arXiv:2304.02293v1 [math.AG] 5 Apr 2023

亏格 7 的 Fano-Mukai 四维簇上的仿射锥是柔性的

阮氏英姮和黄黎长

Abstract. 在本文中，我们将证明任意光滑 Fano-Mukai 四重体上的仿射锥 of 属的 7 阶四维簇具有柔性。

1. Introduction

所有讨论的簇都是代数簇，且定义在复数域 $\mathbb{C}$ 上。

有理法诺簇的研究是代数几何中一个活跃的研究领域，因为这些簇具有许多有趣的性质，并且与数学和物理学的其他领域相关。在本文中，我们研究具有柔性仿射锥的有理法诺簇。仿射簇的柔性概念已在代数背景下得到研究，见于 [AZK12]。对柔性簇的兴趣十分显著，这不仅是因为它们引人注目的代数与几何推论，也是因为这类簇的范围出人意料地广泛（参见 [Arz23]）。此外，已经证明仿射簇的柔性具有若干有用性质，例如单有理性，并且已被应用于代数几何中的问题，例如扎里斯基消去问题。另外，仿射簇的柔性与光滑射影簇之上的仿射锥上存在可迁加性群作用密切相关，如 [AZK12，AFK+13]中所示。

现在，设 X 为光滑射影簇， H 为 X 上任意一个丰沛除子，则 X 上的仿射锥是一个仿射簇，其定义如下。

$$\mathrm{Affcone}_H(X) = \mathrm{Spec} \bigoplus_{m=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{O}_X(mH)).$$

众所周知，如果一个皮卡德秩为 1的光滑射影簇上的仿射锥是柔性的，那么该簇是有理的 Fano 簇；但目前尚不清楚反之是否成立，即每个皮卡德秩为 1 的有理 Fano 簇是否都具有柔性的仿射锥。

In dimension 2, the flexibility of affine cones over del Pezzo surfaces of degree 4 is well-known (see [Per13]). In [PW16], the authors extended this result to show that for every ample divisor, the affine cones over del Pezzo surfaces of degree 4 are flexible, and this is also true for affine cones over del Pezzo surfaces of degree at least 5. In dimension 3, it has been shown that the affine cones over certain specific Fano threefolds in Mori-Mukai's classification are flexible (see [MPS18]). In dimension 4, the flexibility of the affine cone over *every* Fano-Mukai fourfold of genus 10 has been proved in [PZ20]. More recently, Hoff and the last author showed in [HT22] that the same is true for the affine cones over *general* Fano-Mukai fourfolds of genus 7, 8, and 9. Therefore, a natural question arises: are the affine cones over *every* Fano-Mukai fourfold of genus 7, 8, and 9 flexible? (see [HT22, Problem 5.11]). In this paper, we provide a positive answer to this question for the case of genus 7 (see Theorem 2.3).

Key words and phrases. 仿射锥、自同构、圆柱体、Fano簇、柔性、加法群的群作用。

2020 *Mathematics Subject Classification*: 14R20、14J45、14J50、14R05。N. T. A.Hang获得了部分资助，资助项目编号为ICRTM022021.04，该项目由河内国际数学研究与研究生培训中心在内部资助竞赛中授予；同时还获得了IMU突破性研究生奖学金（IMU-BGF-2021- 03）的部分资助。H. L. Truong获得了VAST基金的部分资助，资助项目编号为NVCC01.04/22-23。

1.1.记号。设 $Y \subset \mathbb{P}^N$ 为一个维数为 n 且规范类为 K_Y的光滑射影簇。我们用 H_Y 表示 Y 的超平面类，用 d_Y 表示 Y的次数。 π_Y 的截面亏格 Y 定义如下。

$$\pi_Y = \frac{1}{2}H_Y^{n-1}((n-1)H_Y + K_Y) + 1.$$

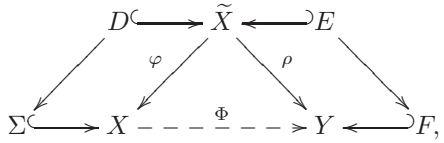
向量丛 $\mathcal{E}$ 在 Y 上的切丛和第 i 个陈类分别记为 $\mathcal{T}_Y$ 和 $c_i(\mathcal{E})$。此外， $c_i(Y) = c_i(\mathcal{T}_Y)$。 Y 的欧拉–庞加莱示性数 χ_Y 定义为$\chi_Y = \chi(\mathcal{O}_Y)$。

本文分为四个部分。主要结果发表于第 2节，其中我们证明了亏格为 7 的 Fano–Mukai四维簇的几何性质。在第 3 节中，我们描述了这些四维簇上的双有理映射。最后一节专门用于证明本文的主要定理。

2. Main results

本文研究亏格为 7 的 Fano-Mukai四维簇与 X 的切空间在点 X 处的交的几何性质 p。此前 [LM03] 和 [Kuz18]的结果表明，该交可以呈现以下形式之一：(i)5条直线的集合；(ii) 包含一个平面、一个二次曲面或一个三次滚曲面。我们的目标是根据这些几何性质，描述从 X到某些 Fano 簇的双有理映射。注意，情形 (i) 已在 [HT22], 中研究过，而情形 (ii)则在 [HHT22] 中、在假设这些曲面为光滑三次滚曲面的条件下进行了研究，但其他情形尚不清楚。特别地，我们有以下定理。

定理 2.1。 设 $X \subseteq \mathbb{P}^9$ 是亏格为 7 且满足 $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}L$ 且超平面类为L。假设 X 包含一个表 1中所示的曲面 Σ 。则以下结论成立。
(1) 经过 Σ 的线性系 $|L - \Sigma|$ 定义了一个双有理映射 $\Phi\colon X \dashrightarrow Y$。(2) 存在一个交换图。



其中， φ 是以曲面 Σ 为中心进行的 X ，其异常除子为 D ； ρ 是由线性系 $|\varphi^*L - D|$定义的双有理态射。
(3) ρ-例外轨迹是一个不可约除子 $E \subset \widetilde{X}$. (4) 设 H 为 $\mathrm{Pic}(Y)$ 的充足生成元。那么

$$\varphi^*L \sim (d_\Sigma + 1)\rho^*H - E, \qquad D \sim d_\Sigma\,\rho^*H - E,$$
$$\rho^*H \sim \varphi^*L - D, \qquad E \sim d_\Sigma\,\varphi^*L - (d_\Sigma + 1)D.$$

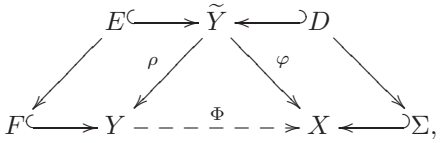
(5) *The image $\rho(E)$ is a surface $F \subset Y$ with at most isolated singularities. The birational map ρ is the blowup centered at F. Moreover, if Σ is smooth then F and Y are smooth.*
(6) *$\rho(D)$ is a unique hypersurface of degree d_Σ containing F and $\varphi(E)$ is a hypersurface of degree d_Σ of X containing Σ.*
(7) $X \backslash \varphi(E) \cong Y \backslash \rho(D)$.

$\Sigma \subset X$	d_Σ	π_Σ	Y	d_F	π_F	$(\varphi^*L)^2 \cdot D^2$	$(\varphi^*L) \cdot D^3$	D^4
平面	1	0	$X_{2.2}$	5	1	-1	1	2
二次曲面	2	0	$Q^4 \subseteq \mathbb{P}^5$	8	4	-2	0	2
三次滚曲面	3	0	$\mathbb{P}^4$	7	3	-3	-1	3

Table 1. 包含于属为 7 的 Mukai 四维簇中的曲面 X 和曲面 $F \subset Y$.

The inverse picture of the Theorem 2.1 would be the inverse of the birational map Φ, describing a birational map from the Fano variety back to the Fano-Mukai fourfold of genus 7. The exact details of the inverse picture would be provided in the following theorem.

定理2.2。设 F 和 Y 是表 1中的簇。则以下陈述成立。(1)经过 F 的线性系统 $|(i-1)H-F|$ 定义了一个双有理映射 $\Phi: Y \dashrightarrow X \subset \mathbb{P}^9$，其中 $X = \Phi(Y)$ 是一个亏格为 7 的Mukai 四维簇，且对于一个丰生成元 L，$\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}L$，其中 i 是 Y 的指标。(2) 存在一个交换图



其中，ρ 是以 F 为中心、例外除子为 E 的 Y 的爆破，而 φ 是由线性系 $|(i-1)\rho^*H-E|$ 定义的双有理态射，其 φ-例外除子为 D。

(3) $\rho(D)$ 是一个奇异三次三维簇。 Σ的奇点是 Φ-像，即 $\rho(D)$中的平面沿一条四次曲线与 F 相交。双有理映射 φ 是沿表 Σ 1中所列的曲面 F的爆破。此外，对于一般曲面 Σ，簇 X 和

(4) 我们有如下关系

$$\varphi^*L \sim (i-1)\rho^*H - E, \qquad D \sim (i-2)\rho^*H - E,$$
$$\rho^*H \sim \varphi^*L - D, \qquad E \sim (i-2)\varphi^*L - (i-1)D.$$

利用上述定理，我们对[HT22中的问题 5 给出了肯定回答。11]对于亏格 7 的情形，尤其可以得到以下定理。

The定理 2.3. 任意光滑的亏格为 7 的 Fano–Mukai 四维簇上的仿射锥都是柔性的 .

注2.4。为了建立上述结果，我们考察一个芬诺-穆凯七属四维簇X 与其在 X上的每一点处的切空间的交，以及每一点处的切锥。尽管 [HT22], M. Hoff和最后一位作者研究了交集出现在一个芬诺-穆凯七属四维簇 X 的一般点处的情形，本文则专注于其余情形。证明采用了 [Per13定理 5]和 [HT22引理 5。7], 中的仿射锥柔性的判据，这些判据基于射影簇的某些开覆盖。从一个七属芬诺-穆凯四维簇 X 出发，我们证明存在一个开子集 U，它属于 X并且可以被 $\mathbb{A}^2$-柱覆盖。随后，我们利用上述柔性判据证明该覆盖具有横截性。

3. Birational maps on Fano-Mukai fourfolds of genus 7

3.1. 从属 Fano-Mukai 四维簇出发的双有理映射 7. 本节将证明定理 2.1。设 X 是一个属为 7、超平面类为 L 的 Fano-Mukai 四维簇，且包含~一个曲面 Σ，如表 1所述。记 $\varphi: X \longrightarrow X$ 为 X 以曲面 Σ 为中心的爆破，其例外除子为 D。

~引理 3.1. 簇 X 是 Picard 秩为 2 的 Fano 四维簇。

证明。由于 ~Pic $(X) = \mathbb{Z}L$ 且 φ 是以 Σ为中心对 X 进行的爆破，因此 rank Pic $(X) = 2$ 等于 d

$$-K_{\widetilde{X}} = \varphi^*L + \varphi^*L - D.$$

由于从 $(7-d_\Sigma)$ 平面 $\langle\Sigma\rangle$ 诱导出双有理映射 $\Phi: X \dashrightarrow Y$，线性系统 $|\varphi^*L - D|$ 无基点。因此 $\varphi^*L - D$ 是数值有效的。由于 φ^*L 是充足的，根据 Kleiman 的~充足性判据，它们的和是一个充足除子。因此 X 是一个皮卡德秩为 2 的 Fano 四维簇，正如所要求的。 □

~引理 3.2. 在 X. 上存在两种不同的 Mori 收缩。

证明。根据锥定理，两个丰线性系 $|\varphi^*L - D|$ 和 $|\varphi^*L|$ 在 X. 上定义了两个莫里收缩
~。第一个由 $|\varphi^*L|$ 定义，恰好是 φ： $X \longrightarrow X$. 。
第二个是~ρ： $X \longrightarrow U$，由 $|\varphi^*L - D|$ 定义，且与 φ. □不同。

引理 3.3. 我们有
(1) $(\varphi^*L)^4 = 12$, $(\varphi^*L)^3 \cdot D = 0$, 以及$(\varphi^*L)^2 \cdot D^2$, $(\varphi^*L) \cdot D^3$ 和 D^4 如表*1*所示。(2)
除子类 $\varphi^*L - D$ 不是丰沛的。
证明。 (1). 由 [PZ16，引理 2.3], 我们有 $(\varphi^*L)^4 = L^4$. 它恰好是 X 的次数。因此 $(\varphi^*L)^4 = 12$。我们还有 $(\varphi^*L)^3 \cdot D = 0$。此外，相交数 $(\varphi^*L)^2 \cdot D^2$ $(\varphi^*L) \cdot D^3$和 D^4 如表 1。

(2).由于$(\varphi^*L - D)^3 \cdot (d_\Sigma\, \varphi^*L - (d_\Sigma + 1)D) = 0$，根据Kleiman 的充足性判据， $\varphi^*L - D$ 的除子类并不充足。
□

回顾一下，如果 dim X =dim Y 且 ϕ-例外轨迹的余维为一，则收缩 ϕ: $X \longrightarrow Y$ 是除子型的。在下一个引理中，我们将证明 Mori 收缩 ρ 是除子型的。
引理 3.4。Mori 收缩 ρ 是除子型的。此外， ρ-例外轨迹是一个不可约的~除子 $E \subseteq X$.

~证明。由于 Mori收缩 $\rho : X \longrightarrow U$ 由半正线性系统 $|\varphi^*L - D|$决定，根据收缩定理，我们可以写成 $\varphi^*L - D = \rho^*H$ 其中 H 是由 Pic (U)生成的丰沛除子。由黎曼–罗赫定理和Kodaira消失定理，我们有dim $|\varphi^*L - D| = 4$ =dim X. 因此， ρ是一个双有理映射。于是 dim U =dim $X = 4$. 由引理 3.3，我们得到 $(\varphi^*L - D)^3 \cdot (d_\Sigma\, \varphi^*L - (d_\Sigma + 1)D) = 0$。根据收缩定理，存在一个被 ρ收缩的除子 E inU，即 ρ-例外轨迹的余维为一。因此， ρ 是一个除子收缩。此外，根据除子型收缩的性质（见 [Mat02,命题 8-2-1]）， ρ-例外轨迹包含唯一的不可约除子 E。□

引理 3.5。像 $\rho(E)$ 是一个至多具有孤立奇点的曲面 $F \subset U$ 。
证明。由于 $(\varphi^*L - D)^2 \cdot E^2 = -d_F$，像 $F = \rho(E)$是一个曲面，且 deg $F = H^2 \cdot \rho(E) = d_F$~（如表1 所示）。由于rankPic ($X$) = 2， ρ 的例外轨迹与 E 重合，因此 E 是一个素除子。因此，根据 [AM03，定理 4.1.3]， ρ 至多有有限个二维纤维。于是，根据 [AW98] 中的定理， F 至多有孤立奇点。□

引理 3.6。双有理映射 ρ 是沿着曲面 F 对 U 的爆破，其例外除子为 E。

证明。 根据引理 3.4， ρ 是一个除子型收缩，其例外轨迹与 E重合。因此 dim $E = 3$。根据引理 3.5，我们有 dim $\rho(E) = 2$。此外，根据引理 $-K_{\widetilde{X}}$ 3.1，是丰沛的。因此，由 [AM03，定理 4.1。3], 我们得出 ρ 是沿着曲面 U 的爆破，其例外除子为 F。 E□

引理 3.7. 我们有如下关系

$$\varphi^*L \sim (d_\Sigma + 1)\rho^*H - E, \qquad D \sim d_\Sigma\, \rho^*H - E,$$
$$\rho^*H \sim \varphi^*L - D, \qquad E \sim d_\Sigma\, \varphi^*L - (d_\Sigma + 1)D.$$

证明。 关系 $\rho^*H \sim \varphi^*L - D$ 可由引理 3.4 得出。由引理 3.3，我们有

$$(\varphi^*L - D)^3 \cdot (d_\Sigma\, \varphi^*L - (d_\Sigma + 1)D) = 0.$$

因此由 [PZ16，引理 2.3] 以及引理 3.4 可知 $E \sim d_\Sigma\, \varphi^*L - (d_\Sigma + 1)D$. 其余两个关系随之成立。 □

引理 3.8。 簇 U 是表 Y 中的 Fano 簇 *1*。

证明。 由 ρ 的双有理性以及 $-K_{\widetilde{X}}$ 的丰性 U 可知，簇 $U=$ 的维数为 $|\rho^*H|=$ 维数为 $|\varphi^*L-D|=4$. 由上述讨论，Pic（U）的秩为 1。由于 H 是 Pic（U）的丰生成元，我们得到 $\mathrm{d}_U=H^4$。由引理 3.7 可得

$$-K_{\widetilde{X}}=2\varphi^*L-D=(d_\Sigma+2)\rho^*H-E,$$

由引理 3.6 可得 $-K_U=(d_\Sigma+2)H$. 因此， U 的指标为 $d_\Sigma+2$。根据指标为 ≥ 2的 Fano 四维簇分类，簇 U 恰为表 $Y1$中所示的 Fano 四维簇。 □

由上述引理，我们可以继续证明定理2.1 如下。

~定理证明 *2.1*。 关于（1）和（2）：由引理 3.1 可知 X 是一个 Picard 数~为 2 的 Fano 四维簇。由引理 3.2，存在一个收缩 $\rho:\ X\longrightarrow U$，且不同于 φ. 。由引理3.3 可知 φ^*L-D 不是丰沛的，因此它给出了由 φ的纤维中的曲线生成的极端射线的一个支撑线性函数。由引理 3.4， ρ 是一个双有理映射。由 Φ 的双有理性以及图表的交换性可知，结论成立。由引理 3.8 可知，簇 U 与表 Y 中所示的簇相同，见表1。

关于 (3)：由引理 3.4.

关于（4）：由引理可立即得出 3.7。

关于（5）：这由引理 3.5 和引理 3.6 得出。此外，如果 Σ 是光滑的，那么 F 和 Y 都是光滑的。

对于(6)：由(2)讨论，我们有 φ 是 $d_\Sigma+2$ 维~纤维 $\varphi^{-1}(\Sigma)$ 与 E 相交。因此， $\varphi(E)\cong L$ 是 $X\subset\mathbb{P}^9$ 的一个沿 $\Sigma=\varphi(D)$ 奇异的超平面截面。

对于 (7)：由于 $F\subset\rho(D)$，我们有同构。

$$X\backslash\varphi(E)\cong\widetilde{X}\backslash(E\cup D)\cong Y\backslash(F\cup\rho(D))\cong Y\backslash\rho(D).$$

□

3.2. 双有理映射到亏格为 7 的 Mukai 四维簇。 在本小节中，我们将证明定理2.2。设 F 和 Y 是表1中的簇。我们将 Y 的指标记为 i，并且 ~$\rho:\ Y\longrightarrow Y$ 是以曲面 F 为中心、例外除数为 E 的 Y 的爆破。

~ ~引理 3.9. 簇 Y 是一个法诺四维簇，且 Pic(Y) 的秩为二。

证明。我们有

$$-K_{\widetilde{Y}}=\rho^*H+(i-1)\rho^*H-E.$$

由于 F 是概形论交，线性系 $|(i-1)\rho^*H-E|$ 无基点。因此它是 nef 的。由 ρ^*H 是丰沛的以及 Kleiman 丰沛性判据可知，除子 $-K_{\widetilde{Y}}$~ ~是丰沛的，即 Y 是一个 Fano 四维簇。此外，Pic (Y) 的秩为 2。□

~引理 3.10。X 上存在两个不同的 Mori 收缩。

证明。根据锥定理，两个 nef 线性系 $|(i-1)\rho^*H-E|$ 和 $|\rho^*H|$ 在 Y. 上定义了两个 Mori ~ ~收缩。第一个由 $|\rho^*H|$ 定义，恰为 $\rho:\ Y\longrightarrow Y$. 。第二个是~$\mu:\ Y\longrightarrow X'$，由 $|(i-1)\rho^*H-E|$ 定义，且不同于 ρ. □。

设 D为 Y中唯一一个次数为 $(i-2)$ 且经过F的超曲面的严格变换。那么，对于某个 $k>0$，我们可以写成 $D\sim(i-2)\rho^*H-kE$。

引理 3.11。$(i-1)\rho^*H-E$ 的除子类不是 ample。

证明。 由 [PZ16，引理 2。3],我们有

$$0\leq((i-1)\rho^*H-E)^3\cdot D=-12d_\Sigma\,(k-1).$$

Thus $k=1$ and $((i-1)\rho^*H-E)^3\cdot D=0$. Hence $(i-1)\rho^*H-E$ is not ample. □

引理 3.12。莫里收缩 μ 是双有理映射，且其例外轨迹与 D 重合。

Proof. By the Contraction theorem, we can write $(i-1)\rho^*H-E=\mu^*L$, where L is the ample generator of $\mathrm{Pic}\,(X')\cong\mathbb{Z}$. Then we have $((i-1)\rho^*H-E)^4=12$ and $\dim\mu(\widetilde{Y})=4$. Thus, μ is birational. Moreover, μ is divisorial, hence its exceptional locus coincides with D. In particular, it is an irreducible divisor. □

注记 3.13. 利用黎曼–罗赫定理和小平消失定理，我们得到等式 $\dim|(i-1)\rho^*H-E|=9$。由此得到如下图表

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \xrightarrow{\varphi} & X \\ & {\scriptstyle\rho}\swarrow \quad \searrow{\scriptstyle\mu} & \downarrow \\ Y & \overset{\Phi}{\dashrightarrow} & X'\subset\mathbb{P}^9, \end{array}$$

其中，$\widetilde{Y}\to X'\subset\mathbb{P}^9$ 由线性系统 $|(i-1)\rho^*H-E|$给出，并且

$$\varphi_{|(i-1)\rho^*H-E|}:\ \widetilde{Y}\xrightarrow{\varphi}X\longrightarrow X'\subset\mathbb{P}^9$$

是 Stein 分解。

引理 3.14。簇 X' 是一个至多具有终端 Gorenstein 奇点的 Mukai 四维簇，且 Pic (X') 的秩为 1。

证明。由于 μ 是除子型Mori收缩，X' 至多具有终端奇点。由秩Pic $(Y)=2$ 可知我们有秩Pic $(X')=1$。由于

$$-K_{\widetilde{Y}}=i\rho^*H-E=2((i-1)\rho^*H-E)-D,$$

我们得到 $-K_{X'}=2L$。因此，$-K_{X'}$ 是一个充足的 Cartier 除子，并且在 Pic(X') 中可被 2 整除。所以 X' 是一个 Mukai 四维簇。□

注记 3.15。态射 $X\to X'\subset\mathbb{P}^9$ 由线性系 $|L|=|-\frac{1}{2}K_X|$给出。根据[HHT22，引理 2，5], 这是一个同构。在下文中，我们将 X 视为 X'，并将 $\varphi_{|(i-1)\rho^*H-E|}$视为 φ。因此，φ 是双有理的，d$_X=12$，且态射 φ 将除子 D 收缩到不可约曲面 $\Sigma\subset X$。

由于Pic的秩为1，的例外集 φ 与.....重合 D，且 D 是一个素除子。因此，φ 至多有有限个二维纤维。根据 [AW98]中的定理，Σ 至多具有孤立奇点。此外，曲面 Σ 如表1 所示，是正规的。

引理 3.16. 态射 $\varphi:Y\to X$ 是曲面 Σ的爆破；若曲面 F 为一般曲面，则 Σ 和 X 均光滑。

证明。假设 Σ或 X是奇异的，则极端 $K_{\widetilde{Y}}$-负收缩 $\varphi:\ Y\to X$将有一个二维纤维，记作 $Z\subset D\subset Y$。由于 Σ 是正规簇，根据主定理和 [AW98] 中的命题 4.11，我们有 $\widetilde{Z}\cong\mathbb{P}^2$ 以及

$$(i\rho^*H-E)|_{\widetilde{Z}}=-K_{\widetilde{Y}}|_{\widetilde{Z}}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1).$$

由于 Z在 φ下被压缩为一点，我们有$((i-1)\rho^*H-E)|_{\widetilde{Z}}\sim 0$。因此，$\rho^*H|_{\widetilde{Z}}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$(1)和 $E|_{\widetilde{Z}}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i-1)$。所以，像 $Z=\rho(Z)\subset\rho(D)$ 是一个与 F沿一条次数为 $i-1$的曲线相交的平面，即，$Z\neq\Sigma$且 $Z\cap F\cong\widetilde{Z}\cap E$是 $Z\cong\mathbb{P}^2$中的一条次数为 $i-1$ 的曲线，这与一般曲面 F包含于 Y 的唯一的次数为 $i-2$ 的超曲面 W中且 W 包含有限多个平面相矛盾。因此，φ 的所有纤维的维数都小于或等于1。由 [以及85], , X和 Σ 都是光滑的，并且 φ 是 Σ的爆破。□

Finally, the proof of Theorem 2.2 can be proceed as follows.

Proof of Theorem 2.2. To (1) and (2): By Lemma 3.9, $\widetilde{Y}$ is a Fano fourfold with rank of Pic($\widetilde{Y}$) is 2. It follows from Lemma 3.10 that there exists a Mori contraction $\mu : \widetilde{Y} \longrightarrow X'$ different from ρ. By Lemma 3.11, $(i-1)\rho^*H - E$ is not ample, so it yields a supporting linear function of the extremal ray generated by the curves in the fibers of ρ. By Lemma 3.12, μ is birational and its exceptional locus coincides with D. It implies from Lemma 3.14 and Remark 3.15 that X' is a Mukai fourfold of genus 7. The birationality of Φ and the commutativity of the diagram follows.

由（3）：根据引理 3.16。

对于 (4)：由引理 3.11 可得 $D \sim (i-2)\rho^*H - E$. 由引理 3.12 和注记 3.15，得到 $(i-1)\rho^*H - E = \varphi^*L$。其余两个关系随之得出。□

4. Flexibility of affine cones over Mukai fourfolds of genus 7

在本节中，我们探讨亏格为7的Mukai四重体上仿射锥的灵活性。一点$p \in V$位于仿射代数簇 V 中，称为灵活的，如果切空间 T_pV 由域 $\mathbb{G}_a$ 的加法群在 V 上的作用轨道的切向量所张成。如果V 的每个光滑点都是灵活的，我们称 V 为灵活簇。证明射影簇上仿射锥的灵活性的一种有效方法，是构造柱状子集，正如Kishimoto、Prokhorov和Zaidenberg（[KPZ11]）所提出的。这一强有力的技术已被用于确立许多重要簇类的灵活性，包括亏格为7的Mukai四重体上的仿射锥。在本节中，我们使用这一方法来证明此类四重体上仿射锥的灵活性。

定义4.1.(1) X 中的 $\mathbb{A}^n$-圆柱定义为一对(Z, φ)，其中 Z 是一个簇， $\mathbb{A}^n$ 是 $\mathbb{C}$上的仿射 n-空间，且 φ：$Z \times \mathbb{A}^n \to X$ 是一个开嵌入。若存在 X 中的一个 $\mathbb{A}^n$- 圆柱 (Z, φ)，则称 X 是 $\mathbb{A}^n$- 圆柱的。若 X 上有一个除子，我们称 X 中的一个 $\mathbb{A}^n$-圆柱 (Z, φ)是 H-极的，如果对于某个有效除子 $D \in |kH|$，有 $\varphi(Z \times \mathbb{A}^n) = X \setminus \operatorname{supp} D$，其中 $k > 0$。（[KPZ11，定义 3.1.5，3.1.7]）。

(2) 若子集 $Y \subset X$ 在 X 中关于 $\mathbb{A}^n$-柱体（Z, φ）是不变的，则称其为不变子集。

$$Y \cap \varphi(Z \times \mathbb{A}^n) = \varphi(\pi_1^{-1}(\pi_1(\varphi^{-1}(Y)))),$$

whe再 π_1： $Z \times \mathbb{A}^n \to Z$ 是直积的第一投影（[Per13，定义 3]）.

(3) 如果 X 被 $\mathbb{A}^n$柱体 $\{(Z_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ 横向覆盖于 X 中，则称 X 有一个覆盖

$$(*) \qquad X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

其中每个 U_i 都是 X 中的一个 Zariski 开子集，使得 $U_i = \varphi_i(Z_i \times \mathbb{A}^n)$，并且相对于每个 $\mathbb{A}^n$-柱面都不存在任何真不变子集（Z_i， φ_i）。([Per13，定义 4])

在下文中，我们将提及一些对我们的工作有用的结果。更多信息及证明请参阅 [HT22]。

引理 4.2 ([HT22])。 设 W 是 $\mathbb{P}^4$中的一个奇异三次超曲面。那么簇 $\mathbb{P}^4 \setminus W$ 被 $\mathbb{A}^2$-柱体 $\{(Z_y, \varphi_y)\}_{y \in \mathbb{P}^4 \setminus W}$横截覆盖于 $\mathbb{P}^4 \setminus W$。

引理 4.3. 对每个点 $x \in X$，存在 X 的一个开集 U_x，使得

(1) $U_x = X \setminus C_x$，其中 C_x 是 X 的三次超曲面截口。(2) 存在一个奇异三次三维簇 $W_x \subset \mathbb{P}^4$，以及一个双有理映射 Φ_x： $X \dashrightarrow \mathbb{P}^4$，使得

$$X \setminus C_x \cong \mathbb{P}^4 \setminus W_x.$$

证明。 为证明我们的结果，我们分析 Fano-Mukai 四维簇 X （亏格为 7）与其在每一点处的切空间及切锥的交。对每个点 $x \in X$，该交可以取四种形式之一，如 [LM03] 与 [Kuz18]所示：一组直线，或包含一个平面、二次曲面或三次卷曲面。

该 fi rst case, where the intersection is a set of lines, has been previously studied in [HT22].

In the second case, where the intersection contains a plane, we can establish the result using Theorem 2.1 and [PZ16, Theorem 3.1]. By Proposition 2.1, we can find a hyperplane H_x in $\mathbb{P}^9$ and a hyperplane H'_x in $\mathbb{P}^6$ such that $X \setminus H_x$ is isomorphic to $X_{2\cdot 2} \setminus H'_x$. Then, using [PZ16, Theorem 3.1], we can show that the complement of a quadric hypersurface section Q of a complete intersection of two quadrics $X_{2\cdot 2} \subset \mathbb{P}^6$ is isomorphic to the complement of a quadric hypersurface Q'_x in $\mathbb{P}^4$. Hence, there exists a birational map $\Phi_x : X \dashrightarrow \mathbb{P}^4$ such that $X \backslash C_x \cong \mathbb{P}^4 \backslash W_x$, where the hypersurface C_x is the union of a hyperplane H_x and a quadric hypersurface Q_x, while the hypersurface W_x is the union of a hyperplane H'_x and a quadric hypersurface Q'_x.

在第三种情形中，交包含一个二次曲面，我们可以利用命题 2.1 找到 X 的一个二次超曲面截口 Q_x ，以及二次超曲面 $Y \subset \mathbb{P}^5$ 的一个二次超曲面截口 Q'_x ，使得 X 中 Q_x 的补集同构于 Y中 Q'_x 的补集。然后，我们可以观察到 $Y \subset \mathbb{P}^5$ 的一个超平面截口 H 的补集同构于 $\mathbb{P}^4$中一个超平面 H'_x 的补集。由此，我们得到一个双有理映射 Φ_x： $X \dashrightarrow \mathbb{P}^4$，使得 $X \backslash C_x \cong \mathbb{P}^4 \backslash W_x$，其中超曲面 C_x 是二次超曲面 Q_x 与超平面 H_x的并，而超曲面 W_x 是二次超曲面 Q'_x 与超平面H'_x的并。

最后，对于交集包含三次卷曲面的情形，我们可以利用定理2.1来证明我们的结果。 □

我们来回顾一下判定仿射锥具有柔性的标准。

定理 4.4 ([Per13]). 若对某个极强除子 H ，在光滑射影簇 X 上存在由 H-极 $\mathbb{A}^1$-柱面构成的横截覆盖，则 X 上的仿射锥是柔性的。

引理 4.5 ([HT22])。 如果 X 被 $\mathbb{A}^2$-柱横截覆盖，则 X 被 $\mathbb{A}^1$-柱横截覆盖。特别地，如果对于光滑射影簇 H 上的某个非常充足除子 X存在 H-极化 $\mathbb{A}^2$-柱的横截覆盖，则在 X 上的仿射锥是柔性的。

定理 4.6. 属 7 的 Fano–Mukai 四维簇上的仿射锥是柔性的。

证明。设 X 是一个亏格为 7 的 Fano-Mukai 四维簇。由于对于所有 $x \in X$ 和 $\bigcap C_x = \emptyset$ ，$x \in C_x$ $_{x\in X}$族 $\{U_x \mid x \in X\}$ 是 X 的开覆盖。因此，利用引理 4.2 和 4.3，簇 X 被$\mathbb{A}^2$-柱体横截覆盖。具体而言，对于每个点 $x \in X$，我们都有一个开集 U_x，使得 $U_x = X \backslash C_x$，其中 C_x 是 X 的一个三次超曲面截面，而 $W_x \subset \mathbb{P}^4$ 是一个奇异三次三维簇，并且存在一个双有理映射 Φ_x : $X \dashrightarrow \mathbb{P}^4$ ，使得 $X \backslash C_x \cong \mathbb{P}^4 \backslash W_x$。引理 4.2 告诉我们， $\mathbb{P}^4 \setminus W_x$ 被 $\mathbb{A}^2$-柱体横截覆盖，因此我们可以利用双有理映射 Φ_x 将这一覆盖拉回到 $U_x \subset X$。最后，我们可以将这些覆盖粘合起来，从而得到 X 的一个全局横截 H-极化 $\mathbb{A}^2$-柱体覆盖。由引理 4.5 可知，如果光滑射影簇 X 被 H-极化 $\mathbb{A}^2$- 柱体横截覆盖，那么 X 也被 H- 极化 $\mathbb{A}^1$- 柱体横截覆盖。于是根据定理 4.4，在 X 上的仿射锥是柔性的。□

References

[And85] T. Ando, *On extremal rays of the higher-dimensional varieties*, Invent. Math. **81** (1985), no. 2, 347–357. ↑6

[AFK+13] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, and M. Zaidenberg, *Flexible varieties and automorphism groups*, Duke Math. J. **162** (2013), 767–823. ↑1

[AZK12] I. Arzhantsev, M. Zaidenberg, and K. Kuyumzhiyan, *Flag varieties, toric varieties, and suspessions: three examples of infinite transitivity*, Mat. Sb. **203** (2012), 3–30. ↑1

[AW98] M. Andreatta and J. A. Wiśniewski, *On contractions of smooth varieties*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), no. 2, 253–312. ↑4, 6

[AM03] M. Andreatta and M. Mella, *Morphisms of projective varieties from the viewpoint of minimal model theory*, Dissertationes Mathematicae **413** (2003), 1–72. ↑4

[Arz23] I. Arzhantsev, *Automorphisms of algebraic varieties and infinite transitivity*, 2023. preprint: https://arxiv.org/pdf/2212.13616.pdf. ↑1

[HHT22] N. T. A. Hang, M. Hoff, and H. L. Truong, *On cylindrical smooth rational fano fourfolds*, J. Korean Math. Soc. **59** (2022), 87–103. ↑2, 6

[HT22] M. Hoff and H. L. Truong, *Flexibility of affine cones over Mukai fourfolds of genus $g \geq 7$*, https://doi.org/10.48550/arXiv.2208.09109, (2022). ↑1, 2, 3, 7, 8

[KPZ11] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, and M. Zaidenberg, *Group actions on affine cones* (D. Daigle, R. Ganong, and M. Koras, eds.), Affine Algebraic Geometry CRM Proceedings and Lecture Notes, vol. 54, American Mathematical Society, Providence, 2011. ↑7

[Kuz18] A. Kuznesov, *On linear section of the spinor tenfold, I*, Izv. Math. **82** (2018), no. 694. ↑2, 7

[LM03] J. M. Landsberg and L. Manivel, *On the projective geometry of rational homogeneous varieties*, Comment. Math. Helv. **78** (2003), no. 1, 65–100 (English). ↑2, 7

[Mat02] K. Matsuki, *Introduction to the Mori Program*, Springer-Verlag New York, 2002. ↑4

[MPS18] M. Michalek, A. Perepechko, and H. Süss, *Flexible affine cones and flexible coverings*, Math. Z. **290** (2018), 1457–1478. ↑1

[Per13] A. Yu. Perepechko, *Flexibility of affine cones over del Pezzo surfaces of degree 4 and 5,* Funct. Anal. Appl. **47** (2013), no. 4, 284–289. ↑1, 3, 7, 8

[PW16] J. Park and J. Won, *Flexible affine cones over del Pezzo surfaces of degree 4,* Eur. J. Math. **2** (2016), no. 1, 304–318. ↑1

[PZ16] Y. Prokhorov and M. Zaidenberg, *Examples of cylindrical Fano fourfolds*, Eur. J. Math. **2** (2016), 262–282. ↑4, 5, 8

[PZ20] ———, *Affine cones over Fano-Mukai fourfolds of genus 10 are flexible*, 2020. preprint: https://arxiv.org/abs/2005.12092. ↑1

Email address: hangnthianh@gmail.com

Thai Nguyen University of Education, Thai Nguyen City, Viet Nam

Email address: hltruong@math.ac.vn, truonghoangle@gmail.com

Institute of Mathematics, VAST, 18 Hoang Quoc Viet Road, 10307 Hanoi, Viet Nam