arXiv:2304.02268v1 [math.PR] 5 Apr 2023

# 阿拉克不等式在利特尔伍德–奥福德问题中的改进应用

¨弗里德里希·格策和安德烈·尤·扎伊采夫

Abstract. Let $X_1, \dots, X_n$ be independent identically distributed random variables. In this paper we study the behavior of concentration functions of weighted sums $\sum_{k=1}^n X_k a_k$ with respect to the arithmetic structure of coefficients $a_k$ in the context of the Littlewood–Offord problem. In our recent papers, we discussed the relations between the inverse principles stated by Nguyen, Tao and Vu and similar principles formulated by Arak in his papers from the 1980's. In this paper, we will derive some improved (more general and more precise) consequences of Arak's inequalities applying our new bound in the Littlewood–Offord problem. Moreover, we also obtain an improvement of the estimates used in Rudelson and Vershynin's least common denominator method.

## 1. Introduction

本工作的目的是补充作者的一篇论文 [14]。利用我们最近的结果 [15]，我们表明，常数对所涉及分布的依赖关系可以得到更详细的说明。

取值于 $\mathbf{R}^d$、分布为$F = \mathcal{L}(Y)$ 的向量 $Y$ 的集中函数定义为

$$Q(F, \tau) = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \mathbf{P}(Y \in x + \tau B), \quad \tau \geq 0,$$

其中 $B = \{x \in \mathbf{R}^d : \ \|x\| \leq 1/2\}$ 表示半径为 1/2 的中心欧几里得球。

Let $X, X_1, \dots, X_n$ be independent identically distributed (i.i.d.) random variables. Let $a = (a_1, \dots, a_n) \neq 0$, where $a_k = (a_{k1}, \dots, a_{kd}) \in \mathbf{R}^d$, $k = 1, \dots, n$. Starting with seminal papers of Littlewood and Offord [20] and Erdös [9], the behavior of the concentration functions of the weighted sums $S_a = \sum_{k=1}^n X_k a_k$ has been intensively studied. Denote by $F_a = \mathcal{L}(S_a)$ the

2020 年数学主题分类。主要分类60G50；次要分类 11P70、60E07、60E10、60E15。关键词和短语。集中函数、不等式、Littlewood–Offord 问题、独立随机向量之和。作者获得了 SFB 1283/2 2021—317210226 的支持，以及 RFBR- DFG 资助项目 20-51-12004 的支持。

distribution of $S_a$. We refer to [13] and [22] for a discussion of the history of the problem (see also, for instance, Friedland and Sodin [12], Nguyen and Vu [21], Rudelson and Vershynin [24], [25], Tao and Vu [28], [29], Vershynin [32], Tikhomirov [31], Livshyts, Tikhomirov and Vershynin [19], Campos et al. [4], [5]).

近年来，基于 Rudelson和 Vershynin[24], [25], [32]的最小公分母方法，对随机矩阵奇异性概率的估计取得了重要进展 [4], [5], [19], [31], 。注意到， [12], [25], [32] （关于Littlewood–Offord 问题）的结果在 [6]–[8] 中得到了改进和细化。

A few years ago, Tao and Vu [28] and Nguyen and Vu [21] proposed the so-called *inverse principles* in the Littlewood–Offord problem. In the papers [13] and [14], we discussed the relations between these inverse principles and similar principles formulated by Arak (see [1]–[3]) in his papers from the 1980's. In the one-dimensional case, Arak has found a connection of the concentration function of the sum with the arithmetic structure of supports of distributions of independent random variables for *arbitrary* distributions of summands. Using these results, he has solved in [2] an old problem stated by Kolmogorov [18].

在 [14], 中，我们已证明，Arak不等式的一个推论为Littlewood–Offord问题给出了比 [13]中所证结果更具一般性且精度更高的结果。在本文中，利用我们最近的结果 [15], ，我们表明常数对基础分布 $\mathcal{L}$（$X$）的依赖可以更精确地加以刻画。此外，在第3节中，我们改进了在最小公分母方法背景下所得到的界。

Let us first introduce the necessary notation. Below $\mathbf{N}$ and $\mathbf{N}_0$ will denote the sets of all positive and non-negative integers respectively. The symbol $c$ will be used for absolute positive constants. Note that $c$ can be different in different (or even in the same) formulas. We will write $A \ll B$ if $A \le cB$. Furthermore, we will use the notation $A \asymp B$ if $A \ll B$ and $B \ll A$. If the corresponding constant depends on, say, $r$, we write $A \ll_r B$ and $A \asymp_r B$. If $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ is a random vector with distribution $F = \mathcal{L}(\xi)$, we denote $F^{(j)} = \mathcal{L}(\xi_j)$, $j = 1, \dots, d$. Let $\widehat{F}(t) = \mathbf{E} \exp\big(i \langle t, \xi \rangle\big)$, $t \in \mathbf{R}^d$, be the characteristic function of the distribution $F$. Here $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the inner product in $\mathbf{R}^d$.

For $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d$ we denote $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = x_1^2 + \dots + x_d^2$ and $|x| = \max_j |x_j|$. Let $E_y$ be the distribution concentrated at a point $y \in \mathbf{R}^d$. We denote by $[K]_\tau$ the closed $\tau$-neighborhood of a set $K$ in the norm $|\cdot|$. Products and powers of measures will be understood in the sense of convolution. Thus, we write $W^k$ for the $k$-fold convolution of a measure $W$. For

a distribution $W$, we will also denote

$$e(\alpha W) = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k W^k}{k!}, \quad \alpha > 0. \tag{1}$$

众所周知，分布 $D = e(\alpha W)$是无限可分的，其 L´evy 谱测度为 $\alpha W$，且 $\widehat{D}(t) = \exp\left(\alpha\left(\widehat{W}(t)-1\right)\right)$。若分布 $D$ 是无限可分的，则 $D^\lambda$，$\lambda \geq 0$ 是具有特征函数 $\widehat{D}^\lambda(t)$ 的无限可分分布。注意到 $(e(\alpha W))^\lambda = e(\alpha\lambda W)$。

对于有限集合 $K$，我们用 $|K|$ 表示其中元素 $x \in K$ 的数量。符号 $\times$ 用于表示集合的直积。如果相关常数取决于表述中名为“constants”的参数，但不取决于 $n$，我们记作 $O(\cdot)$。

浓度函数的基本性质已得到充分研究（例如，参见 [3, 17, 23]）。特别是，显然

$$Q(F,\mu) \leq \left(1 + \lfloor \mu/\lambda \rfloor\right)^d Q(F,\lambda), \quad \text{for any } \mu,\lambda > 0, \tag{2}$$

其中，$\lfloor x \rfloor$ 是满足 $k \leq x$的最大整数 $k$。因此，

$$Q(F, c\lambda) \asymp_d Q(F,\lambda). \tag{3}$$

设 $r \in \mathbf{N}_0$、$m \in \mathbf{N}$ 为固定值，$h \in \mathbf{R}^r$ 为任意 $r$维向量，$V$ 为$\mathbf{R}^r$中任意一个闭对称凸子集，其中包含的整数坐标点不超过 $m$ 个。我们将$\mathcal{K}_{r,m}$ 定义为所有形如.....的集合的集合。

$$K = \left\{\langle \nu, h\rangle : \nu \in \mathbf{Z}^r \cap V\right\} \subset \mathbf{R}. \tag{4}$$

我们称这样的集合为 CGAPs（凸广义等差数列，见[16]），这是类比于近期 Littlewood–Offord 问题研究中所涉及的广义等差数列（GAPs）。GAPs 的定义在下文给出。在情形 $r = 0$ 中，类$\mathcal{K}_{r,m} = \mathcal{K}_{0,m}$ 由以零为唯一元素的单个集合 $\{0\}$组成。

对于任意的 R 上的博雷尔测度 $W$，我们定义 $\beta_{r,m}(W,\tau)$，其定义关系为

$$\beta_{r,m}(W,\tau) = \inf_{K \in \mathcal{K}_{r,m}} W\{\mathbf{R} \setminus [K]_\tau\}, \tag{5}$$

其中 $[K]_\tau$ 是集合 $K$ 的闭 $\tau$-邻域。

以下定义见 Tao 和 Vu [27]（另见 [26]）。

设 $r \in \mathbf{N}_0$ 为非负整数，$L = (L_1,\dots,L_r)$ 为由正实数组成的 $r$ 元组，$g = (g_1,\dots,g_r)$ 为由 $\mathbf{R}^d$ 中元素组成的 $r$ 元组。三元组$P = (L, g, r)$ 称为 $\mathbf{R}^d$ 中的对称广义算术级数（GAP）。其中，$r$ 为秩，$L_1,\dots,L_r$ 为维数，而 $g_1,\dots,g_r$ 是

广义算术级数（GAP） $P$ 的生成元。我们将 $P$ 的像 Image ($P$) $\subset \mathrm{R}^d$ 定义为该集合

$$\mathrm{Image}(P) = \big\{m_1 g_1 + \cdots + m_r g_r : -L_j \le m_j \le L_j,\ m_j \in \mathbf{Z},\ j = 1, \ldots, r\big\}.$$

对于 $t > 0$，我们将 $P$ 的 $t$-伸缩 $P^t$ 记为对称 GAP $P^t$ =($tL, g, r$)，其中

$$\mathrm{Image}\,(P^t) = \big\{m_1 g_1 + \cdots + m_r g_r : -tL_j \le m_j \le tL_j,\ m_j \in \mathbf{Z},\ j = 1, \ldots, r\big\}.$$

我们将 $P$ 的大小定义为 size($P$) $=|$ Image($P$)$|$。

事实上，Image($P$) 是整数盒

$$B = \big\{(m_1, \ldots, m_r) \in \mathbf{Z}^r : -L_j \le m_j \le L_j\big\}$$

在线性映射下

$$\Phi : (m_1, \ldots m_r) \in \mathbf{Z}^r \to m_1 g_1 + \cdots + m_r g_r.$$

我们称 $P$ 是真的，如果该映射是单射，或者等价地，如果

$$\mathrm{size}(P) = \prod_{j=1}^{r} \big(2\,\lfloor L_j \rfloor + 1\big). \tag{6}$$

对于非正规的 GAP，当然，

$$\mathrm{size}(P) < \prod_{j=1}^{r} \big(2\,\lfloor L_j \rfloor + 1\big). \tag{7}$$

在 $r = 0$ 的情形下，向量 $L$ 和 $g$ 均为空，GAP $P$ 的像仅由唯一的零向量 $0 \in \mathrm{R}^d$ 构成。

回想一下， $r$维欧几里得空间 $\mathrm{R}^r$ 中的凸体是具有非空内部的紧凸集。下面的引理 1 包含在 [27]的定理 1.6 中。

引理 1. 设 $V$ 是 $\mathrm{R}^r$ 中的一个凸对称体， $\Lambda$ 是 $\mathrm{R}^r$ 中的一个格。那么存在 $\Lambda$ 中的一个对称真广义算术级数 $P$，其秩为 $l \le r$，使得我们有

$$\mathrm{Image}(P) \subset V \cap \Lambda \subset \mathrm{Image}\big(P^{(c_1 r)^{3r/2}}\big) \tag{8}$$

其中 $c_1 \ge 1$ 为绝对常数。

推论 1. 在引理 1 的条件下，不等式

$$\mathrm{size}(P^{(c_1 r)^{3r/2}}) \le \big(2\,(c_1\,r)^{3r/2} + 1\big)^r\,|\,V \cap \Lambda\,| \tag{9}$$

成立。

在 Littlewood–Offord 问题中估计集中函数 $Q(F_a, \tau)$，可以将问题归结为估计某些对称无限可分分布的集中函数。相应的结论见下文引理 2 和引理 3。

引入分布 $H$，其特征函数为

$$\widehat{H}(t) = \exp\Big( -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \big(1 - \cos\langle t, a_k\rangle\big)\Big), \quad t \in \mathbf{R}^d. \tag{10}$$

显然，$H$ 是一个对称的无穷可分分布。

Let $X \widetilde{=} X_1 - X_2$ 为对称化随机变量，其中 $X_1$ 和 $X_2$是定义 $S_a$时涉及的独立同分布随机变量。下文中我们使用$\widetilde{}$记号 $G = \mathcal{L}(X)$。对于 $\delta \geq 0$，我们记

$$p(\delta) = G\big\{\{z : |z| > \delta\}\big\}. \tag{11}$$

引理 2. 对于任意 $\varkappa$、$\tau > 0$，有

$$Q(F_a, \tau) \ll_d Q(H^{p(\tau/\varkappa)}, \varkappa). \tag{12}$$

引理 2 是我们最近将阿拉克不等式应用于 Littlewood–Offord 问题时使用的主要工具（参见 [13] 和 [14]）。

需要指出，$H^b$, $b \geq 0$ 是一种对称的无限可分分布，其 L´evy 谱测度为 $\frac{nb}{2}\, M^*$，其中

$$M^* = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \big(E_{a_k} + E_{-a_k}\big). \tag{13}$$

事实上,

$$H^b = e\Big(\frac{nb}{2}\, M^*\Big). \tag{14}$$

Arak [1, 2] 发现了无穷可分分布的浓缩函数取值与其谱测度支集的算术结构之间的联系。关于引理 2，这些联系意味着，若无穷可分分布的浓缩函数较大，则其谱测度集中在某个具有简单算术结构的 CGAP $K$ 附近。根据引理 1 和推论 1，该 CGAP $K$ 包含在一个 GAP 的像中，而这个 GAP 的秩和大小与 $K$ 的秩和大小相当。引理 2 的证明见 [13]。证明相当初等，基于浓缩函数的已知性质。

根据（2），引理 2 推出以下推论 2。

**Corollary 2.** *For any $\varkappa, \tau, \delta > 0$, we have*

$$Q(F_a, \tau) \ll_d \big(1 + \lfloor \varkappa/\delta \rfloor\big)^d\, Q(H^{p(\tau/\varkappa)}, \delta). \tag{15}$$

It is reasonable to be free in the choice of $\delta$ in (15). In our recent paper [15], a more precise statement than Lemma 2 is obtained, see Lemma 3 below. It provides useful bounds if $p(\tau/\varkappa)$ is small, even if $p(\tau/\varkappa) = 0$.

引理 3。对于任意 $\varkappa$、$\tau > 0$，我们有

$$Q(F_a, \tau) \ll_d \lambda^{-1}\, Q(H^\lambda, \varkappa), \tag{16}$$

其中

$$\lambda = \lambda_d(\tau/\varkappa) = \int\limits_{z\in\mathbf{R}} \bigl(1 + \lfloor \tau(\varkappa|z|)^{-1}\rfloor\bigr)^{-d}\, G\{dz\}. \tag{17}$$

It is clear that $\lfloor \tau(\varkappa|z|)^{-1}\rfloor = 0$ if $|z| > \tau/\varkappa$. Therefore. $\lambda = \lambda_d(\tau/\varkappa) \geq p(\tau/\varkappa)$ and hence $Q(H^\lambda, \varkappa) \leq Q(H^{p(\tau/\varkappa)}, \varkappa)$. Thus, if $\lambda \gg_d 1$ is essentially larger than $p(\tau/\varkappa)$, then inequality (16) of Lemma 3 is stronger than inequality (12) of Lemma 2. Therefore, using inequality (16) implies more precise bounds than those obtained earlier on the base of inequality (12).

引理 2和3 相当一般，因为 $\varkappa$、$\tau > 0$ 是任意的。此外，在不等式 (12)和(16) 的右端，$F_a$ 对 $\mathcal{L}(X)$ 的依赖被减弱为对 $p(\tau/\varkappa)$或 $\lambda_d(\tau/\varkappa)$的依赖，而 $a$ 的依赖则被减弱为对 $H$ 的依赖。注意，分布 $H$ 也可以写成 $H = F_a = \mathcal{L}(S_a)$ 的形式，其中

$$\mathcal{L}(X) = e\Bigl(\frac{1}{4}\, E_1\Bigr) * e\Bigl(\frac{1}{4}\, E_{-1}\Bigr) \tag{18}$$

其为参数为 1/4 的对称化泊松分布。

现在我们陈述定理 1，这是一个一维的 Arak 型结果，见 [2, 3]。它是 [3] 中第二章定理 4.3 的一个特例。

定理 1. 设 $D = e(\alpha\, W)$ 是一个一维无限可分分布，其特征函数具有如下形式：$\exp\bigl(\alpha(\widehat{W}(t) - 1)\bigr)$, $t \in \mathbf{R}$, 其中 $\alpha > 0$ 且 $W$ 是一个概率分布。设 $\tau > 0$, $r \in \mathbf{N}_0$,$m \in \mathbf{N}$。则

$$Q(D, \tau) \leq c_2^{r+1}\biggl(\frac{1}{m\sqrt{\alpha\, \beta_{r,m}(W, \tau)}} + \frac{(r+1)^{5r/2}}{(\alpha\, \beta_{r,m}(W, \tau))^{(r+1)/2}}\biggr), \tag{19}$$

其中 $c_2$ 是一个绝对常数。

Corollary 2 and Theorem 1 imply the following Theorem 2.

**Theorem 2.** *Let $\varkappa, \delta, \tau > 0$, $d = 1$, $r \in \mathbf{N}_0$, $m \in \mathbf{N}$. Then*

$$Q(F_a, \tau) \ll_d c_3^{r+1}\bigl(1 + \lfloor \varkappa/\delta \rfloor\bigr) \left( \frac{1}{m\sqrt{n\, p(\tau/\varkappa)\, \beta_{r,m}(M^*, \delta)}} + \frac{(r+1)^{5r/2}}{(n\, p(\tau/\varkappa)\, \beta_{r,m}(M^*, \delta))^{(r+1)/2}} \right), \quad (20)$$

其中， $M^*$ 由（13）定义， $c_3$ 为一个绝对常数。

为了证明定理 2，只需应用推论 2 和定理 1，因为 $H^{p(\tau/\varkappa)}$ 是一个无限可分分布，其 L´évy 谱测度为 $n\, p(\tau/\varkappa)\ M^*/2$（见 (14)）。此外，引入 $M = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} E_{a_k}$。显然， $M \le M^*$ 和 $\beta_{r,\,m}(M, \delta) \le \beta_{r,\,m}(M^*, \delta)$。显然，测度 $\sum_{k=1}^{n} E_{a_k}$ 在集合 $K$ 上的值，是属于 $K$ 的 $a_k$ 的个数。因此，粗略地说， $\beta_{r,\,m}(M, \delta)$ 是 $\frac{1}{2n}$ 乘以不属于某个 CGAP 的 $\delta$-邻域的 $a_k$ 的个数 $K \in \mathcal{K}_{r,\,m}$。

类似地，引理 3 和定理 1 推出如下定理 3。

定理 3。设 $\varkappa, \delta, \tau > 0$, $d = 1$, $r \in \mathbf{N}_0$, $m \in \mathbf{N}$。假设$\lambda_1(\tau/\varkappa) \gg 1$。那么

$$Q(F_a, \tau) \ll_d c_4^{r+1}\bigl(1 + \lfloor \varkappa/\delta \rfloor\bigr) \left( \frac{1}{m\sqrt{n\, \beta_{r,m}(M^*, \delta)}} + \frac{(r+1)^{5r/2}}{(n\, \beta_{r,m}(M^*, \delta))^{(r+1)/2}} \right), \quad (21)$$

其中， $M^*$ 由式（13）定义， $c_4$ 为一个绝对常数。

设 $d = 1$，以及 $q = Q(F_a, \tau)$、 $\varkappa$、 $\tau > 0$。如果 $q$ 相对较大（例如，如果 $q \ge n^{-A}$ 如 Tao和 Vu [28] 以及Nguyen 和 Vu [21] 中那样），那么定理 3 表明 $n\, \beta_{r,m}(M^*, \delta)$ 很小，从而 $n\, \beta_{r,m}(M, \delta)$ 也很小。因此，回顾 $M = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} E_{a_k}$，我们看到权重集合 $\{a_k\}$ 可以由 CGAP $K \in \mathcal{K}_{r,m}$ 的 $\delta$-邻域 $[K]_\delta$ 很好地逼近。

令 $r \in \mathbf{N}_0$, $s \in \mathbf{N}$为固定值，令 $h$ 为任意一个 $r$维向量，并令 $P$ 为一个对称 GAP，其像 Image$(P) \subset \mathbf{Z}^r$ ，包含不超过 $s$ 个具有整数坐标的点。我们将 $\mathcal{P}_{r,s}$ 定义为所有形如

$$K = \bigl\{ \langle \nu, h \rangle : \nu \in \mathrm{Image}(P) \bigr\} \subset \mathbf{R}. \quad (22)$$

For any Borel measure $W$ on $\mathbf{R}$ and $\tau \ge 0$ we define $\gamma_{r,s}(W, \tau)$ by the relation

$$\gamma_{r,s}(W, \tau) = \inf_{K \in \mathcal{P}_{r,s}} W\{\mathbf{R} \setminus [K]_\tau\}. \quad (23)$$

The main result of Zaitsev [33] is the following Theorem 4. Theorem 4 is stated in terms of symmetric GAPs. It follows from Theorem 1 and Lemma 1.

定理 4。设 $D$ 是一个一维无限可分分布，其特征函数形式为$\exp\big(\alpha\,(\widehat{W}(t)-1)\big)$, $t\in\mathbf{R}$，其中 $\alpha>0$且 $W$ 是一个概率分布。设 $\tau\ge 0$, $r\in\mathbf{N}_0$, $s\in\mathbf{N}$。则

$$Q(D,\tau)\le c_5^{r+1}\left(\frac{(c_6\,r+1)^{3r^2/2}}{s\sqrt{\alpha\,\gamma_{r,s}(W,\tau)}}+\frac{(r+1)^{5r/2}}{(\alpha\,\gamma_{r,s}(W,\tau))^{(r+1)/2}}\right),\tag{24}$$

其中 $c_5$、$c_6$ 为绝对常数。

同样，引理 3 和定理 4 推出以下定理 5。

定理 5。设 $\varkappa,\delta,\tau>0$, $d=1$, $r\in\mathbf{N}_0$, $s\in\mathbf{N}$。假设 $\lambda_1(\tau/\varkappa)\gg 1$。那么

$$Q(F_a,\tau)\ll_d c_7^{r+1}\big(1+\lfloor\varkappa/\delta\rfloor\big)\left(\frac{(c_8\,r+1)^{3r^2/2}}{s\sqrt{n\,\gamma_{r,s}(M^*,\delta)}}+\frac{(r+1)^{5r/2}}{(n\,\gamma_{r,s}(M^*,\delta))^{(r+1)/2}}\right),\tag{25}$$

其中，$M^*$ 由（13）定义，$c_7$和 $c_8$ 为绝对常数。

## 2. Inverse principles

在 [13] 和 [14], 中，我们将我们的结果与 Nguyen、Tao 和 Vu 的结果 [21, 22, 28, 30]进行了比较。

几年前，Tao 和 Vu [28] 在离散情形下（其中$\tau=0$）提出了 Littlewood–Offord 问题中所谓的“逆原理”，其内容是

具有较大小球概率的集合 $a=(a_1,\dots,a_n)$
必须具有很强的加性结构。 (26)

这里“较大的小球概率”是指

$$Q(F_a,0)=\max_x\mathbf{P}\{S_a=x\}\ge n^{-A}$$

其中 $A>0$ 为某个常数。“强加性结构”是指向量 $a_1,\dots,a_n$ 中有很大一部分属于一个大小有界的 GAP。

Nguyen and Vu [21] have extended this inverse principle to the continuous case (with strictly positive argument of the concentration function $\tau_n>0$) obtaining, in particular, the following result.

**Theorem 6.** *Let $X$ be a real random variable satisfying condition*

$$G\{\{x \in \mathbf{R}\colon C_1 < |x| < C_2\}\} \geq C_3, \tag{27}$$

具有正常数 $C_1, C_2, C_3$。设 $0 < \varepsilon < 1$, $A > 0$ 为常数, $\tau = \tau_n > 0$ 为可能依赖于 $n$ 的参数。假设 $a = (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbf{R}^d)^n$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的一个多重子集, 使得 $q = Q(F_a, \tau) \geq n^{-A}$。则对任意数 $n'$ （介于 $n^\varepsilon$ 与 $n$ 之间）, 存在一个对称的真 GAP $P$, 其像为 $K$, 使得

1. $a$ 中至少有 $n - n'$ 个元素与 $K$是 $\tau$-接近的。2. $P$

具有较小的秩 $r = O(1)$, 且规模较小

$$|K| \leq \max\left\{O\big(q^{-1}(n')^{-1/2}\big), 1\right\}. \tag{28}$$

定理 6 表明, 向量 $a_1, \ldots, a_n$ 中很大一部分位于某个有界大小 GAP 的像的 $\tau$-邻域内。

Theorem 3 of [14] (which is Theorem 7 below) has a similar formulation in the case $d = 1$. It is derived using Theorem 2 of the present paper and also include positive parameters $\tau, \varkappa, \delta$ such that $\delta \leq \min\{\varkappa, \tau\}$. The quantity $\delta$ is responsible for the size of the neighborhood of the image of a GAP which covers a large part of vectors $a_1, \ldots, a_n$. The number $n'$ is again the number of $a_j$ which may be not approximated. The condition $n^\varepsilon \leq n' \leq n$ is replaced, for an *arbitrary* fixed $r \in \mathbf{N}_0$, by (29). The number $r$ is here the rank of the approximating GAP. Its size is estimated from above in (30). Comparing (30) with (28), we see that in (30) the dependence of constants on $\mathcal{L}(X)$ is given in an explicit form via the dependence on $p(\tau/\varkappa)$. The same may be said about condition (29). This is connected with the use of Theorem 2. Our Theorem 3 is stronger than Theorem 2 provided that $\lambda_1(\tau/\varkappa) \gg 1$ since $p(\tau/\varkappa) \leq \lambda_1(\tau/\varkappa)$. Note also that, in the case where $\varkappa = \delta = \tau$ in Theorem 7, one can choose $r = O(1)$ so that conditions $q \geq n^{-A}$ and $n^\varepsilon \leq n' \leq n$ imply (29), for $n$ large enough. Therefore, the one-dimensional version of Theorem 6 follows from Theorem 7.

我们的主要结果是定理8与定理16。它们改进了 [14] 中的定理3与定理9, 而这些定理是借助本文的引理2证明的。现在我们可以使用更为精确的引理3, 在 [14]的陈述中将 $p(\tau/\varkappa)$替换为 $\lambda_1(\tau/\varkappa)$。注意, $p(\tau/\varkappa)$可以很小, 甚至等于零, 而当分布 $G$ 非退化时, $\lambda_1(\tau/\varkappa)$始终严格为正。

**Theorem 7.** *Let $d = 1$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $\varkappa, \delta, \tau > 0$, $\delta \leq \min\{\varkappa, \tau\}$, and $q = Q(F_a, \tau)$. There exist positive absolute constants $c_9$–$c_{12}$ such that for any fixed $r \in \mathbf{N}_0$, and any $n' \in \mathbf{N}$ satisfying the inequalities*

$$\left(2\, c_9^{r+1}\, (r+1)^{5r/2}\, \varkappa / q\, \delta\right)^{2/(r+1)} / p(\tau/\varkappa) < n' \leq n, \tag{29}$$

*there exist* $m \in \mathbf{N}$ *and CGAPs* $K^*, K^{**} \subset \mathbf{R}$ *having ranks* $\le r$ *and sizes* $\ll m$ *and* $\ll c(r)\,m$ *respectively and such that*

至少有 $n - 2\,n'$ 个元素 $a_k$ 属于 $a$，与 $K^*$是 $\delta$-近的，即 $a_k \in [K^*]_\delta$（这意味着对于这些元素，$a_k$ 存在 $y_k \in K^*$ 使得$|a_k - y_k| \le \delta$）。

2. 该数 $m$ 满足不等式

$$m \le \frac{2\,c_9^{r+1}\,\varkappa}{q\,\delta\,\sqrt{p(\tau/\varkappa)\,n'}} + 1, \tag{30}$$

3. 集合 $K^*$ 包含在对称GAP $\overline{P}$ 的像$\overline{K}$ 中，该GAP的秩为 $\overline{l} \le r$，大小为 $\ll (c_{10}\,r)^{3r^2/2} m$，且生成元 $\overline{g}_j$、$j = 1$、…、$\overline{l}$满足不等式 $|\overline{g}_j| \le 2\,r\,\|a\|\,/\sqrt{n'}$。

4. 集合 $K^*$ 包含于一个真对称广义算术级数$\overline{P}$的像 $\overline{K}$ 中，该广义算术级数的秩为 $\overline{l} \le r$，大小为 $\ll (c_{11}\,r)^{15r^2/2} m$。

5. 至少有 $n - 2\,n'$ 个 $a$ 中的元素与 $K^{**}$ 相距不超过 $\delta$。

6. 集合 $K^{**}$ 包含于像中 $\widetilde{K}$ 一个秩为 $\widetilde{l} \le r$、大小为 $\ll (c_{12}\,r)^{21r^2/2} m$ 且生成元为 $\widetilde{g}_j$、$j = 1$、……、$\widetilde{l}$ 的适当对称GAP，满足不等式$|\widetilde{g}_j| \le 2\,r\,\|a\|\,/\sqrt{n'}$。

定理 8。将 $p(\tau/\varkappa)$ 替换为 $\lambda_1(\tau/\varkappa)$ 后，定理 7 的陈述仍然成立，前提是 $\lambda_1(\tau/\varkappa) \gg 1$。

定理 7 的表述相当繁琐，但这是其一般性所付出的代价。在某些特殊情形下，表述可以简化，例如对于 $\varkappa = \delta$ 或对于 $\varkappa = \tau$。

对于以 $r = 0$ 开始的每个固定 $r$，定理 7 的断言都并非平凡。在这种情况下，$m = 1$，定理 7 给出了 $a$ 中位于区间 $[-\delta, \delta]$ 之外的元素 $a_k$ 的数量上界。

定理 7 以及由此得到的定理 8 是针对一维 $a_k$、$k = 1$、……、$n$ 表述的。然而，可以证明，定理 7 为集合 $a = (a_1$、……、$a_n) \in (\mathbf{R}^d)^n$ 在多元情形下同样提供了足够丰富的算术性质（见下文定理 9）。只需将定理 7 应用于向量 $S_a$ 各坐标的分布 $F_a^{(j)}$、$j = 1$、……、$d$ 即可。

引入向量 $a^{(j)} = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$、$j = 1$、…、$d$。显然，$F_{(j)a} = F_{a^{(j)}}$。

定理 9. 设 $d > 1$, $q_j = Q(F_{(j)a}, \tau_j)$, $\varkappa_j, \delta_j, \tau_j > 0$, $\delta_j \le \min\{\varkappa_j, \tau_j\}$, $j = 1, \dots, d$。下面 $c_9$–$c_{12}$ 是定理 7 中的正绝对常数。假设 $a = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbf{R}^d)^n$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的一个多重子集。设 $r_j \in \mathbf{N}_0$, 且 $n'_j \in \mathbf{N}$, $j = 1, \dots, d$, 满足不等式

$$\left(2\,c_9^{r_j+1}\,(r_j+1)^{5r_j/2}\,\varkappa_j/q_j\,\delta_j\right)^{2/(r_j+1)} / p(\tau_j/\varkappa_j) \le n'_j \le n, \tag{31}$$

*Then, for each* $j = 1, \dots, d$, *there exist* $m_j \in \mathbf{N}$ *and CGAPs* $K_j^*, K_j^{**} \subset \mathbf{R}$ *having ranks* $\le r_j$ *and sizes* $\ll m_j$ *and* $\ll c(r_j)\, m_j$ *respectively and such that*

1. *At least* $n - 2\, n_j'$ *elements* $a_{kj}$ *of* $a^{(j)}$ *are* $\delta_j$*-close to* $K_j^*$, *that is,* $a_{kj} \in [K_j^*]_{\delta_j}$ (*this means that for these elements* $a_{kj}$ *there exist* $y_{kj} \in K_j^*$ *such that* $|a_{kj} - y_{kj}| \le \delta_j$).

2. $m_j$ 满足不等式 $m_j \le w_j$，其中

$$w_j = \frac{2\, c_9^{r_j+1}\, \varkappa_j}{q_j\, \delta_j\, \sqrt{p(\tau_j/\varkappa_j)\, n_j'}} + 1, \tag{32}$$

集合 $K_j^*$ 包含于对称GAP $\overline{P}_j$ 的像 $\overline{K}_j$ 中，该GAP的秩为 $\overline{l}_j \le r_j$，大小为 $\ll (c_{10}\, r_j)^{3r_j^2/2} m_j$，生成元为 $\overline{g}_p^{(j)}$、$p = 1$、……、$\overline{l}_j$，并满足不等式 $\bigl|\overline{g}_p^{(j)}\bigr| \le 2\, r_j\, \bigl\|a^{(j)}\bigr\| / \sqrt{n_j'}$。

4. 集合 $K_j^*$ 包含在一个适当的对称广义算术级数 $\overline{P}_j$ 的像 $\overline{K}_j$ 中，该级数的秩为 $\overline{l}_j \le r_j$，大小为 $\ll (c_6\, r_j)^{15 r_j^2/2} m_j$。

5. $a^{(j)}$ 中至少有 $n - 2\, n_j'$ 个元素与 $K_j^{**}$ 的距离不超过 $\delta_j$。

6. 集合 $K_j$ 包含在一个适当的对称GAP $\widetilde{P}_j$ 其秩为 $\widetilde{l}_j \le r_j$，大小为 $\ll (c_{12}\, r_j)^{21 r_j^2/2} m_j$，生成元为 $\widetilde{g}_p^{(j)}$、$p = 1$、…、$\widetilde{l}_j$，满足不等式 $\bigl|\widetilde{g}_p^{(j)}\bigr| \le 2\, r_j\, \bigl\|a^{(j)}\bigr\| / \sqrt{n_j'}$。

定理6的多维版本可由定理9推出。该结论表述于 [14, 定理 5] 中。我们利用了定理6的条件 $q \ge n^{-A}$ 蕴含定理 [14, 的条件 $Q(F_{(j)a}, \tau) \ge n^{-A}$, $j = 1, \dots, d$, 因为 $Q(F_{(j)a}, \tau) \ge Q(F_a, \tau)$。

在定理 9 中，$a$ 的逼近 GAP 是由逼近 $a^{(j)}$ 的 GAP 的直积构成的。

定理 10。将 $p(\tau_j/\varkappa_j)$ 替换为 $\lambda_1(\tau_j/\varkappa_j)$ 后，定理 9 的表述仍然成立，前提是 $\lambda_1(\tau_j/\varkappa_j) \gg 1$、$j = 1$、……、$d$。

定理7–10具有非渐近性质。它们在不作出诸如 $q \ge n^{-A}$ 之类的假设（而这些假设在定理6中被施加）的情况下，提供了关于 $a = (a_1, \dots, a_n)$ 算术结构的信息。定理7–10针对固定的 $n$ 表述，并且明确给出了常数对参数以及对 $\mathcal{L}(X)$ 的依赖关系。

下文的定理 11 是 [14, 定理 7]。它是定理 7 的推论。

**Theorem 11.** *Let* $\theta, A, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$ *and* $B, D \ge 0$ *be constants, and* $\theta > D$. *Let* $b_n, \varkappa_n, \delta_n, \tau_n, \rho_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, *be depending on* $n$ *non-random parameters satisfying the relations* $p(\tau_n/\varkappa_n) \ge \varepsilon_3\, b_n^{-D}$, $\varepsilon_4\, b_n^{-B} \le \rho_n = \delta_n/\varkappa_n \le 1$, $\delta_n \le \tau_n$, *for all* $n \in \mathbf{N}$, *and* $b_n \to \infty$ *as* $n \to \infty$. *Suppose that* $a = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbf{R}^d)^n$ *is a multi-subset of* $\mathbf{R}^d$ *such that*

$q_j = Q(F_a^{(j)}, \tau_n) \ge \varepsilon_1 b_n^{-A}$, $j = 1, \dots, d$, $n = 1, 2, \dots$. *Then, for any numbers* $n'_j$ *such that* $\varepsilon_2 b_n^{\theta} \le n'_j \le n$, $j = 1, \dots, d$, *there exists a proper symmetric GAP* $P$ *such that*

1. $a$ 中至少有 $n - 2\sum_{j=1}^{d} n'_j$ 个元素在范数 $|\cdot|$ 下与GAP $P$ 的像 $K$ 是 $\delta_n$-接近的。
2. $P$ 的秩较小 $L = O(1)$，且规模较小

$$|K| \le \prod_{j=1}^{d} \max\Big\{ O\Big( q_j^{-1} \rho_n^{-1} \left(n'_j \, p(\tau_n/\varkappa_n)\right)^{-1/2} \Big), 1 \Big\}. \tag{33}$$

定理 11 比定理 6 更一般；定理 6 仅限于 $b_n = n$、$\varkappa_n = \tau_n = \delta_n$、$n'_j = n'$ 的情形。定理 12 则是对定理 11 的改进。

定理 12. 定理 11 的表述在将$p(\tau_n/\varkappa_n)$ 替换为 $\lambda_1(\tau_n/\varkappa_n)$ 后仍然成立，前提是 $\lambda_1(\tau_n/\varkappa_n) \gg 1$。

与 [13, 14], 中类似，我们现在给出关于对数秩且各特殊维数均为1 的 GAP的定理 7–12的类似结论。下面的定理13–15是 [14] 中的定理 9–11。它们推广了 [13] 中的定理 5–7。

定理 13。设 $d = 1$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $\varkappa, \delta, \tau > 0$, $\delta \le \min\{\varkappa, \tau\}$, 且 $q = Q(F_a, \tau)$。那么存在一个秩为 $r \in \mathbf{N}$、大小为 $\le 3^r$ 的 GAP $P$，其生成元为 $g_k \in \mathbf{R}$、$k = 1$、...、$r$，并且其像$K \subset \mathbf{R}$ 具有如下形式

$$K = \Big\{ \sum_{k=1}^{r} m_k \, g_k : m_k \in \{-1, 0, 1\}, \ \textit{for } k = 1, \dots, r \Big\}. \tag{34}$$

此外，我们有

$$r \ll |\log q| + \log(\varkappa/\delta) + 1, \tag{35}$$

且 $n - n'$ $a$ 中至少有 $\delta$ 个元素与 $K$ 相差不超过 $n' \in \mathbf{N}$，并且

$$n' \ll \big(p(\tau/\varkappa)\big)^{-1} \big(|\log q| + \log(\varkappa/\delta) + 1\big)^3. \tag{36}$$

**Theorem 14.** *Let* $d > 1$, $q_j = Q(F_a^{(j)}, \tau_j)$, $\varkappa_j, \delta_j, \tau_j > 0$, $\delta_j \le \min\{\varkappa_j, \tau_j\}$, $j = 1, \dots, d$. *Then, for each* $j = 1, \dots, d$, *there exists a GAP* $P_j$ *of rank* $r_j \in \mathbf{N}$, *of size* $\le 3^{r_j}$, *with generators* $g_k^{(j)} \in \mathbf{R}$, $k = 1, \dots, r_j$, *and such that its image* $K_j \subset \mathbf{R}$ *has the form*

$$K_j = \Big\{ \sum_{k=1}^{r_j} m_k \, g_k^{(j)} : m_k \in \{-1, 0, 1\}, \ \textit{for } k = 1, \dots, r_j \Big\}. \tag{37}$$

此外,

$$r_j \ll |\log q_j| + \log(\varkappa_j/\delta_j) + 1, \tag{38}$$

且 $a^{(j)}$ 中至少有 $n-n_j'$ 个元素与 $K_j$ 相距不超过 $\delta_j$，其中 $n_j' \in \mathbf{N}$ 满足

$$n_j' \ll \big(p(\tau_j/\varkappa_j)\big)^{-1}\big(|\log q_j| + \log(\varkappa_j/\delta_j) + 1\big)^3. \tag{39}$$

定义 $K = \times_{j=1}^d K_j$。那么集合 $K$ 是 $d$ 维广义算术进展集 $P$ 的像，其秩为

$$R = \sum_{j=1}^d r_j \ll \sum_{j=1}^d \big(|\log q_j| + \log(\varkappa_j/\delta_j) + 1\big), \tag{40}$$

并且使得 $a$ 中至少有 $n-\sum_{j=1}^d n_j'$ 个元素属于集合 $\times_{j=1}^d [K_j]_{\delta_j}$。这里

$$\sum_{j=1}^d n_j' \ll \sum_{j=1}^d \big(p(\tau_j/\varkappa_j)\big)^{-1}\big(|\log q_j| + \log(\varkappa_j/\delta_j) + 1\big)^3. \tag{41}$$

此外，集合 $K$ 可以表示为

$$K = \Big\{ \sum_{k=1}^R m_s\, g_s : m_s \in \{-1,0,1\},\ for\ s = 1,\dots,R \Big\}. \tag{42}$$

此外，每个向量 $g_s \in \mathbf{R}^d$, $s = 1,\dots,R$ 都只有一个非零坐标。记作

$$s_0 = 0 \quad and \quad s_j = \sum_{m=1}^j r_m, \quad j = 1,\dots,d.$$

对于 $s_{j-1} < s \le s_j$，向量 $g_s$ 仅在第 $j$ 个坐标上非零，且这些坐标分别等于式 (37) 中序列 $g_1^{(j)},\dots,g_{r_j}^{(j)}$ 的元素。

定理 15. 设 $A > 0$ 与 $B \ge 0$ 为常数。设 $b_n$、$\varkappa_n$、$\delta_n$、$\tau_n > 0$、$n = 1$、2、.....为依赖于 $n$ 的非随机参数，对所有 $n \in \mathbf{N}$ 满足关系 $b_n^{-B} \le \delta_n/\varkappa_n \le 1$、$\delta_n \le \tau_n$，且当 $n \to \infty$ 时有 $b_n \to \infty$。设对 $j = 1$，....., $d$，有 $q_j = Q(F_a^{(j)}, \tau_n) \ge b_n^{-A}$。则对每个 $j = 1$，....., $d$，存在一个秩为 $r_j \in \mathbf{N}$、大小为 $\le 3^{r_j}$ 的 GAP $P_j$，其生成元为 $g_k^{(j)} \in \mathbf{R}$、$k = 1$、.....、$r_j$，并且其像 $K_j \subset \mathbf{R}$ 具有如下形式

$$K_j = \Big\{ \sum_{k=1}^{r_j} m_k\, g_k^{(j)} : m_k \in \{-1,0,1\},\ for\ k = 1,\dots,r_j \Big\}. \tag{43}$$

此外，集合 $K = \times_{j=1}^d K_j$ 是秩为

$$R = \sum_{j=1}^d r_j \ll d\,\big((A+B)\,\log b_n + 1\big), \tag{44}$$

的 $a$维广义等差数列 $\times_{j=1}^{d}[K_j]_{\delta_n}$的像，并且使得 $a$中至少有 $n-n'$个元素属于集合 $\times_{j=1}^{d}[K_j]_{\delta_n}$。这里$n' \in$N且

$$n' \ll d\left(p(\tau_n/\varkappa_n)\right)^{-1}\big((A+B)\,\log b_n+1\big)^3. \tag{45}$$

此外，定理14陈述末尾所给出的集合 $K$ 的描述仍然成立。

在 [13], 中的定理 5–7 是定理 13–15 的特殊情形，其中 $b_n = n$和 $\tau = \varkappa$、$\tau_j = \varkappa_j$、 $j = 1$、.....、 $d$，或 $\tau_n = \varkappa_n$、 $n \in$N。定理 13–15 是在 [14] 中利用 [3] 第 II 章的引理 2 和定理 3.3 证明的，这些结果由 Arak [1]得到。在定理 13–15 中，近似 GAP 可以不是 proper 的。在证明中用引理 3 替换引理 2 后，我们再次将定理 13–15 的表述中的 $p$（·）替换为 $\lambda_1$（·），从而得到以下定理 16–18。

定理 16。将 $p(\tau/\varkappa)$ 替换为 $\lambda_1(\tau/\varkappa)$ 后，定理 13 的结论仍然成立，条件是 $\lambda_1(\tau/\varkappa) \gg 1$。

定理17。将$p(\tau_j/\varkappa_j)$替换为 $\lambda_1(\tau_j/\varkappa_j)$后，定理14的表述仍然成立，只要 $\lambda_1(\tau_j/\varkappa_j) \gg 1, j = 1, \dots, d$。

定理 18. 将 $p(\tau_n/\varkappa_n)$ 替换为 $\lambda_1(\tau_n/\varkappa_n)$ 后，定理 15 的结论仍然成立，条件是 $\lambda_1(\tau_n/\varkappa_n) \gg 1$。

注释 1. 在定理 16–18 的陈述中，我们可以将 $p$（·）替换为 1，而不是 $\lambda_1$（·），前提是 $\lambda_1$（·）$\gg 1$。

## 3. The method of the least common denominator

在本节中，我们将继续估计 $Q(F_a, \tau)$，其中 $\tau > 0$,$_nF_a = \mathcal{L}(S_a)$、$S_a = \sum X_k a_k$、 $X$、 $X_1$、 . . .、 $X_n$是独立同分布的随机变量，且$_{k=1}a = (a_1$、 ... 、 $a_n) \neq 0$，其中 $a_k = (a_{k1}$、 . . . 、 $a_{kd}) \in \mathrm{R}^d$, $k = 1$、 . . . 、 $n$。

我们将应用引理 3，借助 Rudelson 与 Vershynin [24], [25],[32] 的最小公分母方法，得到更精确的界。

引入矩阵

$$\mathbb{A} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{A}_k, \quad \mathbb{A}_k = \begin{pmatrix} a_{k1}^2 & a_{k1}a_{k2} & \dots & a_{k1}a_{kd} \\ a_{k2}a_{k1} & a_{k2}^2 & \dots & a_{k2}a_{kd} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{kd}a_{k1} & a_{kd}a_{k2} & \dots & a_{kd}^2 \end{pmatrix}. \tag{46}$$

我们将使用同一个字母 $\mathbb{A}$ 表示相应的线性算子 $\mathbb{A} : \mathrm{R}^d \to \mathrm{R}^d$,

我们将采用 Rudelson 和 Vershynin [25]的记号：对于 $t \in \mathbf{R}^d$

$$t \cdot a = (\langle t, a_1 \rangle, \ldots, \langle t, a_n \rangle) \in \mathbf{R}^n. \tag{47}$$

因此,

$$\|t \cdot a\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle t, a_k \rangle^2 = \langle \mathbb{A}t, t \rangle. \tag{48}$$

定理 19. 设 $\alpha$, $b$, $D > 0$, $0 < \gamma < 1$。设分布 $H$ 在 (10) 中定义。假设

$$\Big( \sum_{k=1}^{n} \big( \langle t, a_k \rangle - m_k \big)^2 \Big)^{1/2} \geq \min \big\{ \gamma \|t \cdot a\|, \alpha \big\} \text{ for all } m_1, \ldots, m_n \in \mathbf{Z}, \\ \text{and for all } t \in \mathbf{R}^d \text{ such that } \|t\| \leq D. \tag{49}$$

*Then*

$$Q(H^b, 1/D) \ll_d \Big( \frac{1}{\gamma D \sqrt{b}} \Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{A}}} + \exp(-4b\alpha^2). \tag{50}$$

显然，如果

$$0 < D \leq D(a) = D_{\gamma,\alpha}(a) \\ = \inf \Big\{ \theta > 0 : \operatorname{dist}(t \cdot a, \mathbf{Z}^n) < \min \big\{ \gamma \|t \cdot a\|, \alpha \big\} \\ \text{for some } t \in \mathbf{R}^d \text{ such that } \|t\| = \theta \Big\}, \tag{51}$$

其中

$$\operatorname{dist}(t \cdot a, \mathbf{Z}^n) = \min_{m \in \mathbf{Z}^n} \| t \cdot a - m \| = \Big( \sum_{k=1}^{n} \min_{m_k \in \mathbf{Z}} \big( \langle t, a_k \rangle - m_k \big)^2 \Big)^{1/2},$$

则条件（49）成立。

Rudelson 和 Vershynin [25] 将 $D(a)$ 称为向量 $a$ 的本质最小公分母。最小公分母还有一些相似但不同的定义（见 [12], [32]）。定义（51）似乎是最常用的。

让我们来表述经典 Ess´een 不等式 [10]到多元情形的一个推广（[11],另见 [17]）：

引理 4. 设 $\tau > 0$，且 $F$ 为一个 $d$维概率分布。则

$$Q(F, \tau) \ll_d \tau^d \int_{\|t\| \leq 1/\tau} |\widehat{F}(t)| \, dt. \tag{52}$$

^引理 4 表明， $Q(F,\tau)$ 可由球 $\{t\in\mathbf{R}^d$ 上 $|F(t)|$ 的平均值估计： $\|t\|\le 1/\tau\}$。

定理 19 的证明。利用引理 4 和关系式 (3)，我们得到

$$\begin{aligned} Q(H^b,1/D) &\ll_d D^{-d}\int_{\|t\|\le 2\pi D}|\widehat{H}(t)|^b\,dt \\ &= D^{-d}\int_{\|t\|\le 2\pi D}\exp\Big(-\frac{b}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(1-\cos\langle t,a_k\rangle\big)\Big)\,dt \end{aligned}$$

.

容易证明，对于 $|x|\le\pi$， $1-\cos x\ge 2x^2/\pi^2$。对于任意 $x$，这意味着

$$1-\cos x\ge 2\,\pi^{-2}\min_{m\in\mathbf{Z}}|\,x-2\pi m|^2.$$

将此不等式代入（10），可得

$$\begin{aligned} \widehat{H}(t) &\le \exp\Big(-\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\min_{m_k\in\mathbf{Z}}\big|\langle t,a_k\rangle-2\pi m_k\big|^2\Big) \\ &= \exp\Big(-\frac{1}{\pi^2}\big(\mathrm{dist}(t\cdot a,2\pi\mathbf{Z}^n)\big)^2\Big) \\ &= \exp\Big(-4\,\big(\mathrm{dist}(t/2\pi\cdot a,\mathbf{Z}^n)\big)^2\Big). \end{aligned}\tag{53}$$

因此，对于 $\|t\|\le 2\pi D$，我们有

$$\widehat{H}(t)\le\exp\Big(-4\,\big(\min\big\{\gamma\,\|t/2\pi\cdot a\|\,,\alpha\big\}\big)^2\Big).\tag{54}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} Q(H^b,1/D) &\ll_d D^{-d}\int_{\|t\|\le 2\pi D}\exp\Big(-4\,b\gamma^2\ \|t/2\pi\cdot a\|^2\Big)\,dt \\ &\qquad + D^{-d}\int_{\|t\|\le 2\pi D}\exp\big(-4\,b\alpha^2\big)\,dt \\ &\ll_d D^{-d}\int_{\|t\|\le 2\pi D}\exp\Big(-b\gamma^2\pi^{-2}\ \langle\mathbb{A}t,t\rangle\Big)\,dt \\ &\qquad + \exp\big(-4\,b\alpha^2\big) \\ &\ll_d \Big(\frac{1}{\gamma D\sqrt{b}}\Big)^d\frac{1}{\sqrt{\det\mathbb{A}}}+\exp(-4b\alpha^2), \end{aligned}$$

证明定理 19。 □

将引理 3 应用于 $\varkappa=1/D$ ，并将定理 19 应用于 $b=\lambda_d(\tau D)$，其中 $\lambda_d(\cdot)$ 定义于 (17)，可得以下定理 20。

定理 20. 假设满足定理 19 的条件。那么，对于任意$\tau > 0$,

$$Q(F_a, \tau) \ll_d \frac{1}{\lambda_d(\tau D)} \left( \Big( \frac{1}{\gamma D \sqrt{\lambda_d(\tau D)}} \Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{A}}} + \exp(-4\, \lambda_d(\tau D)\, \alpha^2) \right). \tag{55}$$

对 $\varkappa = 1/D$ 应用引理2，并对 $b = p(\tau D)$应用定理19，其中$p(\,\cdot\,)$由(11)定义，我们得到如下定理21。

定理21. 设定理19的条件成立。则对任意$\tau > 0$,

$$Q(F_a, \tau) \ll_d \Big( \frac{1}{\gamma D \sqrt{p(\tau D)}} \Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{A}}} + \exp(-4\, p(\tau D)\, \alpha^2). \tag{56}$$

定理21比 [25, 定理3.3]更为精确、更为一般。记

$$M(\tau) = \tau^{-2} \int_{|x| \le \tau} x^2\, G\{dx\} + \int_{|x| > \tau} G\{dx\} = \mathbf{E} \min\big\{ \widetilde{X}^2/\tau^2, 1 \big\}, \quad \tau > 0. \tag{57}$$

如下定理22是在 [6]中得到的。其一维情形可见于 [7]。

定理22. 设定理19的条件成立。则对任意$\tau > 0$,

$$Q(F_a, \tau) \ll_d \Big( \frac{1}{\gamma D \sqrt{M(\tau D)}} \Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{A}}} + \exp(-c\, M(\tau D)\, \alpha^2). \tag{58}$$

很容易看出， $M(\tau D) \ge p(\tau D)$。因此，定理 22 强于定理 21。

## References


[1] Arak, T.V.: On the approximation of $n$-fold convolutions of distributions, having a non-negative characteristic function with accompanying laws. Theory Probab. Appl., **25**(2), 221–243 (1981)

[2] Arak, T.V.: On the convergence rate in Kolmogorov's uniform limit theorem. I. Theory Probab. Appl., **26**(2), 219–239 (1982)

[3] Arak, T.V., Zaitsev, A.Yu.: Uniform limit theorems for sums of independent random variables. Trudy MIAN, **174**, 3–214 (1986) (in Russian). English translation in: Proc. Steklov Inst. Math., **174**, 1–222 (1988)

[4] Campos, M., Jenssen, M., Michelen, M., Sahasrabudhe, J.: The singularity probability of a random symmetric matrix is exponentially small. arXiv:2105.11384 (2021)

[5] Campos, M., Jenssen, M., Michelen, M., Sahasrabudhe, J.: The least singular value of a random symmetric matrix. arXiv:2203.0614 (2022)

[6] Eliseeva, Yu.S.: Multivariate estimates for the concentration functions of weighted sums of independent identically distributed random variables. Zap. Nauchn. Semin. POMI, **412**, 121–137 (2013) (in Russian). English translation in: J. Math. Sci. (N. Y.), **206**, 146–158 (2015). English version: arXiv:1303.4005.
[7] Eliseeva, Yu.S., Zaitsev, A.Yu.: Estimates for the concentration functions of weighted sums of independent random variables. Theory Probab. Appl., **57**(4), 670–678 (2013)
[8] Eliseeva, Yu.S., Götze, F., Zaitsev, A.Yu.: Estimates for the concentration functions in the Littlewood–Offord problem. Zap. Nauchn. Semin. POMI, **420**, 50–69 (2013) (in Russian). English translation in: J. Math. Sci. (N. Y.), **204**, 78–89 (2015). English version: arXiv:1203.6763.
[9] Erdös, P.: On a lemma of Littlewood and Offord. Bull. Amer. Math. Soc., **51**(12), 898–902 (1945)
[10] Esséen, C.-G. On the Kolmogorov–Rogozin inequality for the concentration function. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb.* **5**, 210–216 (1966).
[11] Esséen, C.-G. On the concentration function of a sum of independent random variables. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb.* **9**, 290–308 (1968).
[12] Friedland, O., Sodin, S.: Bounds on the concentration function in terms of Diophantine approximation. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **345**, 513–518 (2007)
[13] Götze, F., Eliseeva, Yu.S., Zaitsev, A.Yu.: Arak inequalities for concentration functions and the Littlewood–Offord problem, Theory Probab. Appl., **62**(2), 196–215 (2018)
[14] Götze, F., Zaitsev, A.Yu.: New applications of Arak's inequalities to the Littlewood–Offord problem, Eur. J. Math., **4**(2), 639–663 (2018)
[15] Götze, F., Zaitsev, A.Yu.: A new bound in the Littlewood–Offord problem, Mathematics, **10**(10), 1740 (2022)
[16] Green, B.: Notes on progressions and convex geometry, Preprint (2005)
[17] Hengartner, W., Theodorescu, R.: Concentration Functions. Academic Press, New York–London (1974)
[18] Kolmogorov, A.N.: Two uniform limit theorems for sums of independent random variables. Teoriya Veroyatn. i ee Primen., **1**(4) 426–436 (1956) (in Russian). English translation in: Theory Probab. Appl., **1**(4), 384–394 (1956)
[19] Livshyts, G.V., Tikhomirov, K., Vershynin, R.: The smallest singular value of inhomogeneous square random matrices. Ann. Probab., **49**, 1286–1309 (2021)
[20] Littlewood, J.E., Offord, A.C.: On the number of real roots of a random algebraic equation (III). Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., **12(54)**(3), 277–286 (1943)
[21] Nguyen Hoi, Vu Van: Optimal inverse Littlewood–Offord theorems. Adv. Math. **226**(6), 5298–5319 (2011)
[22] Nguyen Hoi, Vu Van: Small ball probabilities, inverse theorems and applications. In: Lovász, L., et. al. (eds.) Erdös Centennial Proceeding, pp. 409–463, Springer (2013)
[23] Petrov, V.V.: Sums of Independent Random Variables. New York–Heidelberg–Berlin, Springer (1975)
[24] Rudelson, M., Vershynin, R.: The Littlewood–Offord problem and invertibility of random matrices. Adv. Math., **218**, 600–633 (2008)
[25] Rudelson, M., Vershynin, R.: The smallest singular value of a random rectangular matrix. Comm. Pure Appl. Math., **62**, 1707–1739 (2009)
[26] Tao, T., Vu Van: Additive Combinatorics. Cambridge Univ. Pr. (2006)
[27] Tao, T., Vu Van: John-type theorems for generalized arithmetic progressions and iterated sumsets. Adv. Math., **219**(2), 428–449 (2008)

[28] Tao, T., Vu Van: Inverse Littlewood–Offord theorems and the condition number of random discrete matrices. Ann. Math. (2), **169**(2), 595–632 (2009)
[29] Tao, T., Vu Van: From the Littlewood–Offord problem to the circular law: universality of the spectral distribution of random matrices. Bull. Amer. Math. Soc., **46**, 377–396 (2009)
[30] Tao, T., Vu Van: A sharp inverse Littlewood–Offord theorem. Random Structures Algorithms, **37**(4), 525–539 (2010)
[31] Tikhomirov, K.: Singularity of random Bernoulli matrices. Ann. Math. (2), **191**(2), 593–634 (2020)
[32] Vershynin, R.: Invertibility of symmetric random matrices. Random Structures Algorithms, **44**, 135–182 (2014)
[33] Zaitsev, A.Yu.: Arak's inequalities for the generalized arithmetic progressions. Zap. Nauchn. Semin. POMI, **454**, 151–157 (2016) (in Russian). English translation in: J. Math. Sci. (N. Y.), **220**(6), 698–701 (2018)

电子邮箱地址：goetze@math.uni-bielefeld.de

Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld, Postfach 100131,
Bielefeld, D-33501, Germany

电子邮箱地址：zaitsev@pdmi.ras.ru

St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute
Fontanka 27,St. Petersburg, 191023, Russiaand
St. Petersburg State University,Universitetskaya nab. 7/9,
St. Petersburg, 199034, Russia