arXiv:2304.02307v1 [math.CA] 5 Apr 2023

关于双曲多项式的笛卡尔符号法则

弗拉基米尔·彼得罗夫·科斯托夫

Abstract. 我们研究所有根均为实数、系数序列中恰有两次符号变化且所有系数均非零的实一元多项式。其中一次符号变化发生在线性项与常数项之间。根据笛卡尔符号法则，此类次数为 d 的多项式有 2 个正根和 $d-2$ 个负根。我们考察其根在实数正半轴上的模所构成的序列。当这些模互不相同时，我们全面回答这样一个问题：两个正根的模可以位于哪些位置。

关键词：实一元多项式；双曲多项式；符号模式；笛卡尔符号法则

AMS 分类：26C10

1. 引言

本文考虑一个变量的实系数多项式。这样的首一 d 次多项式 Q 可表示为 $Q := \sum_{j=0}^{d} a_j x^j$, $a_j \in \mathbb{R}$, $a_d = 1$。若多项式 Q 的所有 d 个根均为实数（按重数计算），则称其为双曲多项式。我们关注一般情形，即所有系数 a_j 均非零，且所有根的模互不相同。

笛卡尔符号法则（见 [1], [2], [3], [4], [7], [8], [9], [16] 或 [17]）指出， Q 的正根个数 pos 不超过其系数序列中的符号变化次数 $\tilde{c}$。将此法则应用于 $Q(-x)$，可推得负根个数 neg 不超过符号保持次数 $\tilde{p}$。因此，对于双曲多项式，有 $pos = \tilde{c}$ 和 $neg = \tilde{p}$。此外，$\mathrm{sgn}(a_0) = (-1)^{pos}$。

笛卡尔符号法则的热带版本在 [6] 中讨论。本文研究的问题属于一个更一般的问题的一部分：该问题涉及实系数一元多项式，但这些多项式不一定是双曲多项式，相关研究见 [5]（另见其中的参考文献）。

定义 1. 多项式 Q 的系数符号确定符号模式 $\sigma(Q) := (\mathrm{sgn}(a_d), \mathrm{sgn}(a_{d-1}), \ldots, \mathrm{sgn}(a_0))$。对于首一多项式，有 $\mathrm{sgn}(a_d) = +$，已知符号模式等同于已知相应的变号-保号模式；后者是一个 d 向量，其第 j 个分量为 c（分别为 p），若 $a_{d+1-j}a_{d-j} < 0$（分别若 $a_{d+1-j}a_{d-j} > 0$）。例如：对于 $d = 5$，符号模式 $(+, -, -, +, -, +)$ 对应于变号-保号模式 $cpccc$。

给定一个一般的首一双曲多项式 Q，可以考虑其根的模，即正半轴上的 d 个互不相同的数，并标出负根的模的位置。正根记为$\alpha_1 < \cdots < \alpha_{pos}$，负根的模记为 $\gamma_1 < \cdots < \gamma_{neg}$。其定义

中的序（按根的模的大小排序）及相应记号，可从以下示例中清楚看出：

例 1. 假设 $d = 7$、 $pos = 4$ 和 $neg = 3$。假设

$$\gamma_1 < \alpha_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 \ .$$

那么，我们称多项式根的模定义了次序$NPNNPPP$，即字母 N和 P表示负根和正根的模在正半轴上的相对位置。

定义 2. (1) 给定两个 d向量——一个符号变化与保持模式和一个次序——如果前者中字母 c （分别为 p）的数量等于后者中字母 P （分别为 N）的数量，就称它们相容。

(2) 若存在一个首一的一般双曲多项式，其系数符号和根模次序定义了给定的相容二元组（符号变化与保持模式，次序）（简称二元组），则称该二元组可实现。在这种情况下，我们也称二元组的第一个分量可由第二个分量实现，反之亦然。

本文研究一对数的可实现性，这是笛卡尔符号法则无法给出任何指引的问题。

定义 3. 对于每一种变号—保号模式（或符号模式），定义其对应的规范次序如下。从右向左读取变号—保号模式，并将每个字母 c （分别）与字母 P （分别）对应。例：对于 $d = 5$，变号—保号模式 $ccpcp$（或等价地，符号模式（$+$， $-$， $+$， $+$， $-$， $-$））对应的规范次序为 $NPNPP$。

每种变号—保号模式或符号模式均可按其规范次序实现，见 [11, 命题 1]。如果某种变号—保号模式或符号模式仅能按其对应的规范次序实现，则也称其为规范的。

备注 1. (1) 文献 [12] 证明，规范模式恰好是那些既没有孤立变号、也没有孤立保号的变号—保号模式，即不包含三个连续分量 PNP 或 NPN 的模式。因此，规范模式恰好是那些不含以下四个连续符号的符号模式：$(+,+,-,-)$、$(-,-,+,+)$、$(+,-,-,+)$ 或 $(-,+,+,-)$。

(2) 仅由一种符号模式实现的序称为刚性序。事实证明，刚性序恰好是平凡序（所有根同号时）以及正根和负根的模交替排列的序，见 [13]。

下文中，我们用 $\Sigma_{i_1,\ i_2,\ \ldots\ldots,\ i_s},\ s = \tilde{c} + 1,\ i_1 + \cdots + i_s = d + 1$ 表示以 i_1 个符号 $+$ 开始，接着是 i_2 个符号 $-$，再接着是 i_3 个符号 $+$ 等等的符号模式。符号模式仅有一次符号变化的情形（即 $\tilde{c} = 1$）已在 [10, 定理 1 和推论 1] 中讨论。 [10] 的结果如下：

定理 1. 符号模式 $\Sigma_{m,\ n},\ 1 \le n \le m$ 可实现，当且仅当其对应的序满足 $\alpha_1 < \gamma_{2n-1}$。对于 $1 \le m \le n$，它可实现，当且仅当其对应的序满足 $\gamma_{d-2m} < \alpha_1$。

在特殊情形 $m = n$ 下，定理 1 对 α_1 不施加任何限制，因此在这种情形下，所有相容的配对都可以实现。

注 2。（1）存在两个对合，它们作用于符号与变号保留模式及其阶：

$$i_m \ : \ Q(x) \mapsto (-1)^d Q(-x) \ \text{ and } \ i_r \ : \ Q(x) \mapsto x^d Q(1/x)/Q(0) \ .$$

对合 i_m 交换字母 c 和 p、字母 P 和 N 以及数字 $\tilde{c}$ 和 $\tilde{p}$。对合 i_r 从右向左读取符号保持模式和次序。它保留数字 $\tilde{c}$ 和 $\tilde{p}$。引入因子 $(-1)^d$ 和 $1/Q(0)$，以保持首一多项式集合不变。给定的一对 C 是否可实现，需与在由 i_m 和 i_r 定义的 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-作用下得到的其余一对或三对一起考察。总有 $i_m(C) \neq C$，但也可能有 $i_r(C) = C$ 或 $i_m i_r(C) = C$。

(2) 利用对合 i_m，可以将对的可实现性研究归结为情形 $\tilde{c} \leq d/2$。符号模式 $\Sigma_{1,\ d}$ 和 $\Sigma_{d,\ 1}$ 是典型模式。对于 $m > 1$ 和$n > 1$，符号模式为 $\Sigma_{m,\ n}$ 的对恰有一次符号变化，且该变化是孤立的。从这个意义上说，它们最接近具有典型符号模式的对。

本文全面回答了关于符号模式为 $\Sigma_{m,\ n,\ 1}$ 的偶对是否可实现的问题，即符号变化有两次，其中一次（对应 $n > 1$）是孤立的。这是符号模式非典型时最简单的两个情形之一。关于这一情形的部分结果见 [10]。可以观察到$i_r(\Sigma_{m,\ n,\ 1}) = \Sigma_{1,\ n,\ m}$。

记号1. 提醒一下，对于 $\tilde{c} = 2$，我们用 $\alpha_1 < \alpha_2$ 表示正根的个数，用 $0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_{d-2}$ 表示负根的模。对于实现偶对 C 且符号模式为 $\Sigma_{m,\ n,\ 1}$ 的首一双曲多项式 Q，我们用 $\nu(Q)$ 或 $\nu(C)$ 表示满足 $\gamma_j < \alpha_2 < \gamma_{j+1}$ 的指标 j。

定理2. (A) 假设 $m > n$。

(1) 若 $n = 1$，则符号模式 $\Sigma_{m,n,1}$ 是典范的。(2) 若 $n \geq 4$，则一对 C 可实现，当且仅当 $\alpha_1 < \gamma_1$ 且 $\nu(C) \leq 2n - 2$。

(3) 若 $n = 2$ 或 3，则一对 C 可实现，当且仅当 $\alpha_1 < \gamma_1$ 且$\nu(C) \leq 2n - 2$，或 $\gamma_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_{d-2}$。

(B) 假设 $m = n > 1$。（若 $m = n = 1$，则没有负根，且有 $\alpha_1 < \alpha_2$。）

(4) 若 $m = n \geq 4$，则一对可实现，当且仅当 $\alpha_1 < \gamma_1$。

(5) 若 $m = n = 2$ 或 $m = n = 3$，则一对可实现，当且仅当 $\alpha_1 < \gamma_1$ 或 $\gamma_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_{d-2}$。

(C) 假设 $m < n$。

(6) 若 $m = 1$ 且 $n \geq 3$，则符号模式 $\Sigma_{1,\ n,\ 1}$ 是规范的。

(7) 若 $m \geq 2$ 且 $n \geq 5$，则当且仅当 $\nu(C) \geq d - 2m = n - m$时，一对 C 可实现。

(8) 其余符号模式可实现的充要条件如下：

符号模式 $\Sigma_{1,\ 2,\ 1}$ 可由全部三个阶数 NPP、PNP 和 PPN 实现。

符号模式 $\Sigma_{2,\ 3,\ 1}$ 且仅可由阶数 $NPPNN$、$PPNNN$、 $PNPNN$、 $PNNPN$ 和 $PNNNP$ 实现。

符号模式 $\Sigma_{2,\ 4,\ 1}$ 当且仅当阶数为 $PNNPNN$、$PNNNPN$ 和 $PNNNNP$ 时可以实现。

符号模式 $\Sigma_{3,\ 4,\ 1}$ 当且仅当阶数为 $PPNNNNN$、$PNPNNNN$、$PNNPNNN$、 $PNNNPNN$、 $PNNNNPN$ 和 $PNNNNNP$ 时可以实现。

本文其余部分用于证明定理2。

2. 定理2的证明

定理2的第 (1) 部分无需证明，见注释1的第 (1) 部分。对于 $m > n$， [10] 的定理3和定理4表明，要么 $\nu(Q) \leq 2n-1$，要么 $\gamma_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \gamma_2$。后一种情况仅在 $n=2$ 和 $n=3$ 时存在，而且可以实现。当 $\nu(Q) \leq 2n-2$ 和 $\alpha_1 < \gamma_1$ 时，所有情形也都可以实现。本文在此证明，情形 $\nu(Q) = 2n-1$ 不可实现，由此推出定理2的第 (2) 和第 (3) 部分。

定理 3. 对于 $m > n \geq 2$，不存在首一双曲多项式 Q，其定义符号模式 $\Sigma_{m,n,1}$ 且满足 $\nu(Q) = 2n-1$。

证明. 我们回顾 $m+n=d$ 与 $Q=\sum_{j=0}^{d} a_j x^j$、 $a_d = 1$。定义符号模式 $\Sigma_{m,n,1}$ 的双曲多项式集合 A（它是 $Oa_0 \dots a_{d-1}$ 的一个子集）是开的且连通的，见 [14, 定理 2 与 3]。已知 A 中满足 $\nu(.) \leq 2n-2$ 的多项式子集非空（[10, 定理 4]）。若其中满足 $\nu(.) = 2n-1$ 的多项式子集也非空，则由连续性，存在多项式 Q，使得 $\alpha_2 = \gamma_{2n-1}$ （其余根的模均互异且$\alpha_1 < \gamma_1$）。可以作线性变换 $x \mapsto gx$、$g>0$，以得到条件$\alpha_2 = \gamma_{2n-1} = 1$。因此，我们现在集中证明下述定理，定理 3 即由此得出：

定理 4。对于 $m > n \geq 2$，不存在定义符号模式 $\Sigma_{m,\ n,\ 1}$ 且根为 α_1、 α_2 和 $-\gamma_i$的首一双曲多项式，其中

$$0 < \alpha_1 < \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_{2n-2} \leq 1 = \gamma_{2n-1} = \alpha_2 < \gamma_{2n} \leq \dots \leq \gamma_{d-2}\ .$$

□

定理 4 的证明。我们先在特殊情形 $m = n+1$ 下证明定理 4：

命题 1。不存在定义符号模式$\Sigma_{n+1,\ n,\ 1}$ 且根为 α_1、 α_2 和 $-\gamma_i$的首一双曲多项式，其中

$$0 < \alpha_1 < \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_{2n-2} \leq 1 = \gamma_{2n-1} = \alpha_2\ .$$

该命题在定理 4 的证明之后证明。定理 4 的证明通过对 m 归纳进行，归纳基础为情形 $m = n+1$。

引理 1。设 $d \geq 3$ 和 $\sigma(Q) = \Sigma_{m,\ n,\ 1}$。令 $Q = (x+\gamma_i)Q_1$, $1 \leq i \leq d-2$。则 $\sigma(Q_1) = \Sigma_{m_1,\ n_1,\ 1}$，其中或者 $m_1 = m$, $n_1 = n-1$，或者 $m_1 = m-1$,$n_1 = n$。

证明。事实上，显然 $Q_1(0) > 0$。如果 Q_1 中 x 的系数为正，那么 Q 中的系数也为正，且多项式 Q 不可能定义符号模式 $\Sigma_{m,n,1}$。因此， Q_1 定义的符号模式具有如下形式：$\Sigma_{m_1,\ n_1,1}$, $m_1 + n_1 =$

$m+n-1=d-1$。如果 $n_1>n$（分别地，如果 $n_1<n-1$），那么 Q 中 x^{n+1} 的系数为负（分别地， x^n 的系数为正），并且 Q 的符号模式不是 $\Sigma_{m,n,1}$。□

设 $m>n+1$。按引理 1 定义多项式 Q_1。若 $n_1=n-1$，则由 [10, 定理 4], $\nu(Q_1)\leq 2n-3$，因此 $\nu(Q)\leq 2n-3$。这意味着$\alpha_2<\gamma_{2n-2}$ ——矛盾。若 $n_1=n$，则根据归纳假设，这样的多项式 Q_1 不存在，因此 Q 也不存在。

□

命题 1 的证明。假设存在一个形如

$$Q:=\sum_{j=0}^{2n+1}t_jx^j=(x^2-1)R\ ,\ \ R:=x^{2n-1}+b_{2n-2}x^{2n-2}+\cdots+b_0$$

定义符号模式 $\Sigma_{n+1,n,1}$ 的多项式，其中因子 R 的根为 α_1、 $-\gamma_1$、.....、$-\gamma_{2n-2}$、 $\gamma_i\in(0,1]$。那么

$$t_j=b_{j-2}-b_j\ .$$

我们将多项式 R 表示为如下形式

$$R=(x-\alpha_1)(x^{2n-2}+e_1x^{2n-3}+\cdots+e_{2n-2})\ ,$$

其中， e_j 是量 $\gamma_1,\ldots,\gamma_{2n-2}$ 的第 j 个初等对称多项式。因此

$$\begin{aligned}&b_{n-1}=-\alpha_1e_{n-1}+e_n\ \text{ and }\ b_{n+1}=-\alpha_1e_{n-3}+e_{n-2}\ ,\ \text{so}\\&t_{n+1}=-\alpha_1e_{n-1}+e_n+\alpha_1e_{n-3}-e_{n-2}\ .\end{aligned}\tag{2.1}$$

由于 $t_0>0$ 和 $t_1<0$，可得 $b_0<0$ 和 $b_1>0$，即因子 R 定义了符号模式 $\Sigma_{2n-1,1}$。另一方面

$$b_0=-\alpha_1\gamma_1\cdots\gamma_{2n-2}\ \text{ and }\ b_1=-b_0(1/\alpha_1-1/\gamma_1-\cdots-1/\gamma_{2n-2})\ ,\ \text{therefore}$$

$$1/\alpha_1-1/\gamma_1-\cdots-1/\gamma_{2n-2}>0\ .\tag{2.2}$$

引理2. (1) 对于 $\gamma_j\in(0,1],$ ， 不可能同时满足不等式$t_{n+1}>0$ (见 (2.1)) 和等式

$$1/\alpha_1-1/\gamma_1-\cdots-1/\gamma_{2n-2}=0\ .\tag{2.3}$$

(2) 对于 $\gamma_j\in(0,1],$ ， 不可能同时满足不等式 $t_{n+1}>0$和不等式 (2.2)。

引理的第 (2) 部分完成了命题1的证明。 □

引理2的证明。（1）事实上，条件 $t_{n+1}>0$ 等价于

$$-e_{n-1}+e_{n-3}-(1/\alpha_1)(e_{n-2}-e_n)>0\ .\tag{2.4}$$

在最后一个不等式中用 $G:=1/\gamma_1+\cdots+1/\gamma_{2n-2}$ 替换 $1/\alpha_1$，得到

$$\tau := -e_{n-1} + e_{n-3} - G(e_{n-2} - e_n) > 0 \ . \tag{2.5}$$

设 $I := \{1; 2; \ldots; 2n-2\}$。用 Y 表示由 $n-3$ 个指标互不相同的量 γ_i 构成的一个固定乘积（因此是 e_{n-3} 的一个加项），并用 J 表示这些指标组成的 $(n-3)$ 元组。此外，记 $Y(J)$。设 $K := I \setminus J$。e_{n-3} 中 $Y(J)$ 的系数等于 1。恰有 $\binom{n+1}{2}$ 个由指标互不相同的 $n-1$ 个量 γ_j 构成的乘积，其 $(n-1)$ 元组包含 $(n-3)$ 元组 J。事实上，剩余的两个指标必须取自集合 K 的 $n+1$ 个指标。

另一方面，在和式 $\sum_{J\subset I}(\sum_{k,\ \ell\in K,\ k<\ell}\gamma_k\gamma_\ell)Y(J)$ 中，e_{n-1} 的每个加项都被计数了 $\binom{n-1}{2}$ 次。因此可以写成

$$e_{n-3} = \sum_{J\subset I} Y(J) \ \text{ and } \ e_{n-1} = \sum_{J\subset I} S_2(J)Y(J)/\binom{n-1}{2} \ , \ \ S_2(J) := \sum_{k,\ell\in K, k<\ell} \gamma_k\gamma_\ell \ .$$

类似地，可以设

$$e_{n-2} = \textstyle\sum_{J\subset I} S_1(J)Y(J)/(n-2) \ , \quad S_1(J) := \sum_{k\in K}\gamma_k \quad \text{and}$$

$$e_n = \textstyle\sum_{J\subset I} S_3(J)Y(J)/\binom{n}{3} \ , \qquad\qquad S_3(J) := \sum_{k,\ell,m\in K, k<\ell<m}\gamma_k\gamma_\ell\gamma_m \ .$$

不等式 $\gamma_i\gamma_j\gamma_k \le (\gamma_i^2+\gamma_j^2)\gamma_k/2$ 表明，和式 $S_3(J)$ 中的每一项，要么等于 $S_1(J)$ 和 $S_2(J)$ 中各项的乘积，要么不大于这些乘积项之和的一半。对这三个和式中的项计数可得

$$S_3(J)/\binom{n+1}{3} \le (S_1(J)/(n+1))(S_2(J)/\binom{n+1}{2}) \ , \tag{2.6}$$

因此，对于乘积 $-G(e_{n-2}-e_n)$ 中 $Y(J)$ 的系数 S（见 (2.5)），可得

$$\begin{aligned} S &:= -S_1(J)/(n-2) + S_3(J)/\tbinom{n}{3} \\ &\le -S_1(J)(1/(n-2) - S_2(J)\tbinom{n+1}{3}/(n+1)\tbinom{n}{3}\tbinom{n+1}{2}) \ . \end{aligned} \tag{2.7}$$

以下不等式成立：

$$GS_1(J) > S_1(J)\sum_{j\in K} 1/\gamma_j \ge (n+1)^2 \tag{2.8}$$

（此处应用算术平均数与调和平均数之间的不等式）。可以直接得到

$$\binom{n+1}{3}/(n+1)\binom{n}{3}\binom{n+1}{2} = 1/(n-2)\binom{n+1}{2} \ . \tag{2.9}$$

考虑（2.5）左边各项中的乘积 $Y(J)$。其系数等于

$$\begin{aligned}\kappa &:= -S_2(J)/\tbinom{n-1}{2} + 1 - GS_1(J)/(n-2) + GS_3(J)/\tbinom{n}{3} \\ &< -S_2(J)/\tbinom{n+1}{2} + 1 - GS_1(J)/(n-2) + GS_1(J)S_2(J)/(n-2)\tbinom{n+1}{2} \\ &= (1 - S_2(J)/\tbinom{n+1}{2})(1 - GS_1(J)/(n-2)) .\end{aligned}$$

对于第二行的第一项，我们使用不等式 $\binom{n+1}{2} > \binom{n-1}{2}$；对于第二行最右边的一项，我们使用（2.6）和（2.9）。第二个因子为负，见（2.8）。第一个因子非负，因为 $\gamma_i \in (0, 1]$。因此$\kappa < 0$。这是对任意乘积 $Y(J)$ 定义的 κ 情形，所以 $\tau < 0$。这与（2.5）矛盾。

第（2）部分。对于固定的量 $\gamma_i \in (0, 1]$, ，（2.4）式左端随 $1/\alpha_1$ 增大而减小。这由 $e_{n-2} \geq e_n$ 得出。为证明后一个不等式，我们用 $Z(J^*)$ 表示由 γ_j 中具有不同指标的 $(n-2)$ 个量的乘积，其 $(n-2)$ 元组记为 J^*。于是

$$e_n = \sum_{J^* \subset I} \left(\left(\sum_{k,\ell \in I \setminus J^*, k<\ell} \gamma_k \gamma_\ell \right) / \binom{n}{2} \right) Z(J^*) .$$

$Z(J^*)$ 的系数的分子包含 $\binom{n}{2}$ 个加项，这些加项均为 ≤ 1。因此 $e_n \leq \sum_{J^* \subset I} Z(J^*) = e_{n-2}$，第（2）部分由第（1）部分得出。□

3. Proof of part (B) of Theorem 2

众所周知（见定理 1 后的几行），对于 $\tilde{c} = 1$，所有符号模式 $\Sigma_{n,\ n}$都能以所有可能的顺序实现。因此，存在根为 $-\gamma_1$、.....、$-\gamma_{d-2}$ 和 α_2 的 $d-1$ 次多项式 $Q_\flat$，其中 $\alpha_2 < \gamma_1$ 或 $\gamma_k < \alpha_2 < \gamma_{k+1}$，$1 \leq k \leq d-3$，或 $\gamma_{d-2} < \alpha_2$。于是可将 Q 构造成 $(x - \alpha_1)Q_\flat$ 的形式，其中 $\alpha_1 > 0$ 非常接近 0。因此，多项式 $xQ_\flat$ 和 Q 的相应系数（常数项除外）符号相同，并且有 $\sigma(Q) = \Sigma_{n,\ n,\ 1}$。因此，$\alpha_1 < \gamma_1$ 的任何一种顺序都能以符号模式 $\Sigma_{n,\ n,\ 1}$ 实现。

另一方面，对于 $\tilde{c} = 2$ 和 $n \geq 4$，有 $\alpha_1 < \gamma_1$；而对于 $n = 2$ 和$n = 3$，若 $\gamma_1 < \alpha_1$，则 $\gamma_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_{d-2}$，且这一顺序可通过符号模式 $\Sigma_{n,\ n,\ 1}$ 实现，见 [10, 定理 3]。这就证明了 (B) 部分。

4. Proof of part (C) of Theorem 2

定理的第（6）部分由备注1的第（1）部分推出。

为证明定理2的第（7）和第（8）部分，我们将使用一些引理，其证明见第5节。

引理3. 对于定义符号模式$\Sigma_{n-1,n,1}$, $n \geq 5$的多项式 P，有$\nu(P) \geq 1$。所有具有符号模式$\Sigma_{n-1,n,1}$, $n \geq 5$的组合 C，以及 $\nu(C) \geq 1$，都是可实现的。

注 1. 引理 3 对 $n = 4$ 并不成立，如下例所示：

$$\begin{aligned} P &:= (x+1.01)^5(x-1)(x-0.1) \\ &= x^7+3.95x^6+4.746x^5-0.41309x^4-5.11019095x^3 \\ &\quad -3.642011005x^2-0.63580905x+0.105101005\ . \end{aligned}$$

若将 -1.01 处的五重根作微扰，使其变为五个彼此接近的不同实根，则可得到一个满足 $\nu(P)=0$ 的多项式 P。

引理4. 若双曲多项式 Q 满足 $\sigma(Q)=\Sigma_{2,\ n,\ 1},\quad n\geq 4$，则$\nu(Q)\geq n-2$。

引理5. 若双曲多项式 Q 满足 $\sigma(Q)=\Sigma_{3,\ 5,\ 1}$，则 $\nu(Q)\geq 2$。

我们通过对 n 和 m作归纳，证明定理2的(7)部分。对于$\Sigma_{2,\ 5,\ 1}$、$\Sigma_{3,\ 5,\ 1}$ 以及$\Sigma_{4,\ 5,\ 1}$，(7)部分的证明分别由引理4、5和3得出。我们注意到，对于具有符号模式$\Sigma_{1,\ n,\ 1}$（这是规范的）的配对，(7)部分成立。

假设(7)部分已经证明

$$\text{for } n\leq n_0\ (n_0\geq 5),\ 1\leq m\leq n_0-1 \qquad \text{and}$$

$$\text{for } n=n_0+1,\ 1\leq m\leq m_0\ (1\leq m_0\leq n_0-1)\ .$$

考虑一对具有符号模式$\Sigma_{m_0+1,\ n_0+1,\ 1}$的 C。若 $m_0=n_0-1$，则应用引理3。

假设 $1\leq m_0\leq n_0-2$。应用引理 1。我们将实现数对 C 的多项式Q（其中 $\sigma(Q)=\Sigma_{m_0+1,\ n_0+1,\ 1}$）表示为 $(x+\gamma_1)Q_1$。如果 $\sigma(Q_1)=\Sigma_{m_0,\ n_0+1,\ 1}$，那么根据归纳假设

$$\nu(Q_1)\geq n_0+1-m_0>n_0+1-(m_0+1)\ ,\ \text{so}\ \nu(Q)\geq n_0+1-(m_0+1)\ .$$

如果 $\sigma(Q_1)=\Sigma_{m_0+1,\ n_0,\ 1}$，那么 $\nu(Q_1)\geq n_0-(m_0+1)$，对于 $m_0\leq n_0-2$，其值为 >0。在这种情况下，由于 γ_1 是负根模中的最小值，不等式 $\nu(Q_1)\geq 1$ 推出 $\gamma_2<\alpha_2$，并且 $\nu(Q)=\nu(Q_1)+1\geq n_0+1-(m_0+1)$。这就证明了结论 (7)。

结论 (8)。关于 $\Sigma_{1,\ 2,\ 1}$ 的断言由例 [10, 2] 得出。

关于$\Sigma_{2,3,1}$ 的陈述由 [10, 定理3和 4] 得出（针对阶 $NPPNN$、$PNNNP$、$PNNPN$、$PNPNN$以及那些不可实现的阶）。对于阶 $PPNNN$，它由以下例子得出:

$$\begin{aligned} &(x+1.3)(x+1.2)(x+1.1)(x-1)(x-0.5) \\ =\ & x^5+2.1x^4-0.59x^3-2.949x^2-0.419x+0.858\ . \end{aligned}$$

关于符号模式$\Sigma_{2,4,1}$ 的结果在 [15, 第3.2]小节中得到证明。

符号模式 $\Sigma_{3,\ 4,\ 1}$在次序 $PPNNNNN$下可实现，这由注 1 可知。根据定理 3 和 4], 可以推导出它在次序 $PNPNNNN$、$PNNPNNN$、$PNNNPNN$、$PNNNNPN$ 和 $PNNNNNP$下也可实现，而在其余次序下不可实现。

5. Proofs of Lemmas 3, 4 and 5

引理 3 的证明。引理的第二个结论由定理 4], 的第（2）部分直接推出，因此我们只证明第一个结论。需要证明不存在多项式 P，使得 $\sigma(P) = \Sigma_{n-1,\ n,\ 1}$ 且 $\nu(P) = 0$。假设存在这样的多项式，那么也存在一个多项式 P，使得 $\sigma(P) = \Sigma_{n-1,\ n,\ 1}$，并且满足 $\alpha_2 = \gamma_1 = 1$ （这可完全仿照定理 3 证明开头的论证得到）。令

$$U := \prod_{j=1}^{2n-3}(x+\gamma_j) = \sum_{j=0}^{2n-3} u_{2n-3-j}x^j\ ,\ \ u_j > 0\ ,\ \ \text{so}$$

$$P = (x^2 - (1+\alpha_1)x + \alpha_1)U = \sum_{j=0}^{2n-1} p_{2n-1-j}x^j\ .$$

Thus

$$p_{n-1} = u_{n-1} - (1+\alpha_1)u_{n-2} + \alpha_1 u_{n-3}\ .$$

我们定义 $u_j := e_j + e_{j-1}$，其中 e_j 是量 γ_2、...、 γ_{2n-3} 的第 j 个基本对称多项式，且 $e_0 = 1$ 和 $e_{-1} = 0$。因此

$$\begin{aligned} &e_{n-1} + e_{n-2} - (1+\alpha_1)(e_{n-2}+e_{n-3}) + \alpha_1(e_{n-3}+e_{n-4}) < 0\ ,\ \text{i. e.} \\ &e_{n-1} - \alpha_1 e_{n-2} - e_{n-3} + \alpha_1 e_{n-4} < 0\ . \end{aligned} \tag{5.10}$$

我们采用与引理2证明中类似的推理。具体而言，我们证明 (5.10) 与.....不可能同时成立

$$1/\alpha_1 > \sum_{j=2}^{2n-3} 1/\gamma_j\ . \tag{5.11}$$

为此，我们首先证明 (5.10) 与以下条件不能同时成立:

$$1/\alpha_1 = \sum_{j=2}^{2n-3} 1/\gamma_j\ . \tag{5.12}$$

因此，假设条件 (5.10) 和 (5.12) 可以同时成立。令 $1/\alpha_1 = S_{-1} := \sum_{j=2}^{2n-3} 1/\gamma_j$。这意味着

$$S_{-1}(e_{n-1} - e_{n-3}) - e_{n-2} + e_{n-4} < 0\ . \tag{5.13}$$

令 $I := \{2; 3; \ldots; 2n-3\}$。用 Y 表示由 $n-4$ 个量 γ_i 构成的一个固定乘积，这些量的指标各不相同（因此是 e_{n-4} 的一项），用 J 表示这些指标组成的 $(n-4)$ 元组。此外，我们记 $Y(J)$。令 $K := I \setminus J$。 e_{n-4} 中 $Y(J)$ 的系数为 1。恰有 $\binom{n}{2}$ 个由 $n-2$ 个量 γ_j 构成的乘积，其指标各不相同，且对应的 $(n-2)$ 元组包含 $(n-4)$ 元组 J。事实上，剩下的两个指标必须取自集合 K 的 n 个指标。

另一方面，在和式 $\sum_{J\subset I}(\sum_{k,\ \ell\in K,\ k<\ell}\gamma_k\gamma_\ell)Y(J)$ 中，e_{n-2} 的每一项都被计数 $\binom{n-2}{2}$ 次。因此可以写成

$e_{n-4}=\sum_{J\subset I}Y(J)$ and $e_{n-2}=\sum_{J\subset I}S_2(J)Y(J)/\binom{n-2}{2}$, $S_2(J):=\sum_{k,\ell\in K,k<\ell}\gamma_k\gamma_\ell$.
类似地，可以设

$$e_{n-3}=\textstyle\sum_{J\subset I}S_1(J)Y(J)/(n-3)\,,\quad S_1(J):=\sum_{k\in K}\gamma_k\quad\text{and}$$

$$e_{n-1}=\textstyle\sum_{J\subset I}S_3(J)Y(J)/\binom{n-1}{3}\,,\qquad S_3(J):=\sum_{k,\ell,m\in K,k<\ell<m}\gamma_k\gamma_\ell\gamma_m\,.$$

对于给定的 $(n-4)$ 元组 J，(5.13) 左端的 $Y(J)$ 的系数等于

$$\phi:=S_{-1}(S_3(J)-S_1(J))-S_2(J)+1\,.$$

量 $S_1(J)$（分别是 $S_3(J)$）包含 n （分别是 $\binom{n}{3}$）项。由于所有量 γ_j、$j\ge 2$ 都是 >1，因此有

$$S_3(J)>S_1(J)\binom{n}{3}/n\,.$$

因此

$$\phi>\frac{\binom{n}{3}-n}{\binom{n}{3}}S_3(J)S_{-1}-S_2(J)+1\,.$$

令 $S_{-1}(J)=\sum_{j\in K}1/\gamma_j$。有

$$S_3(J)S_{-1}>S_3(J)S_{-1}(J)\ge\binom{n}{3}nS_2(J)/\binom{n}{2}\ \text{and}$$

$$\frac{\binom{n}{3}-n}{\binom{n}{3}}\cdot\frac{\binom{n}{3}n}{\binom{n}{2}}=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{(n-1)(n-2)-6}{3}=:\psi\,.$$

这样

$$\phi>(\psi-1)S_2(J)+1\,.$$

对于 $n\ge 5$，有 $\psi>1$ 和 $\phi>0$。对所有集合 J 求和，可得到与 (5.13) 矛盾的结论。

假设 (5.10) 和 (5.11) 同时成立，则同样会得出与 (5.13) 矛盾的结论。事实上，在乘积 $S_{-1}(e_{n-1}-e_{n-3})$（见 (5.13)）中，若将 S_{-1} 替换为一个更大的正量，则 (5.13) 左端会增大。这是因为对称初等多项式e_{n-1} 和 e_{n-3} 所含的项数相同，但量 γ_j 是 >1，因此 $e_{n-1}>e_{n-3}$。□

引理 4 的证明。我们使用对合 i_r （见注 2 的第 (1) 部分），并考虑定义符号模式 $\Sigma_{1,\,n,\,2}$ 的多项式，而不考虑 $\Sigma_{2,\,n,\,1}$。我们仍用 $\alpha_1<\alpha_2$ 表示正根，用 $\gamma_1<\cdots<\gamma_n$表示负根的模。在新的设定下，我们要证明，对于任何满足 $\sigma(Q)=\Sigma_{1,\,n,\,2}$ 的双曲多项式 Q，都不成立 $\gamma_3<\alpha_1$。

假设存在这样的多项式，因此 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\in(0,\alpha_1)$。我们设

$A_1 := \alpha_1 + \alpha_2$,　　$A_{-1} := 1/\alpha_1 + 1/\alpha_2$,　　$A_{-2} := 1/\alpha_1\alpha_2$

$G_1 := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$　　$G_{-1} := 1/\gamma_1 + 1/\gamma_2 + 1/\gamma_3$,　$H_1 := \gamma_4 + \cdots + \gamma_n$,

$H_{-1} := 1/\gamma_4 + \cdots + 1/\gamma_n$　　$L_{-2} := \sum_{1\le i<j\le n} 1/\gamma_i\gamma_j$,　　$\delta := \alpha_1\alpha_2\gamma_1\cdots\gamma_n$.

Q 的 x^{n+1} 和 x^2 的系数相等

$$c_{n+1} := -A_1 + G_1 + H_1 \qquad \text{and}$$

$$c_2 := (-A_{-1}(G_{-1} + H_{-1}) + A_{-2} + L_{-2})\delta \ .$$

我们证明，以下不等式不可能同时成立

$$\gamma_i \le \alpha_1 \ , \ i = 1,\ 2,\ 3 \ , \qquad \gamma_j \ge \alpha_1 \ , \ j \ge 4$$

$$c_{n+1} \le 0 \qquad \text{and} \qquad c_2 < 0 \ . \tag{5.14}$$

假设除最后一个不等式外，其余不等式均成立。我们证明，此时 c_2/δ 的最小可能值为正。固定和 $g_{12} := \gamma_1 + \gamma_2$。$c_2/\delta$ 的表达式中含有 γ_1 或 γ_2 的项为:

$$((-A_{-1} + 1/\gamma_3 + H_{-1})g_{12} + 1)/\gamma_1\gamma_2 =: \eta/\gamma_1\gamma_2 \ .$$

由于 $\gamma_3 \le \alpha_1$ 和 $H_{-1} \ge 1/\gamma_4$，量 η 不小于

$$(-1/\alpha_2 + 1/\gamma_4)g_{12} + 1 = (\gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\alpha_2 + (\alpha_2 - \gamma_1 - \gamma_2)\gamma_4)/\alpha_2\gamma_4 \ .$$

条件 (5.14) 中除最后一个条件外的其余条件蕴含 $\alpha_2 > \gamma_1 + \gamma_2$。因此 $\eta > 0$。这意味着，对于固定的 g_{12}，当 $1/\gamma_1\gamma_2$ 取最小值时，量 c_2/δ 取最小值，也就是说，当 $\gamma_1 = \gamma_2$时。以同样的方式可得，只有当 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$ 时， c_2/δ 才可能取到最小值；从现在起，我们假设这一条件成立。

固定和 A_1。条件 $c_{n+1} \le 0$ 蕴含

$$A_1 \ge 3\gamma_1 + H_1 \ge 3\gamma_1 + \gamma_4 \ .$$

包含 α_1 或 α_2 的 c_2/δ 中的项为:

$$(-A_1(3/\gamma_1 + H_{-1}) + 1)A_{-2} \le (-A_1(3/\gamma_1 + 1/\gamma_4) + 1)A_{-2}$$

$$= \ (-A_1(3\gamma_4 + \gamma_1) + \gamma_1\gamma_4)A_{-2}/\gamma_1\gamma_4 < (-(3\gamma_4 + \gamma_1)(3\gamma_1 + \gamma_4) + \gamma_1\gamma_4)A_{-2}/\gamma_1\gamma_4$$

$$= \ (-3\gamma_4^2 - 9\gamma_1\gamma_4 - 3\gamma_1^2)A_{-2}/\gamma_1\gamma_4 < 0 \ .$$

当 A_{-2} 取最大值时，该表达式最小，即当 $\alpha_1 = \gamma_1$时。在此情况下， c_2/δ 中乘以 $1/\alpha_2$ 的系数等于

$$-3/\gamma_1 - H_{-1} + 1/\gamma_1 = -2/\gamma_1 - H_{-1} < 0 \ ,$$

因此，当 $1/\alpha_2$ 最大时， c_2/δ 最小，也就是说，当 α_2 最小时， $c_{n+1} = 0$ 和 $\alpha_2 = H_1 + 2\gamma_1$。令 $H_{-2} := \sum_{4\le i<j\le n} 1/\gamma_i\gamma_j$。于是我们有

$$L_{-2} = 3/\gamma_1^2 + (3/\gamma_1)H_{-1} + H_{-2} \ \text{and}$$

$$\begin{aligned} c_2/\delta &= -(1/\gamma_1 + 1/(H_1+2\gamma_1))(3/\gamma_1 + H_{-1}) \\ &\quad +1/\gamma_1(H_1+2\gamma_1) + 3/\gamma_1^2 + (3/\gamma_1)H_{-1} + H_{-2} \\ &= -2/\gamma_1(H_1+2\gamma_1) + (2/\gamma_1)H_{-1} - H_{-1}/(H_1+2\gamma_1) + H_{-2}\ . \end{aligned}$$

对于 $n=4$，项 H_{-2} 不存在，因此有 $H_1=\gamma_4$, $H_{-1}=1/\gamma_4$，所以

$$c_2/\delta = -2/\gamma_1(\gamma_4+2\gamma_1) + 2/\gamma_1\gamma_4 - 1/\gamma_4(\gamma_4+2\gamma_1) = 3/\gamma_4(\gamma_4+2\gamma_1) > 0\ .$$

对于 $n \geq 5$，可得 $H_{-1} > 1/(H_1+2\gamma_1)$ 与 $H_{-2}(H_1+2\gamma_1) > H_{-1}$，因此再次 $c_2/\delta > 0$。由此可知，条件 (5.14) 不可能同时全部成立，引理得证。□

引理 5 的证明。与引理 4 的证明一样，我们使用对合 i_r（见注记 2 的第 (1) 部分）。我们考虑定义符号模式 $\Sigma_{1,5,3}$ 而非 $\Sigma_{3,5,1}$ 的多项式。因此，对于正根 $\alpha_1 < \alpha_2$ 以及负根的模 $\gamma_1 < \cdots < \gamma_6$，有 $\gamma_6 < \alpha_2$（见 [10, 定理 3] 以及注记 2 的第 (1) 部分）。我们必须证明，不存在满足 $\sigma(Q) = \Sigma_{1,5,3}$ 的双曲多项式 Q 使得 $\gamma_5 < \alpha_1$ 成立。

假设存在这样的多项式，使得 $\gamma_1, \ldots, \gamma_5 \in (0, \alpha_1)$。经过线性变换 $x \mapsto bx$, $b>0$，可得条件 $\alpha_1 = 1$。令

$$A_1 := \alpha_1 + \alpha_2\ , \qquad A_{-1} := 1/\alpha_1 + 1/\alpha_2\ , \quad A_{-2} := 1/\alpha_1\alpha_2$$

$$H_1 := \textstyle\sum_{j=1}^{6} \gamma_j \qquad H_{-1} := \sum_{j=1}^{6} 1/\gamma_j\ , \qquad H_{-2} := \sum_{1\leq i<j\leq 6} 1/\gamma_i\gamma_j\ ,$$

$$H_{-3} := \textstyle\sum_{1\leq i<j<k\leq 6} 1/\gamma_i\gamma_j\gamma_k\ , \quad \text{and} \qquad \delta := \alpha_1\alpha_2\gamma_1\cdots\gamma_6\ .$$

Q 的 x^7 和 x^3 的系数等于

$$\begin{aligned} c_7 &:= -A_1 + H_1 \qquad\qquad \text{and} \\ c_3 &:= (-A_{-1}H_{-2} + A_{-2}H_{-1} + H_{-3})\delta\ . \end{aligned}$$

我们证明，不可能同时得到以下条件

$$\gamma_1 \leq \cdots \leq \gamma_5 \leq 1 \leq \gamma_6\ ,\ \ c_7 < 0 \ \text{ and } \ c_3 < 0\ .$$

我们证明，在和 g_1 固定为 $= \gamma_1+\gamma_2$ 时，量 c_3/δ 在 $\gamma_1=\gamma_2$ 时取最小值。为此，令

$$g_{-1} := 1/\gamma_1 + 1/\gamma_2 = g_1/\gamma_1\gamma_2\ ,\ \ G_{-1} := 1/\gamma_3 + \cdots + 1/\gamma_6\ ,\ \ G_{-2} := \sum_{3\leq i<j\leq 6} 1/\gamma_i\gamma_j$$

并注意，c_3/δ 中含有 γ_1 或 γ_2 的项为:

$$\begin{aligned} & -A_{-1}(1/\gamma_1\gamma_2 + g_{-1}G_{-1}) + A_{-2}g_{-1} + (1/\gamma_1\gamma_2)G_{-1} + g_{-1}G_{-2} \\ = \quad & (-A_{-1}(1+g_1G_{-1}) + A_{-2}g_1 + G_{-1} + g_1G_{-2})/\gamma_1\gamma_2 \\ = \quad & ((-A_{-1}+G_{-1}) + g_1(-A_{-1}G_{-1} + A_{-2} + G_{-2}))/\gamma_1\gamma_2 \ . \end{aligned}$$

显然，$-A_{-1}+G_{-1} > 1/\gamma_3 + 1/\gamma_4 \geq 2/\gamma_4$。注意到 $g_1 \leq 2$。我们证明

$$1/\gamma_4 - A_{-1}G_{-1} + A_{-2} + G_{-2} \geq 0 \tag{5.15}$$

这意味着当 $\gamma_1\gamma_2$ 取最大值时，c_3/δ 取最小值，也就是说，当 $\gamma_1 = \gamma_2$ 时。由以下两个不等式可得不等式 (5.15)

$$\begin{aligned} (1/\alpha_2)G_{-1} \quad & \leq \quad 1/\gamma_3\gamma_6 + 1/\gamma_4\gamma_6 + 1/\gamma_5\gamma_6 + A_{-2} \qquad \text{and} \\ G_{-1} \quad & \leq \quad 1/\gamma_4 + 1/\gamma_3\gamma_4 + 1/\gamma_3\gamma_5 + 1/\gamma_4\gamma_5 \ . \end{aligned}$$

第一个不等式由 $1/\gamma_i\gamma_6 \geq 1/\gamma_i\alpha_2$、$i = 3$、4、5 和 $1/\alpha_2\gamma_6 \leq 1/\alpha_2$ 得出。第二个不等式则由下式得出

$$G_{-1} \leq 1/\gamma_3 + 1/\gamma_4 + 2/\gamma_5 \leq 1/\gamma_4 + 1/\gamma_3\gamma_4 + 1/\gamma_3\gamma_5 + 1/\gamma_4\gamma_5 \ .$$

应当注意，如果不选用 γ_1 和 γ_2，而改选其他两个量 γ_i 和 γ_j、$1 \leq i < j \leq 5$，那么证明当 $\gamma_i = \gamma_j$ 时 c_3/δ 取最小值，也可以用同样的方法进行。

因此只需考虑这种情况：$\gamma_1 = \cdots = \gamma_5$，此时

$$c_3/\delta = -(1+1/\alpha_2)(10/\gamma_1^2 + 5/\gamma_1\gamma_6) + (1/\alpha_2)(5/\gamma_1 + 1/\gamma_6) + 10/\gamma_1^3 + 10/\gamma_1^2\gamma_6 \ .$$

$1/\alpha_2$ 的系数为

$$(-10/\gamma_1^2 + 5/\gamma_1) + (-5/\gamma_1\gamma_6 + 1/\gamma_6) < 0 \ .$$

因此，当 α_2 取最小值时，c_3/δ 也取最小值，即当 $\alpha_2 = 5\gamma_1 + \gamma_6 - 1$时。此外，我们将记号简化如下：令 $a := \alpha_2$、$r := \gamma_1$ 和 $w := \gamma_6$。因此$0 < r \leq 1 \leq w \leq a$。对于 $a = 5r + w - 1$，我们计算乘积

$$ar^3wc_3/\delta = (5r + w - 1)r^3wc_3/\delta =: -2K \ .$$

可得

$$\begin{aligned} K \quad & = \quad 12r^3 + 25r^2w + 5rw^2 - 25r^2 - 30rw - 5w^2 + 5r + 5w \\ & = \quad -(1-r)(12r^2 + 25rw + 5w^2 - 5r - 5w) - 8r^2 < 0 \ . \end{aligned}$$

c_3/δ 为正的最小可能值，因此不可能同时有 $c_7 < 0$ 和$c_3 < 0$。这证明了引理。□

References

[1] Cajori, F.：《单未知数数值方程根的近似算术方法史》。Colo. Coll. Publ. Sci. Ser. 12-7, 171–215 (1910)。[2] Curtiss, D.R.：《笛卡尔符号法则的近期推广》，《数学年刊》19 (4), 251–278 (1918)。[3] de Gua de Malves, J.-P.：《笛卡尔法则的证明：用于确定没有虚根的方程中正根与负根的个数》，《皇家科学院数学与物理学文集》72–96 (1741)。[4] 《勒内·笛卡尔几何学》，附第一版影印本，D. E. Smith 和 M. L. Latham 译，纽约：Dover Publications, 1954。[5] J. Forsgård、V. P. Kostov 和 B. Shapiro：《勒内·笛卡尔可能知道这一点吗？》Exp. Math. 24 4 2015 438 448 1326 26027, 3383475 J. Forsgård、D. [6] 。Novikov 和 B. Shapiro：《笛卡尔符号法则的热带类比》，《国际数学研究通知》IMRN 2017, 第 12 期，3726–3750。arXiv:1510.03257 [math.CA]。[7] J. Fourier：《论在求根的界限时使用笛卡尔定理》，《巴黎爱好科学会科学通报》(1820) 156–165, 181–187；《全集》第 2 卷, 291–309，Gauthier-Villars，1890。[8] Gauss, C.F.：《一个代数定理的证明》，《纯粹与应用数学杂志》3, 1–4 (1828)；《全集》第 3 卷，67–70，哥廷根，1866。[9] Jensen, J.L.W.：《方程理论研究》，《数学学报》36, 181–195 (1913)。[10] V. P. Kostov：《笛卡尔符号法则与根的模》，《德布勒森数学出版物》96/1-2 (2020) 161–184，DOI: 10.5486/PMD.2020.8640。[11] V. P. Kostov：《双曲多项式与典范符号模式》，Serdica Math. J. 46 (2020) 135–150, arXiv:2006.14458。[12] V. P. Kostov：《哪些符号模式是典范的？》，Results Math 77 (2022) 第 6 期，论文 235。[13] V. P. Kostov：《双曲多项式与刚性模序》，《德布勒森数学出版物》100 (1-2) 119–128 (2022)，DOI: 10.5486/PMD.2022.9068。[14] V. P. Kostov：《单变量多项式与某些集合的可缩性》，索非亚大学“圣克莱门特·奥赫里德斯基”数学与信息学院年刊 107 (2020), 79–103。[15] V. P. Kostov：《双曲多项式的根模与笛卡尔符号法则》，载于《函数的构造理论，索佐波尔 2019》（B. Draganov、K. Ivanov、G. Nikolov 和 R. Uluchev 编），第 131–146 页，Prof. Marin Drinov Academic Publishing House，索非亚，2020。[16] Laguerre, E.：《论数值方程理论》，《纯粹数学杂志》，第 3 辑，第 9 卷，99–146 (1883)；《全集》第 1 卷，巴黎，1898；Chelsea，纽约，1972，第 3–47 页。[17] Meserve, B.E.：《代数基本概念》，纽约：Dover Publications，1982。

Université Côte d'Azur, CNRS, LJAD, France
Email address: vladimir.kostov@unice.fr