arXiv:2304.02304v1 [math.GR] 5 Apr 2023

辫群B_3 的6维不可约表示

TAHER I. MAYASSI 和 MOHAMMAD N. ABDULR AHIM

摘要。我们使用 q-Pascal 三角形定义辫群 B_3 在三股辫上的 6维表示族。随后，我们给出这些表示不可约的充要条件。

1. 引言

辫群在结理论和密码学等许多数学分支中发挥着重要作用。在这项工作中，我们研究维数为 6 的辫群 B_3 的表示的不可约性。在 [1], 中，利用 q变形的帕斯卡三角形构造了维数为 $n+1$ 的 B_3 的一个表示族。 B_3 的这个表示族是 Humphries [4] 给出的表示以及 I. Tuba 和 H. Wenzl [7]给出的表示的推广。更多详情请参见 [1,定理 3] 和 [2]。Kosyak 在 [5] 中指出，利用 q-帕斯卡三角形构造的表示的不可约性，对于维数 ≥ 6而言仍是一个开放问题，尽管 [1]中给出了一些充分条件。在我们的工作中，我们考察这些表示，并确定维数恰为 6 时不可约性的一个充要条件。

在第 2 节中，我们使用一些记号，通过 q-帕斯卡三角形来定义 B_3 的一个表示族（见定理 2.1）。在第 3 节中，我们将定理 2.1 定义的表示特化到 $n=5$，即 6 维情形，方法是为某些参数取特定值。由此得到 B_3 的一个表示子族。命题 3.1 证明，这些表示没有 1 维不变子空间。然而，命题 3.2、命题 3.3 和命题 3.4 分别给出了不存在 2、3 和 4 维不变子空间的充要条件。命题 3.5 给出了这些表示没有 5 维不变子空间的一个充分条件。我们的主要结果是定理 3.6，它确定了 B_3 的这个表示族不可约的充要条件。在第 4 节中，我们考察这些表示可约的情形。随后，我们将其中一个可约表示约化为一个 4 维子表示，并证明该子表示不可约（定理 4.1）。

关键词和短语。辫群，不可约性数学主题分类。主要分类：20F36。1

2. 记号、定义与基本定理

定义 2.1. [3] 由 n 股辫组成的辫群 B_n 是一个抽象群，其生成元为 $n-1$ σ_1、σ_2、$\cdots$、σ_{n-1}，满足以下关系

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ for } |i-j|>1 \text{ and } \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \text{ for } i=1,\cdots,n-2.$$

为了使用 q-帕斯卡三角形，我们需要以下记号。

记号。 [1]对于每个 $(n\times n)$-矩阵 $M=(m_{ij})$，我们定义矩阵 $M^\sharp=(m_{ij}^\sharp)$ 和 $M^s=(m_{ij}^s)$，其中 $m_{ij}^\sharp = m_{n-i,n-j}$且 $m_{ij}^s = m_{n-j,n-i}$。

对于 $q\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$、$n\in\mathbb{N}$，以及满足 $j>0$ 和 $r\geqslant 0$ 的所有整数 j 和 r，我们定义以下各项。

$$(j)_q = 1+q+\cdots+q^{j-1},$$

$$(j)!_q = (1)_q(2)_q\cdots(j)_q \text{ and } (0)!_q = 1,$$

$$\binom{n}{r}_q = \frac{(n)!_q}{(r)!_q(n-r)!_q}, \text{ for all integers } r \text{ and } n \text{ such that } 0\leqslant r\leqslant n,$$

$$q_r = q^{\dfrac{(r-1)r}{2}}.$$

$(j)_q$ 和 $\binom{n}{r}_q$ 分别称为 q-自然数和 q-二项式系数。

定义 2.2. ([1],[5]) 设 n 为非负整数。对于所有非零复数 q、λ_0、λ_1、$\cdots$、λ_n，考虑矩阵

$$D_n(q)=\operatorname{diag}(q_r)_{r=0}^n,\ \Lambda_n=\operatorname{diag}(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \text{ and } A_n(q)=(a_{km})_{0\leqslant k,m\leqslant n},$$

其中 $a_{km}=\binom{n-k}{n-m}_q=\frac{(n-k)!_q}{(n-m)!_q(m-k)!_q}$，对于 $k\leqslant m$，且 $a_{km}=0$ 对于 $k>m$。

我们定义以下一族（$n+1$）×（$n+1$）矩阵

$$\sigma_1^{\Lambda_n}(q,n)=A_n(q)D_n^\sharp(q)\Lambda_n \text{ and } \sigma_2^{\Lambda_n}(q,n)=\Lambda_n^\sharp D_n(q)\left(\left(A_n\left(q^{-1}\right)\right)^{-1}\right)^\sharp.$$

利用上述定义和记号，我们陈述以下定理。

定理 2.1. [1] 由下式定义的映射 $B_3\to GL(n+1,\mathbb{C})$

$$\sigma_1\mapsto\sigma_1^{\Lambda_n}(q,n) \text{ and } \sigma_2\mapsto\sigma_2^{\Lambda_n}(q,n)$$

是维数为 $n+1$ 的辫群 B_3 的一个表示，条件是 $\lambda_i\lambda_{n-i}=c$对于 $0\leqslant i\leqslant n$成立，其中 c 是一个非零复常数。

定义 2.3. 如果一个表示的所有算子都不存在非平凡的不变子空间，则称该表示为子空间不可约 或不可约。如果不存在与该表示的所有算子均可交换的非平凡有界算子，则称该表示为算子不可约。

对于下一个定理，我们需要引入以下算子。对于满足 $0 \leqslant r \leqslant n$ 的 n、$r \in \mathbb{N}$，以及对于 $\lambda =$（λ_0、.....、λ_n）$\in \mathbb{C}^{n+1}$ 和 $q \in \mathbb{C}$，我们定义了

$$F_{r,n}(q,\lambda) = \exp_{(q)}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)_q E_{k\ k+1}\right) - q_{n-r}\lambda_r\left(D_n(q)\Lambda_n^{\sharp}\right)^{-1},$$

其中，E_{km} 是一个矩阵，其 k,m 位置上的元素为 1，其余位置上的元素均为 0（$k,m \in \mathbb{Z}$），且 $\exp_{(q)}(X) = \sum_{m=0}^{\infty}(X^m/(m)!_q)$。对于 $\mathbb{C}$ 上的（$n+1$）$\times$（$n+1$）矩阵 C，以及 $0 \leqslant i_0 < i_1 < \cdots < i_r \leqslant n$, $0 \leqslant j_0 < j_1 < \cdots < j_r \leqslant n$，我们用以下符号表示 C中由 $i_1, i_2, \ldots, i_r$ 行和 $j_1, j_2, \ldots, j_r$ 列构成的子式

$$M_{j_1 j_2 \ldots j_r}^{i_1 i_2 \ldots i_r}(C).$$

定理 2.2。 [1] 定理 *2.1* 中定义的群 B_3 的表示具有以下性质：

(1) </style}对于，（单位矩阵），它在任意维数 下都是子空间不可约的；(2) 对于 $q = 1$, $\Lambda_n = \mathrm{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq I_{n+1}$，当且仅当对任意 $0 \leqslant r \leqslant [\frac{n}{2}]$, 都存在 $0 \leqslant i_0 < i_1 < \cdots < i_r \leqslant n$ 使得(3) 对于 $q \neq 1$, $\Lambda_n = I_n$，当且仅当 $(n)_q \neq 0$ 时，它是子空间不可约的。该表示有 $[\frac{n+1}{2}] + 1$ 个自由参数。

$$M_{r+1\ r+2\ldots n}^{i_0 i_1 \ldots i_{n-r-1}}\left(F_{r,n}^{s}(q,\lambda)\right) \neq 0;$$

定理 2.3。 [1] 所有维数为 $\leqslant 5$ 的辫群 B_3 表示，都是定理 *2.1* 中定义的表示。

请注意，定理 2.1 中定义的 6 维表示的不可约性已在 [6] 和 [7] 中讨论。此外，定理 2.1 给出了 B_3 的一族维数为 $\geqslant 6$ ($n \geqslant 5$) 的表示。这些表示的不可约性问题仍在研究之中。在本文中，我们研究其中一些 6 维表示的不可约性。

设在下文中，$n = 5$。则矩阵 $A_5(q)$ 为

$$A_5(q) = \begin{pmatrix} 1 & (5)_q & (1+q^2)(5)_q & (1+q^2)(5)_q & (5)_q & 1 \\ 0 & 1 & (1+q)(1+q^2) & (1+q^2)(3)_q & (1+q)(1+q^2) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & (3)_q & (3)_q & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1+q & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

且定理 2.1 中定义的 B_3 的表示是 6维的。此外，表示 B_3 的生成元 σ_1 和 σ_2 的矩阵由下式给出。

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_0 q^{10} & \lambda_1 q^6 (5)_q & \lambda_2 q^3 (1+q^2)(5)_q & \lambda_3 q (1+q^2)(5)_q & \lambda_4 (5)_q & \lambda_5 \\ 0 & \lambda_1 q^6 & \lambda_2 q^3 (1+q)(1+q^2) & \lambda_3 q (1+q^2)(3)_q & \lambda_4 (1+q)(1+q^2) & \lambda_5 \\ 0 & 0 & \lambda_2 q^3 & \lambda_3 q (3)_q & \lambda_4 (3)_q & \lambda_5 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 q & \lambda_4 (1+q) & \lambda_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix}$$

and

$$\sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_4 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & -\lambda_3(1+q) & \lambda_3 q & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & \lambda_2(3)_q & -\lambda_2 q(3)_q & \lambda_2 q^3 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_1(4)_q & \lambda_1 q(1+q^2)(3)_q & -\lambda_1 q^3(4)_q & \lambda_1 q^6 & 0 \\ -\lambda_0 & \lambda_0(5)_q & -\lambda_0 q(1+q^2)(5)_q & \lambda_0 q^3(1+q^2)(5)_q & -\lambda_0 q^6(5)_q & \lambda_0 q^{10} \end{pmatrix}.$$

3. B_3 的6维表示的不可约性

在本节中，令 q 为一个本原三次单位根（$q^3 = 1$ 和 $q \neq 1$）。通过取 $c = 1$、$\lambda_0 = 1$ 和 $\lambda_2 = q^2$，我们得到 $\lambda_3 = \frac{1}{q^2} = q$、$\lambda_4 = \lambda_1^{-1}$ 和 $\lambda_5 = \frac{c}{\lambda_0} = 1$。在这些条件下，对于 $n = 5$，我们将这些值代入上述矩阵，得到以下定义。

定义 3.1. 令 $\rho : B_3 \to GL(6, \mathbb{C})$ 为 B_3 的6维表示族，该表示族定义为

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} q & -q^2\lambda_1 & q^2 & q^2 & -q^2\lambda_1^{-1} & 1 \\ 0 & \lambda_1 & q^2 & 0 & \lambda_1^{-1} & 1 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & -q^2\lambda_1^{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1^{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

and

$$\sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1^{-1} & \lambda_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 1 & q^2 & 0 & 0 & 0 \\ -q^2 & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_1 & 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 \\ -1 & -q^2 & -q & 1 & q^2 & q \end{pmatrix}.$$

注意，$\rho(\sigma_1)$ 和 $\rho(\sigma_2)$ 具有相同的特征值，即 q、λ_1、q^2（重数为 2）、λ_1^{-1} 和 1。$\rho(\sigma_1)$ 对应的特征向量为

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} -\lambda_1(1+q) \\ -\lambda_1 + q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + q \\ q - 1 \\ (\lambda_1 + q^2)(-q + q^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ q^2 - 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_5 = \begin{pmatrix} q - \lambda_1^3 \\ (1 - \lambda_1 q)(\lambda_1 q - q^2) \\ 0 \\ -q(1 - \lambda_1^2)(-1 + \lambda_1 q) \\ (-1 + \lambda_1^2)(-1 + \lambda_1 q)(\lambda_1 q - q^2) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ and } u_6 = \begin{pmatrix} \lambda_1 q^2 - 2\lambda_1 + 3 + 3\lambda_1^2 + \lambda_1 q \\ 3q(\lambda_1 q - 1) \\ -3q^2(1 - \lambda_1)^2 \\ -3(-1 + \lambda_1)(1 + \lambda_1 q^2) \\ 3q(1 - q)\lambda_1(-1 + \lambda_1) \\ 3q(1 - q)(-1 + \lambda_1)^2 \end{pmatrix}.$$

假设 $\lambda_1 \notin \{-1, 1, q, q^2\}$。那么，向量 $u_i (i = 1, 2, \cdots, 6)$ 线性无关，且过渡矩阵 $P = (u_1\ u_2\ u_3\ u_4\ u_5\ u_6)$ 可逆。通过 P 对该表示进行共轭变换，我们得到一个等价表示。

$$\rho(\sigma_1) \mapsto X = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以及 $\rho(\sigma_2) \mapsto Y = P^{-1}\rho(\sigma_2)P = (K_1\ K_2\ K_3\ K_4\ K_5\ K_6)$，其中

$$K_1 = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 q}{(q^2-1)(-\lambda_1+q)(-1+\lambda_1 q)} \\ \frac{\lambda_1^3-q^2}{\lambda_1(\lambda_1-1)^2(\lambda_1+1)(\lambda_1-q)(\lambda_1-q^2)} \\ -\frac{1}{3(-\lambda_1+q^2)} \\ -\frac{q^2(\lambda_1+q^2)}{3(-\lambda_1+q)} \\ \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1-1)^2(\lambda_1+1)(\lambda_1-q)q(\lambda_1 q-1)} \\ \frac{1}{3(\lambda_1-1)^2(q^2-q)} \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} \frac{q[2+q-(1+2q)\lambda_1^2]}{3(\lambda_1-q)(-1+\lambda_1 q)} \\ \frac{1-\lambda_1^3 q^2}{\lambda_1(\lambda_1-1)^2(\lambda_1+1)(\lambda_1-q)(\lambda_1-q^2)} \\ -\frac{1}{3(-\lambda_1+q^2)} \\ \frac{1+\lambda_1}{3(\lambda_1-q)} \\ -\frac{\lambda_1(\lambda_1^2+q)}{(\lambda_1-1)^2(\lambda_1+1)(\lambda_1-q)(\lambda_1 q-1)} \\ \frac{1}{3(\lambda_1-1)^2(q^2-q)} \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} \frac{(1+\lambda_1)(-3q^2+(1-q^2)\lambda_1+3\lambda_1^2)}{-3(\lambda_1-q)(-1+\lambda_1 q)} \\ \frac{q^2(-1-\lambda_1+(q-q^2)\lambda_1^2+\lambda_1^3+\lambda_1^4)}{\lambda_1(\lambda_1-1)^2(\lambda_1+1)(\lambda_1-q)(\lambda_1-q^2)} \\ -\frac{\lambda_1+q}{3q(-\lambda_1+q^2)} \\ -\frac{q(2+\lambda_1+2\lambda_1^2)}{3(\lambda_1-q)} \\ \frac{q\lambda_1^2(1+q\lambda_1))}{(\lambda_1-1)^2(\lambda_1+1)(\lambda_1-q)(\lambda_1 q-1)} \\ \frac{q(q+\lambda_1)}{3(\lambda_1-1)^2(q-1)} \end{pmatrix}, \quad K_4 = \begin{pmatrix} \frac{-3+2(q-1)\lambda_1+3q\lambda_1^2}{-3(\lambda_1-q)(-1+\lambda_1 q)} \\ \frac{q^2+(q-q^2)\lambda_1+(q-q^2)\lambda_1^2-q\lambda_1^3}{\lambda_1(\lambda_1-1)^2(\lambda_1+1)(\lambda_1-q)(\lambda_1-q^2)} \\ \frac{-2}{3q(-\lambda_1+q^2)} \\ \frac{q(\lambda_1+q^2)}{3(-\lambda_1+q)} \\ \frac{-q\lambda_1^2}{(\lambda_1-1)^2(\lambda_1+1)(\lambda_1-q)(\lambda_1 q-1)} \\ -\frac{q}{3(\lambda_1-1)^2(q-1)} \end{pmatrix},$$

$$K_5 = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1(-2q-1+(2+q)\lambda_1^2+(2+q^2)\lambda_1^3+(2q+1)\lambda_1^5)}{3(\lambda_1-q)(-1+\lambda_1 q)} \\ \frac{q^2+\lambda_1^2+q^2\lambda_1^3+\lambda_1^5+q^2\lambda_1^6+\lambda_1^8}{\lambda_1(\lambda_1-1)^2(\lambda_1+1)(\lambda_1-q)(\lambda_1-q^2)} \\ \frac{\lambda_1(1+q+(2+q)\lambda_1-(1+2q)\lambda_1^2+q^2\lambda_1^3)}{3q^2(-\lambda_1+q^2)} \\ -\frac{q^2\lambda_1(1+q^2-\lambda_1-(2+q)\lambda_1^2+q^2\lambda_1^3+q\lambda_1^4)}{3(\lambda_1-q)} \\ \frac{\lambda_1^3(-1+q\lambda_1^3)}{(\lambda_1-1)^2(\lambda_1+1)(\lambda_1-q)(\lambda_1 q-1)} \\ -\frac{\lambda_1(-q+\lambda_1^3))}{3(\lambda_1-1)^2(q-1)} \end{pmatrix}, \quad K_6 = \begin{pmatrix} \frac{(q^2-1)(1-\lambda_1^2+\lambda_1^4)}{(\lambda_1-q)(-1+\lambda_1 q)} \\ \frac{3q+3q^2\lambda_1^2-3q^2\lambda_1^3-3\lambda_1^5}{\lambda_1(\lambda_1-1)^2(\lambda_1+1)(\lambda_1-q)(\lambda_1-q^2)} \\ \frac{2+q+2(q^2-q)\lambda_1+(-1+q)\lambda_1^2}{(1-q)(-\lambda_1+q^2)} \\ \frac{q-q^2-3\lambda_1+3\lambda_1^2+(1+2q)\lambda_1^3}{(1-q)(\lambda_1-q)} \\ \frac{-3q^2\lambda_1^2-3q\lambda_1^4}{(\lambda_1-1)^2(\lambda_1+1)(\lambda_1-q)(\lambda_1 q-1)} \\ \frac{-2-q+(1-q^2)\lambda_1+(-1+q^2)\lambda_1^2}{3(\lambda_1-1)^2} \end{pmatrix}.$$

命题 3.1. 表示 ρ 没有维数为 *1* 的不变子空间。

证明. 在 X 作用下不变的维数为 1 的可能子空间是：当 $i = 1$为 2、3、4、5、6 时的 $\langle e_i \rangle$，以及当 $\alpha \in \mathbb{C}$为 e_i时的 $\langle \alpha e_3 + e_4 \rangle$。这里， e_i是 $\mathbb{C}^6$中的标准单位向量，并视为列向量。

显然，对于 $i = 1$、2、3、4， $Y(e_i) \notin \langle e_i \rangle$。假设 $Y(e_5) = K_5 \in \langle e_5 \rangle$。那么，除第五个分量外， K_5 的所有分量均为零。特别地， K_5 的第三个和第六个分量均为零。因此， $\lambda_1^3 = q$ 和 $1+q+(2+q)\lambda_1-(1+2q)\lambda_1^2+q^2\lambda_1^3 =$

0. 然后，通过直接计算，我们得到 $\lambda_1 = q$ or q^2 and $\lambda_1^3 = q$，这与 $q \neq 1$ 矛盾。因此， $Y(e_5) \notin \langle e_5 \rangle$。所以， $\langle e_5 \rangle$ 在 Y 下不是不变的。
假设 $Y(e_6) \in \langle e_6 \rangle$。那么， $K_6 = Y(e_6)$ 的 5^{th} 和 2^{nd} 分量均为零。于是， $\lambda_1^2 = -q$ 和 $q + q^2\lambda_1^2 - q^2\lambda_1^3 - \lambda_1^5 = 0$。通过直接计算，我们得到 $\lambda_1 = -q$。因此， $q = -1$，矛盾。故 $Y(e_6) \notin \langle e_6 \rangle$，且 $\langle e_6 \rangle$ 在 Y 作用下不是不变的。
还需证明，形如 $\langle \alpha e_3 + e_4 \rangle$ 的任何子空间（其中 α 是一个非零复数）都不是 Y 下的不变子空间。注意， $Y(\alpha e_3 + e_4) = \alpha K_3 + K_4$。如果 $\alpha K_3 + K_4 \in \langle \alpha e_3 + e_4 \rangle$，那么 $\alpha K_3 + K_4$ 的第五和第六个分量为零。因此， $\alpha q\lambda_1^2(1 + q\lambda_1) + q\lambda_1^2 = 0$，且 $\alpha q(q + 1) - q = 0$。这意味着 $\alpha = -q$ 和 $\lambda_1 = q - q^2$。将所得的 α 和 λ_1 的值代入 $\alpha K_3 + K_4$ 的 2^{nd} 分量的分子中，得到

$$-(q-q^2)^3 - (q-q^2)^4 + q^2 + (q-q^2)^2 - q(q-q^2)^3 = 2(q-8) \neq 0 \text{ when } q^3 = 1, q \neq 1.$$

因此， $\alpha K_3 + K_4$ 的第二个分量不为零，矛盾。 □

命题 3.2. 表示 ρ 没有维数 *2* 的不变子空间，当且仅当 $\lambda_1^3 \neq q$。

证明。 在 X 作用下保持不变的可能的 2 维子空间为： $S_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$，以及对于 $\alpha \in \mathbb{C}$、$1 \leqslant i < j \leqslant 6$ 和 $k = 1$， $S_k^\alpha = \langle e_k, \alpha e_3 + e_4 \rangle$，2、5、6。
我们很容易看出，对于所有 $i = 2$，3、4、5、6， $Y(e_1) = K_1 \notin S_{1i}$。因此，子空间 S_{1i} ($i = 2$，3、4、5、6)在 Y 作用下不是不变的。
此外，由于 K_2 的第三个和第六个分量不为零，因此 $Y(e_2) = K_2 \notin S_{2i}$ for $i = 3$、4、5、6。因此，子空间 S_{2i} ($i = 3$、4、5、6) 在 Y 作用下不是不变的。
对于所有 λ_1 的取值， $Y(e_3) = K_3$ 的第四、第五和第六个分量不可能同时为零。因此，对于 $i = 4$,5,6， $Y(e_3) = K_3 \notin S_{3i}$。所以，对于 $i = 4$,5,6， S_{3i} 在 Y 作用下不是不变的。

$Y(e_4) \notin S_{4i}$ 对于 $i = 5$，6，因为 $Y(e_4) = K_4$ 的第三个分量不为零。因此， S_{4i} 在 Y 作用下对 $i = 5$，6 不保持不变。
如果 $Y(e_5) = K_5$ 的第三和第四个分量为零，并且由于 $\lambda_1 \neq 0$ 我们有

$$\begin{cases} 1 + q + (2+q)\lambda_1 - (1+2q)\lambda_1^2 + q^2\lambda_1^3 = 0 \\ 1 + q^2 - \lambda_1 - (2+q)\lambda_1^2 + q^2\lambda_1^3 + q\lambda_1^4 = 0 \end{cases}$$

通过使用 Mathematica，我们证明不存在满足此方程组且以 q 表示的复数解。因此， $Y(e_3) \notin S_{56}$。所以， S_{56} 在 Y 下不变。

剩下需要讨论的是 S_k^α 对于 $k = 1$、2、5、6 和 $\alpha \in \mathbb{C}$的子空间。由于 $Y(e_1)$ 和 $Y(e_2)$ 的第六个分量不为零，因此对所有 $\alpha \in \mathbb{C}$，都有 $Y(e_1) \notin \langle \alpha e_3 + e_4, e_1 \rangle$和 $Y(e_2) \notin \langle \alpha e_3 + e_4, e_2 \rangle$。所以， S_1^α和 S_2^α在 Y下不是不变的。现在，若 $Y(e_6) = K_6 \in \langle \alpha e_3 + e_4, e_6 \rangle$，则 K_6 的第二个和第五个分量为零。由此得到以下方程：

$$\begin{cases} q + q^2\lambda_1^2 - q^2\lambda_1^3 - \lambda_1^5 = 0 \\ -3q\lambda_1^2(q + \lambda_1^2) = 0 \end{cases}.$$

利用 q 是本原三次单位根这一事实，可得 $\lambda_1 = \lambda_1^2 = -q$，即 $q = \lambda_1 = 0$ 或 1，这与假设矛盾。因此，对所有 $\alpha \in \mathbb{C}$，都有 $Y(e_6) \notin S_6^\alpha$。所以，S_6^α 在 Y下不是不变的。

最后，如果子空间 S_5^α 在 Y 下是不变的，那么， $Y(e_5) = K_5 \in \langle S_5^\alpha \rangle$。于是，$\lambda_1^3 = q$。
反过来，如果 $\lambda_1^3 = q$，那么通过直接计算并利用 Mathematica，

我们证明，对于 $\alpha=(-1-\lambda_1)(1+q\lambda_1)$， $Y(e_5)=K_5\in S_5^\alpha$且 $Y(\alpha e_3+e_4)\in S_5^\alpha$。因此，$e_5\rangle$ 在 Y 下不变，当且仅当 $\lambda_1^3=q$。与 λ_1 的这些取值相对应的不变子空间形式为

$$\langle \alpha e_3+e_4, e_5\rangle \text{ where, } \alpha=(-1-\lambda_1)(1+q\lambda_1).$$

□

命题3.3。该表示 ρ 没有维数为 *3* 的不变子空间，当且仅当 $\lambda_1^2\neq -q$、$-q^2$。

证明。在 $\alpha\in\mathbb{C}$ 作用下保持不变的 3 维子空间为 X 是 $\langle e_i$、e_j、$e_k\rangle$，以及$\langle e_s$、αe_3+e_4、$e_t\rangle$；对于 $1\leqslant i<j<k\leqslant 6$，则为 s、$t\in\{1,2,5,6\}$，其中 $s<t$。
由于 $Y(e_1)$ 的第三、第五和第六个分量均不为零，因此可知，形如 $\langle e_1$、e_j、$e_k\rangle$ 的所有子空间，以及形如$\langle e_1$、αe_3+e_4、$e_t\rangle$ 的子空间，在 Y 作用下对于 $1<j<k\leqslant 6$ 和 $t=2$、5、6 均不保持不变。

$K_2=Y(e_2)$的第三和第六个分量不为零。因此，对所有满足 $\{j,k\}\neq\{3,6\}$ 的 $2<j<k\leqslant 6$ 以及所有 $\alpha\in\mathbb{C}$，都有 $Y(e_2)\notin\langle e_2,e_j,e_k\rangle$ 以及 $Y(e_2)\notin\langle e_2,\alpha e_3+e_4,e_5\rangle$。于是，对所有满足 $\{j,k\}\neq\{3,6\}$ 的 $2<j<k\leqslant 6$，形如 $\langle e_2,e_j,e_k\rangle$ 和 $\langle e_2,\alpha e_3+e_4,e_5\rangle$ 的子空间在 Y作用下都不是不变的。

假设子空间 $S=\langle e_2,e_3,e_6\rangle$ 在 Y作用下是不变的，那么 $Y(e_3)\in S$。因此，$\lambda_1=-q$ （因为 $Y(e_3)$的第六个分量为零）。将 λ_1的值代入 $Y(e_3)$的第一个分量，得到$\frac{(q-1)(-q^2+1)}{6q}\neq 0$，矛盾。因此，$S$ 在 Y作用下不是不变的。

考虑子空间 $S^\alpha=\langle e_2,\alpha e_3+e_4,e_6\rangle$，其中 $\alpha\in\mathbb{C}$。假设 S^α 在 Y 下不变，则 $Y(e_2)\in S^\alpha$。因此，K_2 的第五个分量为零。于是，$\lambda_1^2=-q$。反过来，假设 $\lambda_1^2=-q$。那么，通过直接计算并使用 Mathematica，我们证明对于 $r=2$, 6，有 $Y(e_r)\in S^\alpha$，且 $Y(\alpha e_3+e_4)\in S^\alpha$；在这种情况下，$\alpha=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i$。因此，子空间 $\langle e_2,\alpha e_3+e_4,e_6\rangle$ 在 Y 下不变，当且仅当 $\lambda_1^2=-q$。
由于 $Y(e_4)$ 的第六个和第五个分量均不为零，因此 $Y(e_4)\notin\langle e_3,e_4,e_5\rangle$，且 $Y(e_4)\notin\langle e_3,e_4,e_6\rangle$。因此，子空间 $\langle e_3,e_4,e_5\rangle$ 和 $\langle e_3,e_4,e_6\rangle$ 在 Y 下不变。

假设 $Y(e_3)\in\langle e_3,e_5,e_6\rangle$。那么 K_3 的第四个分量为零。因此，$\lambda_1=\frac{-1\pm i\sqrt{15}}{4}$。但是，对于 λ_1 的这一取值，通过直接计算可得，K_3 的第一个分量为 $-\frac{9}{8}\pm\frac{21\sqrt{5}}{16}+i\left(\pm\frac{9\sqrt{3}}{16}\pm\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)\neq 0$。这就产生了矛盾。因此，子空间 $\langle e_3,e_5,e_6\rangle$ 在 Y 作用下不是不变的。
由于 K_4的第三个分量不为零，因此可得 $Y(e_4)\notin\langle e_4,e_5,e_6\rangle$。因此，子空间 $\langle e_4,e_5,e_6\rangle$在 Y作用下不是不变的。
考虑子空间 $V=\langle e_5$、αe_3+e_4、$e_6\rangle$。利用 Mathematica，我们证明$Y(e_6)\in V$当且仅当 $\lambda_1^2=-q^2$。此外，

$$\alpha=\begin{cases}\frac{2}{11}(4+i-3\lambda_1-\lambda_1^2) & \text{for } \lambda_1=iq\\ \frac{2}{11}(4-i-3\lambda_1-\lambda_1^2) & \text{for } \lambda_1=-iq\end{cases}$$

此外，我们还证明，若 $\lambda_1^2=-q^2$，则 $Y(e_5)\in V$且 $Y(\alpha e_3+e_4)\in V$。

$$\alpha=\begin{cases}\frac{2}{11}(4+i-3\lambda_1-\lambda_1^2) & \text{for } \lambda_1=iq\\ \frac{2}{11}(4-i-3\lambda_1-\lambda_1^2) & \text{for } \lambda_1=-iq\end{cases}.$$

因此，$\langle e_5,\alpha e_3+e_4,e_6\rangle$ 在 Y 下不变，当且仅当 $\lambda_1^2=-q^2$。 □

命题 3.4. 表示 ρ 没有维数为 *4* 的不变子空间，当且仅当 $\lambda_1^3 \neq q^2$。

证明。在 $1 \leqslant i < j < k < r \leqslant 6$ 和 $s < t < h$ 条件下， X 的不变 4 维子空间为 $\langle e_i$、e_j、e_k、$e_r\rangle$ 和 $\langle \alpha e_3 + e_4$、e_s、e_t、$e_h\rangle$，以及 s、t、$h \in \{1, 2, 5, 6\}$。

由于 $Y(e_1)$ 的第五和第六个分量不为零，因此形如 $\langle e_1$、e_2、e_3、$e_i\rangle$、$\langle e_1$、e_2、e_4、$e_j\rangle$、$\langle e_1$、e_3、e_4、$e_j\rangle$、$\langle \alpha e_3 + e_4$、e_1、e_2、$e_5\rangle$ 和 $\langle \alpha e_3 + e_4$、e_1、e_2、$e_6\rangle$ 的子空间对于 $i = 4$、5、6、 $j = 5$、6 以及所有 $\alpha \in \mathbb{C}$ 都不在 Y 下不变。

子空间 $\langle e_1, e_4, e_5, e_6\rangle$ 在 Y 作用下不是不变的，因为 $Y(e_4)$ 的第三个分量不为零。

由于 $Y(e_2)$ 的第三个分量不为零，因此子空间 $\langle e_1$、e_2、e_5、$e_6\rangle$ 和 $\langle e_2$、e_4、e_5、$e_6\rangle$ 在 Y 作用下不是不变的。

假设子空间 $\langle e_1, e_3, e_5, e_6\rangle$ 在 Y作用下是不变的，那么， $Y(e_1) \in \langle e_1, e_3, e_5, e_6\rangle$。因此， $Y(e_1)$ 的第二和第四个分量为零。于是， $\lambda_1^3 = q^2$ 和$\lambda_1 = -q^2$。因此， $-q^6 = q^2$。但是，这与 q 是三次单位根这一事实矛盾。因此， $\langle e_1, e_3, e_5, e_6\rangle$ 在 Y 作用下不是不变的。

注意到， $Y(e_4)$ 的第六和第五个分量不为零。因此，当 $r = 5$ 为 6 时，子空间$\langle e_2, e_3, e_4, e_r\rangle$ 在 Y 作用下不是不变的。

由于 $\lambda_1 \neq -1$，可知 K_2 的第四个分量不为零，且 $Y(e_2) \notin \langle e_2, e_3, e_5, e_6\rangle$。因此，子空间 $\langle e_2, e_3, e_5, e_6\rangle$ 在 Y 作用下不是不变的。

假设子空间 $\langle e_3, e_4, e_5, e_6\rangle$ 在 Y 作用下是不变的。那么， $Y(e_3)$ 的第一和第二个分量为零。这意味着

$$\begin{cases} 2 + q - (1 + 2q)\lambda_1^2 = 0 \\ 1 - \lambda_1^3 q^2 = 0 \end{cases},$$

因此， $\lambda_1^2 = -q$ 且 $\lambda_1^3 = q$，但这与 q 是本原三次单位根这一事实矛盾。因此， $\langle e_3, e_4, e_5, e_6\rangle$ 在 Y 作用下不是不变的。

考虑子空间 $S = \langle \alpha e_3 + e_4, e_1, e_5, e_6\rangle$，其中 $\alpha \in \mathbb{C}$。假设 S 在 Y 下是不变的，则 $Y(e_1) \in S$。因此， K_1 的第二个分量为零。所以$\lambda_1^3 = q^2$。反过来，如果 $\lambda_1^3 = q^2$，那么 K_1 的第二个分量为零，并且

$$\frac{\text{The third component of } K_1}{\text{The fourth component of } K_1} = \frac{-\lambda_1 + q}{-\lambda_1^2 q^2 + 1} = \frac{(-\lambda_1 + q)\lambda_1}{-\lambda_1^3 q^2 + \lambda_1} = \frac{(-\lambda_1 + q)\lambda_1}{-q + \lambda_1} = -\lambda_1.$$

因此， $Y(e_1) \in S$ 和 $\alpha = -\lambda_1$。此外，通过直接计算并使用 Mathematica，我们证明了 $Y(e_5)$、 $Y(e_6)$ 和 $Y(-\lambda_1 e_3 + e_4)$ 各自的第二个分量均为零。我们还证明了这些向量各自的第三个分量与第四个分量之比为 $-\lambda_1$。这意味着 $Y(e_5)$、 $Y(e_6)$ 和 $Y(-\lambda_1 e_3 + e_4)$ 均属于 S。因此， S 在 Y 下不变，当且仅当 $\lambda_1^3 = q^2$，在此情况下，$\alpha = -\lambda_1$ 和 $S = \langle -\lambda_1 e_3 + e_4$、$e_1$、$e_5$、$e_6\rangle$。

还需证明，对于所有 $\alpha \in \mathbb{C}$，子空间 $S' = \langle \alpha e_3 + e_4, e_2, e_5, e_6\rangle$ 在 Y 作用下不变。假设对于某个 $\alpha \in \mathbb{C}$， $S' = \langle \alpha e_3 + e_4, e_2, e_5, e_6\rangle$ 在 Y 作用下不变，则 $Y(e_2) \in S'$。于是， K_2 的第一分量为零。因此，$\lambda_1^2 = \frac{2+q}{1+2q} = -q$ （因为 q 是三次单位根）。将所得的 λ_1^2 值代入 K_5 第一分量的分子，得到

$$\lambda_1(-2q - 1 + (2 + q)(-q) + (2 + q^2)(-q)\lambda_1 + (2q + 1)q^2\lambda_1) = -3q\lambda_1(1 + \lambda_1) \neq 0.$$

因此， $Y(e_5) = K_5 \notin S'$，这与假设矛盾。 □

命题 3.5。 如果 $\lambda_1^3 \neq q^2$ ，那么表示 ρ 没有 *5* 维不变子空间。

证明。在 X 作用下保持不变的 5 维子空间可能为: $S_6 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\rangle$, $S_5 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_6\rangle$, $S_4 = \langle e_1, e_2, e_3, e_5, e_6\rangle$, $S_3 = \langle e_1, e_2, e_4, e_5, e_6\rangle$,$S_2 = \langle e_1, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle$, $S_1 = \langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle$ 和 $S^\alpha = \langle e_1, e_2, \alpha e_3 + e_4, e_5, e_6\rangle$ ，其中$\alpha \in \mathbb{C}$。

由于 K_1 的第三、第五和第六个分量均不为零，因此对于 $i = 3,5,6$，有$Y(e_1) \notin S_i$。所以，子空间 S_i 在$i = 3$下对 Y而言不是不变的，其中$i = 3,5,6$。

假设 S_4 在 Y下不变，那么 $Y(e_1) \in S_4$ 且 $Y(e_2) \in S_4$。因此， K_1 和 K_2 的第四个分量为零。因此， $\lambda_1 = -q^2$ 和 $\lambda_1 = -1$ ，这是不可能的，因为 q 是本原三次单位根。因此， S_4 不在Y下不变。

由于 $\lambda_1^2 \neq q^3$， K_1 的第二个分量不为零。因此， $Y(e_1) \notin S_2$。故 S_2 在 Y 作用下不是不变的。

假设 S_1 在 Y 下是不变的，则 $Y(e_2) \in S_1$。因此， K_2 的第一个分量为零。于是，$\lambda_1^2 = \frac{2+q}{1+2q} = -q$ （因为 q 是本原三次单位根）。将其代入 K_5 的第一个分量的分子中，得到 $\lambda_1(-3q - 3q\lambda_1)$，当 $\lambda_1^2 = -q$ 时，该式不为零。因此， $Y(e_5) \notin S_1$。由此可知， S_1 在 Y 下不是不变的。

还需证明，对于所有的 $\alpha \in \mathbb{C}$， S^α 都不在 Y 下保持不变。假设对于某个 $\alpha \in \mathbb{C}$， S^α 保持不变，则 $Y(e_1)$ 和 $Y(e_2)$ 都属于 S^α。因此，

$$\frac{\text{The third component of } K_1}{\text{The fourth component of } K_1} = \frac{\text{The third component of } K_2}{\text{The fourth component of } K_2} = \alpha.$$

这意味着

$$\frac{-\lambda_1 + q}{-\lambda_1^2 q^2 + 1} = \frac{\lambda_1 - q}{(1 + \lambda_1)(\lambda_1 - q^2)}.$$

So,

$$(q^2 - 1)(\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1) = 0.$$

因此， $\lambda_1 = q$ 或 q^2 是本原三次单位根。这与 $\lambda_1 \neq q$ 和 $\lambda_1 \neq q^2$ 矛盾。因此，对于所有的 $\alpha \in \mathbb{C}$， S^α 都不在 Y 下保持不变。□

定理 3.6. 对于 $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1, q, q^2\}$，表示 ρ 不可约，当且仅当 $\lambda_1^2 \neq -q$、$\lambda_1^2 \neq -q^2$、 $\lambda_1^3 \neq q$ 和 $\lambda_1^3 \neq q^2$。

证明。 这可直接由命题 3.1、命题 3.2、命题 3.3、命题3.4 和命题 3.5 得出。□

4. 可约表示

根据定理 3.6，表示 ρ 可约，当且仅当 $\lambda_1^2 = -q$, $\lambda_1^2 = -q^2$, $\lambda_1^3 = q$ 或 $\lambda_1^3 = q^2$。对于 $\lambda_1^3 = q^2$， ρ 可约，且由向量 $-\lambda_1 e_3 + e_4$， e_1， e_5， e_6 生成的子空间 V 在 ρ 下不变。我们将相对于基 $\{-\lambda_1 e_3 + e_4, e_1, e_5, e_6, e_4, e_2\}$ 的表示 $\rho(\sigma_1)$ 和 $\rho(\sigma_2)$ 的矩阵记作 ..... 令 $A = (-\lambda_1 e_3 + e_4, e_1, e_5, e_6, e_4, e_2)$ 为过渡矩阵。

于是,

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\-\lambda_1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

在这个基中表示 σ_1 的矩阵是

$$A^{-1}XA=\begin{pmatrix}q^2&0&0&0&0&0\\0&q&0&0&0&0\\0&0&\lambda_1^{-1}&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&q^2&0\\0&0&0&0&0&\lambda_1\end{pmatrix}$$

而在同一基中表示 σ_2 的矩阵是

$$A^{-1}YA=(C_1\ C_2\ C_3\ C_4\ C_5\ C_6)\,,$$

其中

$$C_1=\begin{pmatrix}\frac{(1+2q^{1/3}+2q^{2/3}+2q+2q^{4/3})}{3q(1+q^{1/3}+q^{2/3}+q)}\\-\frac{q(2+q^{2/3}+q+2q^{5/3}+3q^{7/3})}{3(-1+q^{5/3})}\\\frac{q+q^{5/3}+q^{7/3}}{(-1+q^{1/3})^3(1+q^{1/3})^2(1+q^{2/3})(-1+q^{5/3})}\\-\frac{q(1-q^{1/3}+q)}{3(-1+q^{1/3})^3(1+q^{1/3})^2}\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3q^{4/3}(-1+q^{4/3})}\\\frac{q}{-1+q^{1/3}+q+q^{5/3}-q^{7/3}-q^{2/3}}\\\frac{q^{1/3}}{(-1+q^{2/3})^2(1+q^{2/3})(q^{2/3}-q)(-1+q^{5/3})}\\\frac{1}{3(-1+q^{2/3})^2(-1+q)q}\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$C_3=\begin{pmatrix}\frac{(1+2q)(1-q^{4/3})+(2+q)q^{2/3}}{3(1+q)(-q^{2/3}+q^2)}\\\frac{q^2(1+q^{2/3})}{(q^{2/3}-q)(-1+q^{5/3})}\\0\\-\frac{q^{2/3}(1+2q^2)}{3(-1+q^{2/3})^2(-1+q)}\\0\\0\end{pmatrix},\ C_4=\begin{pmatrix}-\frac{2+q+(q-1)(q^{4/3}+2q^{5/3})}{(q^2-1)q^{5/3}(-q^{2/3}+q^2)}\\\frac{3(q^{4/3}-q^{8/3}+q)}{-1+q^{1/3}+q^{5/3}-q^{7/3}-q^{2/3}+q}\\\frac{(-1+q)q^{7/3}(q^{4/3}(2+q)-q^2(1+2q))}{(-1+q^{2/3})^2(1+q^{2/3})(q^{2/3}-q)(-1+q^{5/3})}\\\frac{q^{2/3}-q^{8/3}-(2+q)+q^{4/3}(-1+q^2)}{3(-1+q^{2/3})^2}\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$C_5=\begin{pmatrix}\frac{2q^{2/3}}{3(-1+q^{4/3}}\\-\frac{q(2+2q^{1/3}+5q^{2/3}+5q+2q^{4/3}+2q^{5/3}))}{3(-1+q^{5/3}))}\\-\frac{q^{7/3}}{(-1+q^{2/3})^2(1+q^{2/3})(q^{2/3}-q)(-1+q^{5/3}))}\\-\frac{q}{3(-1+q^{2/3})^2(-1+q))}\\\frac{q^{2/3}}{1-q^{4/3}}\\\frac{1+q^{2/3}+q^{4/3}}{1-q^{1/3}+q^{2/3}-q}\end{pmatrix}\ \text{and}\ C_6=\begin{pmatrix}\frac{1}{3q^{4/3}(-1+q^{4/3})}\\\frac{q(2+q-q^{4/3}(1+2q))}{3(q^{2/3}-q)(-1+q^{5/3})}\\\frac{q}{(-1+q^{1/3})^2(q^{4/3}-1)(1-q^{5/3})}\\\frac{1}{3(-1+q^{2/3})^2(-1+q)q}\\-\frac{q+q^{4/3}+2q^2-q^{1/3}}{3-3q^{4/3}}\\-\frac{1+q^{4/3}+q^{8/3}}{(-1+q^{1/3})^3(1+q^{2/3})(q+q^{4/3})^2}\end{pmatrix}.$$

不可约 UCIBLE 表示的辫群 GR

ρ_V在子空间 V上的限制 ρ 由下式给出： $\sigma_1 \mapsto X' = \begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & \text{OUP} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 11

以及 $\sigma_2 \mapsto Y' = (E_1\ E_2\ E_3\ E_4)$，其中

$$E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+2q^{1/3}+2q^{2/3}+2q+2q^{4/3}}{3q(1+q^{1/3}+q^{2/3}+q)} \\ -\frac{q(2+q^{2/3}+q+2q^{5/3}+3q^{7/3})}{3(-1+q^{5/3})} \\ \frac{q+q^{5/3}+q^{7/3}}{(-1+q^{1/3})^3(1+q^{1/3})^2(1+q^{2/3})(-1+q^{5/3})} \\ -\frac{q(1-q^{1/3}+q)}{3(-1+q^{1/3})^3(1+q^{1/3})^2} \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3q^{4/3}(-1+q^{4/3})} \\ \frac{q}{-1+q^{1/3}+q+q^{5/3}-q^{7/3}-q^{2/3}} \\ \frac{q^{1/3}}{(-1+q^{2/3})^2(1+q^{2/3})(q^{2/3}-q)(-1+q^{5/3})} \\ \frac{1}{3(-1+q^{2/3})^2(-1+q)q} \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} \frac{(1+2q)(1-q^{4/3})+(2+q)q^{2/3}}{3(1+q)(-q^{2/3}+q^2)} \\ \frac{q^2(1+q^{2/3})}{(q^{2/3}-q)(-1+q^{5/3})} \\ 0 \\ -\frac{q^{2/3}(1+2q^2)}{3(-1+q^{2/3})^2(-1+q)} \end{pmatrix} \text{ and } E_4 = \begin{pmatrix} -\frac{2+q+(q-1)(q^{4/3}+2q^{5/3})}{(q^2-1)q^{5/3}(-q^{2/3}+q^2)} \\ \frac{3(q^{4/3}-q^{8/3}+q)}{-1+q^{1/3}+q^{5/3}-q^{7/3}-q^{2/3}+q} \\ \frac{(-1+q)q^{7/3}(q^{4/3}(2+q)-q^2(1+2q))}{(-1+q^{2/3})^2(1+q^{2/3})(q^{2/3}-q)(-1+q^{5/3})} \\ \frac{q^{2/3}-q^{8/3}-(2+q)+q^{4/3}(-1+q^2)}{3(-1+q^{2/3})^2} \end{pmatrix}.$$

定理4.1。 表示 ρ_V 是 B_3 的*4*维不可约表示。

证明。 向量 $f_1 = (1, 0, 0, 0)^T$、 $f_2 = (0, 1, 0, 0)^T$、 $f_3 = (0, 0, 1, 0)^T$和 $f_4 = (0, 0, 0, 1)^T$ 分别是对应于 σ_1 的特征值 q^2、 q、 λ_1^{-1}和 1 的特征向量。注意，对于所有$i = 1$、2、3、4， $Y'(f_i) = E_i$ 的每个分量都不为零，除了 E_3的第三个分量。这意味着由 $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ 的任意子集张成的所有真子空间都不在 Y'下不变。因此， ρ_V 没有不变的真子空间。所以， ρ_V 是不可约的。□

5. 结论

我们研究了一个由 q-Pascal 三角形[1]构造的 B_3 表示族。随后，我们将定义这些表示时所使用的参数特化为非零复数。Kosyak 在 [5] 中提到，对于维数为 ≥ 6的情形，这些表示的不可约性是一个尚未解决的问题。我们确定了表示在维数为 6 时不可约的充要条件。此外，我们还给出了一个维数为 4 的辫群B_3 不可约表示；该表示是通过约化本文所 प्रस्तुत的一个可约表示而得到的。

参考文献

[1] S. Albeverio 和 A. Kosyak， q-帕斯卡三角形与任意维数下辫群 B_3 的不可约表示，arXiv:0803.2778v2（2008）。[2] S. Albeverio 和 S. Rabanovich，关于辫群 B_3 和 B_4 的一类酉表示，《结理论及其应用》153（2019），35–56。[3] J. S. Birman，辫子、链环与映射类群，《数学研究年刊》。普林斯顿大学出版社。82（1975）[4] S. P. Humphries，辫群的一些线性表示，《结理论及其应用》 9 2000 3, 341 366 （），第 – 期。A. V. Kosyak，*Lawrence-Krammer*表示是[5] *Burau*表示的对称平方的一种量子化，arXiv:1609.06663v2（2017）

[6] I. Tuba 低维酉表示 B_3, 《美国数学会会刊》129（2001），第9期，2597–2606[7] I. Tuba；H. Wenzl 辫群的表示 B_3 以及SL(2,Z), 《太平洋数学杂志》197（2001），第2期，491–510。
Taher I. Mayassi，贝鲁特阿拉伯大学数学与计算机科学系，邮政信箱11-5020，黎巴嫩贝鲁特电子邮箱：tim187@student.bau.edu.lb。Mohammad N. Abdulrahim，贝鲁特阿拉伯大学数学与计算机科学系，邮政信箱11-5020，黎巴嫩贝鲁特电子邮箱：mna@bau.edu.lb