arXiv:2304.02287v1 [math.AG] 5 Apr 2023

Nash 流形按等价关系取商

阿夫拉罕·艾森布德、沙哈尔·卡梅利、德米特里·古列维奇和列夫·拉德兹维洛夫斯基

摘要。我们证明，Nash 流形 X 按闭等价关系 $R \subset X \times X$取商，若该等价关系在 X 上为浸没映射，则所得空间是一个 Nash 流形X/R。

目录

1. 引言 21.1. 主要结果 21.2. 背景与动机 21.3. 定理证明的思路 A 31.4. 可能的推广与问题 41.5. 动机与可能的应用 41.6. 致谢 42. 半代数几何预备知识 52.1. 复杂度与驯性 52.1.1. 复杂度 52.1.2. 驯函数 52.1.3. 有界复杂度集合的回避 82.2. 焦点 93. 等价关系 103.1. 抽象等价关系 103.2. 受限 $\mathbb{R}$-空间及其商 113.3. Nash 流形上的等价关系 113.3.1. 光滑流形上等价关系的切片 113.3.2. Nash 流形上等价关系的切片 133.3.3. 正则等价关系 143.3.4. 法向切片 15日期:4月6日

, 2023.

3.3.5. 闭等价关系的正则性 17参考文献 17

1. 引言

1.1. 主要结果。 本文的主要结果如下定理：

定理 A (见下文 §3.3.5)。 设 X 为一个 Nash 流形[1]，并设 $R \subseteq X \times X$为 X上的一个等价关系。假设 R 是一个闭的 Nash 子流形$X \times X$，且投影 $R \to X$ 是一个 Nash 次浸没。则商空间X/R 存在于 Nash 流形范畴中，商映射 $X \twoheadrightarrow X/R$是一个 Nash 次浸没，且典范映射 $R \to X \times_{X/R} X$ 是一个 Nash 微分同胚。

传统上，Nash 流形被要求满足 Hausdorff 条件，因此必须要求R 是闭的。不过，也可以在不假设 Hausdorff 性的情况下重新定义 Nash 流形；在这种情形下，通常不必要求 R 是闭的。我们不知道在这种情形下去掉闭性假设后，定理 A 是否仍然成立。

为了证明定理 A 我们使用半代数子集的复杂度概念，这些子集位于 $\mathbb{R}^n$ 中，并证明其基本性质。粗略地说，我们表明任何代数过程都不能以不可控的方式增加复杂度（见第 2.1.2节），并且具有有界复杂度的集合的扎里斯基闭包的次数本身也是有界的（见命题 2.1.8）。

1.2. 背景与动机。 几何学中的一个基本构造是空间关于等价关系的商。许多几何对象的例子，如射影空间、格拉斯曼流形、模空间等，都可以描述为这样的商。一般而言，可以将代数簇描述为仿射代数簇关于某类等价关系的商。

然而，即使是良好几何对象关于等价关系的商也可能非常不规则。因此，为了保证商具有良好性态，必须对等价关系施加条件。一个基本例子是豪斯多夫拓扑空间范畴中商的构造。豪斯多夫拓扑空间关于等价关系的商作为拓扑空间总是存在，但它是豪斯多夫的当且仅当该等价关系是闭的。

在 C^∞-流形的范畴中，关于商的存在性有如下准则：

[1]即，无穷光滑半代数流形。例如参见 [Shi87、AG08] ，了解更多详情。

定理1.2.1 ([Bou07，§5.9。5])。一个 C^∞-流形 X 关于等价关系 R 的商是 C^∞-流形，如果投影 $R \to X$ 是浸没 [2]。

上述判据的直接类比不适用于代数簇（或概形）。这一事实是引入代数空间的主要动机。具体而言，可以将代数空间定义为概形 X 关于等价关系 R 的商，其中投影 $R \to X$ 是一个光滑态射（即浸没）。于是，定理 1.2.1 的自然类比确实适用于代数空间。

定理 A 的纳什情形与定理 C^∞1.2.1 的情形之间，主要区别在于：纳什流形必须有有限个仿射开子流形构成的覆盖。事实上，与定理 1.2.1一样，构造商空间 X/R 的一个由纳什流形构成的无限开覆盖很容易，而主要难点在于给出一种能够产生有限覆盖的构造。

1.3. **定理 A 的证明思路**。当 $R \to X$ 是 étale 时，定理 A 可由 [BBT22]中的论述推出。因此，只需证明可以用有限多个开集覆盖 X/R，其中每个开集都是一个 Nash 流形 Y_i 关于某个等价关系的商 R_i，且该等价关系到 Y_i 的投影是 étale 的
为此，我们引入 ***étale*** 切片 (见下文定义3.3.8 ）。到 R 的 étale 切片是一个子流形 $S \subset X$，满足限制映射 $R|_S$ R 到S 上是 étale 的，且商空间 $S/R|_S$ 在 X/R中是开集。现在，只需找到有限多个（Nash）étale 切片，使其覆盖 R 模 X （见命题 3.3.13）。微分拓扑的标准技巧可以找到这样一个无限 的切片族。容易保证这些切片是 Nash 的，但要保证其数量有限则更为棘手。

我们可以假设 $X = \mathbb{R}^n$。我们的切片构造如下：对于任意 $p \in X$，我们构造一个切片，记作 $V（R，\ p）$。粗略地说，$V（R，\ p）$由从 p到 R的等价类的垂足组成，并满足适当的横截性条件（见定义3.3.14）。容易看出，当遍历所有 $p \in X$时，切片 $V（R，\ p）$构成了所需的一族切片，唯一的例外是它是一个无限族。

接下来我们证明，若选取足够多的点 p 处于一般位置，则已覆盖全部的 X（模 R）。为此，我们引入半代数集的复杂度概念（见§2.1下文）。我们证明，点 p（使得等价类 R_x 不与 $V(R, p)$ 相交）所成之集具有有界复杂度（见第2.2节）。然后我们证明，对每一个整数 C，存在一个有限点集 Σ，使得每个复杂度至多为 C 的子集都至少错过 Σ 的一个点（见命题 2.1.9）。

[2]通常要求 C^∞-流形满足豪斯多夫性质。在这种情况下，还必须要求 R 是闭的

1.4. **可能的扩展与问题。** 定理 定理 3.3.17要求等价关系 R 是闭的。这自然引出了以下问题：

问题 1.4.1. 设 X 是一个 Nash 流形， R 是一个次浸入的、未必闭的等价关系，定义在 X 上。商空间 X/R 是否存在于（非 Hausdorff）Nash 流形范畴中？

半代数集构成一个 o-极小结构。

问题 1.4.2. 设 X 是给定 o-极小结构中可定义的光滑流形，并设 R 是 X 上可定义的次浸入闭等价关系。商空间 X/R 是否存在于该结构的可定义光滑流形范畴中？

当 R 是一个 étale 等价关系时，这个问题的答案是肯定的；对于复解析空间，这一点已由 [BBT22，推论 2，证明。58], 而且，该证明在 C^∞-情形下同样适用。

1.5. **研究动机与可能的应用。** 本文旨在更好地理解 Nash 叠的概念。代数叠可以利用代数空间中的群胚对象来定义。进而，代数空间可以定义为概形在满射等价关系（亦称光滑等价关系）下的商。另一方面，在微分拓扑中，可微叠通常直接利用光滑流形中的群胚对象来定义。这种差异之所以合理，是因为光滑流形可以对闭的[3]满射等价关系取商。

在 Nash 的语境下，定义 Nash 叠时采用了微分拓扑中的惯例，见 [Sak16] 。本文同样旨在为这一选择提供依据。因此，我们预计本文的结果可用于证明，按照代数几何思路给出的更一般的 Nash 叠定义，与 [Sak16] 中的定义等价（至少在适当的可分性假设下）。

1.6. **致谢。** 我们感谢 Yiannis Sakellaridis 与我们进行了许多关于 Nash 叠的有趣讨论，这些讨论促使我们思考这一问题。我们感谢 Gal Binyamini 为我们指出了半代数复杂性理论中的相关文献。A.A. 和 D.G. 得到了 ISF 第 249/17 号资助的部分支持。A.A. 还得到了 Minerva 基金会资助的部分支持。S.C. 得到了丹麦国家研究基金会通过哥本哈根几何与拓扑中心（DNRF151）提供的部分支持。

[3]在这种情况下，通常会排除非豪斯多夫流形，并要求等价关系是闭的。

2. 半代数几何预备知识

本节回顾并扩展我们将要用到的半代数几何基础知识。我们主要引入半代数集的复杂度 这一概念，它与描述复杂度密切相关。随后，我们研究嵌入 Nash 流形的焦点及其复杂度。

2.1. 复杂性与驯性。 现在我们将研究两个相关概念：半代数集（或态射）的复杂性，以及半代数集族之间的驯函数这一概念。其基本思想是，对于那些可用有限多个多项式过程描述的半代数集运算，复杂性不会因此变得难以控制。

2.1.1. 复杂性。

定义 2.1.1. 设 X 为一个半代数集，并设 $N > 0$。

- 我们称 X 为 N-基本的，若它可以写成 $\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0, g_{m+1}(x) > 0, \ldots, g_N(x) > 0\}$，其中 g_i 是 $n \le N$ 个变量的次数至多为 N 的多项式。
- 我们称 X 具有 复杂度 $\le N$，如果它可以表示为至多 N 个 N-基本集的并集。
- 我们称 X 具有 复杂度 N，如果它的复杂度为 $\le N$，但不具有复杂度 $\le N-1$。

我们用 $[X]$表示 X 的复杂度。通常，我们将半代数映射，或更一般地说，对应关系，通过其图视为半代数集。特别地，我们将半代数集 X与 Y之间的半代数态射 $X \to Y$（或更一般地，半代数对应关系）的复杂度定义为该态射（或对应关系）的图的复杂度。

2.1.2. 驯良函数。 复杂度的一项优点是，在对半代数集进行合理操作时，它不会发生剧烈变化。我们将通过驯良函数这一概念来形式化这一思想。设 SA 为半代数集的集合。

定义 2.1.2. 令 $S \subseteq \mathrm{SA}^k$ 为由 k 元组半代数集构成的集合。

(1) 若对任意自然数元组 $\varphi\colon\ S \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ 都称该函数为驯顺的，如果存在$N_1, \ldots, N_k$使得对每个 $N > 0$ $(X_1, \ldots, X_k) \in S^k$ 满足$[X_i] \le N_i$的情况，均有 $\varphi(X_1, \ldots, X_k) \le N$。(2) 若函数 $\Psi\colon\ S \to \mathcal{SA}$ 的复合

$$S \xrightarrow{\Psi} \mathcal{SA} \xrightarrow{[-]} \mathbb{R}_{\ge 0}$$

是驯顺的。

我们将需要若干驯服函数的具体例子，现在就来给出。

命题 2.1.3. 以下函数是温和的：

(1) 定义在同一欧几里得空间中的半代数集对上的函数 $(X,Y)\mapsto X\cap Y$和 $(X,Y)\mapsto X\cup Y$是温和的。*(2)* 定义在任意半代数集上的函数 $X\mapsto \mathbb{R}^n\setminus X$ 是温和的。*(3)* 设 S为所有元组 (X,Y,Z,f) 的集合，其中每个元组由半代数集之间的半代数对应 $f\colon X\to Y$和一个半代数子集 $Z\subseteq X$组成。那么，由下式给出的函数 $S\to\mathcal{SA}$

$$(X,Y,f,Z)\mapsto f(Z)$$

是温和的。

注意，(3) 尤其表明，取半代数态射下的像和原像这一操作是温和的。

证明。 对于 (1)，注意，若 $X=C_1\cup\cdots\cup C_\ell$和 $Y=C'_1\cup\cdots\cup C'_k$，其中$C_i$-s 和 C'_j-s 是 N-基本的，则

$$X\cup Y=C_1\cup\cdots\cup C_\ell\cup C'_1\cup\cdots\cup C'_k$$

是至多由 $2N$ 个集合组成的并，每个集合都是 N-基本的，因此其复杂度为 $\leq 2N$。类似地，由于 $C_i\cap C'_j$是 $2N$-基本的，集合

$$X\cap Y=\bigcup_{i,j}C_i\cap C'_j$$

的复杂度至多为 $\max\{2N,N^2\}$。

对于 (2)，假设 X的复杂度为 N，并按惯例写作 $X=C_1\cup\cdots\cup C_k$，其中 C_i-s 是 N-基本的，且 $k\leq N$。于是 $\mathbb{R}^n\setminus X=\bigcap_{i=1}^k\mathbb{R}^n\setminus C_i$，因此由 (1) 可知，只需证明当 X 是 N-基本的时的结论，例如

$$X=\{x\in\mathbb{R}^n : g_1(x)=0,\dots,g_m(x)=0,g_{m+1}(x)>0,\dots,g_N(x)>0\}.$$

Then

$$\mathbb{R}^n\setminus X=\cup_{i=1}^m\{x\in\mathbb{R}^n : g_i(x)\neq 0\}\cup\bigcup_{i=m+1}^N\{x\in\mathbb{R}^n : g_i(x)\leq 0\}.$$

因此，由 (1) 可知，只需将上述各项的复杂度界定为 N的函数即可。但是

$$\{x\in\mathbb{R}^n : g_i(x)\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}^n : g_i(x)>0\}\cup\{x\in\mathbb{R}^n : g_i(x)<0\}$$

具有复杂度 $\leq 2N$ 且

$$\{x\in\mathbb{R}^n : g_i(x)\leq 0\}=\{x\in\mathbb{R}^n : g_i(x)=0\}\cup\{x\in\mathbb{R}^n : g_i(x)<0\}$$

同样具有 $\leq 2N$ 的复杂度。

最后，对于 (3)，假设 X、Y、 f 和 Z 的复杂度均为 $\leq N$。不失一般性，可假设 $X, Y \subseteq \mathbb{R}^N$。令 Γ_f 为 f 的图。那么，

$$f(Z) = \pi_2(\pi_1^{-1}(Z) \cap \Gamma_f)$$

其中 π_i: $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 表示到 i第$i = 1$个坐标的投影，2。因此，根据（1），只需证明半代数集沿投影 π: $\mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^N$ 取像和原像的运算是温和的。注意，若 C 是 $\mathbb{R}^N$ 中的一个半代数集，由一组多项式等式和不等式给出

$$C = \{g_1(x) = 0, \ldots, g_\ell(x) = 0, g_{\ell+1}(x) > 0, \ldots, g_N(x) > 0\}$$

then

$$\pi^{-1}(C) = \{g_1(f(x)) = 0, \ldots, g_\ell(f(x)) = 0, g_{\ell+1}(f(x)) > 0, \ldots, g_N(f(x)) > 0\}$$

由于对于 π 线性投影，多项式 $g_i(\pi(x)) = 0$ 与 g_i次数相同，因此我们看到， $\pi^{-1}(Z)$ 的复杂度至多是 Z复杂度的两倍。
最后，此情形下函数 $Z \mapsto \pi(Z)$ 的温和性源于半代数几何中量词消去的有效性，参见 [BPR06，算法14。5]。□

粗略地说，第 (3) 点使我们能够证明，由一阶公式定义的半代数集上的每个函数都是驯性的。对于我们的应用，只需要以下特殊情形。

引理 2.1.4. 设 S为所有三元组 (X, Y, T) 的集合，其中 X, Y是半代数集，且 $T \subseteq X \times Y$ 是半代数子集。函数 $S \to \mathsf{SA}$ 由下式给出

$$(X, Y, T) \mapsto \{x \in X : \exists y \in Y, (x, y) \in T\}$$

and

$$(X, Y, T) \mapsto \{x \in X : \forall y \in Y, (x, y) \in T\}$$

都是驯性的。

证明. 第一个集合是 T 在投影 $T \to X$下的像，第二个集合则是 $X \times Y \setminus T$的投影的补集。因此，结论由命题2.1.3得出。□

作为一个直接应用，我们可以证明切丛的构造具有驯性。

命题 2.1.5.定义在嵌入仿射*Nash*流形集合上的函数 $X \mapsto TX$是驯服的。这里，如果 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 我们将切丛 TX视为 $\mathbb{R}^{2n}$ 的半代数子集。

证明。 X 的切空间可以由以下公式定义：
$TX = \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall 0 < t < \varepsilon \quad \exists z \in X$ 使得 $|x+tv-z| < t\varepsilon\}$.
应用引理 2.1.4四次以消去 $\forall$ 和 $\exists$ 量词，即得结论。 □

对于纳什流形的嵌入 $X \subseteq Y$，令 $N(X; Y)$ 表示 Y 中 X 的法丛。这是 X 上的纳什向量丛。

推论 2.1.6。 将纳什子流形 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 映射到法丛 $N(X; \mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ 的函数是温和的。

证明。 法丛是切丛 TX 在如下对应关系下的像

$$\mathbb{R}^{2n} \xleftarrow{(x,u,v)\mapsto(x,u)} \{(x, v, u) \in \mathbb{R}^{3n} :< v, u >= 0\} \xrightarrow{(x,u,v)\mapsto(x,v)} \mathbb{R}^{2n},$$

因此，该结论由对应关系下像的驯性（命题 2.1.3(3)）以及切丛构造的驯性（命题2.1.5）得出。 □

推论 2.1.7. 将嵌入的 *Nash* 流形之间的 *Nash* 态射 $f\colon X \to Y$ 映射为其微分 $df\colon TX \to TY$ 的函数是驯的。

证明. 的图像是 f的图像的切空间。因此，该结论由命题2.1.5得出。 □

2.1.3. 有界复杂度集合的避开定理。 我们使用复杂度这一概念，主要是因为复杂度较低的半代数集总能被足够大的有限集中的某个元素避开。现在我们将这一点精确表述出来，并证明相关的避开结果。首先，我们证明半代数集包含于一个次数受控的超曲面中。

命题 2.1.8。 对于维数为 $\leq n-1$ 的半代数集 $X \subseteq \mathbb{R}^n$，令$d(X)$ 表示满足 $g|_X = 0$ 的实系数多项式 $g(x_1, ..., x_n)$ 的最小次数。那么，函数 $X \mapsto d(X)$ 是驯性的。

证明。设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中维数为 $\leq n-1$、复杂度为 $\leq N$ 的半代数集。根据复杂度的定义，我们可以写成 $X = \bigcup_{i=1}^{\ell} C_i$，其中 C_i 由次数至多为 N 的多项式方程和不等式给出。首先注意，若 C_i 非空，则它不能仅用严格多项式不等式表示。事实上，否则 C_i 必为开集，这与 $\dim(X) < n$ 的假设矛盾。因此，对每个 i，都存在一个次数至多为 N 的多项式 g_i，使得 $(g_i)|_{C_i} = 0$。但此时 $g := \prod_i g_i$ 是一个次数为 $\leq N^N$ 的多项式，满足$g|_X = 0$。这说明 $d(X) \leq N^N$。 □

现在我们转向我们的回避结果。

命题 2.1.9。 对于每个 n， $N \in \mathbb{N}$ 都存在一个有限子集 $S \subseteq \mathbb{R}^n$，满足以下性质：对于每个 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 复杂度为 $\leq N$ 且维数小于 n的情形，都有 $S \nsubseteq X$。

证明。 根据命题 2.1.8，存在 $d > 0$，且与 X无关，并且存在一个多项式$g \neq 0$，其次数至多为 d，使得 $g|_X = 0$。因此，只需证明存在一个有限集 S，它不完全包含于任何在 $\mathbb{R}^n$上的、次数为 $\leq d$ 的非零多项式函数的零点集之中。实际上，任何一个由 $\binom{n+1+d}{d}$ 个处于一般位置的点构成的集合，即在 S 各点处取值所定义的泛函在次数至多为 d 、具有 n 个变量的多项式线性空间上相互独立，均满足此条件。□

2.2. **焦点**。 回顾一下，对于一个光滑映射 $f\colon M_0 \to M_1$ （光滑流形之间的映射），奇异值 是 f 中的一点 $x \in M_1$，满足存在 $y \in f^{-1}(x)$，使得微分映射 $d_y f\colon T_y M_0 \to T_x M_1$ 不是满射。

命题 2.2.1. 将嵌入的纳什流形三元组$(X, Y, f\colon X \to Y)$ 及其间的纳什态射映射到 f 的奇异值集合的函数是驯性的。

证明. f 的奇异值集合由以下公式给出

$$\{y \in Y : \exists (x, v) \in X \times T_y Y | f(x) = y \text{ and } d_x f(v) \in TY \setminus df(TX)\}.$$

因此，结论由微分、切丛和补集的构造具有驯性，以及此类公式解集的驯性得出（见引理 2.1.4、命题 2.1.5、推论 2.1.7和命题2.1.3(2)）。□

对于光滑子流形 $M \subseteq \mathbb{R}^n$，我们有一个典范映射

$$\nu_M\colon N(M; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n,$$
$$(x, v) \mapsto x + v.$$

定义 2.2.2. 设 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$的一个（不一定闭的）光滑子流形。若点 $p \in \mathbb{R}^n$ 是 焦点的 M 的奇异值，ν_M则称其为 $\mathrm{Foc}(M) \subseteq \mathbb{R}^n$记为 M的焦点集合。

从几何上看， M 的焦点是一个球面的中心，该球面在某一点与 M “两次”相切。我们从下面的维数估计开始对焦点的分析。

命题 2.2.3。 设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个维数为$\leq n - 1$的 ***Nash*** 子流形。那么$\mathrm{Foc}(X)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个维数至多为$n - 1$的半代数子集。

证明。Foc(X) 是 $\mathbb{R}^n$ 的半代数子集，这一事实由 Seidenberg-Tarski 定理得出。下面估计其维数。映射 $\nu_X\colon N(X;\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$ 是 Nash 流形之间的 Nash 态射，因此根据 Sard 引理的半代数版本（见 [Cos00，定理 4.8]），其奇异值集合 Foc(X) 的维数为 $\leq n-1$。□

接下来，我们要根据 X的复杂度来界定半代数集 Foc(X) 的复杂度。

命题 2.2.4。 将一个嵌入的纳什流形 $X\subseteq\mathbb{R}^n$（维数为 $\leq n-1$）映射到集合 Foc(X) 的函数是驯善的。

证明。 首先，根据推论 2.1.6，将 X 映射到 $N(X;\mathbb{R}^n)$ 的函数是驯善的。此外，构造映射 $\nu_M\colon N(X;\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$ 也是驯善的，因为它是将一个固定的半代数态射限制到 $N(X;\mathbb{R}^n)$ 上所得到的映射。最后，根据命题 X，构造 ν_M 的奇异值集合 Foc(2.2.1) 是驯善的。□

推论 2.2.5. 对于每个 $n\in\mathbb{N}$ 和每个 $N>0$，都存在一个有限集 $S\subseteq\mathbb{R}^n$，使得对于每个维数为 $\leq n-1$、复杂度为$\leq N$的纳什子流形$X\subseteq\mathbb{R}^n$，都存在一个 $s\in S$，它不是 X的焦点。

证明。 由命题 2.2.4，存在 $N'>0$，使得 X的焦点集复杂度为 $\leq N'$。由命题 S 的存在性现在可由命题 2.1.9推出。□

3. 等价关系

本节讨论纳什流形上的等价关系及其商的一般理论。我们的目标是给出一个实用判据，以确定纳什流形按纳什等价关系取商是否存在（命题 3.3.13）。

3.1. 抽象等价关系。 我们首先在一般的范畴语境下讨论等价关系。

定义 3.1.1. 设 $\mathscr{C}$ 为一个范畴。一对态射 $R\rightrightarrows X$ 将 R表现为一个 等价关系 于 X 之上，如果对每一个 $Y\in\mathscr{C}$，相应的集合映射 Map(Y,R) $\to\mathrm{Map}(Y,X)\times\mathrm{Map}(Y,X)$ 是单射，并在 Map(Y,X) 上定义了一个等价关系。

如果 $\mathscr{C}$ 容许有限积，则这对映射可以封装成单个单态射 $i\colon R\hookrightarrow X\times X$。在良好的情形下，可以构造 X 关于等价关系 R的商。

定义 3.1.2. 设 $\mathscr{C}$为一个范畴，并设 $R\rightrightarrows X$ 为一个等价关系。我们将 商——即 X 关于 R 的商 —— 定义为相应图表的余等化子

$$R\rightrightarrows X,$$

当这个余等化子存在时。在这种情况下，我们将商记为 X/R。

注意，一般而言，如果 $\mathscr{C}$ 没有所有余等化子，则商 X/R 可能不存在。我们将证明，在关于该关系的某些假设下，纳什流形按纳什等价关系取商后，在 **纳什** 中存在。

3.2. **受限 $\mathbb{R}$空间及其商**。 Nash 流形可完全忠实地嵌入到一类更大的有限几何对象中，这类对象称为受限$\mathbb{R}$-空间。

定义 3.2.1。 一个 $\mathbb{R}$-空间是一个受限拓扑空间 X，并赋有一个取值于 $\mathbb{R}$的函数层 $\mathscr{O}_X$。

每个纳什流形连同其光滑半代数函数层，都是一个受限的 $\mathbb{R}$-空间。我们将纳什流形范畴记为 **纳什**。纳什流形按等价关系取商，所得商空间可能不存在于 **纳什** 中，但作为受限的 $\mathbb{R}$-空间，它确实存在。更一般地，我们有如下结论：

命题 3.2.2. 受限 $\mathbb{R}$-空间范畴具有所有小余极限。特别地，受限 $\mathbb{R}$-空间上的每个等价关系都存在商。

证明。设 $\{(X_i, \mathscr{O}_{X_i})\}_{i\in I}$ 是受限 $\mathbb{R}$-空间的图表。我们将受限拓扑空间 X 定义为集合 $\{X_i\}_{i\in I}$的集合论余极限。令$\varphi_i\colon X_i \to X$ 为到该余极限的结构态射。我们在 X 上赋予受限拓扑，其中开集为满足对每个 $i \in I$，$\varphi_i^{-1}(U)$ 都是开集的子集 $U \subseteq X$。我们在 X 上赋予函数层 $\mathscr{O}_X$，使得函数 $f\colon U \to \mathbb{R}$属于 $\mathscr{O}_X(U)$，当且仅当对于每个 $i \in I$，复合映射 $f \circ \varphi_i|_{\varphi_i^{-1}(U)}$ 属于 $\mathscr{O}_{X_i}(\varphi_i^{-1}(U))$。容易看出，$(X, \mathscr{O}_X)$ 是图表 $(X_i, \mathscr{O}_{X_i})$ 的余极限。□

因此，给定一个 Nash 流形 X 及其上的等价关系 R，问题“ X/R 是否存在于 **Nash** 中”就转化为问题“受限$\mathbb{R}$-空间 X/R 是否属于满子范畴 **Nash**”。

3.3. **Nash 流形上的等价关系**。 给定一个赋有等价关系 R的 Nash 流形 X，我们希望证明，在适当条件下， X/R 是一个 Nash 流形，且商映射 q: $X \to X/R$ 是一个 Nash 下沉。假设这一点成立，隐函数定理保证存在到 q的局部截面。这一观察引出了下文讨论的截面 概念。也就是说，当商确实存在时，截面就是这样一个局部截面的像。最后，我们在主定理的证明中使用这一概念。

3.3.1. 光滑流形上的等价关系的切片。我们首先从纯粹微分几何的视角讨论等价关系及其切片。我们将对等价关系施加某些条件。

定义 3.3.1。 R 是 嵌入的，并用 $R \subseteq X \times X$ 表示，而不指定单态映射 i。我们进一步称 R 是 闭的，如果 R 是 $X \times X$的闭子流形。

定义 3.3.2. 等价关系 $R \subseteq X \times X$ 在光滑流形 X上称为浸没的，如果复合 $R \subseteq X \times X \to X$ 是浸没，其中第二个映射是到第一个因子的投影。

对于 $x \in X$，令 R_x 为 x 在 X中的等价类。若 R 是浸没的，则对每一个 $x \in X$， R_x是 X 的光滑子流形。于是， R 的一个切片是X 的一个子集，它在下述意义下与所有子流形 R_x 横截:

定义 3.3.3. 设 X 为光滑流形，并设 $R \subseteq X \times X$ 为 X上的浸没等价关系。局部闭子流形 $Z \subseteq X$ 称为一个 切片，对于 R，如果对每一个 $x \in Z$，我们有 $Z \cap R_x = \{x\}$ 以及 $T_x X = T_x R_x \oplus T_x Z$。

X/R 的一个图册因此由覆盖该商空间的 R 的截片构成。后一性质可以利用这些截片的饱和性在 X 本身上加以判定。

定义 3.3.4。 设 X 是一个带有等价关系 R 的集合。对于 $Z \subseteq X$ ，我们记

$$\mathrm{Sat}(Z) = \bigcup_{x \in Z} R_x,$$

并将 Sat(Z) 称为相对于 Z 的饱和集（ R）。

命题 3.3.5。 设 X 是一个光滑流形，且 R 是 X 上的一个浸没等价关系。设 $Z \subseteq X$ 是 R 的一个截面。那么

(1) 子集 $U :=\mathrm{Sat}(Z)$ 在 X 中是开集。(2) 设 $f\colon U \to \mathbb{R}$ 是一个在 R 的等价类上为常值的函数。那么，当且仅当 $f|_Z$ 是光滑的， f 才是光滑的。

证明。根据 [Bou07，§5.9。5] 拓扑空间 X/R 上存在唯一的光滑流形结构，使得商映射 $\pi : X \to X/R$ 是一个次浸没。由于 Z 是 R的一个切片，映射 $\pi|_Z\colon Z \to X/R$ 是单射。此外，由于对任意$x \in X$ 映射 φ 在 R_x上为常值，我们得到 $d_x\varphi(T_x R_x) = 0$。结合假设 $T_x Z \oplus T_x R_x = T_x X$，可得

$$d_x(\varphi|_Z)\colon T_x Z \to T_{\pi(x)} X/R$$

是一个同构。我们看到， $\varphi|_Z$ 是 étale 且为单射，因此是光滑流形之间的开嵌入。

现在，对于 (1)，我们有Sat(Z) $= \pi^{-1}(\pi(Z))$，根据 π 的连续性以及 $\pi(Z)$在 X/R中是开集这一事实，它是开集。对于 (2)， U 上在等价类上为常值的函数恰好是 $\pi(Z)$ 上的函数，因此根据 π 诱导微分同胚 $Z \xrightarrow{\sim} \pi(Z)$ 这一事实，我们得到所需结果。□

3.3.2. 纳什流形上的截面与等价关系。我们现在专门讨论纳什流形的情形，并说明半代数截面如何为商空间 X/R 提供半代数局部模型。

定义 3.3.6. 我们称受限 $\mathbb{R}$-空间的态射 $f\colon X \to Y$ 是一个开嵌入，如果它作为受限拓扑空间的态射是单射且开映射，并且态射 $f^*\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_X$ 是 $\mathbb{R}$-值函数层在 X上的同构。

命题 3.3.7。 设 X 为一个 *Nash* 流形，且设 $R \subseteq X \times X$ 为 X 上的一个子浸没等价关系，属于 **Nash** 范畴。设 $Z \subseteq X$ 为 R 的一个半代数切片。于是，映射 $\pi|_Z\colon Z \to X/R$ 是受限 $\mathbb{R}$-空间之间的一个开嵌入。

证明。令 $\pi\colon X \to X/R$ 为商映射。首先，根据假设，对每个 $x \in Z$都有$Z \cap R_x = \{x\}$，映射 $\pi|_Z\colon Z \to X/R$是单射。其次，若 $U \subseteq Z$是开集，则 U 本身就是 R的一个截片，因此由命题 3.3.5 的（1）可知，集合 Sat(U) 在 X中是开集。由于 π 是开映射，我们推出 $\pi(U) = \pi(\mathrm{Sat}(U))$ 在 X/R中是开集。因此，$\pi|_Z$ 是限制拓扑空间之间的开嵌入。

还需证明 $\pi|_Z$ 将 Z 上的函数层与其在 X/R 中的（开）像上的函数层等同起来。根据 $\mathscr{O}_{X/R}$ 的定义，这相当于证明以下内容：

> (*) 对每个开集 $U \subseteq \pi(Z)$，函数 $g\colon \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ 若在等价类上为常值，则其限制 $g|_Z$ 光滑且半代数，当且仅当该函数光滑且半代数。

半代数性质的等价性由塞登贝格–塔斯基定理推出，而光滑性条件的等价性是命题 3.3.5(2)。

□

在实际应用中，构造仅在局部上为截面的子集通常更容易。这就引出了对截面概念的如下放宽。

定义 3.3.8. 设 X 是一个光滑流形，并设 $R \subseteq X \times X$ 是 X上的一个下沉等价关系。局部闭子流形 $Z \subseteq X$ 称为 *étale* 截面，对应于 R，若它仅满足截面的定义中的第二个条件，即对每个 $x \in Z$，都有 $T_xZ \oplus T_xR_x = T_xX$。

现在我们证明，对于半代数等价关系，经过有限开覆盖后，étale 切片与切片之间的差异便消失。

命题 3.3.9。 设 X 为一个纳什流形，且设 $R \subseteq X \times X$ 为 X 上的一个闭浸没等价关系，其中 X 属于**纳什**范畴。设 $Z \subseteq X$ 为 R的一个半代数 *étale* 截面。则存在有限多个截面 $Z_i \subseteq Z$，使得

$$\mathrm{Sat}(Z_1) \cup \cdots \cup \mathrm{Sat}(Z_\ell) = \mathrm{Sat}(Z).$$

证明。条件 Z 是 R 的一个 étale 切片，这意味着受限等价关系 $R|_Z := R \cap Z \times Z$ 是 Z上的闭 étale 等价关系，即投影 $R|_Z \to Z$ 是一个 étale 映射。因此，存在Z_i-s 的结论可由 [BBT22命题 2 的证明57]得到。□

3.3.3. 正则等价关系。 我们将使用以下术语来描述具有“良好”商空间的等价关系：

定义 3.3.10. 设 X 为一个 Nash 流形，并设 $R \subseteq X \times X$ 为 X 上的一个 **Nash** 子浸没等价关系。若 R 是$\mathbb{R}$正则的，即限制后的$\mathbb{R}$-空间 X/R 是一个 Nash 流形，且商映射 $X \to X/R$ 是 Nash 子浸没映射，则称 R 为正则等价关系。

注 3.3.11. 注意，若 R 是 Nash 流形 X上的一个闭正则等价关系，则存在 Nash 微分同胚 $R \simeq X \times_{X/R} X$。事实上，它们都是 $X \times X$ 上的闭半代数子流形，并且具有相同的点集。

注记 3.3.12. 若 R 是 X上的正则等价关系，那么在受限 $\mathbb{R}$-空间范畴中， X 模 R 的商X/R 实际上也是**Nash**范畴中的商。事实上，这是**Nash** 是受限 $\mathbb{R}$-空间范畴的满子范畴这一事实的形式推论。

最后，我们给出一个判定条件，用以确定一个浸没等价关系是否正则。

命题 3.3.13. 设 $R \subseteq X \times X$ 是 Nash 流形 X上的浸没等价关系。则 R 正则，当且仅当存在有限个 étale 半代数切片 Z_1，……， Z_N 它们属于 R 且满足

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{Sat}(Z_i).$$

证明。 令 π: $X \to X/R$ 为商映射。

- 首先假设 R 是正则的，因此商映射 π 是 Nash 浸没映射。根据 [AG10，定理 2.4，16], 存在一个有限覆盖 $X/R = \bigcup_{i=1}^{N} U_i$以及一族 s_i : $U_i \to X$ 属于 π的光滑半代数截面。于是，子集
$$Z_i := s_i(U_i) \subseteq X$$
构成一族 étale 切片，使得 $\bigcup_{i=1}^{N}$Sat(Z_i) $= X$。事实上， Z_i 是 R 的 étale 切片，这一事实源于如下假设： s_i 是 π 的光滑半代数截面。由于 Sat(Z_i) $= \pi^{-1}(U_i)$，开集 Sat(Z_i) 覆盖 X 这一事实源于如下假设： U_i-s 覆盖 X/R。
- 反之，假设存在 R 的 étale 切片 Z_i ，使得
$$X = \bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{Sat}(Z_i).$$

我们希望证明 π 是 Nash 流形之间的 Nash 次浸没。步骤 1. 我们证明受限的 $\mathbb{R}$-空间 X/R 是一个 Nash 流形：根据命题 3.3.9，不失一般性，我们可以假设每个 Z_i 都是 R的一个切片，只需将每个 Z_i 替换为有限个 R 的切片。根据命题 3.3.7，映射 $\pi|_{Z_i}$：$Z_i \to X/R$ 是一个开嵌入。由于集合 Sat(Z_i) 覆盖 X，Z_i-s 在 π 下的像覆盖 X/R。由此可得，X/R 可由（有限个）Nash 流形 $\pi(Z_i)$ 覆盖，因此它是一个 Nash 流形。步骤 2. 我们证明 π：$X \to X/R$ 是一个 Nash 次浸没：这一断言只取决于光滑流形 X 和 X/R，而与半代数结构无关。因此，由每个光滑流形上的闭次浸没等价关系都是正则的这一事实即可推出该结论（参见 [Bou07, §5.9.5]）。

□

3.3.4. 法向截片。我们在上一节中看到，为纳什流形上的浸没等价关系构造商空间，归结为给出足够多的 étale 截片。本节将为 $\mathbb{R}^n$ 上的等价关系构造这类截片。具体而言，对于浸没的半代数等价关系 $R \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$，我们将构造一族 étale 截片$V(R,\ p)$，每个点 $p \in \mathbb{R}^n$ 对应一个截片。随后，我们证明这些截片构成 $\mathbb{R}^n/R$ 的有限覆盖，并据此为其赋予纳什结构。

定义 3.3.14。设 R 是 $\mathbb{R}^n$上的闭浸没等价关系。对于 $p \in \mathbb{R}^n$，令 $V(R,\ p)$ 表示满足以下两个性质的点集 $x \in \mathbb{R}^n$：

- 向量 $p-x$ 垂直于线性子空间 $T_xR_x \subseteq \mathbb{R}^n$。等价地，我们有 $(x, x-p) \in N_x(R_x; \mathbb{R}^n)$。
- $(x, x-p)$ 是映射 ν_{R_x}：$N(R_x; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ 的正则点。

集合 $V(R,p)$ 对我们很有用，原因如下：

命题 3.3.15. 设 $R \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 是一个闭的下沉等价关系。那么，对每个 $p \in \mathbb{R}^n$，子集 $V(R,p) \subseteq \mathbb{R}^n$ 都是 R的 étale 切片；若 R 是半代数的，则该切片也是半代数的。

证明。 根据塞登伯格-塔尔斯基定理，若 R 是半代数的，则 $V(R,p)$ 也是半代数的。因此，只需证明：

(1) $V(R,p)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的局部闭光滑子流形。(2) $T_xV(R,p)$ 对每个 $x \in V(R,p)$ 都成立。

（1）的证明：令 $\varphi\colon\ E\to\mathbb{R}^n$ 为由 $E_x=N_x(R_x;\mathbb{R}^n)$给出的向量丛。我们有一个映射 $\nu\colon\ E\to\mathbb{R}^n$，由 $\nu(x,v)=x+v$给出。令 $s\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{2n}$ 为由 $s(x)=(x,x-p)$给出的光滑映射，并设 $Z\colon=s(V(R,p))$。那么，Z是 $\nu^{-1}(p)\subseteq E$的一个开子集，仅由 ν的正则点组成。事实上，在一点$(x,v)\in Z$处，即使将 ν限制在 $\varphi^{-1}(R_x)=N_x(R_x;\mathbb{R}^n)$上，该限制正好是 ν_{R_x}，在(x,v)处也是正则的。由隐函数定理，我们得出 Z 是 E的一个光滑子流形。由于 Z 是$V(R,p)$在投影 $\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^n$的一个光滑截面下的像，我们得出 $V(R,p)$本身是 $\mathbb{R}^n$的一个光滑子流形。

证明（2）：令 $x\in V(R,\ p)$，并设 $\tilde{x}=(x,\ x-p)\in E$。由于浸没映射$\varphi\colon\ E\to\mathbb{R}^n$限制后是一个微分同胚 $Z\xrightarrow{\sim}V(R,\ p)$，条件

$$T_xV(R,p)\oplus T_xR_x=T_x\mathbb{R}^n$$

等价于条件

$$T_{\tilde{x}}Z\oplus T_{\tilde{x}}\varphi^{-1}(R_x)=T_{\tilde{x}}E.$$

由于 Z 是 $\nu^{-1}(p)$ 中 $\tilde{x}$ 的一个开邻域，且 $\tilde{x}$ 是ν的正则点，因此有

$$T_{\tilde{x}}Z=\mathrm{Ker}(d_{\tilde{x}}\nu).$$

因此，要证明 $T_{\tilde{x}}\varphi^{-1}(R_x)$ 是 $T_{\tilde{x}}Z$的一个直和补，只需证明微分 $d_{\tilde{x}}\nu$ 限制后是一个同构

$$T_{\tilde{x}}\varphi^{-1}(R_x)\xrightarrow{\sim}T_p\mathbb{R}^n.$$

换言之，我们需要证明映射 $\nu|_{\varphi^{-1}(R_x)}\colon\ \varphi^{-1}(R_x)\to\mathbb{R}^n$ 在 $\tilde{x}$处是 étale 的。根据 E 和 ν的定义，有

$$\varphi^{-1}(R_x)=N(R_x;\mathbb{R}^n)$$

and

$$\nu|_{\varphi^{-1}(R_x)}=\nu_{R_x}.$$

最后，ν_{R_x} 在 $\tilde{x}$ 处是 étale 的，因为点 $\tilde{x}$ 是 ν_{R_x}的正则点。

□

为了将 étale 切片 $V(R,\ p)$用作商空间 $\mathbb{R}^n/R$的图表，我们需要证明其中有限多个能够覆盖该商空间。具体而言：

命题 3.3.16。 设 $R\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$上的一个闭的、浸没的半代数等价关系。那么，存在有限个点 $p_1,\ \ldots,\ p_N$属于 $\mathbb{R}^n$，使得

$$\mathbb{R}^n=\bigcup_{i=1}^{N}\mathrm{Sat}(V(p_i,R)).$$

证明。 对于 p， $x \in \mathbb{R}^n$，若 p 不是 R_x 的焦点，则 x 等价于 $V(R,\ p)$中的一个点。事实上，由于等价类 $R_x \subset \mathbb{R}^n$ 是闭的，存在一点$y \in R_x$，使其在 R_x中距离 p 最近。因此， $y-p$ 在 y处垂直于 R_x，且 p 不是 R_x的焦点。由此可得 $x \sim_R y \in V(R,\ p)$。

因此，我们有

$$X \setminus \mathrm{Sat}(V(R,p)) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : p \in \mathrm{Foc}(R_x)\}.$$

因此，为证明该结果，只需找到一个有限集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$，使得对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$，都存在一个 $p \in S$，使得 $p \notin \mathrm{Foc}(R_x)$。
根据命题 2.1.9 和命题 2.2.4，若我们证明存在 S，使得存在 $N > 0$ 满足 R_x 的复杂度为 $\leq N$ 对每个$x \in \mathbb{R}^n$均成立，则此类 R_x 的存在性便可得到证明。可是 R 是 $\mathbb{R}^{2n}$与一个仿射子空间的交，因此，根据命题 2.1.3(1)，可以用 R_x 的复杂度的函数给出 R 复杂度的上界。 □

3.3.5. 闭等价关系的正则性。 我们现在可以证明本文的主要结果了：

定理 3.3.17。设 X 是一个纳什流形，且 $R \subseteq X \times X$ 是定义在 X上的闭的、淹没的半代数等价关系。那么 R 是正则的。换言之，商空间 X/R 是一个纳什流形，且商映射 $X \to X/R$是一个纳什淹没。

证明。 由命题 3.3.13，只需为R 找到有限多个平展切片，其饱和覆盖 X。由 [Shi87，推论 I.5.11 与注记 I.5.12],可知，存在一个有限覆盖 $X = U_1 \cup \cdots \cup U_\ell$，使得 $U_i \simeq \mathbb{R}^n$。若 Z是 $R|_{U_i}$的平展切片，则它也是 R 的平展切片。此外，若我们用此类平展切片的饱和覆盖 U_i，则针对不同的 U_i所构造的全部切片之并，将给出 X 的一组合适切片。因此，我们可以将 X 替换为 U_i，并在不失一般性的情况下假设 $X \simeq \mathbb{R}^n$。
在此情形下，由命题 3.3.16 存在有限多个点 p_1，……， p_N使得

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{Sat}(V(R,p_i)).$$

由命题 3.3.15，每个 $V(R,\ p_i)$ 都是 R 的平展切片，因此这些 $V(R,\ p_i)$ 构成所需的切片族。 □

参考文献

[AG08] Avraham Aizenbud 和 Dmitry Gourevitch。Nash 流形上的 Schwartz 函数。国际数学研究论文集 *IMRN*，(5)：文章编号 rnm 155，37，2008。[AG10] Avraham Aizenbud 和 Dmitry Gourevitch。Nash 流形上 Schwartz 函数的 de Rham 定理与 Shapiro 引理。以色列数学杂志，177(1)：155– 188，2010。

[BBT22] 本杰明·巴克尔、约汉·布吕讷巴尔布和雅各布·齐默尔曼。奥-极小 GAGA 与格里菲斯猜想。*Inventiones*，2022年。[Bou07] 尼古拉·布尔巴基。微分与解析簇：成果汇编，第8卷。Springer Science & Business Media，2007年。[BPR06] 绍加塔·巴苏、理查德·波拉克和玛丽-弗朗索瓦丝·鲁瓦。《实代数几何中的算法》，2006年。[Cos00] 米歇尔·科斯特。《半代数几何导论》，2000年。[Sak16] 扬尼斯·萨凯拉里迪斯。光滑半代数栈的施瓦茨空间。*Selecta Mathematica*，22(4)：2401–2490，2016年。[Shi87] 正弘·盐田。纳什流形，数学讲义第1269卷。Springer-Verlag，柏林，1987年。

Avraham Aizenbud，魏茨曼科学研究所数学与计算机科学学院，邮政信箱 26，雷霍沃特 76100，以色列
电子邮箱： aizenr@gmail.com
网址： http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~aizenr

Shachar Carmeli，哥本哈根大学数学科学系，Universitetsparken 5，DK-2100 哥本哈根 Ø，丹麦

Dmitry Gourevitch，魏茨曼科学研究所数学与计算机科学学院，邮政信箱 26，雷霍沃特 76100，以色列电子邮箱： dimagur@weizmann.ac.il网址：
http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~dimagur

Lev Radzivilovski，特拉维夫大学数学系，邮政信箱 39040，以色列特拉维夫 6997801