 趋于负无穷时衰减至零的古解。对于椭圆方程 (1.1) 的古解，只需进行变量替换 $t \mapsto -t$。对于抛物方程 (1.2) 的古解，只需对证明稍作修改，即可得到定理 2.5 和 2.6。

(2) 我们可以考虑如下形式的双曲方程

$$-u'' - mu' + \mathcal{M}_\Sigma u = N_1(u).$$

与椭圆方程 (1.1) 的唯一区别在于，由于缺乏椭圆正则性，我们需要假设 $\|u\|_{C^s}(t)$ 对所有 $s \in \mathbb{N}$ 都衰减至零。

(3) 由于体积归一化，归一化 Yamabe 流（NYF）的速度中包含一个非局部项，即总标量曲率。尽管如此，我们对定理 2.5 的证明可以修改后用于 NYF。具体而言，除引理 6.2 外，证明的所有部分均保持不变。利用 NYF 的显式形式，可以轻易证明引理 6.2。

(4) 通过令 $\mathbb{R}^n$ 为一点、 $d\mu$ 为 Dirac 测度，并令 V 为一个平凡的 $\mathbb{R}^n$ 丛，主要结果适用于 $\mathbb{R}^n$ 上的梯度流。事实上，(1.1) 和 (1.2) 涵盖了更广泛的一类在解析势函数作用下演化的常微分方程组。

我们以两个与命题 2.1 中给出的 Lyapunov-Schmidt 约化映射 H 相关的引理结束本节。我们将 u 分解如下：令 $u^T = \Pi^T u$，并定义 $\tilde{u}^\perp$ 为

$$u = u^T + H(u^T) + \tilde{u}^\perp. \tag{2.11}$$

由于 $u^T \in \ker \mathcal{L}_\Sigma$， u^T 可写成 $\{\varphi_{\iota+j}\}_{1\le j\le J}$ 的线性组合，如下：

$$u^T = \sum_{j=1}^{J} x_j \varphi_{\iota+j}. \tag{2.12}$$

引理 2.10。设 $\rho > 0$ 为命题 2.1 中给出的常数，且 $u \in C^{2,\alpha}(\Sigma; V)$ 是一个满足$\|u^T\|_{L^2} \le 2^{-1}\rho$的截面。设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_J)$ 由 (2.12) 给出。那么，对于任意 $\alpha \in (0, 1)$，存在一个正数 $C = C(\mathcal{M}_\Sigma, \alpha)$，使得

$$\left|\mathcal{M}_\Sigma(u) + \nabla f(x) - \mathcal{L}_\Sigma \tilde{u}^\perp\right| \le C\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)}\|\tilde{u}^\perp\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)}. \tag{2.13}$$

证明。在证明中，我们用 C 表示一个依赖于 $\mathcal{M}_\Sigma$、 α的正数，其值可能随行而变。设 $\bar{\mathcal{L}}_\Sigma$ 为 $\mathcal{M}_\Sigma$ 在 $u^T + H(u^T)$ 处的线性化。由命题 2.1（Lyapunov-Schmidt 约化）和 (2.11),

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{M}_\Sigma(u) + \nabla f(x) - \mathcal{L}_\Sigma \tilde{u}^\perp\right| \\
=&\left|\mathcal{M}_\Sigma(u^T + H(u^T) + \tilde{u}^\perp) - \mathcal{M}_\Sigma(u^T + H(u^T)) - \mathcal{L}_\Sigma \tilde{u}^\perp\right| \\
\le&|\bar{\mathcal{L}}_\Sigma \tilde{u}^\perp - \mathcal{L}_\Sigma \tilde{u}^\perp| + |\mathcal{M}_\Sigma(u^T + H(u^T) + \tilde{u}^\perp) - \mathcal{M}_\Sigma(u^T + H(u^T)) - \bar{\mathcal{L}}_\Sigma \tilde{u}^\perp|.
\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{M}_\Sigma$ 是从 $C^{2,\alpha}(\Sigma; V)$到 $C^\alpha(\Sigma; V)$的解析映射，故上述量有界于

$$C\|u^T + H(u^T)\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)}\|\tilde{u}^\perp\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} + C\|\tilde{u}^\perp\|^2_{C^{2,\alpha}(\Sigma)}$$

由 (2.12) 以及 H 的解析性可得 $\|u^T + H(u^T)\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} \le C|x| \le C\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)}$。结合 (2.11)，可得 $\|\tilde{u}^\perp\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} \le C\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)}$。因此断言成立。

□

引理 2.11（分解的有界性）。设 $\rho > 0$ 为命题 2.1 中给出的常数，且 $u \in C^\infty(Q_a, \mathfrak{b}; \tilde{\mathrm{V}})$ 是一个光滑截面，满足 $\|u\|_{C^s}(t) \le M < \infty$。那么当 $\|u^T\|_{L^2}(t) \le 2^{-1}\rho$ 时，

$$\|u^T\|_{C^s}(t) + \|H(u^T)\|_{C^s}(t) + \|\tilde{u}^\perp\|_{C^s}(t) \le C\|u\|_{C^s}(t),$$

对于某个常数 $C = C(\mathcal{M}_\Sigma, M, s)$。

证明。在证明中，我们使用 C 表示一个依赖于 $\mathcal{M}_\Sigma$、M、s 的正常数，其值可能在不同行之间有所变化。令 $x(t) = (x_1(t), \dots, x_J(t))$为由 (2.12) 针对 $u^T(t)$ 给出的系数。然后

$$\|u^T\|_{C^s}(t) \le C\sum_{k=0}^{s}\left|\frac{d^k}{dt^k}x(t)\right| \le C\|u\|_{C^s}(t).$$

通过 (2.8)，我们可以将 H 视为从 $\mathbb{R}^J$ 中的开球映射到 $C^\infty(\Sigma; \mathrm{V})$的映射。我们滥用记号，将 $H(x(t))$ 写作 $H(u^T)$。对于 $1 \le k \le s$,

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}H(x(t)) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_i=k\\ k_j\ge 1}} D^iH(x(t))\left[\frac{d^{k_1}x(t)}{dt^{k_1}}, \dots, \frac{d^{k_i}x(t)}{dt^{k_i}}\right].$$

令 $\mathcal{B}_{i,\ell,\alpha} = \mathcal{L}\left(\left(\mathbb{R}^J\right)^{\otimes i}, C^{\ell,\alpha}(\Sigma; \mathrm{V})\right)$ 表示从 $\left(\mathbb{R}^J\right)^{\otimes i}$ 到 $C^{\ell,\alpha}(\Sigma; \mathrm{V})$ 的有界线性映射所构成的巴拿赫空间，并赋予算子范数。由命题 2.1，D^iH 是从 $B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^J$ 到 $\mathcal{B}_{i,\ell,\alpha}$的解析映射。特别地，$D^iH$ 的算子范数在 $B_{2^{-1}\rho}(0)$ 上有界。因此，只要 $|x(t)| \le 2^{-1}\rho$,

$$\left|\nabla^\ell\left[D^iH(x(t))\left[\frac{d^{k_1}x(t)}{dt^{k_1}}, \dots, \frac{d^{k_i}x(t)}{dt^{k_i}}\right]\right]\right| \le C\left|\frac{d^{k_1}x(t)}{dt^{k_1}}\right|\cdots\left|\frac{d^{k_i}x(t)}{dt^{k_i}}\right| \le C\|u\|_{C^s}(t).$$

在第二个不等式中，我们使用了假设 $\|u\|_{C^s}(t) \le M$。这确保了 $\|H(u^T)\|_{C^s}(t) \le C\|u\|_{C^s}(t)$。然后，由于 (2.11)，$\|\tilde{u}^\perp\|_{C^s}(t) \le C\|u\|_{C^s}(t)$ 成立。□

3. First order ODE system

本节中，我们将 (1.1) 转换为一阶常微分方程组。设 $u \in C^2(Q_{0,\infty}, \tilde{\mathrm{V}})$ 是 (1.1) 的一个解。令 $E_1(u) = N_1(u) - \mathcal{M}_\Sigma u + \mathcal{L}_\Sigma u$，我们可以将 (1.1) 改写为

$$u'' - mu' + \mathcal{L}_\Sigma u = E_1(u). \tag{3.1}$$

由 (2.4) 和 (2.6) 可知，误差项 $E_1(u)$ 具有如下结构

$$E_1(u) = a_1 \cdot Du'(t) + a_2 \cdot u'(t) + \sum_{j=0}^{2} a_{4,j} \cdot \nabla^j u, \tag{3.2}$$

其中 $a_{4,j} = a_{4,j}(\omega, u, \nabla u, u')$ 均为光滑函数，且满足 $a_{4,j}(\omega, 0, 0, 0) = 0$。我们旨在将 (3.1) 向量化，并将其视为一阶常微分方程。

我们先来建立一些概念。

定义 3.1. 设 L 是一个从 $H^2(\Sigma; \mathrm{V}) \times H^1(\Sigma; \mathrm{V})$ 到 $H^1(\Sigma; \mathrm{V}) \times L^2(\Sigma; \mathrm{V})$ 的算子，由下式给出

$$\mathbf{L}(v, w) := \left(2^{-1}mv + w, -\mathcal{L}_\Sigma v + 4^{-1}m^2 v + 2^{-1}mw\right).$$

定义 3.2. 对于一个截面 $u \in C^2(Q_{0,\infty}, \tilde{\mathrm{V}})$，定义

$$q(u) := (u, u' - 2^{-1}mu),\ \mathcal{E}(u) := (0, E_1(u)).$$

若不会引起混淆，我们通常省略自变量，分别用 $q, \mathcal{E}$ 表示 $q(u)$ 和 $\mathcal{E}(u)$。此外，$q(t)$ 和 $\mathcal{E}(t)$ 分别表示 $q(u)$ 和 $\mathcal{E}(u)$ 在 $\{t\} \times \Sigma$ 上的限制。

方程 (3.1) 可改写为

$$q' = \mathbf{L}q + \mathcal{E}. \tag{3.3}$$

我们现在确定 L 的特征值与特征截面。对于 $i \in \mathbb{N}$，令

$$\gamma_i^\pm := 2^{-1}m \pm \sqrt{4^{-1}m^2 - \lambda_i}.$$

回顾可知， $\mathbb{N}$ 在 (2.7) 中被划分为 $\cup_{i=1}^{4} I_i$。特征值 $\gamma_i^{\pm}$为实数且异于 $2^{-1}m$，当且仅当 $i \in I_3 \cup I_4$。对于 $i \in I_3 \cup I_4$，令

$$\psi_i^{\pm} := \left(\frac{m}{m - 2\gamma_i^{\pm}} \varphi_i, -\frac{m}{2} \varphi_i \right). \tag{3.4}$$

由 $\mathcal{L}_\Sigma \varphi = \lambda_i \varphi_i$ 可验证，

$$\mathbf{L}\psi_i^{\pm} = \gamma_i^{\pm} \psi_i^{\pm}. \tag{3.5}$$

对于 $i \in I_1$， $\gamma_i^{\pm}$ 不是实数，其虚部为 $\beta_i = \sqrt{\lambda_i - 4^{-1}m^2} > 0$。令

$$\psi_{i,1} := (0, 2^{-1/2} m \varphi_i), \ \psi_{i,2} := (2^{-1/2} m \beta_i^{-1} \varphi_i, 0).$$

Then

$$\mathbf{L}\psi_{i,1} = 2^{-1}m\psi_{i,1} + \beta_i \psi_{i,2}, \ \mathbf{L}\psi_{i,2} = 2^{-1}m\psi_{i,2} - \beta_i \psi_{i,1}. \tag{3.6}$$

对于 $i \in I_2$，令

$$\psi_{i,3} := (0, 2^{-1/2} m \varphi_i), \ \psi_{i,4} := (2^{-1/2} m \varphi_i, 0).$$

Then

$$\mathbf{L}\psi_{i,3} = 2^{-1}m\psi_{i,3} + \psi_{i,4}, \ \mathbf{L}\psi_{i,4} = 2^{-1}m\psi_{i,4}. \tag{3.7}$$

接下来，我们引入一个双线性形式 G。令 $G : (H^1(\Sigma; \mathbb{V}) \times H^0(\Sigma; \mathbb{V}))^2 \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\begin{aligned} G((v_1, w_1); (v_2, w_2)) :=& 2m^{-2} \int_\Sigma \left(- \left\langle \mathcal{L}_\Sigma v_1 - 4^{-1}m^2 v_1, v_2 \right\rangle + \langle w_1, w_2 \rangle \right) d\mu \\ &+ 2m^{-2} \sum_{i \in I_1} 2\beta_i^2 \int_\Sigma \langle v_1, \varphi_i \rangle \, d\mu \int_\Sigma \langle v_2, \varphi_i \rangle \, d\mu + 2m^{-2} \sum_{i \in I_2} \int_\Sigma \langle v_1, \varphi_i \rangle \, d\mu \int_\Sigma \langle v_2, \varphi_i \rangle \, d\mu. \end{aligned}$$

我们记 $\|(v, w)\|_G^2 := G((v, w); (v, w))$。$G$ 的正定性将在下文引理 3.3 中得到证明。我们记 $\mathbf{L}^\dagger$ 为相对于 G 的 $\mathbf{L}$ 的伴随算子。即，

$$G(\mathbf{L}(v_1, w_1); (v_2, w_2)) = G((v_1, w_1); \mathbf{L}^\dagger (v_2, w_2)).$$

我们定义向量集合

$$\mathcal{B} := \{\psi_{i,1}, \psi_{i,2}\}_{i \in I_1} \cup \{\psi_{i,3}, \psi_{i,4}\}_{i \in I_2} \cup \{\psi_i^+, \psi_i^-\}_{i \in I_3 \cup I_4}. \tag{3.8}$$

引理 3.3（$\mathbf{L}$ 的谱分解）。

(1) 双线性形式 G 等价于标准内积。即，

$$\|(v, w)\|_G \approx \|(v, w)\|_{H^1 \times H^0}. \tag{3.9}$$

(2) 集合 $\mathcal{B}$ 构成一个完备的 G-标准正交基。

(3) 对于 $i \in I_3 \cup I_4$，

$$\mathbf{L}^\dagger \psi_i^{\pm} = \gamma_i^{\pm} \psi_i^{\pm}. \tag{3.10}$$

对于 $i \in I_1$，

$$\mathbf{L}^\dagger \psi_{i,1} = 2^{-1}m\psi_{i,1} - \beta_i \psi_{i,2}, \ \mathbf{L}^\dagger \psi_{i,2} = 2^{-1}m\psi_{i,2} + \beta_i \psi_{i,1}. \tag{3.11}$$

对于 $i \in I_2$，

$$\mathbf{L}^\dagger \psi_{i,3} = 2^{-1}m\psi_{i,3}, \ \mathbf{L}^\dagger \psi_{i,4} = 2^{-1}m\psi_{i,4} + \psi_{i,3}. \tag{3.12}$$

证明。我们先证明 (3.9)。将 v 表示为 $v = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i$，

$$G((v, 0); (v, 0)) = 2m^{-2} \left(\sum_{i \notin I_2} \left| 4^{-1}m - \lambda_i \right| a_i^2 + \sum_{i \in I_2} a_i^2 \right) \geq c \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = c\|v\|_{L^2}^2,$$

其中 $c = c(\mathcal{M}_\Sigma, m) > 0$。根据 (2.5)，这意味着 (3.9)。容易验证， $\mathcal{B}$中的向量是 G-正交归一的。假设 $(v, w) \in H^1(\Sigma; \mathrm{V}) \times H^0(\Sigma; \mathrm{V})$ 与 $\mathcal{B}$中的每个向量都 G-正交。注意，对所有 $j \in \mathbb{N}$，$(0, \varphi_j)$ 和 $(\varphi_j, 0)$ 都属于 $\mathcal{B}$的线性张成空间。这意味着

$$0 = 2^{-1}m^2 G((v, w); (0, \varphi_j)) = \int_\Sigma \langle w, \varphi_j \rangle \, d\mu,$$

并且

$$0 = 2^{-1}m^2 G((v, w); (\varphi_j, 0)) = C_j \int_\Sigma \langle v, \varphi_j \rangle \, d\mu.$$

此处，对于 $C_j = 1$，有 $j \in I_2$；对于 $C_j = \left|4^{-1}m - \lambda_j\right|$，有 $j \notin I_2$。因此， $v = w = 0$，且 $\mathcal{B}$ 完备。最后，(3.10)-(3.12) 由 (3.5)-(3.7) 以及 G 与 $\mathcal{B}$ 的正交性得到。□

下一个引理表明，L 的行为类似于 $\nabla\!\!\!/$。

引理 3.4（L 与角导数的等价性）。对于每个 $\ell \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{j=0}^{\ell} \|\mathbf{L}^j(v, w)\|_G \approx \|(v, w)\|_{H^{\ell+1} \times H^\ell}. \tag{3.13}$$

证明。我们采用归纳论证。 $\ell = 0$ 的断言直接由 (3.9) 得出。现在假设 (3.13) 对 ℓ 成立，并证明它对 $\ell + 1$ 成立。根据归纳假设,

$$\sum_{j=0}^{\ell+1} \|\mathbf{L}^j(v, w)\|_G \approx \|(v, w)\|_{H^1 \times H^0} + \|\mathbf{L}(v, w)\|_{H^\ell \times H^{\ell-1}} \tag{3.14}$$

根据定义 3.1， $\|\mathrm{L}(v, w)\|_{H^\ell \times H^{\ell-1}} \leq C\|(v, w)\|_{H^{\ell+1} \times H^\ell}$。因此,

$$\sum_{j=0}^{\ell+1} \|\mathbf{L}^j(v, w)\|_G \leq C\|(v, w)\|_{H^{\ell+1} \times H^\ell}. \tag{3.15}$$

为得到反方向的不等式，我们使用

$$\begin{aligned} \|w\|_{H^\ell} &\leq C\|2^{-1}mv + w\|_{H^\ell} + C\|v\|_{H^\ell}, \\ \|v\|_{H^{\ell+1}} &\leq C\| - \mathcal{L}_\Sigma v + 4^{-1}m^2 v + 2^{-1}mw\|_{H^{\ell-1}} + C\|(v, w)\|_{H^\ell \times H^{\ell-1}}. \end{aligned}$$

结合定义 3.1、(3.14) 以及归纳假设，我们得到

$$\|(v, w)\|_{H^{\ell+1} \times H^\ell} \leq C \sum_{j=0}^{\ell+1} \|\mathbf{L}^j(v, w)\|_G. \tag{3.16}$$

由 (3.15) 和 (3.16) 即可得出该结论。 □

定义 3.5。固定 $k, \ell \in \mathbb{N}_0$。对于一个截面 $u \in C^{k+\ell+1}(Q_{0,\infty}, \widetilde{\mathrm{V}})$，我们定义

$$q^{(k,\ell)}(u) := \partial_t^k \mathbf{L}^\ell q(u), \ \mathcal{E}^{(k,\ell)}(u) := \partial_t^k \mathbf{L}^\ell \mathcal{E}(u).$$

这里， $q(u)$ 和 $\mathcal{E}(u)$ 在定义 3.2 中给出。我们通常将它们简记为 $q^{(k,\ell)}$, $\mathcal{E}^{(k,\ell)}$ ，并分别用 $q^{(k,\ell)}(t)$、 $\mathcal{E}^{(k,\ell)}(t)$ 表示 $q^{(k,\ell)}(u)$ 、 $\mathcal{E}^{(k,\ell)}(u)$ 在 $\{t\} \times \Sigma$ 上的限制。

推论 3.6. 固定 $s \in \mathbb{N}_0$。那么对于所有 $u \in C^{s+2}(Q_{0,\infty}, \widetilde{\mathrm{V}})$ 和 $t \in (0, \infty)$,

$$\sum_{k+\ell \leq s} \|q^{(k,\ell)}(u)\|_G(t) \approx \sum_{k+\ell \leq s+1} \|\partial_t^k \nabla\!\!\!/^\ell u\|_{L^2}(t). \tag{3.17}$$

此外，假设 u 满足$\|u\|_{C^{s+2}}(t) = o(1)$。那么

$$\sum_{k+\ell \leq s} \|\mathcal{E}^{(k,\ell)}(u)\|_G(t) = o(1) \sum_{k+\ell \leq s} \|q^{(k,\ell)}(u)\|_G(t) \tag{3.18}$$

证明。根据定义 3.2 和引理 3.4（L 与角导数的等价性 ），

$$\sum_{k+\ell\le s}\|q^{(k,\ell)}(u)\|_G(t)\approx\sum_{k=0}^{s}\|(\partial_t^k u,\partial_t^{k+1}u-2^{-1}m\partial_t^k u)\|_{H^{s-k+1}\times H^{s-k}}(t)$$
$$\approx\sum_{k+\ell\le s+1}\|\partial_t^k\nabla^\ell u\|_{L^2}(t).$$

这就得到（3.17）。类似地，由引理 3.4 和定义 3.2,

$$\sum_{k+\ell\le m}\|\mathcal{E}^{(k,\ell)}(u)\|_G(t)\approx\sum_{k=0}^{s}\|\partial_t^k E_1(u)\|_{H^{s-k}}(t).$$

由（3.2）和该假设,

$$\sum_{k=0}^{s}\|\partial_t^k E_1(u)\|_{H^{s-k}}(t)=o(1)\sum_{k+\ell\le s+1}\|\partial_t^k\nabla^\ell u\|_{L^2}(t).$$

于是（3.18）由（3.17）得出。 □

将方程 (3.3) 投影到 $\mathcal{B}$ 中的向量上。令

$$\begin{aligned}&\xi_{i,1}(t):=G(q(t),\psi_{i,1}),\ \xi_{i,2}(t):=G(q(t),\psi_{i,2})\text{ for }i\in I_1,\\&\xi_{i,3}(t):=G(q(t),\psi_{i,3}),\ \xi_{i,4}(t):=G(q(t),\psi_{i,4})\text{ for }i\in I_2,\\&\xi_i^{\pm}(t):=G(q(t),\psi_i^{\pm})\text{ for }i\in I_3\cup I_4.\end{aligned}\tag{3.19}$$

此外，令

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_{i,1}(t):=G(\mathcal{E}(t),\psi_{i,1}),\ \mathcal{E}_{i,2}(t):=G(\mathcal{E}(t),\psi_{i,2})\text{ for }i\in I_1,\\&\mathcal{E}_{i,3}(t):=G(\mathcal{E}(t),\psi_{i,3}),\ \mathcal{E}_{i,4}(t):=G(\mathcal{E}(t),\psi_{i,4})\text{ for }i\in I_2,\\&\mathcal{E}_i^{\pm}(t):=G(\mathcal{E}(t),\psi_i^{\pm})\text{ for }i\in I_3\cup I_4.\end{aligned}\tag{3.20}$$

然后我们可以将 (3.3) 改写如下。对于 $i\in I_1$,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\xi_{i,1}-2^{-1}m\xi_{i,1}+\beta_i\xi_{i,2}=\mathcal{E}_{i,1},\\&\frac{d}{dt}\xi_{i,2}-2^{-1}m\xi_{i,2}-\beta_i\xi_{i,1}=\mathcal{E}_{i,2}.\end{aligned}\tag{3.21}$$

对于 $i\in I_2$,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\xi_{i,3}-2^{-1}m\xi_{i,3}=\mathcal{E}_{i,3},\\&\frac{d}{dt}\xi_{i,4}-2^{-1}m\xi_{i,4}-\xi_{i,3}=\mathcal{E}_{i,4}.\end{aligned}\tag{3.22}$$

对于 $i\in I_3\cup I_4$,

$$\frac{d}{dt}\xi_i^{\pm}-\gamma_i^{\pm}\xi_i=\mathcal{E}_i^{\pm}.\tag{3.23}$$

4. Fast decaying solutions

在本节中，我们考虑指数衰减的（1.1）的解，并证明定理 2.4。定理 2.6 的证明较为简单，因此略去。整个本节中，我们假设 $m<0$ 和 I_1,I_2均非空。证明可以很容易地推广到其他情形。我们先讨论无穷远处的唯一延拓性质。尽管我们紧随 [Str20]，中的论证，为方便读者，我们仍给出证明。

~命题 4.1. 设 $u\in C^\infty(Q_{0,\infty},\mathrm{V})$ 是方程 (1.1) 的一个解，满足$\|u\|_{C^1}(t)=O(e^{\gamma t})$，其中 $t\to\infty$对所有 $\gamma<0$ 均成立。则 $u\equiv 0$。

证明. 根据椭圆正则性引理 A.3, $\|u\|_{C^s}(t) = O(e^{\gamma t})$ 对所有 $s \in \mathbb{N}$ 和 $\gamma < 0$ 均成立。设 $q = q(u)$ 如定义 3.2 所述。取 $\gamma < 2^{-1}m - 1$。令 $\Pi_\gamma q$ 为 q 在 L 的特征值小于或等于 γ 的特征子空间上的投影。也就是说，用 (3.19) 中引入的系数表示,

$$(\Pi_\gamma q)(t) = \sum_{i:\gamma_i^- \le \gamma} \xi_i^-(t)\psi_i^-.$$

我们断言，对于任意 $t_2 \ge t_1$,

$$e^{-\gamma(t_2-t_1)}\|q(t_2)\|_G \le \|\Pi_\gamma q(t_1)\|_G + \int_{t_1}^{\infty} e^{-\gamma(s-t_1)}\|\mathcal{E}(s)\|_G\, ds. \tag{4.1}$$

暂假设（4.1）成立。由（3.2），存在一个统一常数 $C < \infty$，使得当 $\|u\|_{C^1}(t) \le 1$ 时，有

$$\|\mathcal{E}(t)\|_G \le C\|q(t)\|_G\|u\|_{C^2}(t).$$

定义 $M_\gamma(t) = \sup_{\tau \ge t} e^{-\gamma(\tau-t)}\|q(\tau)\|_G$。假设 t_1 足够大，使得对于 $s \ge t_1$ 有 $\|u\|_{C^1}(s) \le 1$。于是由（4.1），

$$M_\gamma(t_1) \le \|\Pi_\gamma q(t_1)\|_G + C\int_{t_1}^{\infty} \|u\|_{C^2}(s)\, ds \cdot M_\gamma(t_1).$$

由指数衰减假设，我们可以取足够大的 t_1，使得 $C\int_{t_1}^{\infty}\|u\|_{C^2}(s)ds \le 1/2$。因此

$$M_\gamma(t_1) \le 2\|\Pi_\gamma q(t_1)\|_G. \tag{4.2}$$

显然, $M_\gamma(t_1)$ 关于 γ 是非递增的。因此,

$$M_\gamma(t_1) \le \limsup_{\gamma' \to -\infty} M_{\gamma'}(t_1) \le 2\limsup_{\gamma' \to -\infty}\|\Pi_{\gamma'} q(t_1)\|_G = 0.$$

我们得到 $q(t) = 0$（从而 $u(t) = 0$）对于 $t \ge t_1$。接下来，我们证明 $q(t) = 0$ 直至 $t = 0$。反设 $t_0 = \inf\{t_1 : \text{对于 } t \ge t_1\} > 0$, $q(t) = 0$。由 $u(x,t)$ 的光滑性，我们可以找到一个足够小的 $\epsilon > 0$，使得对于 $t \in [t_0 - \epsilon, t_0]$，$\|u\|_{C^1}(t) \le 1$，且

$$C\int_{t_0-\epsilon}^{\infty}\|u\|_{C^2}(s)\, ds = C\int_{t_0-\epsilon}^{t_0}\|u\|_{C^2}(s)\, ds \le \frac{1}{2},$$

这意味着 es that (4.2) 对 $t_1 = t_0 - \epsilon$ 成立。由此得出矛盾，从而证明了该命题。 .

还需证明（4.1）。定义非负函数 $X_\pm(t)$ 为

$$X_+^2(t) = \sum_{i\in I_1}|\xi_{i,1}(t)|^2 + |\xi_{i,2}(t)|^2 + \sum_{i\in I_2}|\xi_{i,3}(t)|^2 + |\xi_{i,4}(t)|^2 + \sum|\xi_i^+(t)|^2 + \sum_{i:\gamma_i^->\gamma}|\xi_i^-(t)|^2,$$

$$X_-^2(t) = \sum_{i:\gamma_i^-\le\gamma}|\xi_i^-(t)|^2.$$

由 (3.21)-(3.23), $X_+(t)X_+'(t)$ 等于,

$$\begin{aligned}
&2^{-1}m\left(\sum_{i\in I_1}|\xi_{i,1}(t)|^2 + |\xi_{i,2}(t)|^2 + \sum_{i\in I_2}|\xi_{i,3}(t)|^2 + |\xi_{i,4}(t)|^2\right) + \sum\gamma_i^+|\xi_i^+(t)|^2 + \sum_{i:\gamma_i^->\gamma}\gamma_i^-|\xi_i^-(t)|^2\\
&+\sum_{i\in I_2}\xi_{i,3}(t)\xi_{i,4}(t) + \sum\xi_i^+(t)\mathcal{E}_i^+(t) + \sum_{i:\gamma_i^->\gamma}\xi_-^+(t)\mathcal{E}_-^+(t) + \sum_{i\in I_1}\xi_{i,1}(t)\mathcal{E}_{i,1}(t) + \xi_{i,1}(t)\mathcal{E}_{i,1}(t)\\
&+\sum_{i\in I_2}\xi_{i,3}(t)\mathcal{E}_{i,3}(t) + \xi_{i,4}(t)\mathcal{E}_{i,4}(t).
\end{aligned}$$

来自 $\left|\sum_{i\in I_2}\xi_{i,\ 3}(t)\xi_{i,\ 4}(t)\right| \le 2^{-1}\sum_{i\in I_2}|\xi_{i,\ 3}(t)|^2 + |\xi_{i,\ 4}(t)|^2$ 和 $\gamma < 2^{-1}m - 1$,

$$X_+'(t) \ge \gamma X_+'(t) + Y_+(t). \tag{4.3}$$

这里的 $Y_+(t)$ 定义为

$$X_+(t)Y_+(t) = \sum \xi_i^+(t)\mathcal{E}_i^+(t) + \sum_{i:\gamma_i^- > \gamma} \xi_-^+(t)\mathcal{E}_-^+(t) + \sum_{i\in I_1} \xi_{i,1}(t)\mathcal{E}_{i,1}(t) + \xi_{i,1}(t)\mathcal{E}_{i,1}(t) + \sum_{i\in I_2} \xi_{i,3}(t)\mathcal{E}_{i,3}(t) + \xi_{i,4}(t)\mathcal{E}_{i,4}(t).$$

同理，我们有

$$X_-'(t) \le \gamma X_-'(t) + Y_-(t), \tag{4.4}$$

其中 $Y_-(t)$ 由 $X_-(t)Y_-(t) = \sum_{i:\ \gamma_i^- \le \gamma} \xi_i^-(t)\mathcal{E}_i^-(t)$ 给出。固定 $t_2 \ge t_1$。对 (4.4) 从 t_1 到 t_2 积分，得到

$$\begin{aligned} e^{-\gamma(t_2-t_1)}X_-(t_2) \le & X_-(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} e^{-\gamma(s-t_1)}Y_-(s)\,ds \\ \le & X_-(t_1) + \int_{t_1}^{\infty} e^{-\gamma(s-t_1)}|Y_-(s)|\,ds. \end{aligned} \tag{4.5}$$

任取 $t_3 \ge t_2$。对 (4.3) 从 t_2 到 t_3 积分，得到

$$\begin{aligned} e^{-\gamma(t_2-t_1)}X_+(t_2) \le & e^{-\gamma(t_3-t_1)}X_+(t_3) - \int_{t_2}^{t_3} e^{-\gamma(s-t_1)}Y_+(s)\,ds \\ \le & e^{-\gamma(t_3-t_1)}X_+(t_3) + \int_{t_1}^{\infty} e^{-\gamma(s-t_1)}|Y_+(s)|\,ds \end{aligned}$$

根据衰减假设，当 t_3 趋于无穷时，$e^{-\gamma(t_3-t_1)}X_+(t_3)$ 趋于零。因此

$$e^{-\gamma(t_2-t_1)}X_+(t_2) \le \int_{t_1}^{\infty} e^{-\gamma(s-t_1)}|Y_+(s)|\,ds. \tag{4.6}$$

注意，$X_+^2(t) + X_-^2(t) = \|q(t)\|_G^2$，$X_-(t) = \|\Pi_\gamma q(t)\|_G$ 以及 $Y_+^2(t) + Y_-^2(t) \le \|\mathcal{E}(t)\|_G^2$。于是，由 (4.5) 和 (4.6) 可得 (4.1)。□

注 4.2。类似的论证也适用于抛物型方程。唯一的区别是，为了控制(6.6)中的误差项 $E_2(u)$，需要对方程求导。见引理 6.2。

设 u 是 (1.1) 的一个指数衰减解。即，对某个 $\varepsilon_0 > 0$，有 $\|u\|_{C^1}(t) = O(e^{-2\varepsilon_0 t})$。我们进一步假设 u 不恒为零。根据命题 4.1，集合

$$\Lambda := \{\gamma < 0 : \|u\|_{C^1}(t) = O(e^{\gamma t})\}$$

具有下确界 $-\infty < \gamma_* < 0$。根据椭圆正则性引理 A.3，$\|u\|_{C^s}(t) = O(e^{(\gamma_*+\varepsilon)t})$ 对所有 $s \in \mathbb{N}$和 $\varepsilon > 0$ 均成立。令 $\{\xi_{i,1}(t)\,\xi_i,2(t)\}_{i\in I_1}$, $\{\xi_{i,3}(t)\,\xi_i,4(t)\}_{i\in I_2}$, $\{\xi_i^\pm(t)\}_{i\in I_3\cup I_4}$ 为 (3.19) 中定义的系数。令 $\{\mathcal{E}_{i,1}(t)\,\mathcal{E}_i,2(t)\}_{i\in I_1}$, $\{\mathcal{E}_{i,3}(t)\,\mathcal{E}_i,4(t)\}_{i\in I_2}$, $\{\mathcal{E}_i^\pm(t)\}_{i\in I_3\cup I_4}$ 由 (3.20) 给出。$E_1(u)$ 的二次性质（见 (3.2)）尤其意味着

$$\begin{aligned} \|(0,E_1(u))\|_G^2(t) = & \sum_{i\in I_1}(\mathcal{E}_{i,1}(t))^2 + (\mathcal{E}_{i,2}(t))^2 + \sum_{i\in I_2}(\mathcal{E}_{i,3}(t))^2 + (\mathcal{E}_{i,4}(t))^2 + \sum_{i\in I_3\cup I_4}(\mathcal{E}_i^+(t))^2 + (\mathcal{E}_i^-(t))^2 \\ & = O(e^{2(\gamma_*-\varepsilon_0)t}). \end{aligned} \tag{4.7}$$

这里我们用到了 $|E_1(u)| \le Ce^{-2\varepsilon_0 t}e^{(\gamma^*+\varepsilon_0)t} = Ce^{(\gamma^*-\varepsilon_0)t}$。

引理 4.3. 有 $\gamma_* \in \{\gamma_i^+, \gamma_i^-\}_{i\in I_3\cup I_4} \cup \{2^{-1}m\}$。

证明。假设该断言不成立。这意味着存在 $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_0)$，使得区间 $[\gamma_* - 2\varepsilon_1, \gamma_* + 2\varepsilon_1]$ 内不存在 $\{\gamma_i^+, \gamma_i^-\}_{i\in I_3\cup I_4} \cup \{2^{-1}m\}$ 中的元素。我们证明这会在 $2^{-1}m < \gamma_*$ 的情形下导致矛盾。$\gamma_* < 2^{-1}m$ 的情形证明类似。定义非负函数 $X_+(t)$ 如下：

$$X_+^2(t) = \sum_{i:\gamma_i^+ > \gamma_*} |\xi_i^+(t)|^2 + \sum_{i:\gamma_i^- > \gamma_*} |\xi_i^-(t)|^2.$$

由 (3.23),

$$\begin{aligned}X_+(t)X'_+(t) =& \sum_{i:\gamma_i^+>\gamma_*}\gamma_i^+|\xi_i^+(t)|^2+\sum_{i:\gamma_i^->\gamma_*}\gamma_i^-|\xi_i^-(t)|^2+\sum_{i:\gamma_i^+>\gamma_*}\xi_i^+(t)\mathcal{E}_i^+(t)+\sum_{i:\gamma_i^->\gamma_*}\xi_i^-(t)\mathcal{E}_i^-(t)\\ \geq&(\gamma_*+\varepsilon_1)X_+^2(t)+X_+(t)Y_+(t).\end{aligned}$$

其中 $Y_+(t)$ 由下式给出

$$X_+(t)Y_+(t)=\sum_{i:\gamma_i^+>\gamma_*}\xi_i^+(t)\mathcal{E}_i^+(t)+\sum_{i:\gamma_i^->\gamma_*}\xi_i^-(t)\mathcal{E}_i^-(t).$$

根据柯西–施瓦茨不等式和 (4.7), $|Y_+(t)|=O(e^{(\gamma_*-\varepsilon_0)t})$。利用

$$\lim_{t\to\infty}e^{-(\gamma_*+\varepsilon_1)t}X_+(t)=0,$$

我们可以积分

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-(\gamma_*+\varepsilon_1)t}X_+(t)\right)\geq e^{-(\gamma_*+\varepsilon_1)t}Y_+(t)$$

从 t 到 ∞ 得到

$$X_+(t)\leq e^{(\gamma_*+\varepsilon_1)t}\int_t^\infty e^{-(\gamma_*+\varepsilon_1)\tau}|Y_+(\tau)|\,d\tau=O(e^{(\gamma_*-\varepsilon_0)t}). \tag{4.8}$$

Let

$$X_-^2(t)=\sum_{i:\gamma_i^+<\gamma_*}|\xi_i^+(t)|^2+\sum_{i:\gamma_i^-<\gamma_*}|\xi_i^-(t)|^2+\sum_{i\in I_1}|\xi_{i,1}(t)|^2+|\xi_{i,2}(t)|^2+\sum_{i\in I_2}|\xi_{i,3}(t)|^2+\varepsilon_1^2|\xi_{i,4}(t)|^2.$$

由(3.21)-(3.23), $X_-(t)X'_-(t)$ 等于

$$\begin{aligned}&\sum_{i:\gamma_i^+<\gamma_*}\gamma_i^+|\xi_i^+(t)|^2+\sum_{i:\gamma_i^-<\gamma_*}\gamma_i^-|\xi_i^-(t)|^2+2^{-1}m\left(\sum_{i\in I_1}|\xi_{i,1}(t)|^2+|\xi_{i,2}(t)|^2+\sum_{i\in I_2}|\xi_{i,3}(t)|^2+\varepsilon_1^2|\xi_{i,4}(t)|^2\right)\\ &+\varepsilon_1^2\sum_{i\in I_2}\xi_{i,3}(t)\xi_{i,4}(t)+\sum_{i:\gamma_i^+<\gamma_*}\xi_i^+(t)\mathcal{E}_i^+(t)+\sum_{i:\gamma_i^-<\gamma_*}\xi_i^-(t)\mathcal{E}_i^-(t)+\sum_{i\in I_1}\xi_{i,1}(t)\mathcal{E}_{i,1}(t)+\xi_{i,2}(t)\mathcal{E}_{i,2}(t)\\ &+\sum_{i\in I_2}\xi_{i,3}(t)\mathcal{E}_{i,3}(t)+\varepsilon_1^2\xi_{i,4}(t)\mathcal{E}_{i,4}(t).\end{aligned}$$

从 $\varepsilon_1^2\sum_{i\in I_2}|\xi_{i,3}(t)\xi_{i,4}(t)|\leq 2^{-1}\varepsilon_1\sum_{i\in I_2}|\xi_{i,3}(t)|^2+\varepsilon_1^2|\xi_{i,4}(t)|^2$,

$$X_-(t)X'_-(t)\leq(\gamma_*-\varepsilon_1)X_-^2(t)+X_-(t)Y_-(t).$$

这里 $Y_-(t)$ 由下式给出

$$\begin{aligned}X_-(t)Y_-(t)=&\sum_{i:\gamma_i^+<\gamma_*}\xi_i^+(t)\mathcal{E}_i^+(t)+\sum_{i:\gamma_i^-<\gamma_*}\xi_i^-(t)\mathcal{E}_i^-(t)+\sum_{i\in I_1}\xi_{i,1}(t)\mathcal{E}_{i,1}(t)+\xi_{i,2}(t)\mathcal{E}_{i,2}(t)\\ &+\sum_{i\in I_2}\xi_{i,3}(t)\mathcal{E}_{i,3}(t)+\varepsilon_1^2\xi_{i,4}(t)\mathcal{E}_{i,4}(t).\end{aligned}$$

由柯西–施瓦茨不等式和 (4.7), $|Y_-(t)|=O(e^{(\gamma_*-\varepsilon_0)t})$。积分

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-(\gamma_*-\varepsilon_1)t}X_-(t)\right)\geq e^{-(\gamma_*-\varepsilon_1)t}Y_-(t)$$

从 0 到 t，我们得到

$$X_-(t)\leq e^{(\gamma_*-\varepsilon_1)t}\left(X_-(0)+\int_0^\infty e^{-(\gamma_*-\varepsilon_1)\tau}|Y_-(\tau)|d\tau\right)=O(e^{(\gamma_*-\varepsilon_1)t}). \tag{4.9}$$

结合（4.8）和（4.9）， $\|q(t)\|_G=O(e^{(\gamma_*-\varepsilon_1)t})$。由椭圆正则性引理 A.3，可得 $\|u\|_{C^1}(t)=O(e^{(\gamma_*-\varepsilon_1)t})$。这与 γ_* 的定义矛盾。□

引理 4.4。假设 $\gamma_* = 2^{-1}m$。则存在 $w_i \in \mathbb{C}$，使得对 $i \in I_1$ 和 $c_{i,3}$,$c_{i,4} \in \mathbb{R}$，对 $i \in I_2$，以下结论成立。对于

$$\hat{q}(t) := q(t) - e^{\gamma_* t}\Big(\sum_{i\in I_1} \mathrm{Re}\big(w_i e^{\mathbf{i}\beta_i t}\big)\psi_{i,1} + \mathrm{Im}\big(w_i e^{\mathbf{i}\beta_i t}\big)\psi_{i,2} + \sum_{i\in I_2} c_{i,3}\psi_{i,3} + (tc_{i,3} + c_{i,4})\psi_{i,4} \Big)$$

存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\|\hat{q}(t)\|_G = O(e^{(\gamma_* - \varepsilon)t})$。

证明。定义非负函数 $X_\pm(t)$ 如下：

$$X_+^2(t) = \sum_{i:\gamma_i^+ > \gamma_*} (\xi_i^+(t))^2 + \sum_{i:\gamma_i^- > \gamma_*} (\xi_i^-(t))^2,$$
$$X_-^2(t) = \sum_{i:\gamma_i^+ < \gamma_*} (\xi_i^+(t))^2 + \sum_{i:\gamma_i^- < \gamma_*} (\xi_i^-(t))^2.$$

如有必要，可缩小 ε_0 的取值范围，从而假设对所有 $i \in I_3 \cup I_4$ 均有 $\varepsilon_0 < |2^{-1}m - \gamma_i^\pm|$。类似于引理 4.3 证明中的论证可得 $X_\pm(t) = O(e^{(\gamma_* - \varepsilon_0)t})$。由 (3.21)，我们对 $i \in I_1$ 推导得

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-(\gamma_* + \mathbf{i}\beta_i)t} \left(\xi_{i,1}(t) + \mathbf{i}\xi_{i,2}(t)\right)\right) = e^{-(\gamma_* + \mathbf{i}\beta_i)t} \left(\mathcal{E}_{i,1}(t) + \mathbf{i}\mathcal{E}_{i,2}(t)\right).$$

将上式从 0 积分至 t 并利用 (4.7)，可得

$$\xi_{i,1}(t) + \mathbf{i}\xi_{i,2}(t) = w_i e^{(\gamma_* + \mathbf{i}\beta_i)t} + O(e^{(\gamma_* - \varepsilon_0)t})$$

对于某个 $w_i \in \mathbb{C}$。对 $\frac{d}{dt}(e^{-\gamma_* t}\xi_{i,3}(t)) = e^{-\gamma_* t}\mathcal{E}_{i,3}(t)$ 使用类似的论证，可得

$$\xi_{i,3}(t) = c_{i,3}e^{\gamma_* t} + O(e^{(\gamma_* - \varepsilon_0)t})$$

对某个 $c_{i,3} \in \mathbb{R}$。最后，由

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\gamma_* t}\xi_{i,4}(t)\right) = e^{-\gamma_* t}\xi_{3,i}(t) + e^{-\gamma_* t}\mathcal{E}_{i,4}(t) = c_{i,3} + O(e^{-\varepsilon_0 t}),$$

我们得到 $\xi_{4,i} = (tc_{i,3} + c_{i,4})e^{\gamma_* t} + O(e^{(\gamma_* - \varepsilon_0)t})$，对某个 $c_{i,4} \in \mathbb{R}$。 □

对于 $\gamma_* = \gamma_i^+$ 或 γ_i^-，类似的结果成立。我们省略证明，因为它与引理 4.4 的证明相似且更为简单。

引理 4.5. 假设 $\gamma_* = \gamma_i^+$ 对某个 $i \in I_3 \cup I_4$，并设 N 为 λ_i 的重数。我们可以假设 $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_{i+N-1}$。则存在 a_1、a_2、.....、$a_N \in \mathbb{R}$ 以及 $\varepsilon > 0$，使得

$$\|q(t) - e^{\gamma_* t}\sum_{j=1}^{N} a_j \psi_{i+j-1}^+\|_G = O(e^{(\gamma_* - \varepsilon)t}).$$

当 $\gamma_* = \gamma_i^-$ 对某个 $i \in I_3 \cup I_4$ 时，类似的结果成立

我们现在可以证明定理 2.4。

定理 2.4 的证明。假设 $\gamma_* = \gamma_i^+$ 或 γ_i^-。由引理 4.5 和推论 3.6，存在 v，使得 $\mathcal{L}_\Sigma v = \lambda_i v$ 且 $\varepsilon > 0$ 满足 $\|u(t) - e^{\gamma_* t}v\|_{H^1} = O(e^{(\gamma_* - \varepsilon)t})$。令 $w = v/\|v\|_{L^2}$。则

$$\lim_{t\to\infty} u(t)/\|u(t)\|_{L^2} = w \text{ in } H^1(\Sigma, \mathbf{V}).$$

通过对(3.3)取 L阶导数，我们可以将收敛性提升为 $C^\infty(\Sigma,\mathbf{V})$。因此，定理 2.4 中的情形 (1) 成立。

假设 $\gamma_* = 2^{-1}m$。由引理4.4 和推论 3.6，存在 $w_i \in \mathbb{C}$，对于 $i \in I_1$ 和 $c_{i,3}$,$c_{i,4} \in I_2$使得

$$\left\| u(t) - e^{\gamma_* t}\sum_{i\in I_1} \mathrm{Re}\left(w_i e^{\mathbf{i}\beta_i t}\right)\varphi_i - e^{\gamma_* t}\sum_{i\in I_2}(tc_{i,3} + c_{i,4})\varphi_i \right\|_{H^1} = O(e^{(\gamma_* - \varepsilon)t}).$$

那么，根据是否存在 $c_{i,\ 3} \equiv 0$，定理 2.4 中的情形（2）或情形（3）成立 t. □

5. Slowly decaying solutions to elliptic equation

本节将证明，如果方程 (1.1) 的解衰减缓慢，那么中性模态（即 $q(u)$ 在 L 的零特征值特征空间上的投影）将主导该解。此外，中性模态的演化在误差较小的意义下遵循梯度流。这就是命题 5.1 的内容。

~令 $u \in C^\infty(Q_{0,\infty}, \mathrm{V})$是方程(1.1) 的一个解，并且 $\|u\|_{C^1}(t) = o(1)$ 当 $t \to \infty$ 时成立。根据椭圆正则性引理 A.3， $\|u\|_{C^s}(t) = o(1)$ 对所有 $s \in \mathbb{N}$ 均成立。我们进一步假设 u 不呈指数衰减。也就是说，对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{t\to\infty} e^{\varepsilon t}\|u\|_{C^1}(t) = \infty. \tag{5.1}$$

回顾一下，我们将(1.1)重写为常微分方程组(3.21)-(3.23)。为简洁起见，本节中我们始终假设 $I_2 = \varnothing$。通过改变记号，证明可以直接扩展到 $I_2 \neq \varnothing$的情形。由于 $I_2 = \varnothing$，常微分方程组由(3.21)和 (3.23) 组成。为方便起见，我们将 (3.23) 中的系数 $\{\xi_i^{\pm}\}_{i\in I_3\cup I_4}$ 重新编号。对于 $\{\psi_i^{\pm}\}_{i\in I_4}$，我们设

$$\{\Psi_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \{\psi_i^+ \,|\, i \in I_4 \text{ and } \gamma_i^+ > 0\} \cup \{\psi_i^- \,|\, i \in I_4 \text{ and } \gamma_i^- > 0\},$$
$$\{\Psi_i\}_{i\in-\mathbb{N}} = \{\psi_i^+ \,|\, i \in I_4 \text{ and } \gamma_i^+ < 0\} \cup \{\psi_i^- \,|\, i \in I_4 \text{ and } \gamma_i^- < 0\},$$

并定义 Γ_i，即 $\gamma_i^{\pm}$ 针对 $i \in I_4$ 的重新标记，通过

$$\mathbf{L}\Psi_i = \mathbf{L}^\dagger\Psi_i = \Gamma_i\Psi_i. \tag{5.2}$$

回顾一下， $I_3 = \{\iota + 1, \dots, \iota + J\}$。如果 $m > 0$，我们令 $1 \le j \le J$ $\Upsilon_j = \psi_{\iota+j}^-$以及 $\overline{\Upsilon}_j = \psi_{\iota+j}^+$。如果 $m < 0$，我们令 $\Upsilon_j = \psi_{\iota+j}^+$ 以及 $\overline{\Upsilon}_j = \psi_{\iota+j}^-$。这种安排确保

$$\mathbf{L}\Upsilon_j = \mathbf{L}^\dagger\Upsilon_j = 0,\ \mathbf{L}\overline{\Upsilon}_j = \mathbf{L}^\dagger\overline{\Upsilon}_j = m\overline{\Upsilon}_j. \tag{5.3}$$

Let

$$\begin{aligned} &\xi_i(t) := G(q(t), \Psi_i) \text{ for } i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},\\ &z_j(t) := G(q(t), \Upsilon_j),\ \bar{z}_j(t) := G(q(t), \overline{\Upsilon}_j) \text{ for } 1 \le j \le J, \end{aligned} \tag{5.4}$$

and

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_i(t) := G(\mathcal{E}(t), \Psi_i) \text{ for } i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},\\ &\mathcal{W}_j(t) := G(\mathcal{E}(t), \Upsilon_j),\ \overline{\mathcal{W}}_j(t) := G(\mathcal{E}(t), \overline{\Upsilon}_j) \text{ for } 1 \le j \le J. \end{aligned} \tag{5.5}$$

我们将 (3.23) 改写为下文的 (5.6) 和 (5.7)。对于 $i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$,

$$\frac{d}{dt}\xi_i - \Gamma_i\xi_i = \mathcal{E}_i, \tag{5.6}$$

以及对于 $1 \le j \le J$,

$$\frac{d}{dt}z_j = \mathcal{W}_j,\ \frac{d}{dt}\bar{z}_j - m\bar{z}_j = \overline{\mathcal{W}}_j. \tag{5.7}$$

我们记 $z(t) := (z_1(t)\ \dots\ z_J(t))$，并分别用 $|z(t)|$和 $|\bar{z}(t)|$表示它们的欧几里得范数。回顾一下，约化泛函 f 已在命题 2.1 中引入。本节的目标是证明以下命题。

Pr命题 5.1. 对于上述所描述的方程 (1.1) 的缓慢衰减解 u，存在 hol ds

$$|\bar{z}(t)|^2 + \sum_{i\in I_1}\left(|\xi_{i,1}(t)|^2 + |\xi_{i,2}(t)|^2\right) + \sum_{i\neq 0}|\xi_i(t)|^2 = o(1)|z(t)|^2. \tag{5.8}$$

*Mo*此外，对于所有 $\varepsilon > 0$，存在一个正的常数 $C = C(u, m, \mathcal{M}_\Sigma, N_1, \varepsilon)$，使得

$$|z'(t) + m^{-1}\nabla f(z(t))| \le C|z(t)|^{p-\varepsilon/2}. \tag{5.9}$$

本节余下部分将致力于证明命题 5.1，该命题包含两个主要部分。在第 5.1 小节中，我们证明（如推论 5.3 所示），任意 C^s 范数的 u 均可由 $|z(t)|$ 控制。在第 5.2 小节中，我们通过分解（2.11）在引理 5.11 中获得更快的衰减率。命题 5.1 随即成为引理 5.11 的直接推论。

5.1. 对 $\|u\|_{C^s}$ 进行估计。为了估计 u 的 C^s 范数，我们需要 ODE 系统的高阶导数版本。固定 k、$\ell \in \mathbb{N}_0$。回忆一下，$q^{(k,\ell)}$ 和 $\mathcal{E}^{(k,\ell)}$ 已在定义 3.5 中给出。令

$$\begin{aligned}
&\xi_{i,1}^{(k,\ell)}(t) := G(q^{(k,\ell)}(t), \psi_{i,1}),\ \xi_{i,2}^{(k,\ell)}(t) := G(q^{(k,\ell)}(t), \psi_{i,2}) \text{ for } i \in I_1,\\
&\xi_i^{(k,\ell)}(t) := G(q^{(k,\ell)}(t), \Psi_i) \text{ for } i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\\
&z_j^{(k,\ell)}(t) := G(q^{(k,\ell)}(t), \Upsilon_j),\ \bar{z}_j^{(k,\ell)}(t) := G(q^{(k,\ell)}(t), \overline{\Upsilon}_j) \text{ for } 1 \le j \le J.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

此外，令

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{i,1}^{(k,\ell)}(t) := G(\mathcal{E}^{(k,\ell)}(t), \psi_{i,1}),\ \mathcal{E}_{i,2}^{(k,\ell)}(t) := G(\mathcal{E}^{(k,\ell)}(t), \psi_{i,2}) \text{ for } i \in I_1,\\
&\mathcal{E}_i^{(k,\ell)}(t) := G(\mathcal{E}^{(k,\ell)}(t), \Psi_i) \text{ for } i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\\
&\mathcal{W}_j^{(k,\ell)}(t) := G(\mathcal{E}^{(k,\ell)}(t), \Upsilon_j),\ \overline{\mathcal{W}}_j^{(k,\ell)}(t) := G(\mathcal{E}^{(k,\ell)}(t), \overline{\Upsilon}_j) \text{ for } 1 \le j \le J.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

则对 $i \in I_1$,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\xi_{i,1}^{(k,\ell)} - 2^{-1}m\xi_{i,1}^{(k,\ell)} + \beta_i\xi_{i,2}^{(k,\ell)} = \mathcal{E}_{i,1}^{(k,\ell)},\\
&\frac{d}{dt}\xi_{i,2}^{(k,\ell)} - 2^{-1}m\xi_{i,2}^{(k,\ell)} - \beta_i\xi_{i,1}^{(k,\ell)} = \mathcal{E}_{i,2}^{(k,\ell)},
\end{aligned} \tag{5.12}$$

对 $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\frac{d}{dt}\xi_i^{(k,\ell)} - \Gamma_i\xi_i^{(k,\ell)} = \mathcal{E}_i^{(k,\ell)}, \tag{5.13}$$

以及对 $1 \le j \le J$,

$$\frac{d}{dt}z_j^{(k,\ell)} = \mathcal{W}_j^{(k,\ell)},\ \frac{d}{dt}\bar{z}_j^{(k,\ell)} - m\bar{z}_j^{(k,\ell)} = \overline{\mathcal{W}}_j^{(k,\ell)}. \tag{5.14}$$

在下一个引理中，我们利用 Merle–Zaag ODE 引理 [MZ98]（见引理 A.1）证明 $|z(t)|$支配其他系数，从而得到 (5.8) 的一个更强版本。

引理 5.2（中性模态的支配性）。对于任意 $s \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k+\ell\le s}\Bigg[|z^{(k,\ell)}(t)|^2 + |\bar{z}^{(k,\ell)}(t)|^2 + \sum_{i\in I_1}\left(|\xi_{i,1}^{(k,\ell)}(t)|^2 + |\xi_{i,2}^{(k,\ell)}(t)|^2\right) + \sum_{i\neq 0}|\xi_i^{(k,\ell)}(t)|^2\Bigg]\\
= (1+o(1))|z(t)|^2.
\end{aligned}$$

证明。固定 $s \in \mathbb{N}_0$。我们给出 $m > 0$情形的证明。$m < 0$ 的论证类似。定义三个非负函数 $X_+(t)$、$X_0(t)$ 和 $X_-(t)$ 如下

$$X_0^2(t) = \sum_{k+\ell\le s}\sum_{1\le j\le J}|z_j^{(k,\ell)}(t)|^2,\ X_-^2(t) = \sum_{k+\ell\le s}\sum_{i\in-\mathbb{N}}|\xi_i^{(k,\ell)}(t)|^2,$$

and

$$X_+^2(t) = \sum_{k+\ell\le s}\left(\sum_{i\in I_1}\left(|\xi_{i,1}^{(k,\ell)}(t)|^2 + |\xi_{i,2}^{(k,\ell)}(t)|^2\right) + \sum_{i\in\mathbb{N}}|\xi_i^{(k,\ell)}(t)|^2 + \sum_{1\le j\le J}|\bar{z}_j^{(k,\ell)}(t)|^2\right).$$

由（5.12）、（5.13）和（5.14），我们计算得到

$$\begin{aligned}
X_+X_+' = &\sum_{k+\ell\le s}\left(2^{-1}m\sum_{i\in I_1}\left(|\xi_{i,1}^{(k,\ell)}|^2 + |\xi_{i,2}^{(k,\ell)}|^2\right) + \sum_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i|\xi_i^{(k,\ell)}|^2 + m\sum_{1\le j\le J}|\bar{z}_j^{(k,\ell)}|^2\right)\\
&+ \sum_{k+\ell\le s}\left(\sum_{i\in I_1}\left(\xi_{i,1}^{(k,\ell)}\mathcal{E}_{i,1}^{(k,\ell)} + \xi_{i,2}^{(k,\ell)}\mathcal{E}_{i,2}^{(k,\ell)}\right) + \sum_{i\in\mathbb{N}}\xi_i^{(k,\ell)}\mathcal{E}_i^{(k,\ell)} + \sum_{1\le j\le J}\bar{z}_j^{(k,\ell)}\overline{\mathcal{W}}_j^{(k,\ell)}\right).
\end{aligned}$$

将第二行的各项记为 $X_+(t)Y_+(t)$，并令 b 为 $2^{-1}m$ 与 $|\Gamma_i|$, $i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 中的最小值。我们有

$$X_+' - bX_+ \geq Y_+.$$

类似地，定义 $Y_0(t)$ 和 $Y_-(t)$ 为

$$X_0(t)Y_0(t) = \sum_{k+\ell\leq s}\sum_{1\leq j\leq J} z_j^{(k,\ell)}(t)\mathcal{W}_j^{(k,\ell)}(t),$$

and

$$X_-(t)Y_-(t) = \sum_{k+\ell\leq s}\sum_{i\in-\mathbb{N}} \xi_i^{(k,\ell)}(t)\mathcal{E}_i^{(k,\ell)}(t).$$

成立的是

$$X_0' = Y_0, \quad X_-' + bX_- \leq Y_-. \tag{5.15}$$

现在我们比较 $|X_+(t)|^2 + |X_0(t)|^2 + |X_-(t)|^2$ 与 $|Y_+(t)|^2 + |Y_0(t)|^2 + |Y_-(t)|^2$。

$$\begin{aligned}
&|X_+(t)|^2 + |X_0(t)|^2 + |X_-(t)|^2\\
&= \sum_{k+\ell\leq s}\left[|z^{(k,\ell)}(t)|^2 + |\bar{z}^{(k,\ell)}(t)|^2 + \sum_{i\in I_1}\left(|\xi_{i,1}(t)|^2 + |\xi_{i,2}(t)|^2\right) + \sum_{i\neq 0}|\xi_i(t)|^2\right]\\
&= \sum_{k+\ell\leq s}\|q^{(k,\ell)}(t)\|_G^2.
\end{aligned}$$

由柯西-施瓦茨不等式和（5.11），

$$\begin{aligned}
&|Y_+(t)|^2 + |Y_0(t)|^2 + |Y_-(t)|^2\\
&\leq \sum_{k+\ell\leq s}\left(\sum_{i\in I_1}\left(|\mathcal{E}_{i,1}^{(k,\ell)}(t)|^2 + |\mathcal{E}_{i,2}^{(k,\ell)}(t)|^2\right) + \sum_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}|\mathcal{E}_i^{(k,\ell)}(t)|^2 + \sum_{1\leq j\leq J}\left(|\mathcal{W}_j(t)|^2 + |\overline{\mathcal{W}}_j(t)|^2\right)\right)\\
&= \sum_{k+\ell\leq s}\|\mathcal{E}^{(k,\ell)}(t)\|_G^2.
\end{aligned}$$

由推论3.6中的 (3.18)，$|Y_+(t)|^2 + |Y_0(t)|^2 + |Y_-(t)|^2 = o(1)\left(|X_+(t)|^2 + |X_0(t)|^2 + |X_-(t)|^2\right)$. 随后我们可以应用ODE 引理，即引理 A.1。根据 (A.4)，慢衰减假设(5.1) 排除了 $X_-(t)$ 占主导地位的可能性。因此

$$|X_+(t)|^2 + |X_0(t)|^2 + |X_-(t)|^2 = (1+o(1))|X_0(t)|^2. \tag{5.16}$$

尚需证明

$$|X_0(t)|^2 = (1+o(1))|z(t)|^2. \tag{5.17}$$

对于 $\ell \geq 1$,

$$z_j^{(k,\ell)} = G(\mathbf{L}q^{k,\ell-1}, \Upsilon_j) = G(q^{k,\ell-1}, \mathbf{L}^\dagger\Upsilon_j) = 0.$$

对于 $k \geq 1$,

$$z_j^{(k,\ell)} = \frac{d}{dt}z_j^{(k-1,\ell)} = \mathcal{W}_j^{(k-1,\ell)}.$$

这些蕴含

$$\begin{aligned}
|X_0(t)|^2 &\leq |z(t)|^2 + \sum_{k\leq s-1}|\mathcal{W}^{(k,0)}(t)|^2\\
&\leq |z(t)|^2 + o(1)\left(|X_+(t)|^2 + |X_0(t)|^2 + |X_-(t)|^2\right)\\
&\leq |z(t)|^2 + o(1)|X_0(t)|^2.
\end{aligned}$$

我们在最后一个不等式中使用了 (5.16)。因此 (5.17) 成立，证明完成 ed. □

鉴于推论 3.6 和引理 5.2，对任意 $s \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{k+\ell \le s} \|\partial_t^k \nabla^\ell u\|_{L^2}(t) = O(1)|z(t)|.$$

在 Σ上应用索伯列夫嵌入定理，我们可以估计 u 的任意 C^s 范数。

推论 5.3（高阶导数的控制）。对于任意 $s \in \mathbb{N}$，存在一个正的常数 $C = C(u, s)$，使得 $\|u\|_{C^s}(t) \le C|z(t)|$.

引理 5.4. 以下陈述成立：

(1) $|z(t)| \ge C^{-1}t^{-1}$ 对于 $t \ge 1$，其中 $C = C(u)$。(2) 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $t_0 = t_0(u, \varepsilon)$，使得在 $[t_0, \infty)$ 上，$e^{-\varepsilon t}|z(t)|$ 单调不增且 $e^{\varepsilon t}|z(t)|$单调不减。

证明。该证明直接由 $|z'(t)| \le C|z(t)|^2$ 和 $\lim_{t\to\infty}|z(t)| = 0$ 得出。 □

5.2. 增强的衰减率。回顾一下，u 在（2.11）中的分解

$$u = u^T + H(u^T) + \tilde{u}^\perp. \tag{5.18}$$

让我们引入一个辅助量

$$Q(t) := |z(t)|^p + |z(t)||\bar{z}(t)| + |z(t)|\,\|u'\|_{C^2}(t) + |z(t)|\|\tilde{u}^\perp\|_{C^3}(t). \tag{5.19}$$

引理 5.5. 存在一个正数 $C = C(u, \mathcal{M}_\Sigma, N_1)$，使得

$$\left|\mathcal{M}_\Sigma(u) + \nabla f(z(t)) - \mathcal{L}_\Sigma \tilde{u}^\perp\right| \le CQ(t), \tag{5.20}$$

and

$$|N_1(u)| \le CQ(t). \tag{5.21}$$

证明。在证明中，我们使用 C to 表示一个依赖于 (2.6) 中的 u、$\mathcal{M}_\Sigma$、N_1 的正数，其值可能在不同行之间有所变化。注意，$u^T \in \ker\ \mathcal{L}_\Sigma$ 的系数由 $z_j(t) - \bar{z}_j(t)$ 给出。

$$u^T(t) = \sum_{j=1}^{J}(z_j(t) - \bar{z}_j(t))\varphi_{\iota+j}.$$

固定 $\alpha = 1/2$。由引理 2.10,

$$\left|\mathcal{M}_\Sigma(u) + \nabla f(z(t)) - \mathcal{L}_\Sigma\tilde{u}^\perp\right| \le C\|u(t)\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)}\|\tilde{u}^\perp(t)\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} + C|\nabla f(z(t) - \bar{z}(t)) - \nabla f(z(t))|.$$

显然 $\|u(t)\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} \le C\|u\|_{C^3}(t)$ 和 $\|\tilde{u}^\perp(t)\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} \le C\|\tilde{u}^\perp\|_{C^3}(t)$。由推论 5.3，$\|u\|_{C^3}(t) \le C|z(t)|$。因此,

$$\|u(t)\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)}\|\tilde{u}^\perp(t)\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} \le CQ(t).$$

由于 $f - f(0)$ 在原点处具有 p 阶零点，$|\nabla^2 f(x)| \le C|x|^{p-2}$在原点附近。结合$|\bar{z}(t)| \le C|z(t)|$,

$$|\nabla f(z(t) - \bar{z}(t)) - \nabla f(z(t))| \le CQ(t).$$

因此（5.20）成立。为证明（5.21），回忆 $N_1(u) = a_1 \cdot Du' + a_2 \cdot u' + a_3 \cdot \mathcal{M}_\Sigma(u)$，其中 $a_i = a_i(\omega, u, \nabla u, u')$ 是光滑的，且 $a_i(\omega, 0, 0, 0) = 0$。由推论 5.3，$|a_i| \le C|z(t)|$。因此

$$|a_1 \cdot Du' + a_2 \cdot u'| \le C|z(t)|(|Du'| + |u'|) \le C|z(t)|\|u'\|_{C^1}(t) \le CQ(t).$$

结合 (5.20)，可得 (5.21)。 □

引理 5.6. 存在正常数 $C = C(u, m, \mathcal{M}_\Sigma, N_1)$，使得

$$|z'(t) + m^{-1}\nabla f(z(t))| \le CQ(t), \tag{5.22}$$

and

$$|\bar{z}'(t) - m\bar{z}(t) + m^{-1}\nabla f(z(t))| \le CQ(t). \tag{5.23}$$

证明。鉴于 (5.7)，只需证明

$$\left|\mathcal{W}_j(t)+m^{-1}\frac{\partial f}{\partial x^j}(z(t))\right|\le CQ(t) \text{ and } \left|\overline{\mathcal{W}}_j(t)+m^{-1}\frac{\partial f}{\partial x^j}(z(t))\right|\le CQ(t).$$

由 (5.5)和 $\mathcal{E}(u)=(0,E_1(u))$，我们实际上有 $\mathcal{W}_j(t)=\overline{\mathcal{W}}_j(t)$。回顾

$$\mathcal{W}_j=G(\mathcal{E}(u);\Upsilon_j)=G((0,E_1(u));(\varphi_{\iota+j},-2^{-1}m\varphi_{\iota+j}))=-m^{-1}\int_\Sigma E_1(u)\varphi_{\iota+j}\,d\mu,$$

其中 $E_1(u)=N_1(u)-\mathcal{M}_\Sigma(u)+\mathcal{L}_\Sigma u$。由于 $\varphi_{\iota+j}\in\ker\mathcal{L}_\Sigma$,

$$\mathcal{W}_j=-m^{-1}\int_\Sigma (N_1(u)-\mathcal{M}_\Sigma(u))\varphi_{\iota+j}\,d\mu,$$

于是，该断言由（5.20）和（5.21）得出。 □

推论 5.7. 假设 $|Q(t)|\le M|z(t)|^q$，其中 $M,q>0$。那么存在一个正常数$C=C(u,m,\mathcal{M}_\Sigma,N_1,M,q)$，使得

$$|z'(t)|\le C|z(t)|^{\min(q,p-1)} \text{ and } |\bar z(t)|\le C|z(t)|^{\min(q,p-1)}.$$

证明。由于 $f-f(0)$ 在原点处以 p 次消失，$|\nabla f(z(t))|\le C|z(t)|^{p-1}$。因此，$z'(t)$ 的界可由 (5.22) 得出。 $\bar z(t)$ 的界可通过对 (5.23) 积分得到。□

我们将 $\tilde u^\perp$ 向量化并进行投影。令 $\tilde q:=q(\tilde u^\perp)$，且

$$\tilde\xi_{i,1}(t):=G(\tilde q(t),\psi_{i,1}),\ \tilde\xi_{i,2}(t):=G(\tilde q(t),\psi_{i,2}) \text{ for } i\in I_1,$$
$$\tilde\xi_i(t):=G(\tilde q(t),\Psi_i) \text{ for } i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

注意，由于 $\tilde u^\perp$ 与 $\ker\mathcal{L}_\Sigma$ 正交，这些系数完全刻画了 $\tilde q$。 $\tilde q$ 的高阶导数的投影，即 $\tilde q^{(k,\ell)}=\partial_t^k\mathbf{L}^\ell\tilde q$，定义类似。在下面的引理中，我们证明 $\{\xi_{i,1},\xi_{i,2}\}_{i\in I_1}$、 $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ 以及高阶系数均由 $|z(t)|$ 控制。

引理5.8（关于 $\tilde q$的高阶导数控制）.对于任意 k、$\ell\in\mathbb{N}_0$，存在一个正的常数 $C=C(u,m,\ell+k)$，使得

$$\sum_{i\in I_1}\left(|\tilde\xi_{i,1}^{(k,\ell)}(t)|^2+|\tilde\xi_{i,2}^{(k,\ell)}(t)|^2\right)+\sum_{i\ne0}|\tilde\xi_i^{(k,\ell)}(t)|^2\le C|z(t)|^2.$$

证明。令 $s=\ell+k$。

$$\sum_{i\in I_1}\left(|\tilde\xi_{i,1}^{(k,\ell)}(t)|^2+|\tilde\xi_{i,2}^{(k,\ell)}(t)|^2\right)+\sum_{i\ne0}|\tilde\xi_i^{(k,\ell)}(t)|^2=\|\tilde q^{(k,\ell)}\|_G^2(t)\le C\|\tilde u^\perp\|_{C^{s+1}}^2(t).$$

该断言随后由引理 2.11（分解的有界性）和推论5.3（高阶导数的控制）得出。□

我们来定义

$$\tilde E(u):=\left(\tilde u^\perp\right)''-m\left(\tilde u^\perp\right)'+\mathcal{L}_\Sigma\tilde u^\perp,\ \text{and } \tilde{\mathcal{E}}:=(0,\tilde E(u)). \tag{5.24}$$

设 $\{\mathcal{E}_{i,1},\mathcal{E}_{i,2}\}_{i\in I_1}$ 和 $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ 为 $\mathcal{E}$ 的系数。

即,

$$\tilde{\mathcal{E}}_{i,1}(t):=G(\tilde{\mathcal{E}}(t),\psi_{i,1}),\ \tilde{\mathcal{E}}_{i,2}(t):=G(\tilde{\mathcal{E}}(t),\psi_{i,2}) \text{ for } i\in I_1,$$
$$\tilde{\mathcal{E}}_i(t):=G(\tilde{\mathcal{E}}(t),\Psi_i) \text{ for } i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{5.25}$$

于是，对于 $i\in I_1$,

$$\frac{d}{dt}\tilde\xi_{i,1}-2^{-1}m\tilde\xi_{i,1}+\beta_i\tilde\xi_{i,2}=\tilde{\mathcal{E}}_{i,1},$$
$$\frac{d}{dt}\tilde\xi_{i,2}-2^{-1}m\tilde\xi_{i,2}-\beta_i\tilde\xi_{i,1}=\tilde{\mathcal{E}}_{i,2}, \tag{5.26}$$

对于 $i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$,

$$\frac{d}{dt}\tilde{\xi}_i-\Gamma_i\tilde{\xi}_i=\tilde{\mathcal{E}}_i. \tag{5.27}$$

引理 5.9. 存在一个正常数 $C=C(u,m,\mathcal{M}_\Sigma,N_1)$，使得

$$\|\tilde{E}(u)\|_{L^2}(t)\le CQ(t).$$

证明。在证明中，我们用 C 表示一个依赖于 (2.6) 中的 u、m、$\mathcal{M}_\Sigma$、N_1 的正常数，其值可能在不同行之间有所变化。

我们计算

$$\begin{aligned}\tilde{E}(u)&=\Pi^\perp\Big[E(u)-\big(H(u^T)\big)''+m\big(H(u^T)\big)'-\mathcal{L}_\Sigma H(u^T)\Big]\\&=\Pi^\perp\Big[-\mathcal{M}_\Sigma(u)+\mathcal{L}_\Sigma u+N_1(u)-\big(H(u^T)\big)''+m\big(H(u^T)\big)'-\mathcal{L}_\Sigma H(u^T)\Big]\\&=:\mathrm{I}+\mathrm{II},\end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{I}=-\Pi^\perp\mathcal{M}_\Sigma(u)+\mathcal{L}_\Sigma\tilde{u}^\perp+\Pi^\perp N_1(u),\ \mathrm{II}=-\big(H(u^T)\big)''+m\big(H(u^T)\big)'.$$

由(5.20) 和(5.21)，我们有 $\|\mathrm{I}\|_{L^2}(t)\le CQ(t)$。直接计算可得，

$$\mathrm{II}=-D^2H(z-\bar{z})[(z-\bar{z})',(z-\bar{z})']-DH(z-\bar{z})[(z-\bar{z})'']+mDH(z-\bar{z})[(z-\bar{z})'].$$

由于 $DH(0)=0$，上式被.....所界

$$C|(z-\bar{z})'|^2+C|z-\bar{z}||(z-\bar{z})''|+C|z-\bar{z}||(z-\bar{z})'|\le C\|u^T\|_{C^2}(t)\|\partial_t u^T\|_{C^1}(t).$$

结合推论 5.3，我们得到

$$\|\mathrm{II}\|_{L^2}(t)\le C|z(t)|\|u'\|_{C^1}(t)\le CQ(t).$$

□

推论 5.10. 假设 $Q(t)\le M|z(t)|^q$ 对某些 $M,q>0$。则存在正常数$C=C(u,m,\mathcal{M}_\Sigma,N_1,M,q)$ 使得

$$\sum_{i\in I_1}\Big(|\tilde{\xi}_{i,1}(t)|^2+|\tilde{\xi}_{i,2}(t)|^2\Big)+\sum_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}|\tilde{\xi}_i(t)|^2\le C|z(t)|^{2q}.$$

证明。在证明中，我们用 C 表示一个取决于 u、m、$\mathcal{M}_\Sigma$、N_1（见 (2.6)）、M、q 的正常数，其值可能因行而异。我们将证明

$$\sum_{i\in-\mathbb{N}}|\tilde{\xi}_i(t)|^2\le C|z(t)|^{2q}, \tag{5.28}$$

通过直接求解 e 演化方程。其他项可以类似地处理。对于 $i\in-\mathbb{N}$，由 (5.27) ，

$$\tilde{\xi}_i(t)=e^{\Gamma_i t}\tilde{\xi}(0)+\int_0^t e^{\Gamma_i(t-\tau)}\tilde{\mathcal{E}}_i(\tau)\,d\tau.$$

对于任意满足 $\sum_{i\in-\mathbb{N}}|a_i|^2=1$ 的序列 $\{a_i\}_{i\in-\mathbb{N}}$，我们计算

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i\in-\mathbb{N}}\tilde{\xi}_i(t)a_i\right|&\le\sum_{i\in-\mathbb{N}}\left|e^{\Gamma_i t}\tilde{\xi}_i(0)a_i\right|+\sum_{i\in-\mathbb{N}}\int_0^t e^{\Gamma_i(t-\tau)}\left|\tilde{\mathcal{E}}_i(\tau)a_i\right|\,d\tau\\&\le e^{-bt}\sum_{i\in-\mathbb{N}}\left|\tilde{\xi}_i(0)a_i\right|+\sum_{i\in-\mathbb{N}}\int_0^t e^{-b(t-\tau)}\left|\tilde{\mathcal{E}}_i(\tau)a_i\right|\,d\tau.\end{aligned}$$

由引理5.4 中的 (1)，$e^{-bt}\sum_{i\in-\mathbb{N}}\left|\tilde{\xi}_i(0)a_i\right|\le C|z(t)|^q$。由 (5.24)、(5.25)、引理 5.9 以及该假设，

$$\sum_{i\in I_1}\Big(|\tilde{\mathcal{E}}_{i,1}(t)|^2+|\tilde{\mathcal{E}}_{i,2}(t)|^2\Big)+\sum_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}|\tilde{\mathcal{E}}_i(t)|^2=\|\tilde{\mathcal{E}}\|_G^2=2m^{-2}\|\tilde{E}(u)\|_{L^2}^2(t)\le C|z(t)|^q.$$

由柯西-施瓦茨不等式,

$$\sum_{i\in-\mathbb{N}}\int_0^t e^{-b(t-\tau)}\left|\tilde{\mathcal{E}}_i(\tau)a_i\right|\,d\tau\le C\int_0^t e^{-b(t-\tau)}|z(\tau)|^q\,d\tau.$$

令 $t_0=t_0(u,2^{-1}q^{-1}b)$ 为引理 5.4 中式 (2) 给出的常数。则

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-b(t-\tau)}|z(\tau)|^q\,d\tau&=\int_0^{t_0}e^{-b(t-\tau)}|z(\tau)|^q\,d\tau+\int_{t_0}^t e^{-2^{-1}b(t-\tau)}\left(e^{-2^{-1}q^{-1}b(t-\tau)}|z(\tau)|\right)^q\,d\tau\\&\le Ce^{-bt}\max_{\tau\in[0,\infty)}|z(\tau)|^q+C|z(t)|^q\le C|z(t)|^q.\end{aligned}$$

简言之，我们推出 $\left|\sum_{i\in-\mathbb{N}}\tilde{\xi}_i(t)a_i\right|\le C|z(t)|^q$ 对所有满足 $\sum_{i\in-\mathbb{N}}|a_i|^2=1$ 的序列 $\{a_i\}$ 均成立。这意味着式 (5.28)。

□

引理 5.11（衰减改善）。对于 $1\le r\le p-1$，假设下述条件成立。

$$|z'(t)|^2+|\bar{z}(t)|^2+\sum_{i\in I_1}\left(|\tilde{\xi}_{i,1}(t)|^2+|\tilde{\xi}_{i,2}(t)|^2\right)+\sum_{i\neq0}|\tilde{\xi}_i(t)|^2\le M|z(t)|^{2r}.\tag{5.29}$$

那么，对于任意 $\varepsilon\in(0,1)$，存在一个正常数 $C=C(u,m,\mathcal{M}_\Sigma,N_1,M,r,\varepsilon)$，使得

$$|z'(t)|^2+|\bar{z}(t)|^2+\sum_{i\in I_1}\left(|\tilde{\xi}_{i,1}(t)|^2+|\tilde{\xi}_{i,2}(t)|^2\right)+\sum_{i\neq0}|\tilde{\xi}_i(t)|^2\le C|z(t)|^{\min\{2r+2-\varepsilon,2p-2\}}.\tag{5.30}$$

此外,

$$\left|z'(t)+m^{-1}\nabla f(z(t))\right|\le C|z(t)|^{r+1-\varepsilon/2}.\tag{5.31}$$

证明。固定 $\varepsilon\in(0,1)$。在证明中，我们用 C 表示一个依赖于 u、m、$\mathcal{M}_\Sigma$、N_1（见（2.6））、M、r、ε的正常数，其值可能在不同行中有所变化。利用假设（5.29）、引理 5.2（中性模态的支配性）和引理 A.2（插值），对于所有 k、$\ell\in\mathbb{N}_0$、$\left|\frac{d}{dt}z^{(k,\ell)}(t)\right|^2+|\bar{z}^{(k,\ell)}(t)|^2\le C_{k,\ell}|z(t)|^{2r-\varepsilon}$. 我们有同样地，将引理 A.2 与引理 5.8 结合应用,

$$\sum_{i\in I_1}\left(|\tilde{\xi}_{i,1}^{(k,\ell)}(t)|^2+|\tilde{\xi}_{i,2}^{(k,\ell)}(t)|^2\right)+\sum_{i\neq0}|\tilde{\xi}_i^{(k,\ell)}(t)|^2\le C_{k,\ell}|z(t)|^{2r-\varepsilon}.\tag{5.32}$$

由 Sobolev 嵌入，$\|(u^T)'\|_{C^s}(t)+\|\tilde{u}^\perp\|_{C^s}(t)\le C_s|z(t)|^{r-\varepsilon/2}$。由（5.18）和（5.32），我们还得到$\|u'\|_{C^s}(t)\le C_s|z(t)|^{r-\varepsilon/2}$。根据（5.19）中 $Q(t)$ 的定义,

$$Q(t)\le C|z(t)|^{\min(p,r+1-\varepsilon/2)}=C|z(t)|^{r+1-\varepsilon/2}.$$

由推论 5.10,

$$\sum_{i\in I_1}\left(|\tilde{\xi}_{i,1}(t)|^2+|\tilde{\xi}_{i,2}(t)|^2\right)+\sum_{i\neq0}|\tilde{\xi}_i(t)|^2\le C|z(t)|^{2r+2-\varepsilon}.\tag{5.33}$$

由推论 5.7、(5.31) 以及

$$|\bar{z}(t)|^2\le C|z(t)|^{\min\{2r+2-\varepsilon,2p-2\}}.\tag{5.34}$$

注意，(5.31) 蕴含

$$|z'(t)|^2\le C|z(t)|^{\min\{2r+2-\varepsilon,2p-2\}}.\tag{5.35}$$

结合 (5.33)、(5.35) 和 (5.34) 得到 (5.30)。 □

命题 5.1 的证明。(5.8) 是引理 5.2（中性模态的主导性）的一个较弱形式。由引理 5.2（中性模态的主导性）和引理 5.8（对 $\tilde{q}$ 高阶导数的控制），引理 5.11（衰减性的改善）中的假设 (5.29) 对 $r=1$ 成立。通过迭代引理 5.11，(5.29) 对 $r=p-1$ 成立。于是，(5.9) 由 (5.31) 得出。□

6. Slowly decaying solutions to parabolic equation

本节考虑抛物型方程 (1.2) 的缓慢衰减解。主要目标是证明命题 6.1，该命题类似于命题 5.1。

~设 $u \in C^\infty(Q_{0,\infty}, V)$ 是方程(1.2) 的一个解，且 $\|u\|_{H^{n+4}}(t) = o(1)$作为 $t \to \infty$。由引理A.4（抛物正则性），$\|u\|_{C^s}(t) = o(1)$对所有 $s \in \mathbb{N}$均成立。我们进一步假设 u 不呈指数衰减。也就是说，对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{t\to\infty} e^{\varepsilon t}\|u\|_{C^1}(t) = \infty. \tag{6.1}$$

我们将 u 投影到特征截面 φ_i上。令

$$\xi_i(t) := \int_\Sigma \langle u, \varphi_i\rangle \, d\mu. \tag{6.2}$$

回忆一下 $\{i \in \mathbb{N}: \ \lambda_i = 0\} = \{\iota + 1, \iota + 2, \dots, \iota + J\}$。中性模态将发挥特殊作用，我们将其记为

$$x_j(t) := \xi_{\iota+j}(t). \tag{6.3}$$

命题 6.1。对于上文所述的方程 (1.2) 的慢衰减解 u，有

$$\sum_{i:\lambda_i\neq 0} |\xi_i(t)|^2 = o(1)|x(t)|^2. \tag{6.4}$$

此外，对所有 $\varepsilon > 0$，存在正常数 $C = C(u, \mathcal{M}_\Sigma, N_2, \varepsilon)$，使得

$$|x'(t) + \nabla f(x(t))| \le C|x(t)|^{p-\varepsilon/2}. \tag{6.5}$$

命题 6.1 的证明与命题 5.1 的证明结构类似。第一部分是要证明（见推论 6.4） $|x(t)|$ 控制 u 的任意 C^s 范数。

设 $E_2(u) = N_2(u) + \mathcal{M}_\Sigma(u) - \mathcal{L}_\Sigma u$。则 (1.2) 变为

$$u' - \mathcal{L}_\Sigma u = E_2(u). \tag{6.6}$$

由 (2.4) 和 (2.6)，误差项 $E_2(u)$ 具有如下结构

$$E_2(u) = \sum_{j=0}^{2} b_{2,j} \cdot \nabla^j u, \tag{6.7}$$

其中 $b_{2,\ j} = b_{2,\ j}(\omega, u, \nabla u)$ 是光滑的，且 $b_{2,\ j}(\omega, 0, 0) = 0$。在 $\|u\|_{C^s}(t) = o(1)$ 下，E_2 的二次性使我们得以将 E_2 的高阶导数用 u的高阶导数来界定。

引理 6.2. 对任意 $s \ge 2$,

$$\sum_{2k+\ell\le 2s} \|\partial_t^k \nabla^\ell E_2(u)\|_{L^2}(t) = o(1) \sum_{2k+\ell\le 2s} \|\partial_t^k \nabla^\ell u\|_{L^2}(t).$$

证明。我们给出.....的证明。

$$\sum_{2k+\ell\le 2s} \left\|\partial_t^k \nabla^\ell \left(b_{2,2} \cdot \nabla^2 u\right)\right\|_{L^2}(t) = o(1) \sum_{2k+\ell\le 2s} \|\partial_t^k \nabla^\ell u\|_{L^2}(t).$$

其他项可以类似处理。为简便起见，我们将 $b(\omega, u, \nabla u)$ 写作 $b_{2,2}(\omega, u, \nabla u)$。对于$m_0, m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$，我们用 $b^{(m_0,m_1,m_2)}$ 表示 b 的阶为(m_0, m_1, m_2)的偏导数。取 k_0, ℓ_0满足 $2k_0 + \ell_0 \le 2s$。于是， $\partial_t^{k_0}\nabla^{\ell_0}\left(b \cdot \nabla^2 u\right)$ 展开中的各项均具有以下形式

$$b^{(m_0,m_1,m_2)} \cdot \left(\partial_t^{k_1}\nabla^{\ell_1} u * \partial_t^{k_2}\nabla^{\ell_2} u * \dots \partial_t^{k_N}\nabla^{\ell_N} u\right),$$

其中 $N = m_1 + m_2 + 1$、 $\sum_{i=1}^N k_i = k_0$ 和 $\sum_{i=1}^N \ell_i = \ell_0 + m_2 + 2$。只需证明逐点界

$$b^{(m_0,m_1,m_2)} \cdot \left(\left(\partial_t^{k_1}\nabla^{\ell_1} u\right) \cdot \left(\partial_t^{k_2}\nabla^{\ell_2} u\right) \cdot \dots \cdot \left(\partial_t^{k_N}\nabla^{\ell_N} u\right)\right) = o(1) \sum_{2k+\ell\le 2s} |\partial_t^k \nabla^\ell u|.$$

我们首先讨论 $m_1 = m_2 = 0$ 的情形。上式变为 $b^{(m_0,0,0)} \cdot \partial_t^{k_0} \nabla^{\ell_0 - m_0 + 2} u$. From

$$|b^{(m_0,0,0)}| \le C(|u| + |\nabla u|) \text{ and } |\partial_t^{k_0} \nabla^{\ell_0 - m_0 + 2} u| = o(1),$$

该断言成立。

接下来，我们考虑 $m_1 + m_2 \ge 1$ 的情形。只需证明 $\min_i(2k_i + \ell_i) \le 2s$，因为其他项可由 $o(1)$ 控制。假设这不成立。换言之，$2k_i + \ell_i \ge 2s + 1$ 对所有 $1 \le i \le N$ 都成立。那么

$$2Ns + N \le \sum_{i=1}^{N} (2k_i + \ell_i) = 2k_0 + \ell_0 + m_2 + 2 \le 2s + 2N.$$

鉴于 $N \ge 2$ 和 $s \ge 2$，这是一个矛盾。 □

现在我们将 (6.6) 投影到特征截面 φ_i上。令

$$\xi_i^{(k,\ell)}(t) := \int_\Sigma \left\langle \mathcal{L}_\Sigma^\ell \partial_t^k u, \varphi_i \right\rangle \, d\mu, \ \mathcal{E}_i^{(k,\ell)}(t) := \int_\Sigma \left\langle \mathcal{L}_\Sigma^\ell \partial_t^k E_2(u), \varphi_i \right\rangle \, d\mu$$

于是（6.6）变为

$$\frac{d}{dt}\xi_i^{(k,\ell)}(t) - \lambda_i \xi_i^{(k,\ell)}(t) = \mathcal{E}_i^{(k,\ell)}(t). \tag{6.8}$$

对于中性模态，我们记

$$x_j^{(k,\ell)}(t) := \xi_{\iota+j}^{(k,\ell)}(t), \ \mathcal{W}_j^{(k,\ell)}(t) := \mathcal{E}_{\iota+j}^{(k,\ell)}(t)$$

引理 6.3。对于任意 $s \ge 2$,

$$\sum_{k+\ell \le s} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(k,\ell)}(t)|^2 = (1 + o(1))|x(t)|^2.$$

证明。固定 $s \ge 2$。定义三个非负函数 $X_+(t)$、$X_0(t)$ 和 $X_-(t)$，其中

$$X_0^2(t) = \sum_{k+\ell \le s} \sum_{1 \le j \le J} |x_j^{(k,\ell)}(t)|^2, \ X_\pm^2(t) = \sum_{k+\ell \le s} \sum_{i:\pm\lambda_i > 0} |\xi_i^{(k,\ell)}(t)|^2.$$

我们注意到，这些系数根据特征值的符号分组在一起。由 (6.8)，我们计算得到

$$\begin{aligned} X_+ X_+' &= \sum_{k+\ell \le s} \sum_{i:\lambda_i > 0} \left(\lambda_i |\xi_i^{(k,\ell)}(t)|^2 + \xi_i^{(k,\ell)}(t) \mathcal{E}_i^{(k,\ell)}(t) \right) \\ &= \sum_{k+\ell \le s} \sum_{i:\lambda_i > 0} \left(\lambda_i |\xi_i^{(k,\ell)}(t)|^2 \right) + X_+ Y_+, \end{aligned}$$

这里 $X_+(t)Y_+(t)$ 由最后一个等式定义。设 $b = \min\{|\lambda_i| : \lambda_i \ne 0\}$。我们有

$$X_+' - bX_+ \ge Y_+.$$

类似地，定义 $Y_0(t)$ 和 $Y_-(t)$ 为

$$X_0(t)Y_0(t) = \sum_{k+\ell \le s} \sum_{1 \le j \le J} x_j^{(k,\ell)}(t) \mathcal{W}_j^{(k,\ell)}(t),$$

and

$$X_-(t)Y_-(t) = \sum_{k+\ell \le s} \sum_{i:\lambda_i < 0} \xi_i^{(k,\ell)}(t) \mathcal{E}_i^{(k,\ell)}(t).$$

有如下结论:

$$X_0' = Y_0, \quad X_-' + bX_- \le Y_-.$$

现在我们比较 $|X_+(t)|^2 + |X_0(t)|^2 + |X_-(t)|^2$ 和 $|Y_+(t)|^2 + |Y_0(t)|^2 + |Y_-(t)|^2$。

$$|X_+(t)|^2 + |X_0(t)|^2 + |X_-(t)|^2 = \sum_{k+\ell \le s} \|\mathcal{L}_\Sigma^\ell \partial_t^k u\|_{L^2}^2(t).$$

由柯西-施瓦茨不等式,

$$|Y_+(t)|^2+|Y_0(t)|^2+|Y_-(t)|^2\le\sum_{k+\ell\le s}\sum_{i=1}^{\infty}|\mathcal{E}_i^{k,\ell}(t)|^2=\sum_{k+\ell\le s}\|\mathcal{L}_\Sigma^\ell\partial_t^kE_2(u)\|_{L^2}^2(t).$$

由引理 6.2,

$$\sum_{k+\ell\le s}\|\mathcal{L}_\Sigma^\ell\partial_t^kE_2(u)\|_{L^2}^2(t)=o(1)\sum_{k+\ell\le s}\|\mathcal{L}_\Sigma^\ell\partial_t^ku\|_{L^2}^2(t).$$

因此, $|Y_+(t)|^2+|Y_0(t)|^2+|Y_-(t)|^2=o(1)\big(|X_+(t)|^2+|X_0(t)|^2+|X_-(t)|^2\big)$. 我们随后可以应用常微分方程引理, 即引理 A.1。缓慢衰减假设 (6.1) 排除了 $X_-(t)$ 占主导的可能性。因此

$$|X_+(t)|^2+|X_0(t)|^2+|X_-(t)|^2=(1+o(1))|X_0(t)|^2. \tag{6.9}$$

还需证明

$$|X_0(t)|^2=(1+o(1))|x(t)|^2. \tag{6.10}$$

对于 $\ell\ge1$,

$$x_j^{(k,\ell)}=\int_\Sigma\left\langle\mathcal{L}_\Sigma^\ell\partial_t^ku,\varphi_{\iota+j}\right\rangle\,d\mu=\int_\Sigma\left\langle\partial_t^ku,\mathcal{L}_\Sigma^\ell\varphi_{\iota+j}\right\rangle\,d\mu=0.$$

对于 $k\ge1$,

$$x_j^{(k,\ell)}=\frac{d}{dt}z_j^{(k-1,\ell)}=\mathcal{W}_j^{(k-1,\ell)}.$$

这些意味着

$$\begin{aligned}|X_0(t)|^2&\le|x(t)|^2+\sum_{k\le s-1}|\mathcal{W}^{(k,0)}(t)|^2\\&\le|x(t)|^2+o(1)\left(|X_+(t)|^2+|X_0(t)|^2+|X_-(t)|^2\right)\\&\le|x(t)|^2+o(1)|X_0(t)|^2.\end{aligned}$$

我们在最后一个不等式中使用了 (6.9)。因此 (6.10) 成立, 证明完毕。 . □

推论 6.4。对于任意 $s\in\mathbb{N}$, 存在一个正的常数 $C=C(u,s)$, 使得 $\|u\|_{C^s}(t)\le C|x(t)|$.

其余论证比椭圆情形中的更为简单。我们省略细节, 仅给出主要步骤。它们的椭圆对应结果可见第5.2小节。

令

$$Q(t)=|x(t)|^p+|x(t)|\|u'\|_{C^2}(t)+|x(t)|\|\tilde{u}^\perp\|_{C^3}(t).$$

引理 6.5（参见引理 5.5）。存在一个正数 $C=C(u,\mathcal{M}_\Sigma,N_2)$, 使得

$$|\mathcal{M}_\Sigma(u)+\nabla f(x(t))-\mathcal{L}_\Sigma\tilde{u}^\perp|+|N_2(u)|\le CQ(t).$$

引理 6.6（ 参见引理 5.6 和 5.9）。存在一个正数常量 $C=C(u,\mathcal{M}_\Sigma,N_2)$, 使得 t

$$|x'(t)+\nabla f(x(t))|+\left\|\left(\tilde{u}^\perp\right)'-\mathcal{L}_\Sigma\tilde{u}^\perp\right\|_{L^2}(t)\le CQ(t).$$

推论6.7（参见推论 5.7 和5.10）。假设 $Q(t)\le M|x(t)|^q$ 对于某些 $M,q>0$成立。则存在正常数 $C=C(u,\mathcal{M}_\Sigma,N_2,M,q)$, 使得 $|x'(t)|\le C|x(t)|^{\min(q,p-1)}$ 且 $\|\tilde{u}^\perp\|_{L^2}(t)\le C|x(t)|^q$。

引理6.8（参见引理 5.11）。对于 $1\le r\le p-1$, 假设以下条件成立。

$$|x'(t)|+\|\tilde{u}^\perp\|_{L^2}(t)\le M|x(t)|^r.$$

Then 对于任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在一个正的常数 $C=C(u,\mathcal{M}_\Sigma,N_2,M,r,\varepsilon)$, 使得

$$|x'(t)|+\|\tilde{u}^\perp\|_{L^2}(t)\le C|x(t)|^{\min\{r+1-\varepsilon/2,p-1\}}.$$

此外,

$$|x'(t)+\nabla f(x(t))|\le C|x(t)|^{r+1-\varepsilon/2}.$$

利用引理 6.8, 通过一个简单的迭代论证即可得到命题 6.1。

7. Gradient flow

在本节中，我们研究带有扰动向量场的欧几里得空间上的梯度流：设 $z(t)$ 是 on $\mathbb{R}^J$ 上满足条件的曲线

$$z'(t) + \nabla f(z(t)) = G(t), \tag{7.1}$$

其中 $f:\ \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$ 是一个解析势函数，且 $G(t)$ 是一个光滑向量场。令 f 满足以下假设：

$$f(0) = 0, \quad \nabla f(0) = 0, \quad \nabla^2 f(0) = 0. \tag{7.2}$$

对于某个正整数 $p \geq 3$, f 在零点处有展开式

$$f = \sum_{j \geq p} f_j,$$

其中， f_j 是次数为 j 和 $f_p \not\equiv 0$的齐次多项式。 f_p 在 $\mathbb{S}^{J-1}$ 上的限制记为$\hat{}\ f_p$。我们将 ∇ 记为 $\mathbb{S}^{J-1}$上的标准联络。考察$\hat{}\ f_p$ 的临界点和临界值，作为

$$\mathbf{C} := \left\{\theta \in \mathbb{S}^{J-1}\ :\ \nabla \hat{f}_p(\theta) = 0\right\},\ \mathbf{D} := \left\{\hat{f}_p(\theta)\ :\ \theta \in \mathbf{C}\right\}.$$

我们进一步假设摄动向量场 G 有界

$$|G(t)| \leq C|z(t)|^{p-\varepsilon}, \tag{7.3}$$

对于某些一致常数 $\varepsilon \in (0, 2^{-1})$ 和 $C < \infty$。本节的主要定理涉及解趋于原点时的割线方向。

定理7.1。假设 $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$。那么 $|z(t)|^{-p} f(z(t))$ 收敛到一个非负临界值$\alpha_0 \in$D。此外，以下情形之一成立：

(1) 假设 $\alpha_0 > 0$。则割线 $z(t)/|z(t)|$ 收敛于一个临界点 $\theta^* \in$ C，且满足 $f_p(\theta^*) = \alpha_0$。此外，$\lim_{t\to\infty} t^{1/(p-2)}|z(t)| = (\alpha_0 p(p-2))^{-1/(p-2)}$.(2)假设 $\alpha_0 = 0$。则 $\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(z(t)/|z(t)|, C_0) = 0$。此处 C_0 是C 的某个连通分支 $\cap \left\{\theta:\ \hat{}\ f_p(\theta) = 0\right\}$. 此外，$\lim_{t\to\infty} t^{1/(p-2)}|z(t)| = \infty$。

注释 7.2。存在非负的 $\mathbb{S}^{J-1}$ 临界值是流 $z(t)$ 收敛到原点的必要条件。此外，如果 C_0 中的点是孤立的，那么 (2) 也意味着唯一的割线极限方向。

我们现在可以证明定理 2.3 和 2.5。

定理2.3的证明。根据命题5.1，定理7.1适用，其中势函数为 $m^{-1}f$。$\hat{}$假设定理7.1中的情形(1)发生。这确保了 $z(t)/|z(t)|$ 收敛到 θ^*，即 f_p 的一个临界点，其中$m^{-1}\hat{}\, f_p(\theta^*) = \alpha_0 > 0$。此外，

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/(p-2)}|z(t)| = \big(\alpha_0 p(p-2)\big)^{-1/(p-2)}.$$

这意味着

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/(p-2)}\|u(t)\|_{L^2} = \big(\alpha_0 p(p-2)\big)^{-1/(p-2)}.$$

令 $w \in \ker \mathcal{L}_\Sigma$ 为通过 (2.8) 与 θ^* 相对应的截面。显然， $u(t)/\|u(t)\|_{L^2}$ 在$L^2(\Sigma; V)$中收敛到 w 。由推论 5.3，对任意 $k \in \mathbb{N}$， $u(t)/\|u(t)\|_{L^2}$ 在 $C^k(\Sigma; V)$中一致有界。因此， $u(t)/\|u(t)\|_{L^2}$ 在 $C^\infty(\Sigma; V)$中收敛到 w 。由此得到定理 2.3 中的情形 (1)。另一种可能性，即定理 7.1 中的情形 (2)，导出定理 2.4 中的情形 (2)。□

定理 2.5的证明。定理2.5可通过在上述证明中用命题 6.1 替换命题 5.1 得到。□

本节余下部分致力于证明定理7.1。我们用极坐标来表示该问题 $z = r\theta$ 其中 $r = |z|$ 且 $\theta = z/|z| \in \mathbb{S}^{J-1}$。由于 f_p 是 p 次齐次的，$f_p(z) = r^p \hat{} f_p(\theta)$。我们计算梯度 $\nabla f_p = pr^{p-1} \hat{} f_p \frac{\partial}{\partial r} + r^{p-2} \nabla \hat{} f_p$。令 $G^{\perp}(t)$ 和 $G^T(t)$分别表示 $G(t)$的径向部分和切向部分。于是，方程 (7.1) 可分解为径向部分和切向部分：

$$\begin{cases} r'(t) = -r^{p-1}(t)\left(p\hat{f}_p(\theta(t)) + R^{\perp}(t)\right), \\ \theta'(t) = -r^{p-2}(t)\left(\nabla \hat{f}_p(\theta(t)) + R^T(t)\right). \end{cases} \tag{7.4}$$

Here

$$\begin{aligned} R^{\perp}(t) =& r^{-p+1}(t)G^{\perp}(t) + \sum_{j \geq p+1} j r^{j-p}(t)\hat{f}_j, \\ R^T(t) =& r^{-p+1}(t)G^T(t) + \sum_{j \geq p+1} r^{j-p}(t)\nabla \hat{f}_j. \end{aligned}$$

由（7.3）可知，存在常数 $A > 0$ 使得

$$|R^{\perp}(t)| + |R^T(t)| \leq A r^{1-\varepsilon}(t). \tag{7.5}$$

引理 7.3. $\liminf_{t\to\infty} |\nabla \hat{} f_p(\theta(t))| = 0.$

证明。处理 $\sigma(t) = r^{2-p}(t)$ 较为方便。方程（7.4）变为

$$\begin{cases} \sigma'(t) = (p-2)\left(p\hat{f}_p(\theta(t)) - R^{\perp}(t)\right) \\ \theta'(t) = -\sigma^{-1}(t)\left(\nabla \hat{f}_p(\theta(t)) + R^T(t)\right). \end{cases} \tag{7.6}$$

假设 $\lim_{t\to\infty} r(t) = 0$ 变为 $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty$。设 $\liminf_{t\to\infty} |\nabla \hat{} f_p(\theta(t))| = c_0 > 0$。由（7.5）可知，存在 $t_0 > 0$ 使得 $|R^T(t)| \leq 4^{-1}c_0$，且对所有 $t \geq t_0$ 都有 $|\nabla \hat{} f_p(\theta(t))| \geq 2^{-1}c_0$。这意味着对所有 $t \geq t_0$,

$$\frac{d}{dt}\hat{f}_p(\theta(t)) = \nabla \hat{f}_p(\theta(t)) \cdot \theta'(t) \leq -\frac{c_0^2}{4\sigma(t)}.$$

由（7.6）中的第一个方程，我们推断出 σ 至多线性增长。因此,

$$\hat{f}_p(\theta(t)) \leq \hat{f}_p(\theta(t_0)) + \int_{t_0}^{t} -\frac{c_0^2}{4\sigma(\tau)} d\tau \to -\infty \text{ as } t \to \infty,$$

这就产生了矛盾。 □

根据引理 7.3，存在一个趋于无穷的序列 t_i，使得 $|\nabla \hat{} f_p(\theta(t_i))|$ 趋于零。由于 $\mathbb{S}^{J-1}$ 是紧的，存在一个子序列（仍记为 t_i），使得 $\theta(t_i)$ 收敛到一个临界点 $\theta^* \in \mathsf{C}$。^令 $\alpha_0 = f_p(\theta^*)$。

^ 引理 7.4.我们有 $\alpha_0 \geq 0$ 且 $\lim_{t\to\infty} f_p(\theta(t)) = \alpha_0$。

证明。设 $\alpha_0 < 0$。由 (7.5)和 (7.4)的第一个方程， $r(t)$在 t 足够大时严格递增。这与假设 $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$ 矛盾。

^为了证明第二个断言，假设 f_p 不是常数，因为否则该断言是显然的。根据 Lojasiewicz 梯度不等式 [-Loj63], ，对于每个临界点 $\theta_0 \in \mathsf{C}$，都存在一个邻域 U^ ^ ^，使得对于所有 $\theta \in \mathsf{C} \cap U$、 $f_p(\theta) = f_p(\theta_0)$。因此，D 是一个有限集。由于 f_p 不是常数，D 至少包含两个不同的元素。取足够小的 $\epsilon_0 > 0$ ，使得临界值之间至少相差 $6\varepsilon_0$。也就是说,

$$\inf_{\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbf{D},\ \alpha_1 \neq \alpha_2} |\alpha_1 - \alpha_2| \geq 6\epsilon_0.$$

对于每个 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$，令

$$\delta(\varepsilon) := \inf\left\{|\nabla \hat{f}_p(\theta)| \,:\, |f(\theta) - \alpha| \geq \varepsilon \text{ for all } \alpha \in \mathbf{D}\right\}.$$

ˆ 显然， $\delta(\varepsilon)>0$。现在假设 $\lim_{t\to\infty} f_p(\theta(t))\neq\alpha_0$。存在 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$ 和 $t_i\to\infty$ 使得$|\hat{}f_p(\theta(t_i))-\alpha_0|\geq 2\varepsilon$. 由于 $\hat{}f_p(\theta(t))$ 是关于 t 的连续可微函数，因此存在 $\tilde{t}_i\to\infty$ 使得

$$|\hat{f}_p(\theta(\tilde{t}_i))-\alpha_0|=\varepsilon \quad \text{and} \quad \frac{d}{dt}\hat{f}_p(\theta(\tilde{t}_i))\geq 0.$$

由(7.5)，当 i 足够大时，$|R^T(\tilde{t}_i)|\leq 2^{-1}\delta(\varepsilon)$。然后根据 (7.6) 计算

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{f}_p(\theta(\tilde{t}_i)) &= -\sigma^{-1}(\tilde{t}_i)\nabla\hat{f}_p(\theta(\tilde{t}_i))\cdot\Big(\nabla\hat{f}_p(\theta(\tilde{t}_i))+R^T(\tilde{t}_i)\Big)\\ &\leq -2^{-1}\sigma^{-1}(\tilde{t}_i)\delta^2(\varepsilon)<0.\end{aligned}\tag{7.7}$$

这是一个矛盾。 □

引理 7.5。令 C_0 为包含 θ^* 的 C 的连通分支。则

$$\lim_{t\to\infty}\operatorname{dist}(\theta(t),\mathbf{C}_0)=0.$$

证明。令 N_δ 表示 C_0 的（开） δ-邻域。若断言不成立，则存在一个很小的 $\delta>0$，使得对于任意 $t_0\geq 0$，都存在 $t_1\geq t_0$，满足 $\theta(t_1)\notin N_{2\delta}$。取足够小的 $\delta>0$，可假设 $N_{3\delta}\cap\mathsf{C}=\mathsf{C}_0$。令 $\mathsf{A}=\mathsf{cl}(N_{2\delta}\setminus N_\delta)$。由于 θ^* 是 $\theta(t)$ 的极限点，存在严格递增的时间序列 $t_1<t_2<\ldots$，使得对 $t\in[t_{2k-1},t_{2k}]$，$\theta(t)\in\mathsf{A}$，且 $\mathsf{dist}(\theta(t_{2k-1}),\mathsf{C}_0)=2\delta$，并且对所有正整数 k，$\mathsf{dist}(\theta(t_{2k}),\mathsf{C}_0)=\delta$。由于 A 是闭集，且 $\mathsf{A}\cap\mathsf{C}=\varnothing$，存在 $c>0$，使得对所有 $\theta\in\mathsf{A}$，$|\nabla\hat{}f_p(\theta)|\geq c$。由 (7.5)，对于某个足够大的 $\bar{t}$，有 $|R^T(t)|\leq 2^{-1}c$。这意味着对于任意满足 $t_{2k-1}\geq\bar{t}$ 的$t\in[t_{2k-1},t_{2k}]$，

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}\hat{f}_p(\theta(t)) =&\sigma^{-1}(t)\nabla\hat{f}_p(\theta(t))\cdot\Big(\nabla\hat{f}_p(\theta(t))+R^T(t)\Big)\geq 2^{-1}\sigma^{-1}(t)|\nabla\hat{f}_p(\theta(t))|^2\\ \geq&3^{-1}|\nabla\hat{f}_p(\theta(t))||\theta'(t)|\geq 3^{-1}c|\theta'(t)|.\end{aligned}$$

因此，

$$\hat{f}_p(\theta(t_{2k}))-\hat{f}_p(\theta(t_{2k-1}))\leq -3^{-1}c\int_{t_{2k-1}}^{t_{2k}}|\theta'(t)|\,dt\leq -3^{-1}c\delta.$$

ˆ 特别地，$f_p(\theta(t))$ 不收敛。这与引理 7.4 矛盾。

□

命题 7.6. 若 $\alpha_0>0$，则 $\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\theta^*$。此外，曲线 $\theta(t)$ 在 $\mathbb{S}^{J-1}$ 上的长度有限。

ˆ 证明。回忆 $\alpha_0=f_p(\theta^*)$。考虑控制函数

$$g(t):=r(t)+(\hat{f}_p(\theta(t))-\hat{f}_p(\theta^*)).$$

我们的目标是证明如下结论。存在 $t_0\geq 0$、$c_0>0$、$\rho_0\in(0,1)$ 以及 θ^* 的一个邻域 U_0，使得对于 $t\geq t_0$，有 $g'(t)\leq 0$，并且，

$$g'(t)\leq -c_0|g(t)|^{\rho_0}|\theta'(t)| \quad \text{if } t\geq t_0 \text{ and } \theta(t)\in U_0.\tag{7.8}$$

我们先证明这蕴含该命题。首先，由于 $g(t)$ 单调递减至零，对于 $t\geq t_0$，有 $g(t)\geq 0$。假设对于满足 $t_1\geq t_0$的 $t\in[t_1,t_2]$，有 $\theta(t)\in U_0$。对 (7.8) 积分，

$$\int_{t_1}^{t_2}|\theta'(t)|dt\leq\frac{|g(t_1)|^{1-\rho_0}-|g(t_2)|^{1-\rho_0}}{c_0(1-\rho_0)}\leq\frac{|g(t_1)|^{1-\rho_0}}{c_0(1-\rho_0)}.$$

这表明，若 $t_1\geq t_0$、$g(t_1)$ 充分小，且 $\theta(t_1)$ 充分接近 θ^*（我们可由引理 7.4 以及 $\lim_{i\to\infty}\theta(t_i)=\theta^*$ 找到这样的 t_1），则对所有 $t\geq t_1$，$\theta(t)$ 始终位于 U_0 内，并且曲线 $\theta(t)$ 在 $t\in[t_1,\infty)$ 上的长度是有限的。特别地，$\theta(t)$ 随 $t\to\infty$ 收敛，从而证明了该命题。

尚需证明 $g'(t)\leq 0$ 以及 (7.8)。令 A 为(7.5) 中的常数。取 $t_0\geq 0$ 足够大，使得对于 $t\geq t_0$,

$$p\hat{f}_p(\theta(t))+R^\perp(t)\geq 2^{-1}p\hat{f}_p(\theta^*),\tag{7.9}$$

$$r^{1-2\varepsilon}(t)\leq(160)^{-1}A^{-2}p\hat{f}_p(\theta^*).\tag{7.10}$$

ˆ 这是可能的，因为引理 7.4 和 $f_p(\theta^*) > 0$。由式 (7.4) 可知，

$$g'(t) = -r^{p-1}(t)\left(p\hat{f}_p(\theta^*) + R^{\perp}\right) - r^{p-2}(t)\nabla\hat{f}_p(\theta(t)) \cdot \left(\nabla\hat{f}_p(\theta(t)) + R^T(t)\right). \tag{7.11}$$

对于 $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned} g'(t) \leq & -2^{-1}pr^{p-1}(t)\hat{f}_p(\theta^*) - r^{p-2}(t)\nabla\hat{f}_p(\theta(t)) \cdot \left(\nabla\hat{f}_p(\theta(t)) + R^T(t)\right) \qquad \text{by (7.9)} \\ \leq & -2^{-1}pr^{p-1}(t)\hat{f}_p(\theta^*) + 4^{-1}r^{p-2}(t)|R^T(t)|^2 \qquad \text{by Cauchy-Schwarz} \\ \leq & -2^{-1}pr^{p-1}(t)\hat{f}_p(\theta^*) + 4^{-1}A^2r^{p-2\varepsilon}(t) \leq 0 \qquad \text{by (7.5).} \end{aligned}$$

这表明 $g'(t) \leq 0$。

接下来，将 Łojasiewicz 梯度不等式 [Loj63] 应用于 ˆ f_p ，将其视为定义在 $\mathbb{R}^J \setminus \{0\}$ 上的解析函数 $|x|^{-p}f_p(x)$，我们得到 θ^* 在 $\mathbb{S}^{J-1}$ 中的一个邻域 U_0、 $\rho_1 \in (0, 1)$ 以及 $c_1 > 0$，使得若 $\theta \in U_0$，则

$$|\nabla\hat{f}_p(\theta)| \geq c_1|\hat{f}_p(\theta) - \hat{f}_p(\theta^*)|^{\rho_1}. \tag{7.12}$$

现在，我们假设对于某个 $t \geq t_0$， $\theta(t) \in U_0$，并证明 (7.8) 成立。根据我们所使用的 (7.11) 右端项，我们将讨论分为两种情况。

情况 1。假设 $|\nabla\hat{f}_p(\theta(t)) + R^T(t)| \geq 4Ar^{1-\epsilon}(t)$。这意味着

$$|\nabla\hat{f}_p(\theta(t))| \geq 3Ar^{1-\epsilon}(t) \tag{7.13}$$

and

$$|\nabla\hat{f}_p(\theta(t))| - |R^T(t)| \geq 2^{-1}|\nabla\hat{f}_p(\theta(t)) + R^T(t)| = 2^{-1}r^{2-p}(t)|\theta'(t)|. \tag{7.14}$$

由 (7.12) 和 (7.13),

$$|\nabla\hat{f}_p(\theta(t))| \geq 2^{-1}\left(c_1|\hat{f}_p(\theta(t)) - \hat{f}_p(\theta^*)|^{\rho_1} + 3Ar^{1-\epsilon}(t)\right). \tag{7.15}$$

结合（7.14）和（7.15），我们得到

$$\begin{aligned} g'(t) \leq & -r^{p-2}(t)|\nabla\hat{f}_p(\theta(t))|\left(|\nabla\hat{f}_p(\theta(t))| - |R^T(t)|\right) \\ \leq & -4^{-1}\left(c_1|\hat{f}_p(\theta(t)) - \hat{f}_p(\theta^*)|^{\rho_1} + 3Ar^{1-\epsilon}(t)\right)|\theta'(t)|. \end{aligned}$$

因此，对于 $\rho_2 = \max(\rho_1, 1-\varepsilon) \in (0, 1)$ 以及某个 $c_2 > 0$,

$$g'(t) \leq -c_2|g(t)|^{\rho_2}|\theta'(t)|.$$

情形 2。假设 $|\nabla\hat{f}_p(\theta(t)) + R^T(\theta(t))| < 4Ar^{1-\varepsilon}(t)$。那么 $|\theta'(t)| \leq 4Ar^{p-1-\varepsilon}(t)$。这意味着

$$-2^{-1}pr^{p-1}(t)\hat{f}_p(\theta^*) \leq -8^{-1}A^{-1}p\hat{f}_p(\theta^*)r^{\varepsilon}(t)|\theta'(t)| = -4c_3r^{\varepsilon}(t)|\theta'(t)|.$$

其中 $c_3 = (32)^{-1}A^{-1}p\hat{f}_p(\theta^*)$ 由最后一个等式定义。由（7.10）可得,

$$|\nabla\hat{f}_p(\theta(t))| \leq 5Ar^{1-\epsilon}(t) \leq c_3r^{\epsilon}(t). \tag{7.16}$$

因此

$$g'(t) \leq -2^{-1}pr^{p-1}(t)\hat{f}_p(\theta^*) + \nabla\hat{f}_p(\theta(t)) \cdot \theta'(t) \leq -3c_3r^{\varepsilon}(t)|\theta'(t)|.$$

此外，由 (7.16) 和 (7.12) 可得,

$$3c_3r^{\varepsilon}(t) \geq 2c_3r^{\varepsilon}(t) + |\nabla\hat{f}_p(\theta(t))| \geq 2c_3r^{\varepsilon}(t) + c_1|\hat{f}_p(\theta(t)) - \hat{f}_p(\theta^*)|^{\rho_1} \geq c_4|g(t)|^{\rho_3}$$

对于某些 $c_4 > 0$ 和 $\rho_3 = \max(\varepsilon, \rho_1) \in (0, 1)$。不等式 (7.8) 得到，从而证明完成。 □

定理7.1 的证明。由引理 7.4，存在一个临界点 $\theta^* \in$C，使得

$$\lim_{t\to\infty} |z|^{-p}f(z) = \hat{f}_p(\theta^*) \geq 0.$$

ˆ如前所述，我们记 $\alpha_0 = f_p(\theta^*)$。若 $\alpha_0 > 0$，则 $z(t)/|z(t)|$ 的收敛性是命题7.6的直接推论。此外，通过求解（7.4）中的第一行并利用已知的渐近式，我们得到

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/(p-2)}|z(t)| = (\alpha_0p(p-2))^{1/(p-2)}.$$

设 $\alpha_0 = 0$。令 C_0 为C中包含 θ^* 的连通分支。由于临界值只有有限个（见引理7.4的证明），且 $f_p(C_0)$是连通的，故 $f_p(C_0) = \{0\}$。特别地，C_0 是 $C \cap \{\theta$ 的一个连通分支： $f_p(\theta) = 0\}$。由引理7.5 可得 $\mathrm{dist}(z(t)/|z(t)|, C_0)$ 的收敛性，而 $t^{1/(p-2)}|z(t)|$ f 的极限可由类似论证得到。

□

Appendix A. Tools

以下 ODE 引理已在 [MZ98] 中得到证明。

引理 A.1（Merle-Zaag 常微分方程引理）。设 $X_+, X_0, X_- : [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是绝对连续函数，使得 $X_+(t) + X_0(t) + X_-(t) > 0$ 对所有 $t \geq 0$ 且 $\liminf_{t\to\infty} X_+(t) = 0$. 假设存在$b > 0$ 以及函数 Y_+, Y_0, Y_-，其中

$$|Y_+(t)|^2 + |Y_0(t)|^2 + |Y_-(t)|^2 = o(1)(|X_+(t)|^2 + |X_0(t)|^2 + |X_-(t)|^2)$$

使得

$$\begin{array}{rcl} X_+'(t) - bX_+(t) & \geq & Y_+(t), \\ |X_0'(t)| & \leq & Y_0(t), \\ X_-'(t) + bX_-(t) & \leq & Y_-(t). \end{array} \tag{A.1}$$

那么，以下情况之一成立：要么

$$X_+(t) + X_-(t) = o(1)X_0(t), \tag{A.2}$$

or

$$X_+(t) + X_0(t) = o(1)X_-(t). \tag{A.3}$$

此外，假设 (A.3) 成立。那么对所有 $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{t\to\infty} e^{(b-\varepsilon)t}(X_+(t) + X_0(t) + X_-(t)) = 0. \tag{A.4}$$

引理 A.2（插值）。设单变量函数 $g(t)$ 满足以下界

$$\sup_{t\in[-1,1]} \left|\frac{d^j}{dt^j} g(t)\right| \leq C_k$$

对于 $j = 0$, 1, ..., k，以及

$$\sup_{t\in[-1,1]} |g(t)| \leq C_0.$$

那么，对每个 $0 \leq \ell < k$，都有如下界

$$\left|\frac{d^\ell}{dt^\ell} g(0)\right| \leq \beta \cdot C_0^\alpha C_k^{1-\alpha}$$

其中某个 $\alpha = \alpha(\ell, k) > 0$，以及 $\beta = \beta(\ell, k) > 0$。此外，当 ℓ 固定时， $\alpha(\ell, k)$ 在 $k \to \infty$ 时收敛到 1。

证明。我们对在 $(-1, 1)$ 内部具有紧支集的函数证明不等式，其中 $\beta \equiv 1$ 。这就足够了，因为可以将一般函数乘以一个截断函数，然后应用所得结果。

通过一个 论证利用归纳法和分部积分，对每个 $\ell <$，我们得到 k
ar

$$\|\partial_t^\ell g\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2}^{1-\frac{\ell}{k}} \|\partial_t^k g\|_{L^2}^{\frac{\ell}{k}}.$$

$$\sup_{t\in[-1,1]} |\partial_t^\ell g| \leq \|\partial_t^{\ell+1} g\|_{L^1} \leq \|\partial_t^{\ell+1} g\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2}^{1-\frac{\ell+1}{k}} \|\partial_t^k g\|_{L^2}^{\frac{\ell+1}{k}} \leq C_0^\alpha C_k^{1-\alpha},$$

其中 $\alpha = 1 - \frac{\ell+1}{k}$。 □

在下一个引理中，我们记录了 [Sim83, (1.13)] 中的椭圆正则性。

引理 A.3（椭圆正则性）。存在 $\rho_0 > 0$ 小量，取决于 $\mathcal{M}_\Sigma$，使得以下结论成立。令 u 为(1.1)在 $t \in [T-2, T+2]$上的一个解。假设$\|u\|_{C^1}(t) \le \rho_0$ 于 $t \in [T-2, T+2]$。那么对于任意 $s \in \mathbb{N}$，存在一个正常数 $C = C(m, \mathcal{M}_\Sigma, N_1, s)$，使得

$$\sup_{t\in[T-1,T+1]} \|u\|^2_{C^s}(t) \le C \int_{T-2}^{T+2} \|u\|^2_{L^2}(t)\, dt.$$

下面的抛物型正则性是对 [Sim83] 中所述结果的小幅扩展。为方便读者，我们给出证明。

~引理 A.4（抛物正则性）。设 $u \in C^\infty(Q_{0,\infty}, \mathrm{V})$ 为 (1.2) 的一个解。假设 $\lim_{t\to\infty} \|u\|_{H^{n+4}}(t) = 0$。则对所有 $s \in \mathbb{N}$，$\lim_{t\to\infty} \|u\|_{C^s}(t) = 0$。

证明。我们声称，对于 $\ell \ge n+4$,

$$\lim_{t\to\infty} \|u\|_{H^\ell}(t) = 0 \ \text{ implies } \lim_{t\to\infty} \|u\|_{H^{\ell+1}}(t) = 0. \tag{A.5}$$

暂且假设 (A.5) 成立。在 Σ 上应用 Sobolev 嵌入，Σ, $u(t)$ 将光滑地收敛至零。根据 (6.6)，$u'(t)$ 及更高阶的时间导数也会光滑地收敛至零。

接下来我们着手证明 (A.5)。由(6.6)和(2.5)，可得如下能量估计。对于任意$\ell \in \mathbb{N}$，存在 $\delta_\ell > 0$，使得对于 $t_2 > t_1 > 0$ 且满足 $t_2 - t_1 \le \delta_\ell$，有

$$\sup_{t\in[t_1,t_2]} \|u\|_{H^\ell}(t) + \int_{t_1}^{t_2} \|u\|_{H^{\ell+1}}(t)\, dt \le C_\ell \|u\|_{H^\ell}(t_1) + C_\ell \int_{t_1}^{t_2} \|E_2(u)\|_{H^{\ell-1}}(t)\, dt. \tag{A.6}$$

我们省略推导过程，转而请读者参阅 [Sim83]中的方程(4.3)。假设 $\lim_{t\to\infty} \|u\|_{H^\ell}(t) = 0$。我们断言

$$\|E_2(u)\|_{H^{\ell-1}}(t) = o(1)\|u\|_{H^{\ell+1}}(t) \text{ and } \|E_2(u)\|_{H^\ell}(t) = o(1)\|u\|_{H^{\ell+2}}(t). \tag{A.7}$$

暂且假设 (A.7) 成立。固定 $\delta = \min(\delta_\ell, 2^{-1}\delta_{\ell+1})$。应用 (A.6)，并利用 (A.7) 吸收 $E_2(u)$ 项，当 t_1 足够大时，

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta} \|u\|_{H^{\ell+1}}(t)\, dt \le C_\ell \|u\|_{H^\ell}(t_1), \quad \sup_{t\in[t_1,t_1+2\delta]} \|u\|_{H^{\ell+1}}(t) \le C_{\ell+1} \|u\|_{H^{\ell+1}}(t_1).$$

因此（A.5）成立。

还需证明 (A.7)。回顾 (6.7) $E_2(u) = \sum_{j=0}^2 b_{2,j} \cdot \nabla^j u$，其中 $b_{2,j} = b_{2,j}(\omega, u, \nabla u)$ 是光滑的，并且满足 $b_{2,j}(\omega, 0, 0) = 0$。我们给出

$$\left\| b_{2,2} \cdot \nabla^2 u \right\|_{H^\ell}(t) = o(1)\|u\|_{H^{\ell+2}}(t). \tag{A.8}$$

其他项也可以类似地处理。为简单起见，我们将 $b_{2,2}(\omega, u, \nabla u)$ 写作 $b(\omega, u, \nabla u)$。对于$m_0, m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$，我们将 $b^{(m_0,m_1,m_2)}$ 写作 b 的(m_0, m_1, m_2)阶偏导数。固定 $\ell_0 \le \ell$。那么，$\nabla^{\ell_0}\left(b \cdot \nabla^2 u\right)$ 展开中的各项具有如下形式

$$b^{(m_0,m_1,m_2)} \cdot \left(\nabla^{\ell_1} u * \nabla^{\ell_2} u * \ldots \nabla^{\ell_N} u\right),$$

其中 $N = m_1 + m_2 + 1$ 且 $m_0 + \sum_{i=1}^N \ell_i = \ell_0 + m_2 + 2$。此外，对于所有 $1 \le i \le N$，至少存在 $m_2 + 1$ 个 i 的值使得 $\ell_i \ge 2$。我们首先讨论 $m_1 = m_2 = 0$ 的情形。于是上述内容变为 $b^{(m_0,0,0)} \cdot \nabla^{\ell_0 - m_0 + 2} u$。由 Sobolev 嵌入，

$$|b^{(m_0,0,0)}| \le C(|u| + |\nabla u|) \le C\|u\|_{H^{n+4}}(t) = o(1).$$

因此

$$\left\| b^{(m_0,0,0)} \cdot \nabla^{\ell_0 - m_0 + 2} u \right\|_{L^2}(t) = o(1)\, \|u\|_{H^{\ell+2}}(t).$$

接下来，我们考虑 $m_1+m_2\geq 1$的情况。此时很容易验证，$\{\ell_i\}_{1\leq i\leq N}$ 的最大值至多为 $\ell+2$，其他元素至多为$\lfloor\frac{\ell+3}{2}\rfloor=\ell_*$。由 $\ell\geq n+4$ 和 Sobolev 嵌入可得，$\left\|\nabla^{\ell_*}u(t)\right\|_{L^\infty(\Sigma)}\leq C\|u\|_{H^\ell}(t)=o(1)$。这意味着

$$\left\|b^{(m_0,m_1,m_2)}\cdot\left(\nabla^{\ell_1}u*\nabla^{\ell_2}u*\ldots\nabla^{\ell_N}u\right)\right\|_{L^2}(t)=o(1)\|u\|_{H^{\ell+2}}(t),$$

并完成了（A.8）的证明。 □

Appendix B. Mean curvature flow

本节中，我们证明，靠近一个平稳解的（重标度）平均曲率流可以用（1.2）描述。

我们从平均曲率流（MCF）开始。设 Σ 是一个嵌入的闭 n维子流形，位于 $n+k$维解析环境空间（$M,\bar{g}$）中。设 $d\mu$ 是由 Σ上的度量诱导的体积形式。令V为 Σ 的法丛，并赋予由M诱导的内积和联络。对于 $\varepsilon>0$, 令 $\mathcal{U}_\varepsilon=\{u\in\mathrm{V}:\ |u|<\varepsilon\}$，并令 $N_\varepsilon(\Sigma)$为 Σ在 M中的 ε管状邻域。当 ε足够小时， $\mathcal{U}_\varepsilon$ 和 $N_\varepsilon(\Sigma)$可通过指数映射加以识别:

$$\exp:\mathcal{U}_\varepsilon\to N_\varepsilon(\Sigma). \tag{B.1}$$

考虑V 的一个局部坐标图，其坐标表示为 $\{x^i,y^A\}$, $1\leq i\leq n$, $1\leq A\leq k$，其中 x^i 是 Σ的坐标，而 y^A 是纤维坐标。我们分别用 $(g_0)_{ij}$ 和 $(h_0)_{AB}$ 表示 Σ 上的度量和 V 上的内积。在同一（B.1）下，环境度量 $\bar{g}$ 具有如下形式

$$\bar{g}=g_{ij}dx^idx^j+h_{AB}dy^Ady^B+c_{iA}(dx^idy^A+dy^Adx^i).$$

当 $y^A=0$， $g_{ij}=(g_0)_{ij}$， $h_{AB}=(h_0)_{AB}$ 且 $c_{iA}=0$ 时。特别地， Σ 的诱导体积形式由下式给出

$$d\mu=\sqrt{\det g_0}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

设 u 为包含于 $\mathcal{U}_\varepsilon$ 中的 V 的一个截面。由 (B.1)， u 可被等同为$N_\varepsilon(\Sigma)$中的一个子流形，我们将该子流形记为 graph(u)。graph(u)上的诱导度量为

$$(g_u)_{ij}=g_{ij}+\frac{\partial u^A}{\partial x^i}\frac{\partial u^B}{\partial x^j}h_{AB}+\frac{\partial u^A}{\partial x^i}c_{jA}+\frac{\partial u^B}{\partial x^j}c_{iB}.$$

设 $(g_u)^{ij}$ 为 $(g_u)_{ij}$的逆度量。容易验证

$$e_A:=\frac{\partial}{\partial y^A}-(g_u)^{ij}\left(c_{iA}+\frac{\partial u^B}{\partial x^i}h_{BA}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}+\frac{\partial u^C}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^C}\right),\ 1\leq A\leq k$$

构成.....的一组基 graph(u)的法空间。设 $(h_u)_{AB}=\bar{g}(e_A,e_B)$ 与 $(h_u)^{AB}$ 为其逆度量。

现在我们比较平均曲率向量与面积泛函的欧拉-拉格朗日算子。（局部）面积泛函 $\mathcal{F}_\Sigma(u)$ 由下式给出

$$\mathcal{F}_\Sigma(u)=\int\sqrt{\det g_u}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

记 $\vec{H}$ 为 graph(u) 的平均曲率向量。令 ξ 为 V 的光滑截面。由第一变分公式,

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}_\Sigma(u+s\xi)\big|_{s=0}=-\int\bar{g}\left(\vec{H},\xi^A\frac{\partial}{\partial y^A}\right)\sqrt{\det g_u}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

与上述内容比较♀♀♀♀

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}_\Sigma(u+s\xi)\big|_{s=0}=-\int h_0\left(\mathcal{M}_\Sigma(u),\xi\right)\sqrt{\det g_0}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

我们有

$$\mathcal{M}_\Sigma(u)^A=\bar{g}\left(\vec{H},\frac{\partial}{\partial y^B}\right)(h_0)^{BA}\sqrt{\frac{\det g_u}{\det g_0}}. \tag{B.2}$$

特别地，若 Σ 是极小子流形，则 $\mathcal{M}_\Sigma(0) = 0$ 。

接下来，我们计算 MCF的非参数形式。在这种情况下，对于所有 $1 \le B \le k$，速度 $\eta^A = \frac{\partial u^A}{\partial t}$ 由 $\eta^A \bar{g}(\frac{\partial}{\partial y^A}, e_B) = \bar{g}(\vec{H}, e_B)$确定。由 $\bar{g}(\frac{\partial}{\partial y^A}, e_B) = (h_u)_{AB}$ 和 $\bar{g}(\vec{H}, e_B) = \bar{g}(\vec{H}, \frac{\partial}{\partial y^B})$，我们有 $\eta^A = \bar{g}\left(\vec{H}, \frac{\partial}{\partial y^B}\right)(h_u)^{BA}$。因此，MCF 的非参数形式为

$$\frac{\partial u^A}{\partial t} = \bar{g}\left(\vec{H}, \frac{\partial}{\partial y^B}\right)(h_u)^{BA}. \tag{B.3}$$

利用（B.2），（B.3）等价于

$$\frac{\partial u^A}{\partial t} - \mathcal{M}_\Sigma(u)^A = \left(\sqrt{\frac{\det g_0}{\det g_u}}(h_u)^{AB}(h_0)_{BC} - \delta^A_C\right) \cdot \mathcal{M}_\Sigma(u)^C. \tag{B.4}$$

鉴于 (2.6)，(B.4) 具有 (1.2) 的形式。

接下来，我们考虑靠近一个收缩子的重标度平均曲率流（MCF）。设 Σ 是 $\mathbb{R}^{n+k}$中的一个 n维嵌入闭子流形。我们继续使用上文引入的记号。对于法丛 V 的截面 u，记位置向量为 $X(u)$。特别地，$X(0)$表示 Σ的位置向量。设 $d\mu$ 为带高斯权的体积形式。也就是说，

$$d\mu = e^{-|X(0)|^2/4}\sqrt{\det g_0}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

对于一般的截面 u，局部高斯面积泛函为

$$\mathcal{F}_\Sigma(u) = \int e^{-|X(u)|^2/4}\sqrt{\det g_u}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

设 ξ 是 V 的光滑截面。由第一变分公式，

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}_\Sigma(u + s\xi)\big|_{s=0} = -\int \left\langle \vec{H} + \frac{X^\perp(u)}{2}, \xi^A \frac{\partial}{\partial y^A} \right\rangle e^{-|X(u)|^2/4}\sqrt{\det g_u}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

其中，$X^\perp(u)$表示 $X(u)$的法向分量。类似上文的论证可得

$$\mathcal{M}_\Sigma(u)^A = \left\langle \vec{H} + \frac{X^\perp(u)}{2}, \frac{\partial}{\partial y^B} \right\rangle (h_0)^{BA} e^{-|X(u)|^2/4 + |X(0)|^2/4}\sqrt{\frac{\det g_u}{\det g_0}}.$$

此外，重标度平均曲率流的非参数形式为

$$\frac{\partial u^A}{\partial t} - \mathcal{M}_\Sigma(u)^A = \left(e^{|X(u)|^2/4 - |X(0)|^2/4}\sqrt{\frac{\det g_0}{\det g_u}}(h_u)^{AB}(h_0)_{BC} - \delta^A_C\right) \cdot \mathcal{M}_\Sigma(u)^C.$$

由此显然可知，上式具有形式 (1.2)。

Acknowledgement

第一作者部分受韩国国家研究基金会项目（编号 2022R1C1C1013511）以及浦项工科大学基础科学研究所项目（编号 2021R1A6A1A10042944）资助。

References

[AS88] D.Adams和 L. Simon。几何极值孤立奇点附近渐近收敛的速率。 *Univ. Math. J.* 37 2 225 254, 1988

Choi、P.Daskalopoulos 和 N.Sesum。 $\mathbb{R}^4$中的气泡片椭圆分类。 *preprint arXiv:2209.04931* 2022

E.Giusti。极小锥与伯恩斯坦问题。 1969

CCK21] B.Choi、K.Choi 和 S. Kim。次仿射临界高斯曲率幂次流下的平移曲面。 *arXiv preprint arXiv:2104.13186*,2021。[CCR15] A. Carlotto、O. Chodosh 和 Y. A. Rubinstein。缓慢收敛的 Yamabe流。 2015

():–。[Che18] G. Chen。 2018

近收敛的速率。 , : – 。

Indiana , ( ): – 。[BCS22] W. Du R. Haslhofer B.

arXiv , 。 [BDGG69] E. Bombieri、E. De Giorgi 和

Invent. Math. 7 243 268, , : – 。 [

G_2 *J. Geom. Anal.* 28 3139 3170, 流形孤立奇点附近渐

Geom. Topol. 19 3 1523 1568, ,

[CM15] T.H. Colding 和 W.P. Minicozzi. 吹胀的唯一性与洛雅谢维奇不等式. *Ann. of Math.*, 182(1):221– 285, 2015.[CM18] T.H. Colding 和 W.P. Minicozzi. 水平集流的正则性. *Comm. Pure Appl. Math.*, 71(4):814–824, 2018. [CM22] K. Choi 和 C. Mantoulidis. 椭圆泛函的古梯度流与 Morse 指数. *Amer. J. Math.*, 144 2 541( ): –573, 2022. [CP18] X. Cabr´e 和 G. Poggesi. 若干椭圆问题的稳定解：极小锥、Allen-Cahn 方程与吹胀解. 载于 *Geometry of PDEs and related problems*, 第 2220 卷，属于 *Lecture Notes in Math.*，第 1–45 页。Springer，Cham，2018. [CS20] K. Choi 和 L. Sun. 通过次仿射临界曲率幂对古流进行分类, 载于《通过次仿射临界曲率幂对古流进行分类》 $\mathbb{R}^2$. *arXiv preprint arXiv:2012.01727*, 2020.[DH21] W. Du 和 R. Haslhofer. 在 $\mathbb{R}^4$ *arXiv preprint arXiv:2107.04443* 中聆听古老 *(to appear in CPAM)* 2021
非塌缩流的形状. , . [Gan21] Z. Gang. 关于平均曲率流形成的一般奇点的时空邻域的平均凸性. *J. Geom. Anal.*, 31(10):9819–9890, 2021. [HS85] R. Hardt 和 L. Simon. 具有孤立奇点的面积极小超曲面. *J. Reine Angew. Math.*, 362:102– 129, 1985.[KKP00] T. Mostowski、K. Kurdyka 和 A. Parusinski. 梯度猜想的证明（R. Thom）. *Annals of Mathematics*, 152 3 763 792, 2000 ( ): – . [KS06] R.V. Kohn 和 S. Serfaty. 基于确定性控制的曲率运动方法.
Comm. Pure Appl. , ( ): – .[- *Math.* 59 3 344 407, 2006
Loj63] S. Lojasiewicz. 实解析子集的一个拓扑性质. 载于 *Les Équations aux DérivéesPartielles (Paris, 1962)*, 第 87–89 页。´ 法国国家科学研究中心出版社（CNRS），巴黎，1963.[MZ98] F. Merle 和 H. Zaag. 非线性热方程吹胀速率与行为的最优估计.
Comm. Pure , ( ): – . [*Appl. Math.* 51 2 139 196, 1998
SAS20] P. Daskalopoulos、S. Angenent 和 N. Sesum. 两凸闭古老平均曲率流解的唯一性. *Ann. of Math.*, 192(2):353–436, 2020. [Ses08] N. Sesum. 平均曲率流的收敛速率. *Comm. Pure Appl. Math.*, 61(4):464–485, 2008. [Sim83] L. Simon. 一类非线性演化方程的渐近分析及其在几何问题中的应用.
Ann. , ( ): – . [*of Math. (2)* 118 3 525 571, 1983
Sim85] L. Simon. 几何变分问题极值的孤立奇点. 载于 *Harmonic mappings and minimal immersions (Montecatini, 1984)* 1161 *Lecture Notes in Math.* 206 277 1985 ，第 卷， ，第 – 页。Springer，柏林，。[Sim96] L. Simon. *Theorems on regularity and singularity of energy minimizing maps*. ETH 苏黎世数学讲义。Birkh¨auser 出版社，巴塞尔，1996。根据 Norbert Hungerb¨uhler 的讲义整理。[SS86] L. Simon 和 B. Solomon. R^{n+1} 中渐近于二次锥的极小超曲面. *Invent. Math.*, 86(3):535– 551, 1986.[Str20] N. Strehlke. 水平集方程的唯一延拓性质.
Int. Math. Res. Not., (16):4843–4851, 2020. [SX22] A. Sun 和 J. Xue. 具有圆柱形奇点的一般平均曲率流.
arXiv preprint arXiv:2210.00419, 2022.[Tho89] R. Thom. 我在数学道路上遇到的问题：回顾.
Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (70):199–214 (1990), 1989.

Department of Mathematics, POSTECH, Pohang, 37673, Republic of Korea
Email address: bchoi@postech.ac.kr

School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, MN 55455, USA
Email address: pkhung@umn.edu