有向动态网络中共识可解性的拓扑刻画*

HugoRincon Galeana[1],Ulrich Schmid[1],Kyrill Winkler[2],Ami Paz[3],和 Stefan Schmid[4]

[1] 维也纳工业大学，奥地利
[2] ITK Engineering，奥地利[3]
法国国家科学研究中心，法国[4]
柏林工业大学，德国

arXiv:2304.02316v1 [cs.DC] 5 Apr 2023

摘要。 共识是分布式计算中最基础的问题之一。本文研究同步动态有向网络中的共识问题，其中通信由无感知消息对手控制。关于该模型中何时可以实现共识的问题，已有大量文献从组合角度进行了深入研究，并且公认颇具挑战性。本文从拓扑角度探讨无状态消息对手下共识的可解性，并由此提供了有趣的新见解。

我们的主要贡献是对共识可解性的拓扑刻画，该刻画还导出了明确的判定过程。我们的方法基于通信伪球面这一新颖概念，它可被视为无等待共享内存系统中众所周知的标准色彩细分的消息传递类比物。我们进一步通过处理未解释复形，推进了拓扑方法所赋能的“几何”推理的优雅性与表现力；未解释复形显著减小了协议复形的规模；同时，我们用信息流箭头标记面，从而直观地诠释了协议复形中各面的隐含认识状态。

关键词： 动态网络 · 消息对手 · 共识 · 组合拓扑 · 未解释复形

1 引言

共识是分布式计算中一个最基本的问题，在该问题中，多个进程需要基于各自的本地输入，就某个值达成一致。这个问题已经被研究了数十年，并且涉及各种不同的模型；然而，在许多分布式环境中，共识何时以及如何能够被实现、实现得多快，仍然持续困扰着研究人员。

本文研究了一个基础设置下的共识问题：进程通过同步动态有向网络进行通信，其中通信由无感知消息对手 [2]控制。该模型颇具吸引力，因为它在概念上简单，同时仍提供了高度动态的网络模型。在该模型中，无故障进程通过消息传递，以严格同步的方式进行通信，而消息对手可能在每一轮丢弃进程发送的某些消息。更抽象地看，消息对手提供了一个有向通信图序列，其中边指示在该轮次中哪个进程能够成功向哪个其他进程发送消息。无感知消息对手由允许的通信图集合$\mathbf{D}$ 定义，它可以在每一轮次中从中独立于前几轮次的选择 [12], 选取一个图。

该模型具有实际意义，因为许多大型分布式系统的通信拓扑都是动态的（例如，由于移动性、干扰或故障），且其中的链路往往具有非对称性（例如，在光网络或无线网络中） [31]。该模型在理论上也很有趣，因为众所周知，在一般的动态有向网络中实现共识十分困难 [6,12,34,36,42]。

以往的研究主要关注共识实际可解的条件。 le
under 无状态消息对手 [12]。直到最近，人们才首次获得了关于 tim 的初步见解 e

* 本研究获得了奥地利科学基金（FWF）项目ADynNet（P28182）和ByzDEL（P33600），以及德国科学基金会（DFG）项目FlexNets（470029389）的资助。Kyrill Winkler获得了维也纳科学技术基金（WWTF）项目WHATIF（ICT19-045）的资助，Ami Paz获得了奥地利科学基金（FWF）和netIDEE SCIENCE项目P 33775-N的资助。

采用组合方法研究该模型中达成共识的复杂性 [39],。本文从拓扑学视角对其进行补充，提供了有趣的新见解和结果。

我们的贡献：我们的主要贡献是对无状态消息对手下同步动态网络的共识可解性进行拓扑刻画。这不仅为 [39], 中建立的、令人惊讶地错综复杂的时间复杂度结果提供了直观（“几何”）解释——既包括判定过程（可用于确定给定的无状态消息对手下共识是否可解），也尤其包括任何正确分布式共识算法的终止时间。

为此，我们引入了通信伪球面这一新颖概念，它可以被视为无等待共享内存系统中广为人知的标准色彩细分的消息传递类比。此外，我们使用未解释复形 [38], ，这大幅缩小了我们的协议复形的规模和结构。最后但同样重要的是，遵循 [19],，我们根据协议复形中边所承载的信息流为这些边标记，这为协议复形中顶点/面的隐含认知状态（关于对初始值的知识）赋予了非常直观的含义。结合拓扑方法固有的优美性和表现力，我们的工具促进了近乎“几何化”的推理，从而为 [39], 的一些令人惊讶的结果提供了简单而直观的解释，例如决策复杂度与共识终止时间之间有时会出现指数级差距。这还带来了一种新颖的决策程序，用于判定在给定的无感知消息对手下，是否能在某个 k 轮次中实现共识。

总体而言，我们认为，与迄今文献中所考虑的组合方法不同，我们的拓扑方法也有望几乎立即推广到其他决策问题和其他消息对手，因此可能具有独立的研究价值。

相关工作：一致性问题出现在各种模型中，包括共享内存架构、消息传递系统和区块链等 [1, 28, 33, 40]。本文所考虑的消息传递模型中的分布式共识问题，即通信通过动态网络进行的情形，已有近 40 年的研究历史 [7, 10–12, 16, 22, 35, 36]。早在 1989 年，Santoro 和 Widmayer [34] 就证明，在这一模型中，如果每轮最多可能丢失 $n-1$ 条消息，就无法实现共识。Schmid、Weiss 和 Keidar [36] 证明，如果消息丢失不会使进程彼此隔离，那么即使每轮丢失二次数量级的消息，也仍然可以解决共识问题。文献中还提出了其他几种广义模型 [11, 17, 24],，例如 Charron-Bost 和 Schiper 的 heard-of 模型 [11],；此外，在这些模型中，人们还研究了诸如近似共识和渐近共识等不同的一致性问题 [10, 16]。在许多这类及类似的共识研究中 [5, 6, 9, 14, 32, 37, 42], ，采用的模型是：每一轮都从一组可能的通信图中选取一个有向图。Afek 和 Gafni 为这种抽象提出了 “ 消息对手 ” 这一术语 [2],，并用它来关联在无等待读写共享内存系统中可解的问题与在消息传递系统中可解的问题。关于这一领域的详细概述，请参阅 Winkler 和 Schmid 最近发表的综述 [40]。

动态网络的一种有趣替代模型假设具有 T-区间连通性保证，即每 T 个连续轮次 [29, 30] 的通信图中都存在一个公共子图。与我们的有向模型相比，在此模型中解决共识相对简单，因为 T-区间连通性模型依赖于双向链路，并且通信图始终保持连通。例如，1-区间连通性是 T-区间连通性的最弱形式，它意味着在每个图中，所有节点都能够到达系统中的其他所有节点。在始终连通的无向图中解决共识的问题，也曾在给定的 $(t+1)$-连通图以及至多 t个节点故障 [8] 的情况下得到研究。利用图论工具，作者扩展了图中半径的概念，以确定存在故障时的共识终止时间。

Coulouma、Godard 和Peters [12]展示了一种有趣的等价关系，它通过所谓β等价类之一的不可广播性，捕捉了无状态消息对手下共识不可能性的本质，从而细化了 [35]的结果。在借鉴其中一些洞见的基础上，Winkler 等人 [39]研究了该模型中共识的时间复杂度。特别是，他们提出了一个明确的判定过程，并分析了其判定时间复杂度以及分布式共识的终止时间。事实证明，共识不仅可能比广播 [13], 耗时指数级更长，而且还存在

有时，判定时间与终止时间之间会存在指数级差距。令人惊讶的是，这种差距并非由与beta 类的广播能力相关的性质造成，而是由这些类的数量造成的。

尽管迄今讨论的所有工作本质上都是组合性的，但也有一些相关的拓扑学研究，参见 [20] 以了解介绍和概述。分布式计算中拓扑学的应用最初源于具有即时原子快照（即时快照模型）的共享内存系统中的无等待计算，参见例如 $[3, 4, 18, 23, 26, 27]$。即时快照模型中的协议复形演变由此处关键的色彩细分操作所支配。我们将展示，后者也可以被视为一种特定的无感知消息对手，其集合 $\mathbf{D}$ 包含所有传递闭包且单向连通的图。

关于动态网络中的拓扑，Castañeda 等人 [9] 研究了静态图和动态图中的共识及其他问题，但假设所有节点都知道图序列。也就是说，他们关注的是信息传播问题，而搁置了图序列之间不可区分性的问题。相比之下，在本文中，我们开发了一种拓扑模型，同时刻画信息传播和不可区分性。Godard 和Perdereau [19], 研究过一种属于“我们”这一类模型的对抗模型，他们研究了一般的 k-集合一致性，假设每一轮中某个最大数量的（双向）链路可能丢弃消息。作者还提出了在协议复形中用箭头标记边的思想，这些箭头给出了信息流的方向，我们也采用了这一思想。Shimi 和 Castañeda [38] 研究了 k-集合一致性，研究对象是无状态消息对手这一受限类别，且这些对手是“向上封闭”的（其中$\mathbf{D}$ 包含每个纳入的图以及所有具有更多边的图）。

在分布式环境中应用拓扑工具的挑战之一是，表示系统的单纯复形会随着轮次数量以及进程数量和可能的输入值数量的增加而急剧增长。在无色任务的情况下，例如 k-集合一致性，可以将注意力限制在无色协议复形 [20]上。在即时快照模型的情况下，其演化由重心细分控制，这产生的协议复形比色彩细分产生的协议复形小得多。然而，不幸的是，它不适合在消息对手下的动态网络中跟踪不可区分性。 [15]中引入的“局部协议复形”也是如此。相比之下， [38], 中引入的未解释复形在此处非常有效，因此也用于我们的论文中。

除了共识是 k-集合一致性的特殊情况（对于 $k = 1$）之外，共识并不是分布式计算中拓扑学所关注的主要问题，尤其不是消息对手下的动态网络中的主要问题。然而，Nowak、Schmid 和 Winkler 已在 [32]中提出了一个点集拓扑刻画，用于描述在一般消息对手（包括闭合和非闭合消息对手）下何时可以实现共识。不过，由此得到的判定过程相当抽象（它作用于无限的可容许执行），关于闭合消息对手的终止时间的一些结果也是如此，这些结果证实 [41]。

一般而言，消息传递模型的拓扑结构早在 2002 [22] 中就已由 Herlihy、Rajsbaum 和 Tuttle 研究。Herlihy 和 Rajsbaum [21] 研究了 k-集合一致性，适用于导出可剖分复形的模型。

论文结构：我们在第2节介绍分布式计算模型和无感知消息对手。在第3节中，我们提出一个框架，以便从拓扑学角度研究动态网络上的共识。我们在第4节给出无感知消息对手下共识可解性／不可解性的刻画，并描述一个显式判定过程。在第5节中，我们进一步探讨判定过程所需的时间复杂度与分布式共识实际终止时间之间的关系。最后，我们在第6节总结本文的贡献并讨论未来的研究方向。

2 系统模型

我们考虑一个由 n 个不会失效的进程组成的同步动态网络，这些进程通过可能丢弃消息的点对点链路全连接。我们仅通过进程的唯一标识符来识别它们，这些标识符取自集合 $\Pi = \{p_1, \ldots, p_n\}$，并且为进程所知。令 $[n] = \{1, \ldots, n\}$。进程执行确定性全信息协议 P，使用广播（发送给所有进程）通信。它们的执行以一系列同步轮次进行，

其中每个进程同时向所有其他进程广播一条消息，而不会立即获知消息接收是否成功，然后根据其当前局部状态以及在该轮次中接收到的消息计算其下一状态。这些轮次在通信上是封闭的，即在特定轮次中未被接收的消息会丢失，并且不会在之后被送达。

因此，通信是不可靠的，事实上由一个具有非空图集 消息对手（MA）控制，该图集为$\mathbf{D} = \{D_1, \ldots, D_k\}$。所有图都以 Π 作为其节点集，而一条边 $p_i \to p_j$ 表示从 p_i 到 p_j的通信链路。对于每一轮 $r \geq 1$，MA 从$\mathbf{D}$中任意选择一个通信图 G_r；如果 G_r 包含边 $p_i \to p_j$，则来自进程 p_i 的消息会在该轮到达进程 p_j，否则消息将丢失。我们假设进程具有持久化内存，即$\mathbf{D}$ 中的每个图都包含所有自环 $p_i \to p_i$。消息对手选择的无限图序列 $\mathcal{G} = (G_r)_{r\geq 1}$ 称为可行图序列，而$\mathbf{D}^\omega$ 表示对于图集$\mathbf{D}$的无感知消息对手，所有可行图序列的集合。进程知道$\mathbf{D}$，但它们事先不知道对于任何 r 的图 G_r（尽管它们可以在该轮结束后推断出该图）。

我们考虑这样一个系统：全局状态完全由每个进程的局部状态决定。因此，配置只是各进程局部状态（也称为视图）组成的向量。一个可接受的执行 a 的 P 只是轮次 $r \geq 1$结束时配置 $a = (a_r)_{r\geq 0}$ 组成的序列，该序列由一个可行图序列 $\mathcal{G} \in \mathbf{D}^\omega$ 从给定的初始配置 a_0开始所诱导。由于我们将把注意力限制在确定性协议 P上，图序列 $\mathcal{G}$ 和初始配置 a_0 唯一确定 a。进程 p_i 在 a_r 中第 $r \geq 1$ 轮结束时的视图记为 $a_r(p_i)$；其初始视图记为 $a_0(p_i)$。

我们将注意力限制在共识问题的确定性协议上，定义如下：

定义 1（共识）。每个进程 $p_i \in \Pi$ 都有一个取自有限输入域 $\mathcal{V}_I$的输入值 $x_i \in \mathcal{V}_I$，该输入值编码在初始状态中，并有一个输出值 $y_i \in \mathcal{V}_I \cup \{\perp\}$，初始为$y_i = \perp$。在每个可容许执行中，正确的共识协议 P 必须确保以下属性：

– 终止性：最终，每个 $p_i \in \Pi$ 都必须恰好作出一次决定，即变为 $y_i \neq \perp$。– 一致性：如果进程 p_i 和 p_j 都已作出决定，则 $y_i = y_j$。– （强）有效性：如果 $y_i \neq \perp$，那么对于某个 $p_j \in \Pi$，$y_i = x_j$，也就是说，它必须是某个进程 p_j的输入值。

在由$\mathbf{D}^\omega$所诱导的 P的任意给定可容许执行 a 中，对于进程 p_i，令 $\mathrm{In}^{\mathcal{G}}(p_i, r)$ 表示在第 r 轮中 p_i 获知的进程集合（另见 [11]），即进程 p_i 在 G_r中的入邻居集合；并且 $\mathrm{In}^{\mathcal{G}}(p_i, 0) = \{p_i\}$。由于 $\mathbf{D}$ 中的所有图都包含所有自环，因此对于所有 $r \geq 0$ 和 $p_i \in \Pi$，均有$p_i \in \mathrm{In}^{\mathcal{G}}(p_i, r)$。如果上下文已明确轮次 r，我们也将 $\mathrm{In}^{\mathcal{G}}(p_i) = \mathrm{In}^{\mathcal{G}}(p_i, r)$ 简写为 $\mathrm{In}^{\mathcal{G}}(p_i)$。

可容许执行 a 中进程局部视图的演化，由 $\mathcal{G}$ 和初始配置 a_0 所诱导，现在可以递归定义为

$$a_r(p_i) = \left\{(p_j, r, a_{r-1}(p_j)) : p_j \in \mathrm{In}^{\mathcal{G}}(p_i, r)\right\} \quad \text{for } r > 0. \tag{1}$$

请注意，在上述定义中，我们可以省略 $(p_j,\ r,\ a_{r-1}(p_j))$ 中的轮数 r，因为它已隐含在 $a_r(p_i)$ 的结构中；我们明确写出它仅仅是为了清晰起见。在 MA} 下所有可容许执行 a 中，p_i 的所有可能轮次-r 视图（包括 $r = 0$ 的所有初始视图）的集合记为 $A^r(p_i) = \{a_r(p_i) \mid \forall$。

在任何可容许执行 a 中，每个进程最终都必须到达一个最终视图，并可据此对某个输出值作出决策，且该值此后不会改变。因此，必定存在某个最终轮次，此后所有进程都已作出决策。

3 共识的拓扑框架

本　节介绍组合拓扑的基本元素和特定概念
点需要
q在我们关于同步消息传递网络的语境中。
分布式计算中的组合拓扑 [20]依赖于单纯输入与输出com　-
plex描述诸如共识之类的分布式决策任务的可行输入值和输出值　s,

以及一个承载映射，为给定的输入单形定义允许的输出值，即输出单形。能够在某种计算模型中解决此类任务的协议会产生另一个单纯复形，即协议复形，它描述了进程在任何执行过程中的局部视图演变。协议复形传统上对基于轮次的模型中的全信息协议进行建模，从而确保一种组织良好的结构：进程执行一系列通信操作，传播其完整视图，直到能够作出决策。最后，协议会导出一个单纯决策映射，以一种与承载映射相容的方式，将协议复形中的每个顶点映射到一个输出顶点。

3.1 基本拓扑定义

我们从组合拓扑基本术语的定义开始:

定义 *2*（抽象单纯复形）。抽象单纯复形 $\mathcal{K}$ 是一个二元组$(V(\mathcal{K})\ F(\mathcal{K}))$，其中 $V(\mathcal{K})$是一个集合， $F(\mathcal{K}) \subseteq 2^{V}(\kappa)$，并且对于任意 $\sigma,\tau \in 2^{V}(\kappa)$，如果 $\sigma \subseteq \tau$ 且 $\tau \in F(\mathcal{K})$，则 $\sigma \in F(\mathcal{K})$。 $V(\mathcal{K})$ 称为顶点集，$F(\mathcal{K})$ 是 $\mathcal{K}$ 的面或单形的集合。我们称单形 σ 为面，如果它关于包含关系是极大的；否则称为真面。我们使用 $Fct(\mathcal{K})$ 表示 $\mathcal{K}$的所有面的集合，并注意到，对于给定的 $V(\mathcal{K})$， $F(\mathcal{K})$唯一确定 $Fct(\mathcal{K})$，反之亦然。若一个单纯复形的顶点集是有限的，则称该单纯复形是有限的；本文中的所有复形都将属于这种情况。

我们在本文中考虑的所有单纯复形都是抽象的。为简洁起见，我们通常会不严格地写成 $\sigma \in \mathcal{K}$，而不是 $\sigma \in F(\mathcal{K})$。

定义3（子复形）。设 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}$ 是单纯复形。我们称 $\mathcal{L}$ 是一个子复形，属于 $\mathcal{K}$，记作 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$，当且仅当 $V(\mathcal{L}) \subseteq V(\mathcal{K})$ 且 $F(\mathcal{L}) \subseteq F(\mathcal{K})$。

定义4（维数）。令 $\mathcal{K}$ 为一个单纯复形，且 $\sigma \in F(\mathcal{K})$ 为一个单形。我们说 σ 具有维数 k，记为$\dim(\sigma) = k$，如果其基数为 $k+1$。单纯复形 $\mathcal{K}$ 的维数为 k，如果每个面具有至多为 k的维数；若其所有面具有相同的维数，则称其为纯。

我们有时将单形记作 σ^k，以强调其维数为 k。

定义 5（骨架和边界复形）。*The* k-骨架 $\mathrm{skel}^k(\mathcal{K})$ 单纯复形 $\mathcal{K}$ 是由所有维数不超过 k的单形组成的子复形。边界复形 $\partial\sigma$ 的单形 σ，视为一个复形，是由 σ的所有真面构成的复形。

定义6（单纯映射）。令 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}$ 为单纯复形。若顶点映射 $\mu: V(\mathcal{K}) \to V(\mathcal{L})$ 是一个单纯映射，则称其为单纯映射，当对于任意 $\sigma \in F(\mathcal{K})$， $\mu(\sigma) \in F(\mathcal{L})$；这里， $\mu(\sigma) = \{\mu(v) \mid v \in \sigma\}$。

定义 7（染色与染色单纯复形）。我们称单纯复形 $\mathcal{K}$具有恰当 c-染色 χ，如果存在 $\chi: V(\mathcal{K}) \to \{p_1, p_2, \ldots, p_c\}$，使其在 $\mathcal{K}$ 的每个面上都是单射。如果 $\mathcal{K}$ 具有恰当的 $(\dim(\mathcal{K})+1)$-染色，我们称其为染色单纯复形。

将 χ 的取值范围扩展到顶点集合 S，通过定义 $\chi(S) = \{\chi(v) \mid v \in S\}$，这意味着例如 $\chi(\sigma) = \chi(V(\sigma))$。

定义8（承载映射）。令 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}$ 为单纯复形，且 $\Phi: F(\mathcal{K}) \to 2^{\mathcal{L}}$。我们称 Φ 为一个承载映射，如果对于任意 $\sigma \in \mathcal{K}$， $\Phi(\sigma)$ 是 $\mathcal{L}$ 的子复形，并且对于任意 σ_1、$\sigma_2 \in \mathcal{L}$、$\Phi(\sigma_1 \cap \sigma_2) \subseteq \Phi(\sigma_1) \cap \Phi(\sigma_2)$。

我们称载体映射为刚性的，如果它将每个单形 $\sigma \in \mathcal{K}$ 映射到一个复形 $\Phi(\sigma)$，该复形是纯的，维数为维数(σ)。如果对于任意两个单形 σ、$\tau \in \mathcal{K}$、 $\Phi(\sigma \cap \tau) = \Phi(\sigma) \cap \Phi(\tau)$，则称其为严格的 。

我们称一个承载映射 $\Phi: \mathcal{K} \to 2^{\mathcal{L}}$ 承载 一个单纯顶点映射 $\mu: V(\mathcal{K}) \to V(\mathcal{L})$ 如果 f or $any\ \sigma \in \mathcal{K},\ \mu(\sigma) \in \Phi(\sigma)$.

H在介绍了基本术语之后，我们现在可以定义.....的主要组成部分。

偏序逻辑

我们1设定中共识的建模。

一般而言，分布式任务由一个元组 $T = \langle \mathcal{I}, \mathcal{O}, \Delta \rangle$ 定义，其中包含两个染色单纯复形 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{O}$，它们分别对进程集合 Π 的有效输入配置和输出配置建模；此外， $\Delta : \mathcal{I} \to 2^{\mathcal{O}}$ 是一个承载映射，它将有效输入配置映射到有效输出配置的集合。两个复形的顶点都具有形式 (p_i, x)，其中 $p_i \in \Pi$；它们是染色的，着色函数为 $\chi((p_i, x)) = p_i$。本文讨论的所有单纯映射都是保色的，也就是说，它们将每个顶点 (p_i, x) 映射到顶点 (p_i, y)，且二者具有相同的进程标识符 p_i。

许多有趣的任务在输入复形中都具有一定度的正则性（即对称性）。就共识而言，特别地，来自 $\mathcal{V}_I$ 的输入值的任意组合都是一个合法的初始配置。因此，在经典拓扑建模中，共识的输入复形是一个伪球面 [22]。

在本文中，我们将利用这样一个事实：强有效性并不要求我们逐一追踪协议复形中每一种可能初始配置的演变。因此，我们将把注意力限制在未解释复形 [38]上：我们不再为 x_i 的每个可能取值分别提供顶点，而只提供一个标记为 $\{p_i\}$ 的顶点，其含义是“ p_i 的实际输入值 x_i ”。这样，我们就可以抽象掉输入域 $\mathcal{V}_I$ 以及分配给各进程的实际初始值 $x_i \in \mathcal{V}_I$ 。因此，从拓扑角度看，未解释复形相当于对标准复形中的所有输入值和输出值进行“扁平化”。采用未解释协议复形的主要优势在于，即使对于二元共识，它们也比标准协议复形小几个数量级，并且不依赖于特定的初始配置。这可以与无色任务 [20, 第 4], 章的研究相比较；在该研究中，通过省略进程标识符，对复形进行了一种不同形式的“扁平化”。

定义 9（共识的未解释输入复形）。共识的未解释输入复形 $\mathcal{I}$仅由一个初始单形 $\sigma_0 = \{(p_1, \{p_1\}) \ldots, (p_n, \{p_n\})\}$ 及其所有面组成，顶点集为 $V(\mathcal{I}) = V(\sigma_0) = \{(p_i, \{p_i\}) \mid p_i \in \Pi\}$，其中标签 $\{p_i\}$ 表示 p_i的“未解释”（即固定但任意）输入值。

本文中，我们始终用 σ_0 表示上述输入单形。

共识的未解释输出复形 $\mathcal{O}$ 仅指定其输入值将决定决策值的进程。

定义 10（共识的未解释输出复形）。共识的未解释输出复形 $\mathcal{O}$ 是 n 个互不相交的复形 $\mathcal{O}(p_j)$, $p_j \in \Pi$的并集，每个复形都由单形 $\{(p_1, \{p_j\}) \ldots, (p_n, \{p_j\})\}$ 及其所有面组成。标签 $\{p_j\}$ 表示 p_j的“未解释”（即固定但任意）输入值。

共识任务的承载映射 Δ 将初始单形 $\sigma_0 \in \mathcal{I}$ 的任意面 ρ 映射到 $\mathcal{O}$ 的 dim(ρ)-面，这些面都具有与 $\chi(\rho)$ 相等的着色。显然， Δ 是刚性的且严格的。

未解释协议复形 $\mathcal{P}_r^{\mathbf{D}^\omega}$ 由一些顶点组成，这些顶点标记为相应进程截至目前已收集到的听闻历史。

定义 11（听闻历史）。对于可行图序列 $\mathcal{G}$，进程 p_i 在第 r 轮结束时的听闻历史$h_r^{\mathcal{G}}(p_i)$ 定义为

$$h_r^{\mathcal{G}}(p_i) = \{(p_j, h_{r-1}^{\mathcal{G}}(p_j)) \mid p_j \in \mathrm{In}^{\mathcal{G}}(p_i, r)\} \text{ for } r \geq 1, \tag{2}$$

$$h_0^{\mathcal{G}}(p_i) = \{p_i\}. \tag{3}$$

第 r 轮结束时的全局听闻历史 $h_r^{\mathcal{G}}$ 就是元组 $(h_r^{\mathcal{G}}(p_1) \ldots, h_r^{\mathcal{G}}(p_n))$.

进程 p_i 截至 $h_r^{\mathcal{G}}(p_i)$（即第 r 轮结束时）曾听闻过的进程集合记为 $\cup h_r^{\mathcal{G}}(p_i) = \bigcup_{p_j \in 在^{\mathcal{G}}(p_i, r)} \cup h_{r-1}^{\mathcal{G}}(p_j)$ 和 $\cup h_0^{\mathcal{G}}(p_i) = h_0^{\mathcal{G}}(p_i) = \{p_i\}$。

在每个可行图序列 $\mathcal{G} \in \mathbf{D}^\omega$中， p_i （分别为全局）在第 $r \geq 0$ 轮结束时所有可能的听取历史集合记为

$$H^r(p_i) = \{h_r^{\mathcal{G}}(p_i) \mid \mathcal{G} \in \mathbf{D}^\omega\}, \tag{4}$$

$$H^r = \{(h_r^{\mathcal{G}}(p_1), \ldots, h_r^{\mathcal{G}}(p_n)) \mid \mathcal{G} \in \mathbf{D}^\omega\}. \tag{5}$$

未解释协议复形$\mathcal{P}_r^{\mathbf{D}^\omega}$不依赖于初始配置，而仅依赖于$\mathbf{D}^\omega$，其定义如下：

定义 12（未解释协议复形，针对 $\mathbf{D}^\omega$）。对于给定的无感知消息对手 $\mathbf{D}^\omega$，未解释 r轮次协议复形 $\mathcal{P}_r^{\mathbf{D}^\omega} = \langle V(\mathcal{P}_r^{\mathbf{D}^\omega})\ F(\mathcal{P}_r^{\mathbf{D}^\omega})\rangle$、 $r \geq 0$ 由其顶点和面定义如下：

$$V(\mathcal{P}_r^{\mathbf{D}^\omega}) = \big\{(p_i, h_r(p_i)) \mid p_i \in \Pi,\ h_r(p_i) \in H^r(p_i)\big\},$$
$$Fct(\mathcal{P}_r^{\mathbf{D}^\omega}) = \big\{\{(p_1, h_r(p_1)), \ldots, (p_n, h_r(p_n))\} | \forall 1 \leq i \leq n : p_i \in \Pi, (h_r(p_1), \ldots, h_n(p_n)) \in H^r\big\}.$$

为简洁起见，当所考虑的无感知消息对手可从上下文中明确看出时，我们通常省略上标 $\mathbf{D}^\omega$ 。

决策映射 μ： $V(\mathcal{P}_r^{\mathbf{D}^\omega}) \to V(\mathcal{O})$ 是一个色彩单纯映射，它将进程 p_i 在轮次 r 结束时的最终视图映射为输出值 p_j，使得 $p_j \in \cup h_r^{\mathcal{G}}(p_i)$；该映射对非最终视图没有定义。注意，在任意轮次 r 之后所有进程都具有最终视图时， μ 由 $\mathcal{P}_r^{\mathbf{D}^\omega}$ 中各面的像唯一确定。若存在这样的单纯映射 μ，则称共识是可解的。

注。不使用未解释复形的标准拓扑建模同样需要执行承载映射 Ξ：$\mathcal{I} \to 2^{\mathcal{P}}$，它定义了协议复形 $\mathcal{P}$ 的子复形 $\Xi(\sigma)$；当协议从初始单形 $\sigma \in \mathcal{I}$开始时，该子复形便会出现。要解决一个任务，要求 $\mu \circ \Xi$ 被 Δ 承载，即对于所有 $\sigma \in \mathcal{I}$，都有 $\mu(\Xi(\sigma)) \in \Delta(\sigma)$。在我们的设定中，由于输入复形 σ_0 中只有一个（未解释的）面，且协议复形可以写作$\bigcup_{r\geq 1} \mathcal{P}_r^{\mathbf{D}^\omega} = \bigcup_{r\geq 1} \mathcal{P}^r(\sigma_0)$（即下文定义 14 中给出的所有迭代协议复形构造算子的并集），执行承载映射 Ξ 和承载映射 Δ 都与实际初始值无关，因此相当简单：前者就是 $\Xi = \bigcup_{r\geq 1} \mathcal{P}^r$ （其中每个 $\mathcal{P}^r$ 都视为一个承载映射），后者已在定义 10 之后说明。

3.2 通信伪球面

我们不直接使用关于 $\mathcal{P}_r$ 的定义 12，而是现在引入一个基于通信伪球面的替代定义。后者可以看作消息传递系统中广为人知的无等待共享内存系统的标准色彩细分（见定义 16）的对应物。从拓扑学角度来看，它可以定义如下：

定义 13（通信伪球面）。设 $\mathcal{K}$ 是一个带有正常着色 χ：$V(\mathcal{K}) \to \{p_1, \ldots, p_n\}$ 的 $n-1$ 维纯单形复形。我们通过其顶点集和面定义通信伪球面 $\mathrm{Ps}(\mathcal{K}) \to \{p_1, \ldots, p_n\}$如下：

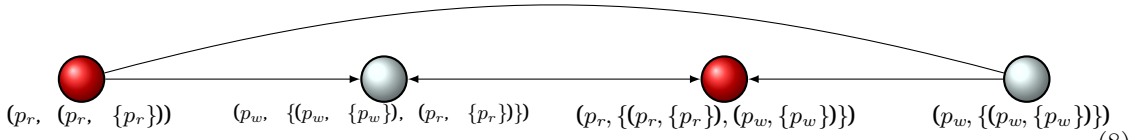
$$V(\mathrm{Ps}(\mathcal{K})) = \big\{(p_i, \sigma) \mid \sigma \in F(\mathcal{K}), p_i \in \chi(\sigma)\big\}, \tag{6}$$
$$Fct(\mathrm{Ps}(\mathcal{K})) = \big\{\{(p_1, \sigma_1), (p_2, \sigma_2), \ldots (p_n, \sigma_n)\} \mid \forall 1 \leq i \leq n :\ \sigma_i \in F(\mathcal{K}), p_i \in \chi(\sigma_i)\big\}. \tag{7}$$

给定一个 $(n-1)$ 维单形 $\sigma^{n-1} = \{(p_1, h_1) \ldots, (p_n, h_n)\} \in \mathcal{K}$，通信伪球面 $\mathrm{Ps}(\sigma^{n-1})$ 对满足 $\{(p_i, h_i)\} \in \sigma$ 的每个子集 $\sigma \subseteq \{(p_1, h_1) \ldots, (p_n, h_n)\}$ 都包含一个顶点 (p_i, σ)。直观地说， σ 表示进程 p_i 在一轮中可能听到其消息的那些进程的信息（回想一下， p_i 总能听到自己的消息）。因此，$\mathrm{Ps}(\sigma^{n-1})$ 确实符合伪球面的定义 [22]。

由于 $\big|\{\sigma \subseteq \{(p_1,\ h_1)\text{.....},\ (p_n,\ h_n)\} \setminus \{(p_i,\ h_i)\}\}\big| = 2^{n-1}$ 对于每个 p_i，每个通信伪球面 $\mathrm{Ps}(\sigma^{n-1})$ 都由 $|V(\mathrm{Ps}(\sigma^{n-1}))| = n2^{n-1}$ 个顶点组成：对于每个给定的顶点 $(p_i,\ \sigma)$ 和每个 $p_j \neq p_i$，恰好存在 2^{n-1} 个标签不同的顶点 $(p_j,\ \cdot)$。由于 $(p_i,\ \sigma)$ 在复形 $\mathrm{Ps}(\sigma^{n-1})$ 中与其中每一个都有一条边，因此其度必须为 $d = (n-1)2^{n-1}$。

在 $n = 2$ 或 $n = 3$ 的情况下，令 $v = |V(\mathrm{Ps}(\sigma^{n-1}))|$、 $e = |E(\mathrm{Ps}(\sigma^{n-1}))|$ 和 $f = |Fct(\mathrm{Ps}(\sigma^{n-1}))|$ 分别表示 $\mathrm{Ps}(\sigma^{n-1})$中顶点、边和面的数量。显然有 $v \cdot d = 2e$ 和 $v \cdot d = nf$。因此， $e = vd/2 = n(n-1)2^{2(n-1)-1}$ 和 $f = vd/n = (n-1)2^{2(n-1)}$。对于 $n = 2$，我们由此得到 $v = 4$、 $f = e = 4$、 $d = 2$，从而得到以下内容

初始单形 $\sigma_0^1 = \{(p_r, \{p_r\}),(p_w, \{p_w\})\}$ 的通信伪球面 Ps(σ_0^1):

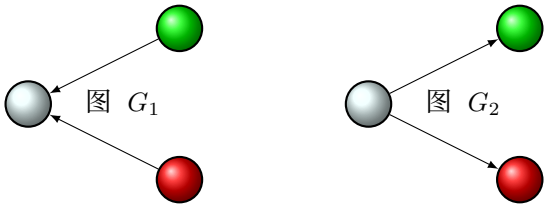


(8)

在上图以及本文全文中，我们采用 [19],所提出的边的标记约定，用以表示单形中各顶点之间的信息流。例如，在中间的单形（由边 $\leftrightarrow$连接）中，两个进程在第1轮都已互相收到对方的信息，因此连接边记为 $\leftrightarrow$。没有任何箭头的边表示两个端点彼此没有收到对方的信息。请仔细注意，在讨论同构的面和面时，我们也会纳入这些箭头：在本文全文中，出现在我们的协议复形中的两个面 σ 和 κ，仅当 $\chi(\sigma) = \chi(\kappa)$且所有边具有相同的定向时，才被视为同构。

我们还注意到，用 σ_0^1 的面标记顶点具有高度冗余性。因此，当需要明确引用顶点标签时，我们会将其简化，例如写作 $(p_r, \{p_r, p_w\})$，而不是 $(p_r, \{(p_r, \{p_r\}), (p_w, \{p_w\})\})$。

初始单形 σ_0^2 $=\{(p_r, \{p_r\}),(p_g, \{p_g\}),(p_w, \{p_w\})\}$ 对于 $n = 3$ 的通信伪球面Ps(σ_0^2)如图1所示。它还突出显示了两个面，分别对应于图 G_1（灰色）和图 G_2（黄色）：



(9)

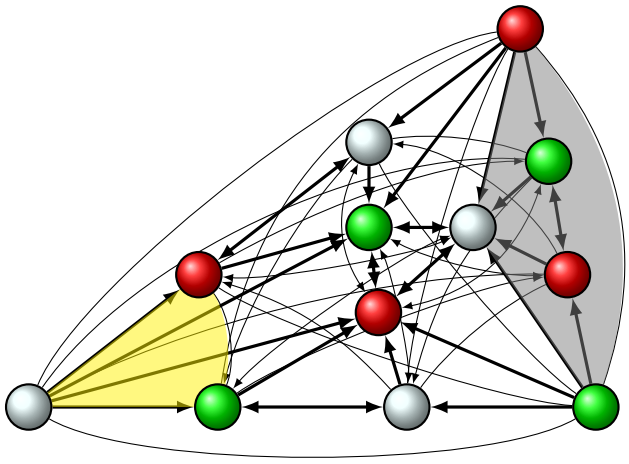
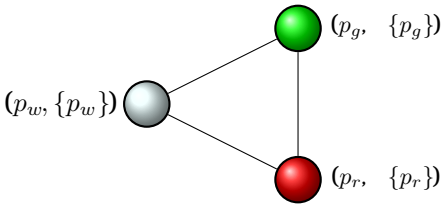


图1. 通信伪球面Ps(σ^{n-1})，对于 $n = 3$（其中 $L = 4$、$V = 12$、$E = 48$、$F = 32$ 和 $d = 8$），并突出显示了公式 (9) 中的通信图。粗边表示标准色彩细分 Ch(σ^2)。

现在，我们将通过通信伪球面重新表述给定无感知消息对手 $\mathbf{D}^\omega$ 的未解释协议复形定义。回顾定义 12，未解释初始协议复形 $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0^{\mathbf{D}^\omega}$ 仅由单个初始单形 $\sigma_0 = \sigma_0^{n-1} = \{(p_1, \{p_1\}) \ldots, (p_n, \{p_n\})\}$ 及其所有面组成。它表示未解释初始状态，其中每个进程只听到了来自自身的消息。以下是 $n = 3$ 和 $\Pi = \{p_w, p_r, p_g\}$的一个例子：



(10)

因此，单轮协议复形$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1^{\mathbf{D}^\omega}$ 就是由可能的图集合$\mathbf{D}$ 诱导的通信伪球面 Ps(σ_0)的子复形。例如， $\mathcal{P}_1$ 对于$\mathbf{D} = \{G_1, G_2\}$ 而言，是Ps(σ_0)中由图1 中对应于图 G_1 和 G_2 的两个高亮面构成的子复形。也就是说，不同于定义 13 中用$all\ \sigma_0$ 的所有可能面子集来标记 Ps(σ_0)的顶点，$\mathbf{D}$ 中的某个图所通信的面才会被$protocol\ complex\ construction\ operator\ \ \mathcal{P} = \mathcal{P}^{\mathbf{D}^\omega}$ 用于生成 $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}(\sigma_0)$。反过来，如果将$\mathbf{D}$ 解释为一个$(n-1)$维单纯复形$\mathbf{D}(\sigma_0)$，即按照 (7) 对每个图 $G \in \mathbf{D}$ 包含一个面（及其所有面），则可以写成$\mathcal{P}^{\mathbf{D}^\omega}(\sigma_0) = \text{Ps}(\sigma_0) \cap \mathbf{D}(\sigma_0)$。

这可以简洁地概括为以下定义：

定义 14（协议复形构造伪球面）。设 $\mathcal{K}$ 是一个带有正常着色 $\chi\colon V(\mathcal{K}) \to \{p_1, \ldots, p_n\}$ 的$(n-1)$ 维纯单纯复形，且 $\text{In}^G(p_i)$ 是在通信图 $G \in \mathbf{D}$ 中 p_i 能听到消息的进程集。我们通过其顶点集和面如下定义由算子$\mathcal{P}$： $Fct(\mathcal{K}) \to \mathcal{P}(\mathcal{K})$ 诱导的、针对消息对手 $\mathbf{D}^\omega$ 的协议复形构造伪球面 $\mathcal{P}(\mathcal{K})$；该算子可作用于 $\mathcal{K}$ 的面：

$$V(\mathcal{P}(\mathcal{K})) = \big\{(p_i, \sigma) \in \Pi \times F(\mathcal{K}) \mid \exists G \in \mathbf{D} : \text{In}^G(p_i) = \chi(\sigma)\big\}, \tag{11}$$

$$Fct(\mathcal{P}(\mathcal{K})) = \big\{\{(p_1, \sigma_1), \ldots, (p_n, \sigma_n)\} \mid \exists G \in \mathbf{D}, \forall 1 \le i \le n : \text{In}^G(p_i) = \chi(\sigma_i)\big\}. \tag{12}$$

根据定义 14，我们的算子 $\mathcal{P}$（以及Ps）实际上仅针对 $\mathcal{K}$中的面进行定义，即，维数 $n-1$ 实际上是隐式编码在该算子中的。下面我们将证明，这对于我们的目的来说已经足够，因为每个 $\mathcal{P}$ 都具有边界一致性：这一性质将使我们也能够唯一地为 $\mathcal{K}$ 中的真面定义 $\mathcal{P}$。我们将使用以下关于边界一致性的简单定义，该定义利用了这样一个事实：色单纯复形的顶点的正常着色为其任意一个面的顶点定义了一个自然顺序。

定义 15（边界一致性）。我们称根据定义*14* 的协议复形构造算子$\mathcal{P}$ 是边界一致的，如果对于来自每个可应用 $\mathcal{P}$ 的单纯复形的三个面 σ、 κ 和 τ 的所有可能选择，都有

$$\sigma \cap \kappa = \sigma \cap \tau \implies \mathcal{P}(\sigma) \cap \mathcal{P}(\kappa) = \mathcal{P}(\sigma) \cap \mathcal{P}(\tau). \tag{13}$$

以下引理1表明，每个 $\mathcal{P}$ 都是边界一致的，并且对于非极大单形 ρ （视为复形），也可以唯一地定义 $\mathcal{P}(\rho)$。此外，它揭示了 $\mathcal{P}$，作为承载映射来看，是严格的（但不一定是刚性的）：

引理 1（ $\mathcal{P}$的边界一致性）。根据定义*14*，协议构造算子 $\mathcal{P}$ 均具有边界一致性。它可以应用于任意单形 $\rho \in \mathcal{K}$（视为复形），并生成唯一的（可能是不纯的）色复形 $\mathcal{P}$（ρ），其维数至多为 $\dim(\rho)$。此外，

$$\mathcal{P}(\sigma \cap \kappa) = \mathcal{P}(\sigma) \cap \mathcal{P}(\kappa) \tag{14}$$

对于任意 σ、 $\kappa \in \mathcal{K}$。

证明。采用定义 15 中的记号，假设 $\rho = \sigma \cap \kappa = \sigma \cap \tau$for $0 \le \dim(\rho) < n-1$；对于其余情形，式 (14) 显然成立。根据式 (12)，考虑由同一个图 $G \in \mathbf{D}$ 在 $\mathcal{P}(\sigma)$（分别在 $\mathcal{P}(\kappa)$）中产生的面 $F_\sigma = \{(p_1, \sigma_1), (p_2, \sigma_2) \ldots (p_n, \sigma_n)\}$（分别为 $F_\kappa = \{(p_1, \kappa_1), (p_2, \kappa_2) \ldots (p_n, \kappa_n)\}$）。回想一下， σ_i （分别为 κ_i）是 σ （分别为 κ）的一个面，表示 p_i 通过 $\text{In}^G(p_i)$ 从 $\chi(\sigma_i)$（$= \chi(\kappa_i)$）中的进程接收到的信息。

当且仅当 $\kappa_i = \sigma_i$ 时，顶点 (p_i, κ_i) 才会出现在 $\mathcal{P}(\sigma) \cap \mathcal{P}(\kappa)$ 中；而这又只有在 $\chi(\kappa_i) \subseteq \chi(\rho)$ 时才成立。事实上，若 κ_i 只包含一个顶点 $v \in V(\kappa)$，且 $\chi(v) \in \chi(\kappa \setminus \rho)$，那么 σ_i 就会包含相应的顶点 $v' \in V(\sigma)$，且 $\chi(v') = \chi(v)$ 满足 $v' \neq v$，因为根据 ρ 的定义，$(\kappa \setminus \rho) \cap (\sigma \setminus \rho) = \emptyset$。然而，这将与 $\kappa_i = \sigma_i$ 矛盾。注意，由于对每个 i 都有 $p_i \in \chi(\sigma_i)$，这也意味着 $p_i \in \chi(\rho)$。

因此，恰好是 F_σ（以及 F_κ）中仅由相同顶点组成的极大面（p_i, κ_i）$= (p_i, \sigma_i)$，出现在 $\mathcal{P}$（σ）$\cap \mathcal{P}$（κ）中。由于这对所有图 $G \in \mathbf{D}$ 都成立，因此子复形 $\mathcal{P}$（σ）$\cap \mathcal{P}$（κ），作为所得相同极大面的并，其维数至多为 $\dim(\rho)$。现在，由于将 κ 替换为 τ时完全相同的推理同样适用，我们得到 $\mathcal{P}$（σ）$\cap \mathcal{P}$（κ）$= \mathcal{P}$（σ）$\cap \mathcal{P}$（τ），因此等式 (13) 成立，从而 $\mathcal{P}$ 的边界一致性成立。

现在我们可以直接定义 $\mathcal{P}(\rho) = \mathcal{P}(\sigma \cap \kappa) := \mathcal{P}(\sigma) \cap \mathcal{P}(\kappa)$，从而为面$\sigma$、$\kappa \in \mathcal{K}$确保式 (14)。对于一般单形，反设存在 σ、κ，满足 $\rho = \sigma \cap \kappa \neq \emptyset$，但 $\mathcal{P}(\rho) \neq \mathcal{P}(\sigma) \cap \mathcal{P}(\kappa)$。选择面 σ'、κ' 和 σ''、κ''，满足 $\rho = \sigma' \cap \kappa'$、$\rho = \sigma'' \cap \kappa''$、$\sigma = \sigma' \cap \sigma''$ 和 $\kappa = \kappa' \cap \kappa''$，这总是可能的。将式(14) 应用于所有这些对，得到 $\mathcal{P}(\rho) = \mathcal{P}(\sigma') \cap \mathcal{P}(\kappa') = \mathcal{P}(\sigma'') \cap \mathcal{P}(\kappa'')$，$\mathcal{P}(\sigma) = \mathcal{P}(\sigma') \cap \mathcal{P}(\sigma'')$ 以及 $\mathcal{P}(\kappa) = \mathcal{P}(\kappa') \cap \mathcal{P}(\kappa'')$。因此我们发现

$$\mathcal{P}(\rho) \neq \mathcal{P}(\sigma) \cap \mathcal{P}(\kappa) = \mathcal{P}(\sigma') \cap \mathcal{P}(\sigma'') \cap \mathcal{P}(\kappa') \cap \mathcal{P}(\kappa'') = \mathcal{P}(\rho) \cap \mathcal{P}(\sigma'') \cap \mathcal{P}(\kappa'') = \mathcal{P}(\rho),$$

这就产生了矛盾。 □

请注意，根据定义8，$\mathcal{P}$ 因此确实可以被解释为一个承载映射，并且它具有严格性。众所周知，严格性意味着，对于任意单形 $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$，在 $\mathcal{K}$ 中存在一个维数最小的唯一单形 σ，称为载体 ρ，使得 $\rho \in \mathcal{P}(\sigma)$。

与定义 12 的比较表明，定义 14 中给出的 $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}(\sigma_0)$ 确实就是未解释的一轮协议复形。一般的 r 轮未解释协议复形 $\mathcal{P}_r$, $r \geq 1$ 定义为 $\mathcal{P}(\mathcal{P}_{r-1})$，即对 $\mathcal{P}_{r-1}$ 的每个面 σ 应用 $\mathcal{P}$ 后所得复形的并，形式化地写作 $\mathcal{P}_r = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{P}_{r-1}} \mathcal{P}(\sigma)$。边界一致性确保，对于初始单形 $\sigma_0 = \{(p_1, \{p_1\}) \ldots, (p_n, \{p_n\})\}$，任意 $r \geq 0$ 的 $\mathcal{P}_r = \mathcal{P}^r(\sigma_0)$ 都是良定义的。$r = 2$ 的示例见图 3 下半部分。注意，$\mathcal{P}_r$ 中某个面内顶点 $(p_i, h_r(p_i))$ 的入边箭头表示定义 11 中最外层的部分；p_i 在早期轮次中的入边标记在此处已不可见。不过，给定单形 $\rho = \{(p_1, h_r(p_1)) \ldots, (p_n, h_r(p_n))\} \in \mathcal{P}_r$，载体 $\sigma \in \mathcal{P}_{r-1}$ 中顶点 $(p_j, h_{r-1}(p_j)) \in V(\sigma)$ 的标记可用于恢复第 $r-1$ 轮的箭头；其中 $\sigma \in \mathcal{P}_{r-1}$ 是 ρ 的载体，即满足 $\rho \in \mathcal{P}_1(\sigma)$ 的唯一单形。

我们注意到，$\mathcal{P}_r = \mathcal{P}^{r-1}(\mathcal{P}(\sigma_0)) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^{r-1}(\sigma_0))$使我们可以用两种等价方式看待 $\mathcal{P}_r$ 的构造：一是将单轮构造 $\mathcal{P}$ 应用于 $\mathcal{P}_{r-1}$ 的每个面 F_{r-1}；二是将（$r-1$）轮构造 $\mathcal{P}^{r-1}$ 应用于 $\mathcal{P}_1$的每个面 F。$\mathcal{P}$ 的边界一致性再次确保，这两种方式得到的协议复形完全相同。第 4 节给出的共识可解性/不可解性判定过程，将受益于这种构造所提供的不同视角。

在本节余下部分，我们将讨论一个事实所带来的一些推论：与一般协议复形构造算子 $\mathcal{P}$ 相对应的承载映射总是严格的，但不一定是刚性的（回顾引理 1）。这实际上是由协议复形构造中的非对称性导致的，因为图$\mathbf{D}$ 并非平等对待所有进程。

考虑图 1 所示的完全通信伪球面，它对应于$\mathbf{D}$，其中包含所有具有 n 个顶点的所有 可能图（回顾定义 13）。它确实平等对待所有进程，这也意味着其外边界（由 $\mathcal{P}(\partial\sigma_0)$定义，见下文定义 17 ）具有非常规整的结构。例如，图 1 外三角形底边上排列的四个白色和绿色顶点，实际上是式（8）所示的 2 进程通信伪球面的一个实例。与之对应的承载映射是刚性的。相比之下，消息对手 $\mathbf{D} = \{G_1, G_2\}$ 对应的协议复形，其边界非常不规则，如图 2 所示；图 1 中两个高亮的面分别对应图 G_1 和图 G_2。

不过，值得一提的是，协议复形构造算子还有其他实例也具有刚性的等价承载映射。一个重要的例子是广受欢迎的标准色彩细分 [20,25], ，它刻画了共享内存的迭代即时快照（IIS）模型 [23]:

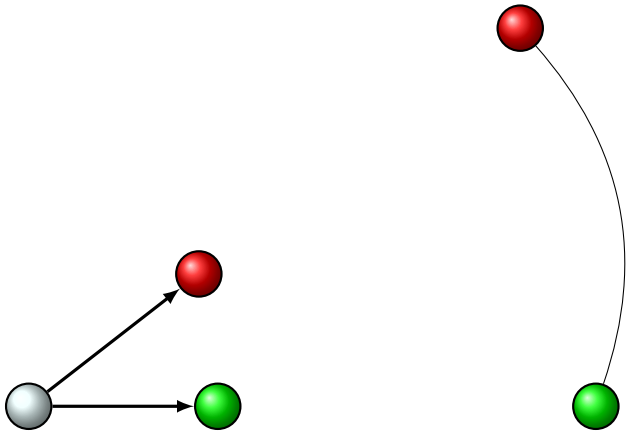


图 2. 图 1 所示简单消息对手的边界 Bd($\mathcal{P}_1$)。

定义 16（色彩细分）。令 $\mathcal{K}$ 为一个（$n-1$）维单纯复形，其正常着色为 χ： V（$\mathcal{K}$）$\to \{p_1,\ldots,p_n\}$。我们通过其顶点集和面如下定义色彩细分：

$$V(\mathrm{Ch}(\mathcal{K})) = \{(p_i,\sigma) \in \Pi \times F(\mathcal{K}) \mid p_i \in \chi(\sigma)\}, \tag{15}$$

$$Fct(\mathrm{Ch}(\mathcal{K})) = \{\{(p_1,\sigma_1),\ldots,(p_n,\sigma_n)\} \mid \exists \pi : [n] \to [n] \ permutation\ \sigma_{\pi(1)} \subseteq \ldots \subseteq \sigma_{\pi(n)}, \forall 1 \le i,j \le n : \chi(\sigma_i) \wedge (p_i \in \chi(\sigma_j) \Rightarrow \sigma_i \subseteq \sigma_j)\}. \tag{16}$$

比较定义 13 和定义 16 后可以立即看出，V(Ps(σ^{n-1})) =V(Ch(σ^{n-1})) 且 Ch(σ^{n-1}) $\subseteq$ Ps(σ^{n-1})，也就是说，Ch(σ^{n-1}) 确实是 Ps(σ^{n-1}) 的子复形。图 1 中，我们用粗边和箭头标出了相应消息对手的协议复形 Ch(σ_0)。事实上，色彩细分以及即时快照模型只是我们的无感知消息对手的一种特殊情况，其集合 D 由所有单向连通（$\forall G \in$D $a,b \neq a \in V(G)$:∃从 a 到 b 或从 b 到 a 的有向路径，位于 G 中）且传递闭合的有向图组成（$\forall G \in$D : $(a,b),(b,c) \in E(G) \Rightarrow (a,c) \in E(G)$）。

引理2（色彩细分的等价消息对手）。令 σ_0 为未解释的输入复形，其进程集为 $\Pi = \{p_1,\ldots,p_n\}$，并令 **D** 为 Π 上所有单向连通且传递闭包的图的集合。则，$\mathcal{P}$（σ_0） =Ch(σ_0)。

证明。首先注意，对于任意面 $\sigma \in \sigma_0$ 使得 $p_i \in \chi(\sigma)$，存在一个图 $G_\sigma \in$D，使得In$^{G_\sigma}(p_i) = \chi(\sigma)$: 只需考虑 $E(G_\sigma) = \{(u,v) \mid u \in \chi(\sigma) \wedge v \in \Pi\} \cup \{(w,y) \mid w,y \notin \chi(\sigma)\}$。根据构造，$G_\sigma$ 既是传递闭的，也是单向连通的。因此，V(Ch(σ_0)) $\subseteq V(\mathcal{P}(\sigma_0))$。另一方面，根据协议复形伪球面构造的定义 14，可得 $V(\mathcal{P}(\sigma_0)) \subseteq V$(Ch($\sigma_0$))。因此，$V(\mathcal{P}(\sigma_0)) = V$(Ch($\sigma_0$))。

令 $\sigma = \{(p_1,\sigma_1)..,(p_n,\sigma_n)\}$ 为 Ch(σ_0) 的一个面，并考虑图 G_σ，其边为$E(G_\sigma) = \{(p_j,p_i) \mid p_j \in \chi(\sigma_i)\}$。假设 $(p_i,p_j),(p_j,p_k) \in E(G_\sigma)$。根据定义 16，有 $p_i \in \chi(\sigma_j)$，这意味着 $\sigma_i \subseteq \sigma_j$。类似地，$\sigma_j \subseteq \sigma_k$，因此 $\sigma_i \subseteq \sigma_k$。由此可得 $p_i \in \chi(\sigma_k)$，并且根据 G_σ 的构造，$(p_i,p_k) \in E(G_\sigma)$。这表明 G_σ 是传递闭合的。

现在考虑 p_i，$p_j \in \Pi$。由于 π 是一个排列，对于某个i'，$j' \in [n]$，有 $p_i = p_{\pi(i')}$ 和 $p_j = p_{\pi(j')}$。不失一般性，假设 $i' \le j'$。那么 $\sigma_i = \sigma_{\pi(i')} \subseteq \sigma_{\pi(j')} = \sigma_j$，这意味着$p_i \in \chi(\sigma_j)$。根据 G_σ 的定义，可得 $(p_i,\ p_j) \in E(G_\sigma)$。这表明 G_σ 也是单向连通的。因此，σ 也必定是 $\mathcal{P}(\sigma_0)$ 的一个面，即 Fct(Ch(σ_0)) $\subseteq Fct(\mathcal{P}(\sigma_0))$。

反之，设 $\sigma = \{(p_1,\sigma_1)\ldots,(p_n,\sigma_n)\}$ 为 $\mathcal{P}(\sigma_0)$ 的一个面。设 G_σ 为 D 中诱导 σ 的图。回想一下，G_σ 是单侧连通且传递闭的。设 S_i 表示包含 p_i 的强连通分量。由于 G_σ 是传递闭的，S_i 实际上是一个有向团。因此，$S_i \subseteq \chi(\sigma_i) =$ In$^{G_\sigma}(p_i)$。考虑分量图 G^*，其中$V(G^*) = \{S_i \mid i \in [n]\}$，并且 $E(G^*) = \{(S_i,S_j) \mid (p_i,p_j) \in E(G_\sigma)\}$。由于 G_σ 是传递闭的

且是单侧连通的， G^* 是一个传递锦标赛（其中对所有 $a, b \in V(G^*)$，必须存在 (a, b) 或 (b, a)）。因此， G^* 有一条有向哈密顿路径 $S_{\pi(1)}, \ldots, S_{\pi(s)}$，对于 $s = |V(G^*)|$；注意 $s \leq n$，因为对于不同的进程 p_i 和 p_j，$S_i = S_j$ 可能相同。

显然，根据连通分量的哈密顿路径得到的排列，再按进程标识符对属于同一连通分量的进程进行排序，便会导出进程索引的全序： $i \preceq j$ if $S_i = S_{\pi(i')}$ and $S_j = S_{\pi(j')}$ with $i' \leq j'$ and $i \leq j$，也就是说，我们首先根据各索引所属连通分量在 G^*中的哈密顿路径上的顺序，对每个索引 i 进行排序；若顺序相同，则按其进程标识符排序。因此， $\preceq$ 是 $[n]$上的全序，从而导出排列 π' ，且具有如下性质：若 $i \leq j$，则$S_{\pi'(i)} = S_{\pi'(j)}$，或者存在一条从$S_{\pi'(i)}$ 到$S_{\pi'(j)}$的边。

由 G_σ 的传递闭包和 π'的构造，我们得到 $\bigcup_{i=1}^{n} S_{\pi'(i)} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{In}^{\infty}_{G_\sigma}(\pi'(p_i))$ 因此， π' 也是 σ 中满足成为 Ch(σ_i) 的面的 σ_i 的一个排列。由此可得 $\sigma^i \in Fct$(Ch(σ_0))。因此 $Fct(\mathcal{P}(\sigma_0)) \subseteq Fct(\mathrm{Ch}(\sigma_0))$，这就完成了对 $Fct(\mathcal{P}(\sigma_0)) = Fct(\mathrm{Ch}(\sigma_0))$ 的证明，从而 $\mathcal{P}(\sigma_0) = \mathrm{Ch}(\sigma_0)$。□

对于任意一对单形 $\sigma, \kappa \in \mathcal{K}$，由式 (14) 可知 Ch($\sigma$)∩Ch($\kappa$) = Ch($\sigma \cap \kappa$)，即共享一个面的细分单形恰好相交于该面在 Ch($\mathcal{K}$) 中的细分。因此，引理 1 保证迭代标准色彩细分 Ch^r($\mathcal{K}$) 定义良好。

由于其规则结构，等价的承载映射也是刚性的。与图1中的通信伪球面一样，沿外三角形底边对齐并由粗箭头连接的四个白色和绿色顶点，实际上是二进程色彩细分的一个实例。事实上，维数为 ℓ 的单形 σ^ℓ 的标准色彩细分Ch(σ^ℓ)可以迭代地构造 [20]：从顶点 $V(\sigma^\ell)$出发，即 σ^ℓ的0维面 σ^0 ，其中Ch(σ^0) = σ^0，通过在边 σ^1 的内部放置2个新顶点，并将它们彼此连接以及连接到 σ^1的顶点，来构造边 σ^1 的Ch(σ^1)。为构造Ch(σ^3)，在其内部放置3个新顶点，并将它们彼此连接以及连接到先前构造的顶点，依此类推。

Cor推论 1. 令 $\mathcal{K}$ 为任意单纯复形，则 $\mathrm{Ch}(\mathcal{K}) = \mathcal{P}(\mathcal{K})$ 其中 **D** 为集合 *of allo*楔形图。

证明。 由引理 2 和 $\mathcal{P}$($\mathcal{K}$) 的边界一致性立即可得。

3.3 协议复形的面分类

我们首先定义协议复形的边界这一重要概念。

定义17（边界）。一 轮协议复形的边界 $\mathrm{Bd}(\mathcal{P}_1)$ 定义为 $\mathrm{Bd}(\mathcal{P}_1) = \mathcal{P}(\partial\sigma_0)$。一般 r轮复形 $\mathcal{P}_r = \mathcal{P}^r(\sigma_0)$ 的 边界 $\mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r)$ （相应地，某个子复形$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}_r$的边界 $\mathrm{Bd}(\mathcal{C})$ ）为 $\mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r) = \mathcal{P}^r(\partial\sigma_0)$。

由于 $\mathcal{P}$ 的边界一致性性质（引理 1），边界正是 $\mathcal{P}_r$ 的“最外层”部分，即由 $\partial\sigma_0$ 承载的部分；每个面 $F \in$Bd($\mathcal{P}_r$) 的维数至多为 dim(σ_0) $- 1 = n - 2$。回想一下，它也可能小于 $n - 2$，因为作为承载映射的 $\mathcal{P}$ 不一定是刚性的。然而，显然， F 总是 $\mathcal{P}_r$ 中某个面的面。在图 1 的情形下，其中 $\mathcal{P}_1 = \{G_1, G_2\}$ 与式（9）中给出的图 G_1, G_2 一起，Bd($\mathcal{P}_1$) 仅由图 2 所示的三条边和顶点组成。注意，面 $\rho \in$ Bd($\mathcal{P}_r$) 的顶点 $V(\rho)$ 所对应的进程可能彼此听到过消息，但在轮次 $1, \ldots, r$ 中，可能没有听到 $\Pi \setminus V(\rho)$ 中进程的消息。

作为更为详尽的运行示例，考虑图 3 所示的 RAS 消息对手：其一轮未解释复形 $\mathcal{P}_1^{RAS}$（左上部分）令人联想到众所周知的放射性标志，因此得名。其二轮未解释复形 $\mathcal{P}_2^{RAS}$ 显示在图的底部。它是通过对每个面 $F \in \mathcal{P}_1$ 取一轮未解释复形 $\mathcal{P}(F)$ 的并集而构造的。其边界 Bd($\mathcal{P}_2^{RAS}$) 由位于最外层三角形的（点线及部分点划线）边界上的那些面的所有顶点和边构成。

为了对协议复形中的面进行分类，**D** w 中各图的根分量 ill turn 结果至关重要。

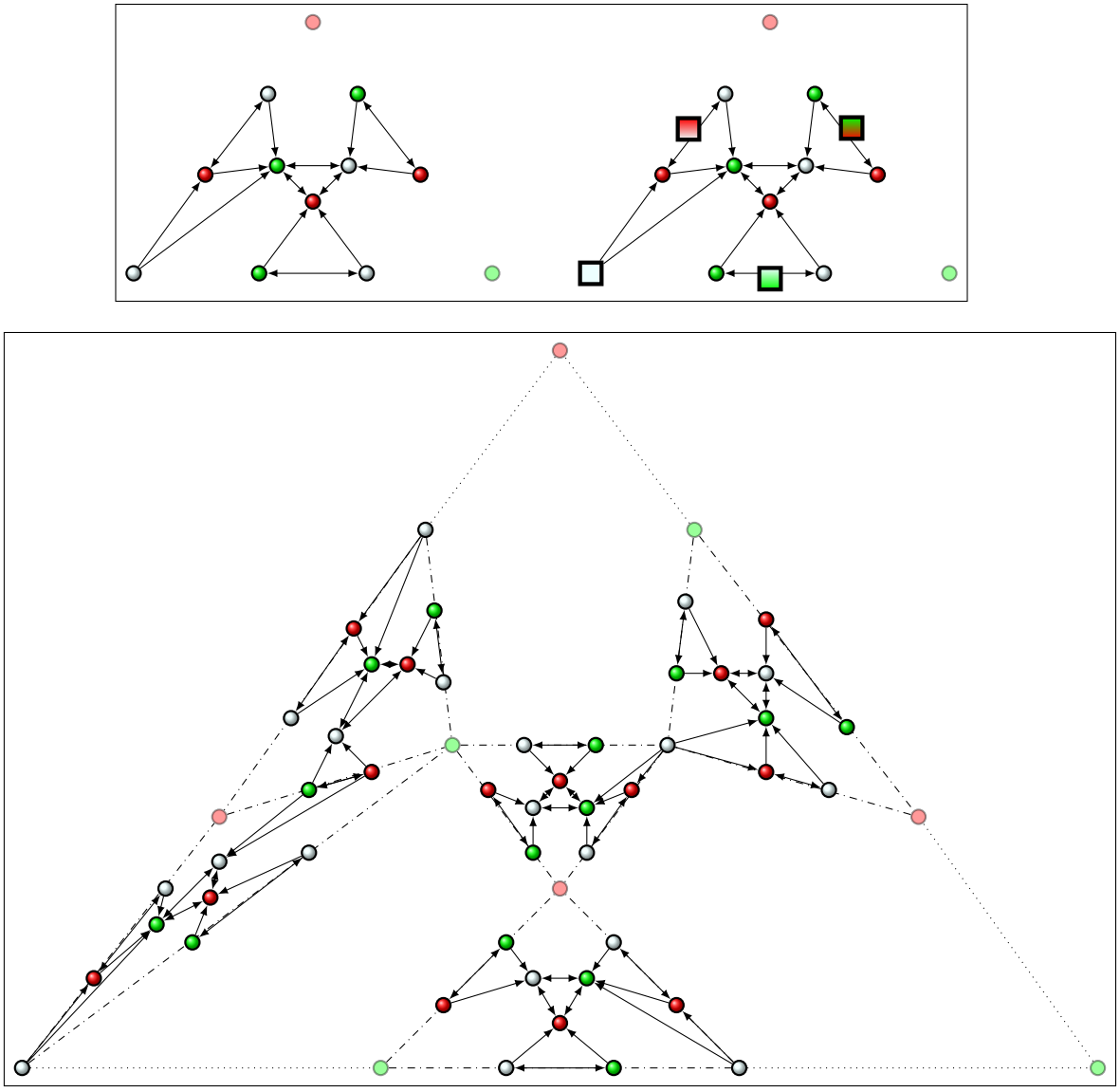


图3.RAS消息对手一轮（顶部）和 $\mathcal{P}_2^{RAS}$两轮（底部）的协议复形 $\mathcal{P}_1^{RAS}$。顶部右侧图还显示了 $\mathcal{P}_1^{RAS}$ 的边界根分量。

定义18（根分量）。给定协议复形中的任意面 $F \in \mathcal{P}_r$，$r \geq 1$令$\sigma \in \mathcal{P}_{r-1}$ 为其载体，即满足 $F \in \mathcal{P}(\sigma)$ 的唯一面，并令 $G \in \mathbf{D}$ 为在 $\mathcal{P}(\sigma)$ 中通向 F 的对应图。F 的根分量 $R(F)$ 是 F 中与 G 内不具有来自 $G \setminus R$ 的入边的强连通分量 R 相对应的面。

众所周知，每个具有 n 个顶点的有向图至少有一个、至多有 n个根分量，并且 G 中的每个进程都可以通过 G中的某条有向路径，从至少一个根分量的每个成员到达。具有单个根分量的图称为有根图，很容易看出，只要 $\mathbf{D}$ 中有一个不是有根图的图，共识就会不可能实现：对手可能永远重复这个图，从而阻止不同的根分量协调输出值。因此，接下来我们将把注意力限制在这样的消息对手上：$\mathbf{D}$ 仅由有根图组成，并将表示 F的根分量的面记为 $R(G) = R(F)$。注意，$R(G)$ 是一个面，因此包含互连结构的边及其定向；其顶点集合记为 $V(R(F)) = \{(p_i, h_r(p_i)) \mid p_i \in \chi(R(F))\}$。回顾定义 11，$p_i$ 在某个顶点 $v = (p_i, h_r(p_i)) \in V(\rho)$ 中实际获知的进程集合记为 $\cup h_r(p_i)$。

定义 19（边界面）。面 $F \in \mathcal{P}_r$ 是一个边界面，如果子复形 $F \cap \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r)$非空。子复形 $F \cap \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r)$ 将被称为面的边界 F。边界面 F 是适当的，如果根分量的成员没有共同从所有进程处获知信息，即$\bigcup_{(p_i, h_r(p_i)) \in V(R(F))} \cup h_r(p_i) \neq \Pi$。

直观地说，一个边界面 $F \in \mathcal{P}_r$ 至少有一个顶点 $v \in \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r)$。显然，$v$ 最多可能从某个面 $\rho \in \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r)$中的进程获知信息，该面的维数至多为 $n-2$，但不会从 ρ 之外的进程获知信息（因此，特别是不会从所有进程获知信息）。

边界面的面边界 $F \cap \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r)$ 通常确实是一个子复形，而不是单个面，正如图 2 左侧部分（由表示图 G_2 的 F 生成）所示。此外，$F \cap \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r)$ 甚至不必连通。例如，如果图 2 的消息对手还包含图 $G_3 = \{r \to g \to w\}$，即一条链（其根分量为 r），我们会观察到相应面 F_3 的 $F_3 \cap \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_1) = \{r \to g, w\}$。最后，$F \cap \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r)$ 甚至不一定包含整个根分量 $R(F)$：由于 $\dim(\mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r)) = n-2$，如果 F 不是真边界面，即 $R(F) = F$ 的成员合起来听取了所有进程的消息，那么这就不可避免。例如，如果图 2 的消息对手还包含环 $G_4 = \{r \to g \to w \to r\}$（其根分量 $R(F_4) = F_4 = \{r \to g \to w \to r\}$ 由所有进程组成），那么（非真）边界面 $F_4 \cap \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_1) = \{r, g, w\}$ 显然不可能包含 $R(F_4)$。

定义*20*（边界分量和边界根分量）。对于每个真边界面 $F \in \mathcal{P}_r$，边界分量 $B(F)$是 F 的最小面，其成员未从 $B(F)$之外的进程收到消息，即，$\bigcup_{(p_i, h_r(p_i)) \in V(B(F))} \cup h_r(p_i) \subseteq \chi(B(F))$。对于不是真边界面的面 F，为完整起见，我们约定 $B(F) = F$。$\mathcal{P}_r$ 的所有真边界分量的集合记为 $\mathit{BdC}(\mathcal{P}_r)$（对于子复形 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}_r$，相应地限制为 $\mathit{BdC}(\mathcal{C})$）。

根分量 $R(F)$（属于真边界面 F）称为边界根分量；它必然满足 $R(F) \neq F$。$\mathcal{P}_r$ 的所有边界根分量的集合（相应地，子复形 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}_r$）记为$\mathrm{BdR}(\mathcal{P}_r)$ 相应地 $\mathrm{BdR}(\mathcal{C})$。

下面的引理 3 将断言，一个面的边界分量是唯一的，并且包含其根分量。

定义 21（边界分量载体）。边界分量载体 $\beta(F)$ 的真边界面 F是初始单形 $\sigma_0 = \{(p_1, \{p_1\}), \ldots, (p_n, \{p_n\})\}$ 所承载的最小面。对于一个 F非真边界面的面，我们约定 $\beta(F) = \sigma_0$，以保持一致性。

由于 $\chi(\beta(F)) = \chi(B(F))$，显然，$\beta(F)$也隐式地刻画了 $B(F)$中进程的听取集合：根据定义 20，其成员可能从 $\beta(F)$中的进程处获知信息，但不会从其他进程处获知信息。请特别注意，这也说明了进程对其他进程初始值的了解情况，因为$B(F)$的成员至多只能知道 $\beta(F)$中的进程的初始值。

举例来说，考虑图3右上方的部分，其中展示了RAS消息对手下 $\mathcal{P}_1^{RAS}$的边界面中的边界根分量，这些分量以带粗边框的方形节点表示。图3 底部所描绘的BdR_2^{RAS}由接触外边界的边界面 F的所有面 $B(F)$组成：沿顺时针方向，从最左下方的边界面开始，我们得到以下各对（边界根分量，边界分量载体），表示边界面的 $B(F)$：$(w,\{w\})$、$(r \leftrightarrow w,\{r,w\})$、$(r \leftrightarrow w,\{r,w\})$、$(w,\{w,r\})$、$(r \leftrightarrow g,\{r,g\})$、$(w,\{w,g\})$、$(w \leftrightarrow g,\{w,g\})$。显然，最后一对$(w \leftrightarrow g,\{w,g\})$中的边界根分量 $w \leftrightarrow g$的成员（表示底部的边界面）只知道它们自己的初始值，而不知道红色进程的初始值。

引理 3（真边界面的边界分量的性质）。 边界分量 $B(F)$ （属于真边界面 $F \in \mathcal{P}_r$ ）满足以下性质：

(i) $B(F)$ 是唯一的，*(ii)* $R(F) \subseteq B(F) \subseteq F \cap \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r)$，这也意味着 $B(F) \neq F$，*(iii)* $B(F) = R(F)$ 对于 $r = 1$，但可能 $R(F) \subsetneq B(F)$ 对于 $r \geq 2$。

证明。对于 (i)，反设存在某个大小相同的替代项 $B'(F)$。根据定义 18， $R(F) \subseteq B(F)$ 和 $R(F) \subseteq B'(F)$都必须成立，因为否则 $B(F)$ 中的某个进程就会从 $R(F) \setminus B(F)$ 中的某个进程处获知信息；对于 $B'(F)$，同理。由于 $B(F) \neq B'(F)$，存在一个 $v' = (p_i', h_r(p_i')) \in B'(F) \setminus B(F)$，它存在于 $B'(F)$ 中，因为某个$v \in B(F) \cap B'(F)$ 已经从 p_i' 处获知信息。但这样一来， v' 也存在于 $B(F)$ 中，矛盾。对于 (ii)，除 $R(F) \subseteq B(F)$ 外，我们还有 $\sigma = R(F) \cap \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r) \neq \emptyset$，因为根据定义19，真边界面 的 $R(F)$ 并不涵盖所有进程。现在首先假设$R(F) \not\subseteq F \cap \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r)$，即 $R(F) \not\subseteq \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r)$（因为 $R(F) \subseteq F$显然总是成立）。对于每个面 $\sigma \in \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r)$，因此都存在某个 $v = (p_i, h_r(p_i)) \in R(F) \setminus \sigma \neq \emptyset$。然而，根据根分量的性质，某个进程 $p_j \in \chi(\sigma)$必须已经从 $p_i \notin \chi(\sigma)$ 处获知信息，这将与 $p_j \in \chi(\sigma)$ 矛盾。因此，我们必须有 $R(F) \subseteq \mathrm{Bd}(\mathrm{Pr})$。最后的矛盾同理，假设 $B(F) \setminus \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r) \neq \emptyset$，即对于任意面 $\sigma \in \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r)$，都存在某个$v = (p_i, h_r(p_i)) \in B(F) \setminus \sigma$。然而，根据定义 20中边界分量的定义，只有当某个进程 $p_j \in \chi(\sigma)$已经从 $p_i \notin \chi(\sigma)$处获知信息时，这样的 v 才会存在，这将与 $p_j \in \chi(\sigma)$矛盾。因此， $B(F) \subseteq F \cap \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r)$。最后， $B(F) \neq F$源于以下事实： $B(F) \subseteq \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r)$ 对 $B(F)$ 的维数施加了 $n-2$ 的最大维数限制。

关于 (iii)， $B(F) = R(F)$ 对于 $r = 1$ 根据定义 20 可立即得出。对于 $r \geq 2$，当然可能存在某个 $R(F)$ 中的进程，在更早的某一轮次中已经从 $R(F)$ 之外的某个进程那里获悉了信息，示例见图 4 左下方的面 F_2^l 。□

我们指出，真边界面 $F \in \mathcal{P}_r$ 为 $r \geq 2$ 的面的边界 $F \cap \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r)$也可能包含$\mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r)$ 中与 $B(F)$ 不相交的（小）面，尽管它们当然始终包含在 F 的一个更大的面中，而该面也包含 $B(F)$。示例可见于图 2 的左侧部分，其中 $B(F)$与$\mathrm{Bd}(\mathcal{P})$ 中的单个顶点 $\{g\} \in F \cap$ 不相交；或者见于图 4 左上方的面 F_1^l，其中 $B(F_1^l)$ 与 $\mathrm{Bd}(\mathcal{P}_1)$ 中的单个顶点 $\{g\} \in F_1^l \cap$ 不相交。

本节最后强调， $\mathcal{P}_r$ for$r \geq 2$ 中的边界面和边界（根）分量隐式表示面序列：单个边界面 F 以及相应的 $R(F) \in$BdR$(\mathcal{P}_r)$ 分别对应 $B(F) \in \mathrm{BdC}(\mathcal{P}_r)$，实际上表示第 1，...， r 轮中承载 $F = F_r$ 的所有边界面 F_1，...， F_r，以及它们相应的 $R(F_1)$ ...， $R(F_r)$，分别为 $B(F_1)$ ...， $B(F_r)$。请特别注意，尽管 $\beta(F_{i+k})$、 $k \geq 1$ 通常不小于 $\beta(F_i)$，尤其是在 $\chi\big(R(F_{i+k})\big) = \chi\big(R(F_i)\big)$ 的情况下，但这并不总是成立，因为存在于 $B(F_i)$ 中的某个进程可能已经从 F_{i+k} 中的所有其他进程处获知信息，因此它不再存在于 $\mathrm{Bd}(F_{i+k})$ 中，因而也不再存在于 $\beta(F_{i+k})$ 中。图 4 提供了一些边界分量载体和边界根分量的补充示例。

4 共识可解性/不可能性

本节将借助第3节介绍的拓扑工具，刻画无感知消息对手$\mathbf{D}^\omega$ 下共识的可解性与不可解性。我们的拓扑视角带有“几何”色彩，不仅能带来有趣的额外见解，也为第5节中的其他结果奠定基础。

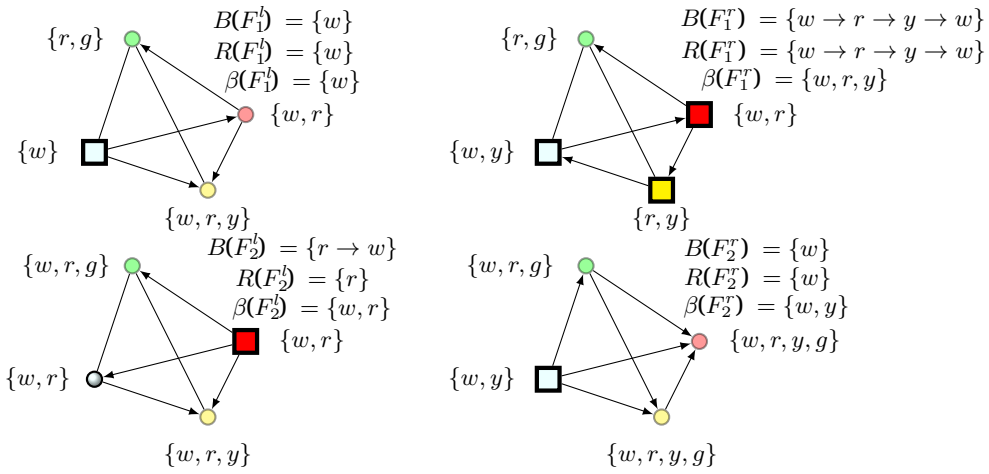


图 4. 两个不同示例（左列、右列）中 $n = 4$ 个进程的边界分量和边界根分量示意图。褪色的节点表示位于 $B(F)$ 之外的顶点；方形节点表示边界根分量中的成员。第一行显示 $\mathcal{P}_1$ 中相应的边界面，第二行显示 $\mathcal{P}_2$ 中的边界面。标签给出了附近进程的听闻集合，假定第 2 轮面作用于其上方的第 1 轮面。注意，右下角面 F_2^r 中的红色和黄色进程都听闻了所有人的消息，因此会从 $\mathrm{Bd}(F_2^r)$ 和 $\beta(F_2^r)$ 中移除。

第4.1节的关键见解是：如果 r轮协议复形 $\mathcal{P}_r$ 包含一个连通分量，且该分量中有不相容的真边界面（定义为其边界分量集合的交集为空），那么就无法在 r 轮内解决共识。在第4.2节中，我们关注 $\mathcal{P}_{r-1}$中连接不相容真边界面的路径，并全面刻画当 $\mathcal{P}_{r-1}$ 演化为 $\mathcal{P}_r$时这类路径会发生什么：路径可能断开，此时共识或许可以在 $\mathcal{P}_r$ 中解决（除非另有路径仍然阻碍共识）；也可能被提升，此时它仍会阻止共识。在第4.3节中，我们从 $\mathcal{P}_{r-1}$ 演化到 $\mathcal{P}_r$时对连通分量的影响这一角度，重新表述以路径为核心的刻画。第4.4节通过一系列示例展示了所有不同情形。最后，第4.5节给出 [39], 中共识判定过程的另一种表述（有时效率更高），该表述可直接从前面各小节提出的共识可解性拓扑刻画中得出。

4.1 边界分量的不相容性

若 r-轮次协议复形 $\mathcal{P}_r$ 具有一个连通的 ^ ^ 分量 $\mathcal{C}$，其中包含 $k \geq 1$ 个真边界面 $F_1, \ldots, F_k$，且这些面具有不相容的边界分量 $B(\hat{F}_1) \ldots, B(\hat{F}_k) \in \mathrm{Bd}(\mathcal{P}_r)$，则共识在 r 轮次内无法求解，其中不相容性意味着 $\bigcap_{i=1}^{k} \beta(\hat{F}_i) = \emptyset$：由于 ^ ^$B(F_i)$ 的任何顶点在轮次 $1, \ldots, r$ 的任何一轮中都不可能拥有来自 $B(F_i)$ 之外进程的入边，它们所对应的进程只能决定其自身初始值之一。然而，由于连通分量中的所有顶点必须决定相同的值，这是不可能的。

^ ^ 当 F_1，……，F_k 具有不相容边界根分量 $R(F_1)$……，$R(F_k) \in \mathrm{BdR}(\mathcal{P}_r)$ 时，尤其会出现不相容边界分量。图 3右上部分展示了这种情况的一个实例：由于从左下方的白色顶点（显示为一个粗方形节点，表示仅由该顶点组成的边界根分量）到由外三角形右边界上的红色和绿色方形组成的边界根分量之间存在一条路径，因此无法在一轮内解决共识。

4.2 通过连接不相容边界分量的路径刻画可解性

在本小节中，我们将刻画某个协议复形 $\mathcal{P}_{r-1}$ 中连接具有不相容边界分量的面的路径可能发生的演化，对于某个 $r \geq 1$，这些演化可能会中断，也可能会导向一条连接 $\mathcal{P}_r$中不相容边界分量的提升路径。

ˆˆ考虑从一组 $k \geq 2$ 个不相容的真边界ˆˆ面 $F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}_{r-1}$, $r \geq 2$中取出的两个边界面 $F_x \neq F_y$ ，即它们属于连通分量 $\mathcal{C}$，并且具有不相容边界分量 $B(\hat{F}_1), \ldots, B(\hat{F}_k)$（见图5的说明）。由于 $\mathcal{P}_{r-1}$ 是对单个面 σ_0反复应用 $\mathcal{P}$ 的结果，必然存在某个最小轮数ˆˆ$1 \leq r \leq r-1$，以及 $\mathcal{P}_x$中满足 $B(\tau_x) \neq B(\tau_y)$的两个面 $\tau_x \neq \tau_y$，它们分别携带 F_x和 F_y，ˆˆ即 $F_x \in \mathcal{P}_{r-1-r}(\tau_x)$和 $F_y \in \mathcal{P}_{r-1-r}(\tau_y)$。注意，由于 r是最小的，τ_x和τ_y是通过对同一个面 $F \in \mathcal{P}_{r-1}$ 应用 $\mathcal{P}$ 而得到的面（见图6）。为了叙述简便，我们在下文中假设 $r = 1$，否则就必须引入“广义边界”的定义，该定义不是从 $\mathcal{P}_1$ 开始，而是从 $\mathcal{P}_r$开始。因此，我们随后将分别只写 $\mathcal{P}_1$、 $\mathcal{P}_{r-1}$ 和 $\mathcal{P}_{r-2}$ ，而不写 $\mathcal{P}_r$、 $\mathcal{P}_{r-r}$和 $\mathcal{P}_{r-1-r}$。幸运的是，这一假设可以在不失一般性的情况下作出，因为在 $r > 1$ 情形下可能出现的所有场景，在 $r = 1$时也会出现。

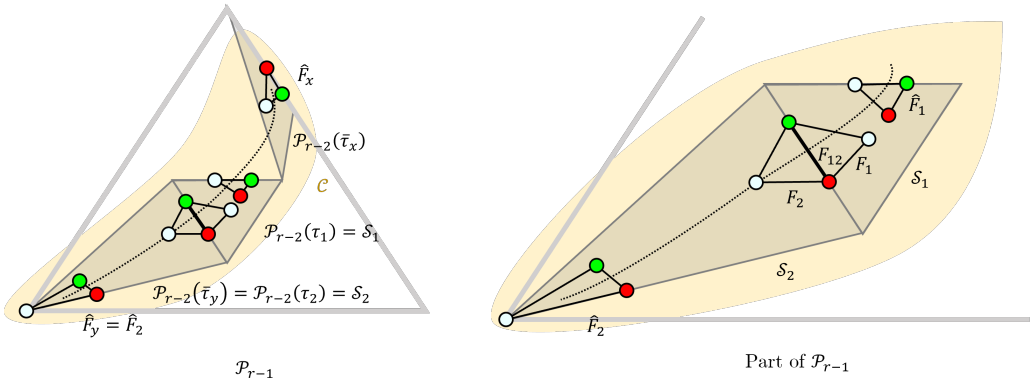


图 5. P_{r-1}

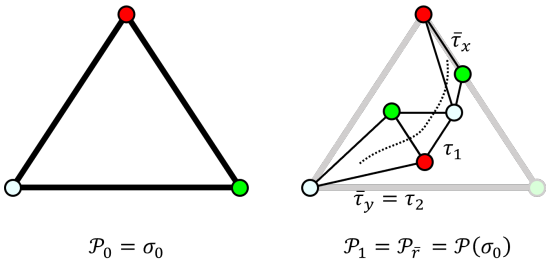


图 6。 $\mathcal{P}_0$ 和 P_1

ˆˆ由于 F_x 和 F_y 在 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}_{r-1}$中相连，因此$\tau_x$ 和τ_y 也必须通过 $\mathcal{P}_1$ 中一个或多个相邻面组成的路径相连。考虑在 $\mathcal{P}_{r-1}$中连接适当边界面 F_x 和 F_y 的任意一条固定路径，以及在 $\mathcal{P}_1$中与之唯一对应、连接 τ_x 和τ_y 的路径。令 τ_1和 τ_2 为 $\mathcal{P}_1$中路径上的任意两个相邻面，并令 $\tau_{12} = \tau_1 \cap \tau_2 \neq \emptyset$。在 $\mathcal{P}_{r-1}$中，面τ_1 和 τ_2 诱导出连通子复形 $\mathcal{S}_1 = \mathcal{P}^{r-2}(\tau_1)$和 $\mathcal{S}_2 = \mathcal{P}^{r-2}(\tau_2)$，其交集 $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \neq \emptyset$非空。从ˆ F_x 到ˆ F_y 的 $\mathcal{P}_{r-1}$ 中的路径必须从某个面ˆ F_1 进入 $\mathcal{S}_1$ ，并从某个面 F_2ˆˆˆˆˆ离开 $\mathcal{S}_2$ ；也就是说，存在一条连接 F_x 和 F_1 的路径，以及一条连接 F_y 和 F_2的路径，并通过相邻面 $F_1 \in \mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{P}_{r-1}$ 和 $F_2 \in \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{P}_{r-1}$跨越 $\mathcal{S}_1$ 与 $\mathcal{S}_2$ 之间的边界，其中 $\emptyset \neq F_{12} = F_1 \cap F_2 \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$。注意， F_{12}作为协议复形 $\mathcal{P}_{r-1}$中两个面的交集，当然是一个面。

现在考虑再次将 $\mathcal{P}$ 应用于 $\mathcal{P}_{r-1}$中的所有面，其结果当然是 $\mathcal{P}_r$ （见图7）。特别地，这会得到子复形 $\mathcal{S}'_1 = \mathcal{P}\big(\mathcal{P}^{r-2}(\tau_1)\big) = \mathcal{P}^{r-1}(\tau_1)$，以及类似的 $\mathcal{S}'_2 = \mathcal{P}^{r-1}(\tau_2)$，它们的交集可能为空，也可能不为空。我们将

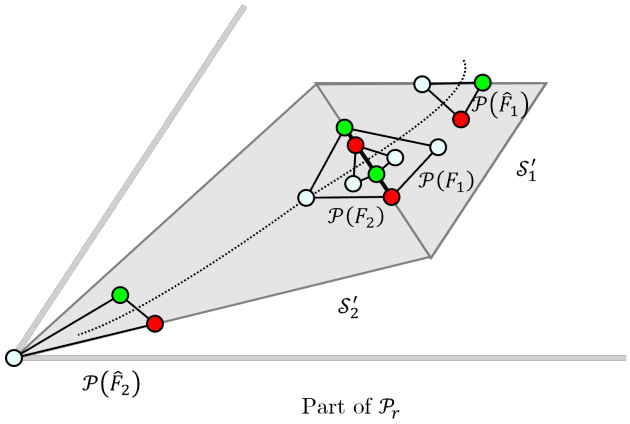


图 7. $\mathcal{P}_r$的一部分

关注由将 $\mathcal{P}$ 应用于 F_1 和 F_2 而产生的这一可能交集部分，即 $\mathcal{P}(F_1) \cap \mathcal{P}(F_2) \subseteq \mathcal{S}_1' \cap \mathcal{S}_2'$。注意，$\mathcal{S}_1'$ 和 $\mathcal{S}_2'$ 都与 $\mathcal{P}_{r-1}$ 同构。显然，将 $\mathcal{P}$ 应用于面 F_1，$F_2 \in \mathcal{P}_{r-1}$ 通常会产生许多对相交边界刻面 $F_1' \in \mathcal{P}(F_1) \subseteq \mathcal{S}_1' \subseteq \mathcal{P}_r$ 和 $F_2' \in \mathcal{P}(F_2) \subseteq \mathcal{S}_2' \subseteq \mathcal{P}_r$，使得每一对都共享某个非空面 $\emptyset \neq F_{12}' = F_1' \cap F_2' \subseteq \mathcal{S}_1' \cap \mathcal{S}_2'$。这些共享面 F_{12}' 共同构成子复形$FC_{12}' \subseteq \mathcal{P}(F_1) \cap \mathcal{P}(F_2)$（两个不同的示例见图 8 左侧）。

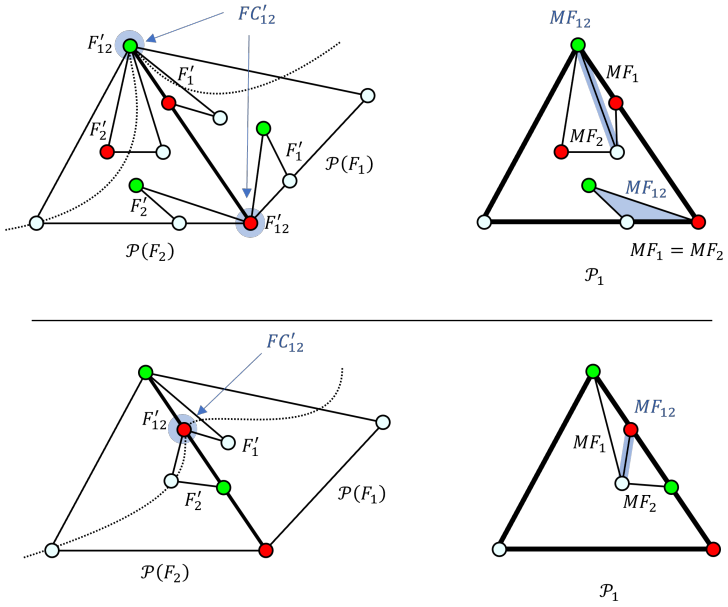


图 8. $\mathcal{P}_r$ 中的子复形 $FC_{12}' \subseteq \mathcal{P}(F_1) \cap \mathcal{P}(F_2)$，以及 $\mathcal{P}_1$中的对应子复形 MF_{12}。情形 (1) 在上方，情形 (2) 在下方。

不过，任何这样的 F_{12}'都并非完全任意：首先，由于 $FC_{12}' \subseteq \mathcal{P}(F_1) \cap \mathcal{P}(F_2)$意味着，根据边界一致性，其颜色只能取自 $\chi(F_{12})$，因此我们有

$$\chi(F_{12}') \subseteq \chi(FC_{12}') \subseteq \chi(F_{12}). \tag{17}$$

此外，每一对真相交刻面 F_1' 和 F_2' 实际上都是由两个唯一的匹配边界刻面 MF_1，$MF_2 \in \mathcal{P}_1$生成的：相邻刻面 $F_1' \in \mathcal{P}(F_1)$和 $F_2' \in \mathcal{P}(F_2)$分别与某些相交边界刻面 $MF_1 \in \mathcal{P}_1$ 和 $MF_2 \in \mathcal{P}_1$同构，而这些刻面

matc在边界处的 h（见图 8，右侧部分）。这实际上只留下了两种可能性，即 th
eir 交集
部分 $MF_{12} = MF_1 \cap MF_2 \neq \emptyset$:

(1) MF_1和 MF_2是具有相同根分量的真边界面 $R(MF_1) = R(MF_2) \in MF_{12}$（不过可能是 $MF_{12} \setminus R(MF_1) \neq \emptyset$）。图 8的上部展示了两个实例。(2) MF_1和 MF_2是具有不同根分量的真边界面，或是不真边界面，其中 $R(MF_1) \cup R(MF_2) \not\subseteq MF_{12}$（视为一个复形）。图 8 的下部展示了一个实例。

请注意，这些涵盖了所有可能性，因为我们的单根假设排除了 $R(MF_1) \cup R(MF_2) \subseteq MF_{12}$: 毕竟，每个 $v \in R(MF_1) \setminus R(MF_2) \neq \emptyset$(不失一般性) 都需要有一条出路径通往 $R(MF_2)$ 中的每个顶点，而根据定义 18，这对于根分量 $R(MF_2)$是不允许的。请注意，对于下面的情况(2)， MF_{12} 中的每个顶点都必须在 MF_1 中从 $R(MF_1)$的每个成员处获得一条入路径，并且在 MF_2 中从 $R(MF_2)$ 的每个成员处获得一条入路径。

现在，给定任意一对面 F_1'和F_2'，我们将考虑确保经过它们的交集 F_{12}'的路径提升/断裂的条件。不出所料，我们需要区分上文介绍的两种情况 (1) 和(2)。为详细描述这里可能发生的不同情形，我们回顾一下形成我们起点的 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}_{r-1}$ 中的路径（图 5）：^^它从真边界面 F_x 出发，通向 F_1，并在那里进入子复形$\mathcal{S}_1 = \mathcal{P}^{r-2}(\tau_1)$。在 $\mathcal{S}_1$内，该路径继续通向 F_1。后者与 F_2有非空的交集 F_{12}，而 F_2属于子复形 $\mathcal{S}_2 = \mathcal{P}^{r-2}(\tau_2)$。路径继续在 $\mathcal{S}_2$ 内延伸，并在 F_2处离开 ^ ^ 它，最终从那里通向真边界面 F_y。

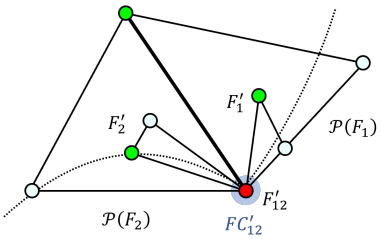
(0) 如果 $F_{12}' = \emptyset$，也就是说，边界面 F_1'和 F_2'完全不相交，那么显然在 $\mathcal{P}_r$中不可能存在任何连接 F_1'和 F_2'并经过 F_{12}'的路径。
(1) 如果 $F_{12}' \neq \emptyset$是由具有相同边界根分量 $R(F_1') = R(F_2')$ 的真边界面 F_1'和 $F_2' \in \mathcal{P}_r$导致的，那么 $F_1' \in \mathcal{P}_r$和 $MF_1 \in \mathcal{P}_1$都同构于某个真边界面 $BF_1 \in \mathcal{P}_{r-1}$；类似地， $F_2' \in \mathcal{P}_r$和 $MF_2 \in \mathcal{P}_1$都同构于某个真边界面 $BF_2 \in \mathcal{P}_{r-1}$。这是因为 $\mathcal{S}_1' = \mathcal{P}^{r-1}(\tau_1)$和 $\mathcal{S}_2' = \mathcal{P}^{r-1}(\tau_2)$ 都同构于 $\mathcal{P}_{r-1}$。不过请注意， $BF_{12} = BF_1 \cap BF_2$ 同构于F_{12}'（但不一定同构于 MF_{12}，如图 8 上方所示），因此根据式 (17)， $\chi(R(BF_1)) = \chi(R(BF_2)) \subseteq \chi(BF_{12}) \subseteq \chi(F_{12}') \subseteq \chi(F_{12})$。还要注意，定义 20 立即意味着相应边界分量也满足 $B(BF_1) = B(BF_2) \subseteq BF_{12}$。

根据 BF_1 和 BF_2 （实际上，根据 BF_{12} ，并最终根据 $R(BF_1) = R(BF_2)$ ，我们将其称为 保护 F_{12}），所有经过 $R(F_1') = R(F_2')$ 的路径要么（a）被提升，要么（b）中断:

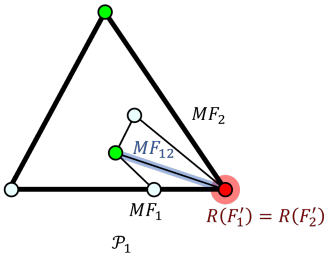
（a）如果 $BF_{12} \in \mathcal{C}$，我们称 $R(BF_1) = R(BF_2)$成功保护了 F_{12} （见图 9），也就是说，如果 BF_1 和 BF_2 都与 F_1 和 F_2 位于同一个连通分量 $\mathcal{C}$ 中（这也意味着，在 $\mathcal{C}$ 中存在路径，分别将 F_1 连接到 BF_1 ，以及将 F_2 连接到 BF_2）。在这种情况下， $\mathcal{P}_r$中存在一条提升路径，经由 BF_{12}连接某些边界面 $F_1' \in \mathcal{P}$ （ F_1）和 $F_2' \in \mathcal{P}$ （ F_2）；该路径由 $\mathcal{P}_{r-1}$ 中的一条路径承载，而后者经由 F_{12}连接了真边界面 F_1 和 F_2：这条路径确实存在，因为 $\mathcal{S}_1' = \mathcal{P}^{r-1}$（$\tau_1$）和 $\mathcal{S}_2' = \mathcal{P}^{r-1}$（$\tau_2$）都与 $\mathcal{P}_{r-1}$同构。通过将 $\mathcal{P}$ 应用于路径上其余所有面，这些面同样连接了 F_x 和 F_y （位于 $\mathcal{P}_{r-1}$ 中），可以在 $\mathcal{P}_r$中构造一条路径，连接某些不相容的真边界面 F_x'、$F_y' \in \mathcal{P}_r$；当然，这要求沿原始路径的每一处都成功完成提升，而不仅仅是在 F_1 和 F_2的交集处。

(b) 我们称 $R(BF_1) = R(BF_2)$ 未能保护 F_{12} ，如果 $BF_{12} \notin \mathcal{C}$。在这种情况下，不存在一条路径在 $\mathcal{P}_r$ 中连接边界面 ^ F_1' 和 ^ F_2' ，且经过 BF_{12}；也就是说， $\mathcal{P}_{r-1}$ 中的连接路径无法提升到 $\mathcal{P}_r$ ，因此会中断！
(2) 如果 $F_{12}' \neq \emptyset$ 不是由具有共同边界根分量 $R(F_1') = R(F_2')$ 的真边界面 $F_1' \in \mathcal{P}_r$ 和 $F_2' \in \mathcal{P}_r$ 引起的，那么根据上文 (2) 可知 $R(MF_1) \cup R(MF_2) \not\subseteq MF_{12}$，也就是说，至少一个根分量（比如 $R(F_1')$）包含一个位于 F_{12}'之外的顶点 $v_1' \in F_1'$。显然，相应的顶点 $v_2' \in F_2'$（满足 $\chi(v_1') = \chi(v_2')$）也位于 F_{12}' 之外，因此不同于 v_1'。由于存在一条从 v_1' 到 F_1' 中每个顶点的路径，交集 F_{12} 中至少有一个元素将在 F_{12}' 中消失，因此

$$|V(F_{12}')| < |V(F_{12})|. \tag{18}$$

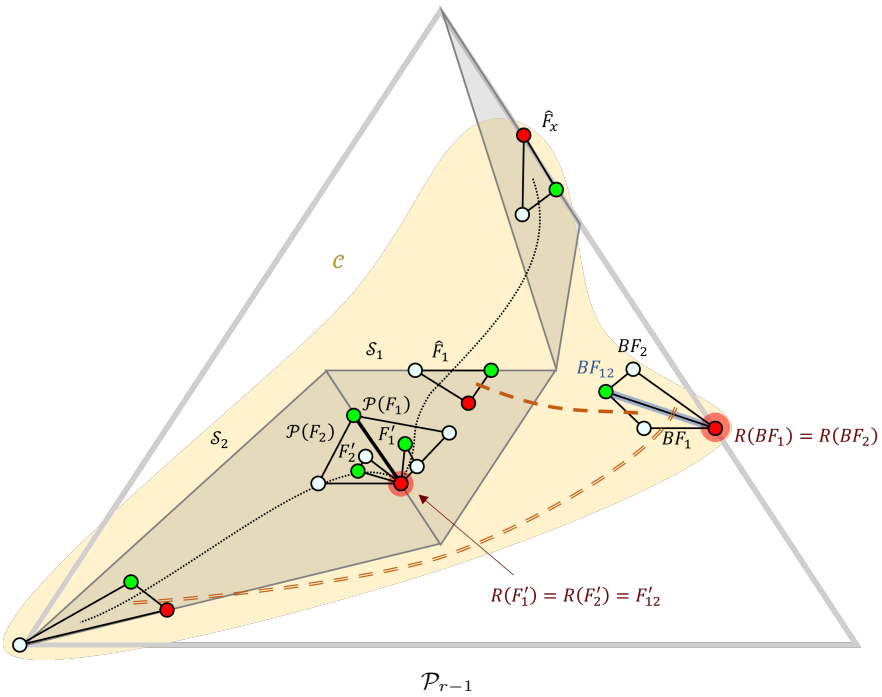


$\mathcal{P}(F_1)$ and $\mathcal{P}(F_2)$ case (1)

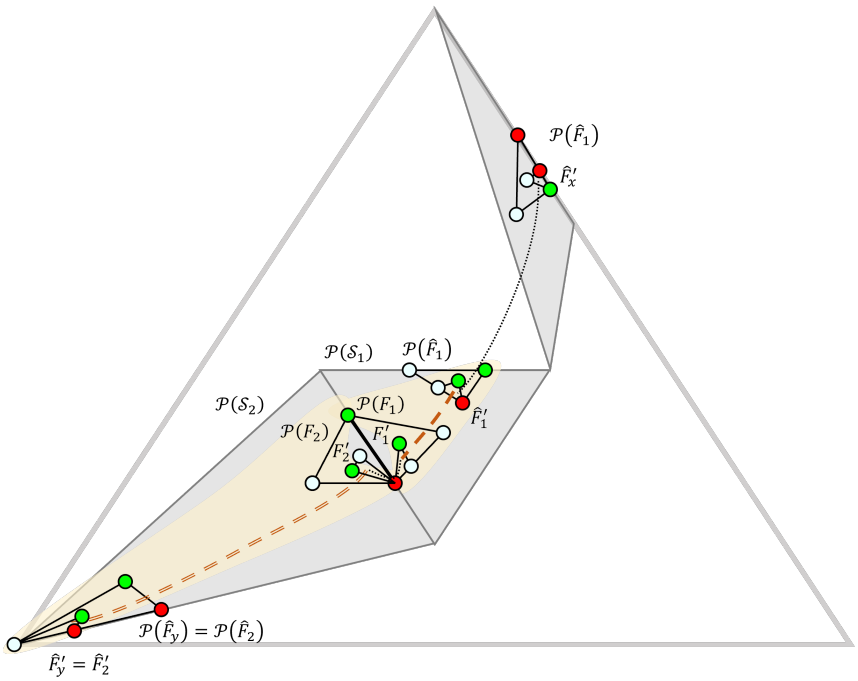


$\mathcal{P}_1$ case (1)

$\mathcal{P}(F_1)$和 $\mathcal{P}(F_2)$ 在 $\mathcal{P}_r$ 中，以及 $\mathcal{P}_1$ 中相应的子复形 MF_1 和 MF_2



$\mathcal{P}_{r-1}$



$\mathcal{P}_r$，并标记 $\mathcal{C}$ 在 $\mathcal{S}_1$ 中的像以及 $\mathcal{S}_2$ 的像

图 9. 提升 — 情形 1(a)

这就完成了关于单个面配对 F_1'和 F_2'需要考虑的（穷尽）情形列表。显然，为了使连接 F_x'和 F_y'于 $\mathcal{P}_r$ 中的提升路径断裂，只需它在一对相邻刻面处断裂即可。另一方面，对于给定的配对 F_1, $F_2 \in \mathcal{P}_{r-1}$，在 $\mathcal{P}_r$中可能会同时创建许多路径，每条路径分别对应于对F_1'和 F_2'的某种可能选择以及特定的交面 F_{12}'，而这些路径最终都需要断裂。此外，ˆ ˆ 在 $\mathcal{P}_{r-1}$ 中还存在通过不同配对 F_1, F_2 连接 F_x 和 F_y 的不同路径，这些路径也需要加以考虑。在第5节中，我们将展示，由情形（1.b）引起的另一项微妙复杂性，即 $\mathcal{P}_r$中没有 提升路径的情形：事实证明，当 $\mathcal{P}_{r-1}$ 中的路径断裂时，“绕行”可能会在 $\mathcal{P}_r$ 中创建一条连接某些不相容的真边界面的新 路径；示例见图 16。

最后，要使共识可解，不得 存在一个包含所有边界面 ˆ ˆ ˆ ˆF_1、.....、 $F_k \in \mathcal{C}$ 且含有不相容边界分量 B_1、.....、 B_k的连通分量 $\mathcal{C}$ 。换言之，必须存在某个 r，使得 $\mathcal{P}_r$ 的连通分量中没有任何一个包含具有不相容边界分量的面。若能确保这一点，则任意面 $F \in C \subseteq \mathcal{P}_r$ 中的进程最终都能决定一个确定性选取的进程在$\bigcap_{F\in\mathcal{C}、\,B(F)\neq\emptyset}\beta(F) \neq \emptyset$ 中的初始值。不过请注意，这还要求由不同于边界分量 $B(F)$ 的面的边界所导致的不相容边界之间的所有连接都已消失。由于这完全属于情形 (2)，式 (18) 表明，这至多再经过 $n-1$ 轮就会发生。

4.3 通过连通分量刻画共识可解性

从导致连接不相容边界面的连通分量 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}_{r-1}$ 所产生的影响来看，重新审视之前介绍的情形（0）–（2）是很有启发性的：重新考虑两个相邻刻面 $F_1, F_2 \in \mathcal{C}$ ，其交集为 F_{12}；为便于说明，假设$\mathcal{C}$ 在经过 F_{12} 的路径断开时会分裂。现在，在假设 F_{12}' 是 $\mathcal{P}_r$中唯一的相交面这一前提下，我们将根据上述三种情形，讨论转到 $F_1' \in \mathcal{P}(F_1)$ 和 $F_2' \in \mathcal{P}(F_2)$ 时， $\mathcal{P}_r$中的连通分量会发生什么变化：

(0)如果 $F_{12}' = \emptyset$，那么 $\mathcal{P}_r$将包含两个彼此分离的连通分量 $\mathcal{C}_1'$和 $\mathcal{C}_2'$，分别具有 $F_1' \in \mathcal{C}_1'$和 $F_2' \in \mathcal{C}_2'$，也就是说， $\mathcal{P}_r$ 中由 $\mathcal{C}$ 产生的连通分量被由 F_{12}生成的内容分隔开，即$F_{12}' = \emptyset$。一个很好的例子是图3 所示 RAS 消息对手的$\mathcal{P}_2^{RAS}$中的（阴影）绿色中心节点。

(1)如果 $F_{12}' \neq \emptyset$是由具有相同边界根分量 $R(F_1') = R(F_2')$ 且成功保护F_{12}的真边界面 $F_1' \in \mathcal{P}_r$ 和 $F_2' \in \mathcal{P}_r$（分别同构于 BF_1 和 BF_2）所导致的，我们有以下两个子情况：

(a) 如果 $BF_{12} \in \mathcal{C}$，那么 $\mathcal{P}_r$ 将包含一个连接不相容边界面的单一连通分量 $\mathcal{C}'$ （由$\mathcal{C}$产生）。对于 iRAS 消息对手而言，图 10 的 $\mathcal{P}_2^{iRAS}$中展示了这样一个成功保护的实例，此时共识是不可能的。请注意，这里只向 RAS 添加了一个通信图，即图 10 左上部分的一轮未解释复形 $\mathcal{P}_1^{iRAS}$中，将左下方白色顶点连接到中央三角形的额外三角形。以点划线中央三角形的左侧边界为例，其中两个相邻面在公共根 $r \leftrightarrow g$处相交。这是因为，协议复形 $\mathcal{P}_1^{iRAS}$最右侧外边界上的真边界面的边界根分量 $r \leftrightarrow g$保护了中央面与其左侧面在 $\mathcal{P}_1^{iRAS}$中的交集 $r \leftrightarrow g$ 。

(b) 如果 $BF_{12} \notin \mathcal{C}$，那么 $\mathcal{P}_r$ 将包含两个连通分量 $\mathcal{C}_1'$ 和 $\mathcal{C}_2'$ ，分别具有 $F_1' \in \mathcal{C}_1'$ 和 $F_2' \in \mathcal{C}_2'$。然而，与情况(0) 不同的是，它们被第三个连通分量$\mathcal{C}_{12}'$ 分隔开来，该分量包含 F_1' 和 F_2'。可以将其视为围绕 F_{12}' 形成的一个“岛”。这种失败保护的一个很好的例子是图 11中在 $\mathcal{P}_2^{2C}$ 针对双链消息对手的情况下，位于中心且包含红色进程的连通分量；它现在将 $\mathcal{P}_1^{2C}$ 中包含该进程的单一连通分量分隔开来。

我们注意到，之前提到的绕行效应（并在第5节中进行了详细讨论）也可以通过这一视图轻松解释：可能出现这样的情况，即“岛” C_{12}' 连接了 $\mathcal{P}_r$ 中的<样式 id='2'>其他</样式>不相容的真边界面（示例见图16）。因此，尽管它成功地将 $\mathcal{C}_1'$ 与 $\mathcal{C}_2'$分隔开来，却创建了一条新路径，阻止了共识在第 r轮终止。

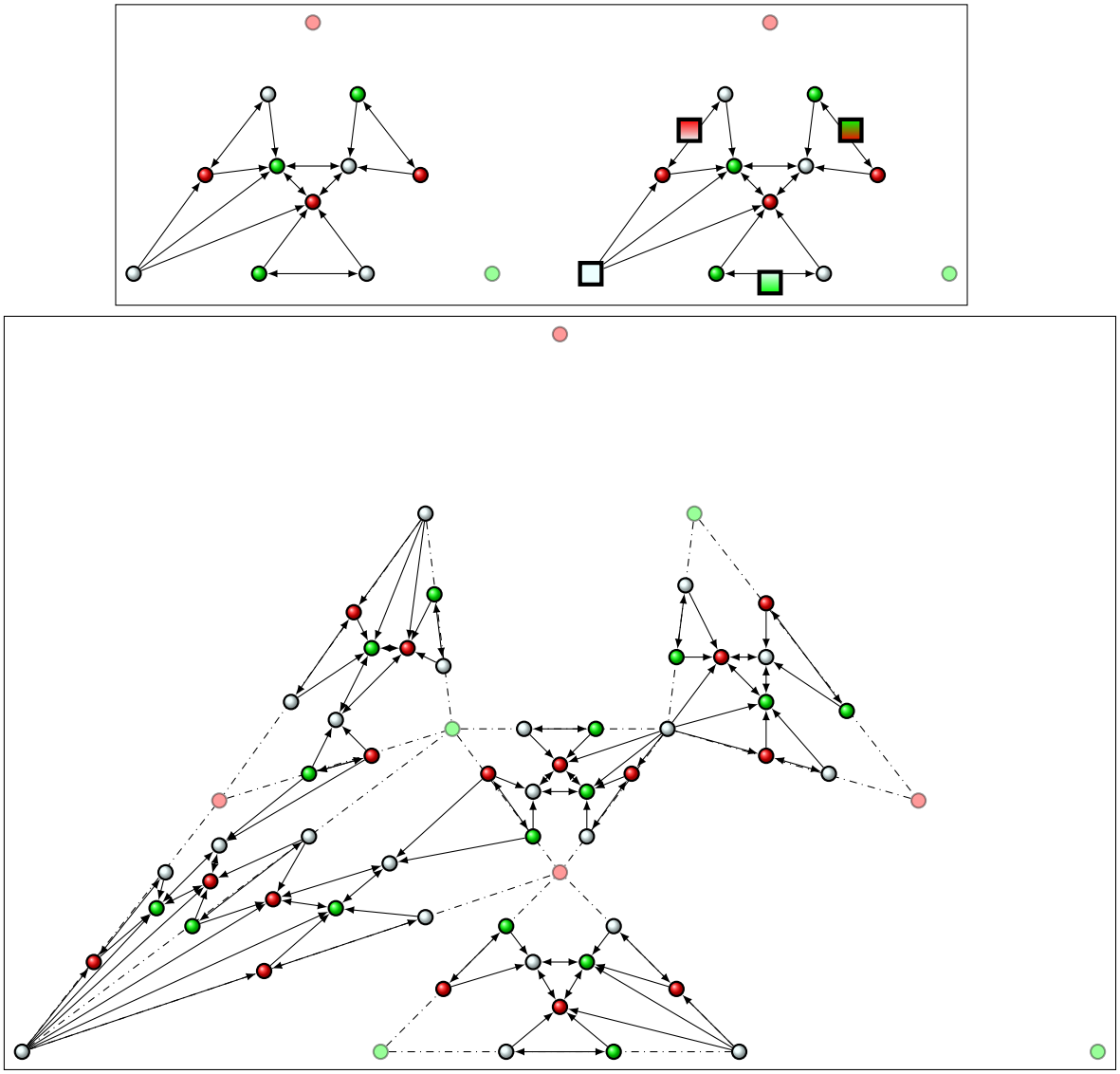


图 10. iRAS 消息对手一轮次（$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1^{iRAS}$，上方）与两轮次（$\mathcal{P}_2^{iRAS}$，下方）的协议复形。右上图还展示了 $\mathcal{P}$ 的边界根分量。

(2)如果$F'_{12} \neq \emptyset$不是由具有共同边界根分量 $R(F'_1) = R(F'_2) = F'_{12}$的真边界面$F'_1 \in \mathcal{P}_r$和 $F'_2 \in \mathcal{P}_r$所导致， $\mathcal{P}_r$将包含一个连通分量 $\mathcal{C}'$（由 $\mathcal{C}$产生），该分量仍连接着不相容边界面。

4.4 示例

失败保护的一个例子（一条破坏路径，情形（1.b））可以在图 3 右上部分中针对 RAS 消息对手的 1- 轮次未解释复形 $\mathcal{P}_1^{RAS}$ 中找到，$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 其中包含边界根分量 R_x （左下角的单个白色顶点）和 $\hat{}$ R_y （右边界上双向连接的红色和绿色顶点）的面 F_x 和 F_y 由一条路径连接，该路径经过最左下方的三角形 $F_1 = \hat{}F_x$ 和中央三角形 F_2，位于一个联合连通分量 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}_1^{RAS}$中。注意， F_1 和 F_2 相交于单个绿色中心顶点 $F_{12} = F_1 \cap F_2 = \{g\}$，并且不存在仅由 $\mathcal{P}_1$ 中的绿色顶点构成的边界（根）分量的面，因而在 $\mathcal{C}$中也不存在。因此， $\mathcal{P}_2^{RAS}$不可能包含一条相应的路径，该路径将 $\hat{}$ F'_x 与边界根分量 $\hat{}$ R'_x （图 3 下半部分左下角的单个白色顶点）和 $\hat{}$ R'_y （右侧外边界上双向连接的红色和绿色顶点）连接起来，并经过淡化的中心顶点 $F'_{12} = \{g\}$，这一点已由我们的图所证实。

关于成功保护（非破坏路径，情形（1.a））的一个例子，请考虑连接边界面 $\hat{}$ F_x 和 $\hat{}$ F_z 的路径。该路径包含顶部右侧 Fig. 3 中的边界根分量 $\hat{}$ R_x （左下角的单个白色 $\hat{}$ 顶点）和 R_z （左侧边界上双向连接的红色和白色顶点）。这条路径仅由左下方最靠外的三角形 $F_1 = \hat{}F_x$ 和联合连通分量 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}_1^{RAS}$ 中的三角形 $F_2 = \hat{}F_z$ 组成。注意，在此处 F_1 和 F_2 在一条红绿边 $F_{12} = F_1 \cap F_2 = \{r \to g\}$ 上相交，并且最右侧外边界上存在边界面 $\hat{}$ $F_y \in \mathcal{C}$ ，其带有边界根分量 $\hat{}$ $R_y = \{g \leftrightarrow r\}$ 。根据上述讨论，$\mathcal{P}_2^{RAS}$ 包含一条相应的路径，该路径连接 $\hat{}$ F'_x 与边界根分量 $\hat{}$ R'_x（Fig. 3 下半部分左下角的单个白色顶点），以及带有边界根分量 $\hat{}$ R'_z 的边界面 $\hat{}$ F'_z（最左侧外边界上双向连接的红色和白色顶点），并经由 $F'_{12} = \{g \leftrightarrow r\}$，如图所证实。

[{"id": 0, "output": "为进一步说明成功/失败保护的问题，请考虑图 10 所示的经修改的 RAS 消息对手 iRAS，在该对手下共识是不可能实现的。边界面 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}F_w$ （附加三角形）和 F_y （包含边界根分量 R_w （左下角的单个白色顶点））分别与 $\hat{}$ R_y （右侧边界上双向连接的红色和绿色顶点）相连；它们之间的路径经过此处 $\mathcal{C}$ 中央的双向红绿边 $\hat{}F_{12} = F_1 \cap F_2 = \{g \leftrightarrow r\}$ 。与 RAS 形成鲜明对比的是，带有位于右侧外边界上的边界 $\hat{}$根分量 $R_y = \{g \leftrightarrow r\}$ 的边界面 F_y 现在也属于 $\mathcal{C}$。然而，$\mathcal{P}_2^{RAS}$ 包含一条相应的路径，将带有边界根分量 $\hat{}$ R'_w （图 10 下半部分左下角的单个 $\hat{}$白色顶点）的 F'_w 与带有边界根 $\hat{}$分量 R'_y （右侧外边界上双向连接的红色和绿色顶点）的 F'_y 相连，该路径经过 $F'_{12} = \{g \leftrightarrow r\}$，正如我们的图所证实的那样。请注意，这种情况在之后的所有轮次中也会重复出现，因此共识是不可能实现的。"}]

为了说明延迟路径断裂的问题（情形（2）），我们考虑另一种消息对手，称为*2* 链消息对手 （2C），如图 11（上半部分）所示，适用于 $n = 4$ 个进程。它由三个图组成：一条链 $G_1 = y \to g \to w \to r$、另一条链 $G_2 = g \to y \to w \to r$，以及一个星形图 $G_3 = r \to \{y, w, g\}$。在 $\mathcal{P}_1$ 中，分别对应于 G_1 和 G_2 的面 F_1 和 F_2 通过一条路径相连，该路径经过联合连通分量 $\mathcal{C}$ 中的交集 $F_{12} = \{r\}$ 。此外，面 F_3 中还存在一个边界根分量 $R = \{r\}$ ，它由 G_3 得出；然而，该分量在 $\mathcal{P}$ 中属于一个不同的 连通分量 $\mathcal{C}' \neq \mathcal{C}$ 。根据我们的分析（情形（ 1.b ）），经由 $F'_{12} = \{r\}$ 在 $\mathcal{P}_2^{2C}$ 中（可能）连接 F'_1 （表示第 1 轮和第 2 轮中 G_1 的边界面）与 F'_2 （表示第 1 轮和第 2 轮中 G_2 的边界面）的路径会断裂：如图 11 下半部分所示，这两个面没有共享任何单个红色顶点。

如果在 2C 中为 $n = 5$ 增加另一个进程 p （粉色），记作消息对手 2C+，使得 $G_1 = y \to g \to w \to p \to r$、$G_2 = g \to y \to w \to p \to r$ 和 $G_3 = r \to \{y, w, g, p\}$，那么 $F_{12} = \{p \to r\}$ 就在 $\mathcal{P}_1^{2C+}$ 中。现在，在 $\mathcal{P}_2^{2C+}$ 中有一条路径连接 F'_1（表示 G_1 在第 1 轮和第 2 轮中的边界面）和 F'_2 （表示 G_2 在第 1 轮中和

以及2）通过 $F'_{12} = F'_1 \cap F'_2 = \{r\}$ 运行：虽然粉色顶点已在第2轮从相应的根分量获知其所属位置，即属于 F'_1 and F'_2 中的一个，但红色顶点目前（还）不是如此。然而，虽然相应的路径在 $\mathcal{P}_2^{2C+}$中没有中断，但它最终会在 $\mathcal{P}_3^{2C}$ 中断，因为红色顶点也将获知其所属位置。

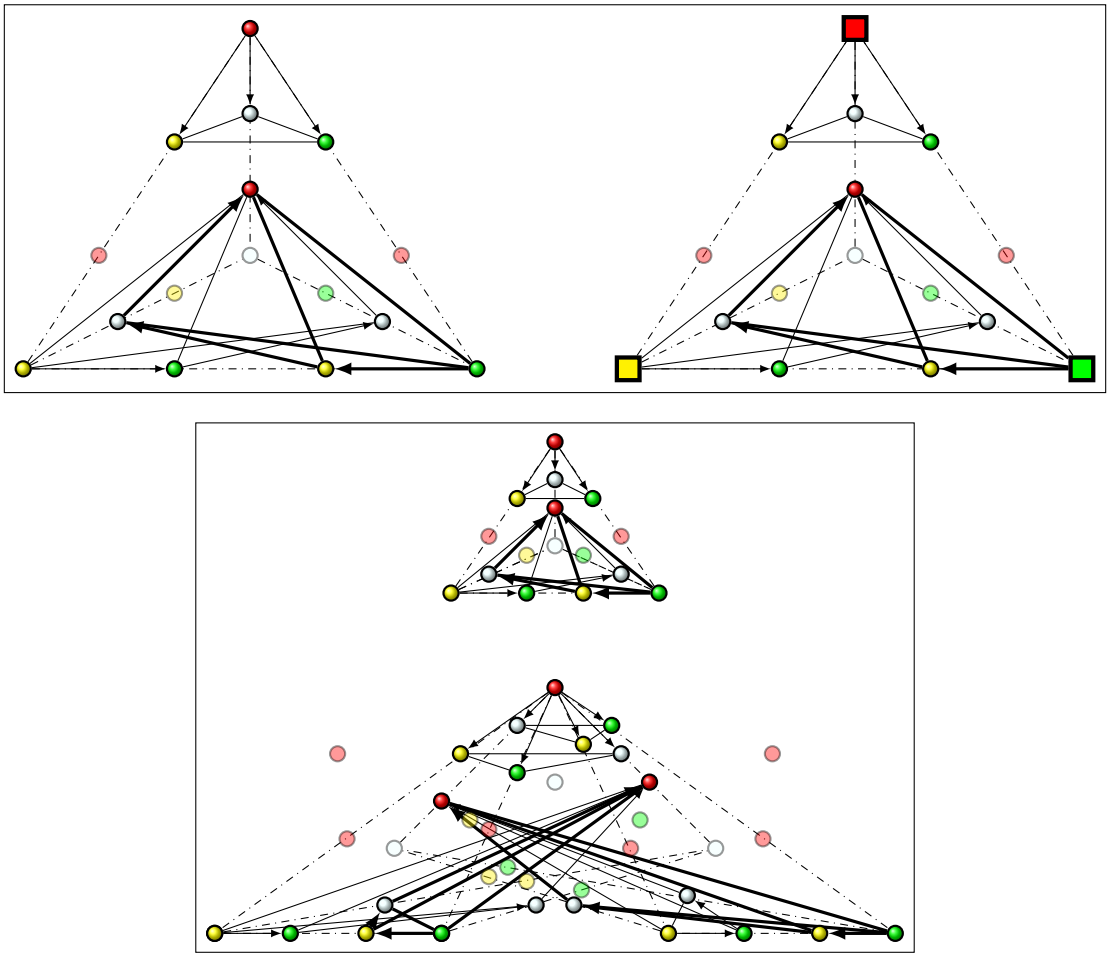


图11。双链消息对手在 $n = 4$ 个进程中一轮（$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1^{2C}$，顶部）和两轮（$\mathcal{P}_2^{2C}$，底部）的协议复形。右上图还显示了 $\mathcal{P}$ 的边界根分量。

4.5 共识可解性的判定过程

性

重新审视连接 $\mathcal{P}_{r-1}$ 中不相容边界面的路径在提升/中断方面可能出现的情形（0）–（2），可以明显看出，唯一可能导致路径永不中断，即在任何轮次 $r \geq 1$ 中都不中断的情形，是情形（1.a）：在情形（0）和（1.b）中，不可能存在一条经由 F'_{12} 进入 $\mathcal{P}_r$ 的提升路径，即 $\mathcal{P}_{r-1}$ 中的路径会立即中断。在情形（2）中，根据式（18），在一条经过 F_{12} 的路径首次被提升为一条经过 F'_{12} 的路径并进入 $\mathcal{P}_r$ 后，这种提升至多会在随后连续的 $n-2$ 个轮次中再次发生。由于所有可能性均已涵盖，在情形（2）“耗尽”之后，$F'_{12} = \emptyset$，因此情形（0）必然适用。

为了判定对于给定的消息对手，共识是否始终可解$\mathbf{D}^\omega$，因此只需跟踪轮次 1，2、.....中的情况(1.a)。如果发现对于某个 r，$\mathcal{P}_{r-1}$ 中的任何路径都不满足情况 (1.a)，则无需继续迭代。另一方面，如果发现某条路径永远重复出现情况 (1.a)，则共识是不可能的。由于面BF_1 和 BF_2（其中公共根分量 $R(BF_1) = R(BF_2)$在情况 (1.a) 中成功保护了 F_{12}）根据公式 (17) 导致 $\chi(F'_{12}) \subseteq \chi(F_{12})$，因此情况 (1.a) 的无限重复出现对于

某条路径意味着存在某一轮 r_0 使得 $\chi(F'_{12}) = \chi(F_{12}) = I \subset \Pi$ 对所有 $r \geq r_0$均成立。如果这成立，那么情况 (1.a) 也必然会在通过在所有轮次 $r \geq r_0$ 中使用相同的 BF_1 和 BF_2 以及 $\chi(BF_{12}) = I$ 所获得的提升路径中持续重复出现。

为了跟踪情形 (1.a) 可能发生的无限次重复，只需针对每一对交于 $MF_{12} \neq \emptyset$ 的面 $MF_1 \in \mathcal{P}_1$ 和 $MF_2 \in \mathcal{P}_1$, $MF_2 \neq MF_1$，确定满足对所有 $1 \leq j \leq \ell$ 均有 $\chi(R^j) \subseteq \chi(MF_{12})$ 的真边界面集合 $MF^1, \ldots, MF^\ell \in \mathcal{P}_1$，其边界根分量为 $R^j = R(MF^j)$。显然，只要满足 (i) $R(MF^j) = R(MF^k)$，且 (ii) BF^j 和 BF^k 都属于包含 F_1 和 F_2 的连通分量 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}_{r-1}$，那么任意选择 MF^j, MF^k，都可能成为某个 $\mathcal{P}_{r-1}$ 中情形 (1.a) 下同构且重复出现的保护极大单形 $BF_1 = BF^j$ 和 $BF_2 = BF^k$。若 (ii) 不成立，则可以放心地从后续所有轮次中无限次重复出现的保护极大单形候选集合里删除 MF^j, MF^k。

通过使用一轮未解释复形 $\mathcal{P}_1$的面之神经图 $\mathcal{N}$ 的适当标记和加权版本，可以将其以一种优雅且高效的判定过程加以实现。这是组合判定过程的一个拓扑版本，见 [39,Alg. 1]，其工作方式如下：$\mathcal{P}_1$ 中的每个面都是 $\mathcal{N}$中的一个节点 F，并标记为 $w(F) = R(F)$，即其在 $\mathcal{P}_1$中的根分量。若 F^1 和 F^2 这两个 $\mathcal{N}$中的节点在 $\mathcal{P}_1$中的某个单形 $\emptyset \neq F^{12} = F^1 \cap F^2$ 上相交，则用一条（无向）边(F^1, F^2) 将它们连接起来。该边标记为 $w((F^1, F^2)) = \{R^1, \ldots, R^\ell\}$（可能为空），它是满足性质 $\chi(F^{12}) \supseteq \chi(R^i)$ 的（必然是边界）根分量的最大集合。请回忆，不同边界根分量的成员集合可能满足 $\chi(R^i) \cap \chi(R^j) \neq \emptyset$，甚至满足 $\chi(R^i) = \chi(R^j)$，尽管 $R^i \cap R^j \neq \emptyset$ 在将其作为面时是不可能的。

用于判定共识可解性的过程通过迭代进行，从 $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$ 开始，并按如下方式从 $\mathcal{N}_i$ 定义 $\mathcal{N}_{i+1}$。令 $V(\mathcal{N}_{i+1}) := V(\mathcal{N}_i)$，具有相同的节点标签$w(F)$，将 $E(\mathcal{N}_{i+1})$ 初始化为空集，并向其中加入每条边 $(F^1, F^2) \in E(\mathcal{N}_i)$，其标签 $w_{i+1}((F^1, F^2))$ 按下文定义，但仅当该标签非空时才加入。对于一条潜在的边$(F^1, F^2) \in E(\mathcal{N}_i)$，如果唯一的连通分量 C_i^j 属于 $\mathcal{N}_i$，且其中包含$(F^1, F^2) \in E(\mathcal{C}_i^j)$，并且该连通分量包含某个 $F' \in V(\mathcal{C}_i^j)$，满足 $w(F') = R \in w_i((F^1, F^2))$，则设置 $R \in w_{i+1}((F^1, F^2))$。当出现以下任一情况时，构造停止：(i) $\mathcal{N}_i$ 的所有连通分量中均不存在表示具有不相容的根分量的面的节点（共识可解）；或者(ii)如果 $\mathcal{N}_{i+1} = \mathcal{N}_i$，但至少有一个连通分量包含表示具有不相容的根分量的面的节点（共识不可能）。

例如，图 12展示了RAS消息对手下各面的标记及其根分量，此时可以解决共识问题。神经图序列 $\mathcal{N}$、$\mathcal{N}_0$ 和 $\mathcal{N}_1$ 如图 13所示。另一方面，图 14 和图 15 展示了 iRAS 消息对手下的相同情况，此时无法解决共识问题。

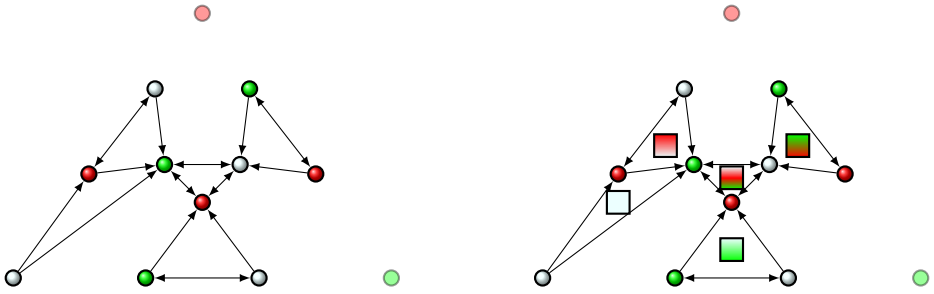


图 12.对RAS消息对手的1层协议复形 $\mathcal{P}_1$ 的面按其根分量进行标记的结果（左）及其根分量（右）。

请注意，决策过程 [39, 算法 1] 与我们的拓扑版本之间存在一个小小的差异：前者使用边界根分量集合 $w_i((F^1, F^2)) = \{R^1, \ldots, R^\ell\}$作为边 (F^1, F^2) 的标签，其大小可能会随着迭代而减小；后者则使用在 $\mathcal{P}_1$ 中无法区分 F^1 和 F^2 的固定进程集作为其标签$\ell((F^1, F^2))$。后者在迭代过程中不会改变，实际上可以写成的是

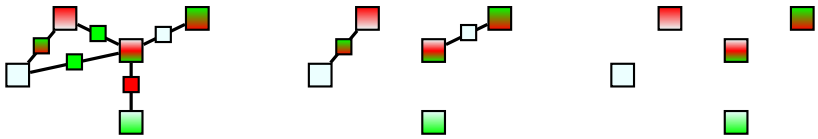


图13. RAS 消息对手的1层协议复形 $\mathcal{P}_1$ 的初始神经图 $\mathcal{N}_0$ 的构造：在将面替换为其对应节点（按其根分量着色）并对所有边进行标记（左）之后，通过移除没有保护性根分量的边得到的神经图 $\mathcal{N}_0$ （中），神经图 $\mathcal{N}_1$ （右）。注意 $\mathcal{N}_1$ 已经表明共识是可解的。

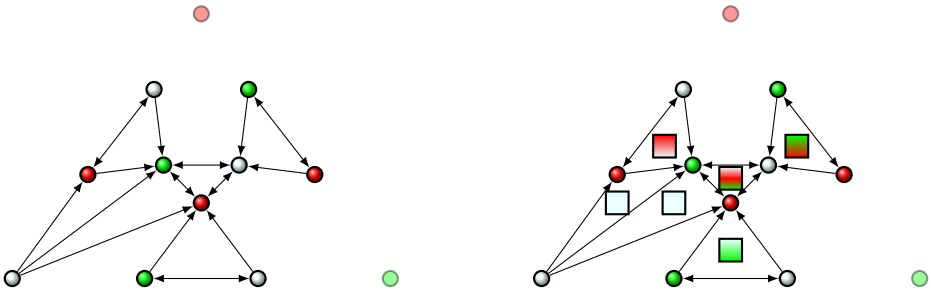


图 14。 根据其根分量对 iRAS 消息对手的 1 层协议复形的面 $\mathcal{P}_1$ （左侧）进行标记的结果（右侧）。

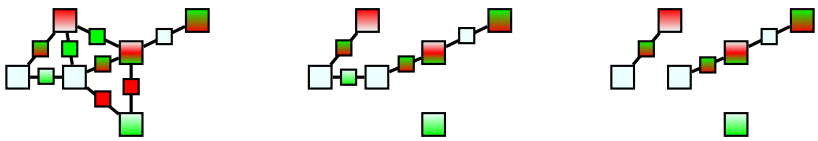


图15. iRAS 消息对手的1层协议复形 $\mathcal{P}_1$ 的初始神经图 $\mathcal{N}_0$ 的构造：在将所有面替换为其对应的节点（按其根分量着色）并标记所有边（左）之后，通过移除没有保护根分量的边而得到的神经图 $\mathcal{N}_0$ （中），神经图 $\mathcal{N}_1$ （右）。由于 $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1$仍包含一个连接不相容的根分量的分量，共识是不可能的。

$\ell((F^1,F^2)) = \chi(w_0((F^1,F^2))) = \chi(\{R^1,\dots,R^\ell\})$。尽管这些不同的标记方案在正确判定共识可解性/不可解性方面是等价的，我们的方案可能有助于实现更高效的数据编码，从而在某些消息对手的计算复杂度方面带来一些优势。另一方面，我们当然也可以在判定过程中使用 [39, Alg. 1] 的原始标记，并通过成员集合的适当包含关系成功检测受保护的边界根分量。

5 共识终止时间

在本节中，我们将把注意力从在给定的消息对手 $\mathbf{D}^\omega$ 下能否求解共识这一主要问题，转向分布式共识算法可能需要多长时间才能终止这一问题。

尽管第4.5节判定过程的迭代次数显然是共识终止时间的下界，但二者的确切关系尚不清楚：我们在第4节对路径提升/断裂进行分类时发现，存在这样一种情况：在检测到一条路径最终将会断裂之后，该路径实际发生断裂可能最多还要经过 $n-1$ 轮次之后。一个有趣的问题是，是否还存在其他因素，甚至会进一步扩大判定过程的迭代复杂度与共识终止时间之间的这一差距。事实上， [39] 给出了一个例子，表明这一差距甚至可能关于 n呈指数级增长。在第5.1节中，我们将对这一差距给出直观的拓扑解释，而造成这一差距的原因是存在“绕行”的可能性。在第5.2节中，我们最终提出一种判定过程，用于回答在给定消息对手$\mathbf{D}^\omega$下，分布式共识是否能在 k 轮次内得到解决。

5.1 由于绕行导致的延迟路径断裂

我们已在第 4.2 节中提到，为使某些不相容边界分量变得不连通，连接它们的所有路径都必须断开。考虑图 16 所示的情形：一个由 $n=5$ 进程（r,g,w,p,y）组成的系统，以及一个仅包含 5 个图的消息对手，对应于该图上方所示的未解释的一轮协议复形 $\mathcal{P}_1$ 。在 $\mathcal{P}_1$ 中有两条路径 $P_a \in \mathcal{C}_a$ 和 $P_b \in C_b$ ，它们连接相同的不相容边界面（分别触及 $\{y,g\}$ 与 $\{p,w\}$ 边界分量载体），并位于不同的连通分量 $\mathcal{C}_a$ 和 $\mathcal{C}_b$中。左侧路径 P_a 由面 F_1（含 $R(F_1)=\{y\}$）和 F_2 （含 $R(F_2)=\{w\}$ ）组成，共享面 $F_{12}=\{r\}$。右侧路径 P_b 由 H_1、 H_0 和 H_2 组成，并涉及带有边界根分量 $R(H_0)=\{r\}$的面 H_0 。根据情形（1.b）， $\mathcal{P}_2$ 中两条相应的提升路径都会断开，因为任意两个面之间的共享面 F_{12}仅由位于另一连通分量中的 $\mathcal{P}_1$ 内真边界面的公共根分量（未成功）保护。

然而，令人惊讶的是， $\{y,g\}$ 和 $\{p,w\}$ 边界本身在 $\mathcal{P}_2$中并未彼此分离。实际上， $\mathcal{C}_b \subseteq \mathcal{P}_1$ 中的右侧路径 P_b 会产生一条新的提升路径，连接 $\mathcal{P}_2$中分别对应于 $\{y,g\}$ 和 $\{p,w\}$ 边界的、具有适当边界分量的面。这种称为绕行的效应示于图16的下半部分：通过将 $\mathcal{P}$ 应用于 F_1、 F_2两者，从而得到$\mathcal{P}(F_1)$ $\mathcal{P}(F_2)$ $\subseteq \mathcal{P}_2$，可以观察到， P_b 现在会产生一条新的提升路径，该路径通过 $H_0' \cap H_0'' = \{r\}$的交集，连接不相容的边界（根）分量 $R(H_1')=\{g\}$ （位于面 H_1' 中，该面对应于 $\mathcal{P}(F_1)$中的 H_1 ）和 $R(H_2'')=\{p,w\}$（位于面 H_2''中，该面对应于 $\mathcal{P}(F_2)$中的 H_2）。事实上，由于情形（1.b），在后者周围于 $\mathcal{P}_2$ 中形成的岛——它由 H_1'、 H_2'、 H_0'、 H_0''、 H_1''和 H_2''组成，并巧妙地将由 F_1'和 F_2' 组成的连通分量与 F_1''和 F_2''分隔开——并不是一个岛，而是连接了另外两个不相容的边界根分量，即 $\{g\} \in H_1'$ 和 $\{w\} \in H_2''$。尽管在 $\mathcal{P}_1$ 中已经可以推断出，$\mathcal{P}_2$ 中的这条新的提升路径最终也会断裂，但在这里仅用两轮无法达成共识。

更糟的是，对于更大的 n，可以重复这一构造：另一个位于独立连通分量 $\mathcal{C}_c \subseteq \mathcal{P}_1$ 中的路径 P_c ，可以绕过 P_b中 H_1 与 H_0之间的共享面 $\{w\}$ ，以及 H_2 与 H_0 之间的 $\{y\}$ ，其方式与绕过 P_a 中的共享面 $\{r\}$ 相同。更具体地说，如果 P_b 中的这些共享面受到 $P_c \in \mathcal{C}_c$中真边界面的边界根连通分量（未能成功）的保护，而这些分量连接着接触不相容

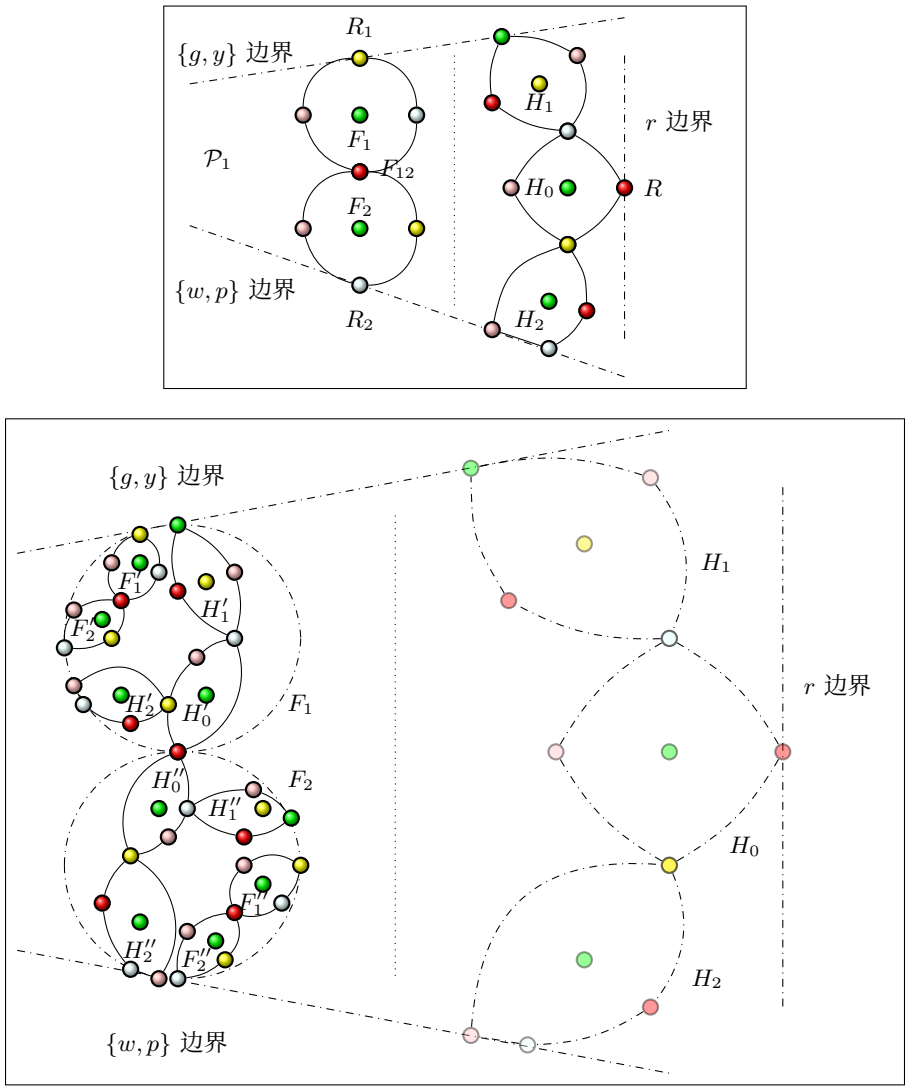


图 16. 协议复形演化过程中延迟创建路径的示意图，适用于 $n = 5$。上半部分展示 $\mathcal{P}_1$，它由两条路径 P_a 和 P_b 组成，这两条路径连接了不相容的边界（根）分量（分别位于 $\{y, g\}$ 边界和 $\{p, w\}$ 边界上），且它们位于不同的连通分量 $\mathcal{C}_a$ 和 $\mathcal{C}_b$中。左侧路径 P_a 由面 F_1 和 F_2组成，它们共享 $F_{12} = \{r\}$。右侧路径 P_b 由 H_0–H_2 组成，还包含一个面 H_0，其边界（根）分量为 $R(H_0) = \{r\}$。请注意，我们对 $n = 5$ 的限制意味着，F_1 和 F_2 中的粉色顶点实际上是同一个顶点，H_1 和 H_2中的红色顶点也是如此。下半部分展示 $\mathcal{P}_2$：尽管 P_a 和 P_b 对应的路径都根据情形（1.b）在第 2 轮中断开，但也会出现这样的情况：P_b 在 $\mathcal{P}_2$ 中创建一条提升路径（在 $\mathcal{P}(F_1)$ 和 $\mathcal{P}(F_2)$ 内延伸），连接其中“新出现的”不相容的真边界分量。这条提升路径直到 $\mathcal{P}_3$才会中断。

$\{g,y\}$ 边界到 $\{w\}$ 边界、到 $\{r\}$ 边界、到 $\{y\}$ 边界，最后到 $\{w,p\}$边界，便得到一条连接 $\{g,y\}$ 和 $\{w,p\}$ 边界的路径，该路径由 P_b 在 $\mathcal{P}_2$中承载，其方式与我们获得上述由 P_a 承载的路径完全相同。请特别注意，在 P_c 中接触 $\{r\}$ 边界的真边界面的边界根分量必须不同于在 P_b中接触 $\{r\}$ 边界的那个边界根分量，因为 $\mathcal{C}_b \neq \mathcal{C}_c$。由于 $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}$（$\mathcal{P}_2$），这最终导致在 $\mathcal{P}_3$ 中创建一条新路径，该路径同样连接不相容的 $\{g,y\}$ 和 $\{w,p\}$ 边界，由 P_a 在 $\mathcal{P}_1$中承载。

虽然连续的绕行不可能永远进行下去，但只有在 $\mathcal{P}_1$ 中不存在允许绕行共享面的“新”连通分量时，它才会停止。事实上，此类绕行连通分量的数量存在自然上限：

(1) $\mathcal{P}_1$ 中的绕行连通分量 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$、.....必须连接互不兼容的边界，但彼此必须不相交。因此，在不同分量中接触某个特定边界的各面之根分量（作为面来看）都必须彼此不同。然而， [39] 中展开的示例表明，这类分量的数量可能随 n 呈指数级增长。(2) 若连通分量 $\mathcal{C}_{x+1}$ 包含边界根分量 R，而该根分量未能在连通分量 $\mathcal{C}_x$ 中保护共享面 F_{12} 以实现绕行，那么它必须同时连接 $\mathcal{C}_x$ 中互不兼容的边界，以及包含 R 的某个边界。由于每个此类 F_{12} 都必须由 $\mathcal{C}_{x+1}$ 中某个真边界面保护，因此连接两个特定边界的路径长度必须严格递增。

这最终为判定过程的迭代复杂度与分布式共识的终止时间之间差距相当出人意料的指数级增长，提供了非常直观的“几何”解释。特别是，(1) 解释了这样一个令人惊讶的事实：数量of连通分量in $\mathcal{P}_1$ 在这里发挥着重要作用。

5.2 用于 k-轮次分布式共识的决策程序

根据第5.1节所述的绕行，对第4.5节的判定过程进行审视，可以明显看出，基于神经图的方法会立即移除边/标签。就判定时间而言，这当然最为有利：在图 16的示例中，它在一次迭代后就会终止，并表明共识是可解的。

还有一种不那么急切的判定过程，它构建一系列（边界）根可达图 $\mathcal{RRG}_i, i \geq 0$，用于说明在 $\mathcal{P}_{i+1}$中哪些真边界面彼此可达。首先，它构建初始根可达图 $\mathcal{RRG}_0$，其顶点（在我们的示意图中表示为方形节点）是 1轮未解释复形 $\mathcal{P}_1$的边界根分量（对于所有真边界面而言，它们与边界分量相同），见图3（右上），并且如果两个这样的顶点在 $\mathcal{P}_1$ 中通过一条路径相连（不论 $\mathcal{P}_1$中边的类型如何），则用一条无向边将它们连接起来，见图 17（左上）。我们通过将 $\mathcal{P}_1$ 中的每个面 F 替换为 $\mathcal{RRG}_0$的一个实例来获得 $\mathcal{RRG}_1$，使得两个面 F_1, F_2 在一个单形 F_{12} 中相交（第 4.2 节中的情形(1.a)），且该单形由 $R(MF_1) = R(MF_2)$ 保护，其中 $R(MF_1) = R(MF_2)$是 $\mathcal{P}_1$ 中真边界面 MF_1 和 MF_2 的公共根，即 $\chi(R(MF_1)) = \chi(R(MF_2)) \subseteq \chi(F_{12})$，则这两个面的替换共享一个标记为 $\chi(R(MF_1)) = \chi(R(MF_2))$ 的节点。请注意，在我们的图中，实际的根分量由一个粗方形节点表示，而表示交集的节点则由一个非粗方形节点表示。

Fig. 17 显示了 $\mathcal{RRG}_0$ （左上部分），它直接取自 Fig. 3 的右上部分；以及 $\mathcal{RRG}_1$ （右上部分），后者由若干连通分量组成。然而，显然它不再连接不相容边界分量。特别是，由白色粗方形节点组成的左下边界根分量，不再通过路径与 $\mathcal{RRG}_1$ 中外三角形右侧的红绿色粗方形节点相连。也就是说，这两个边界根分量之间的连接（存在于 $\mathcal{RRG}_0$ 中）已经消失了！

这立即为判定共识可解性提供了一种递归过程：我们不从初始的 $\mathcal{RRG}_0 = \mathcal{RRG}_0^{(0)}$ 开始，而是从先前构造出的 $\mathcal{RRG}_0^{(i)}$、$i \geq 0$ 归纳地开始，并像之前那样将其代入 $\mathcal{P}_1$，以构造 $\mathcal{RRG}_1^{(i+1)}$。注意，对于 $i \geq 1$，$\mathcal{RRG}_1^{(i+1)}$ 的边数至多与 $\mathcal{RRG}_1^{(i)}$ 相同。这个过程可以重复，直到 $\mathcal{RRG}_1^{(m+1)} = \mathcal{RRG}_1^{(m)}$ 对某个 $m \geq 0$ 成立。当且仅当 $\mathcal{RRG}_1^{(m)}$ 不包含

连接不相容粗方形节点的连通分量。在图 17 的示例中， $\mathcal{RRG}_1^{(1)}$ 已经不连接不相容的粗方形节点，因此在 RAS 下共识是可解的。

这一递归式 RRG 构造等价于以下迭代过程，该过程直接作用于根可达图：从 $\mathcal{RRG}_i$开始，初始为 $\mathcal{RRG}_1$，通过移除与某个节点（= 一个非粗方形节点）相incident的每条边来构造 $\mathcal{RRG}_{i+1}$ by，其中保护性匹配边界面所共有的边界根分量（= 粗方形节点 $R(BF_1) = R(BF_2)$）不在同一个连通分量中。如果所得 $\mathcal{RRG}_i$ 不包含连接不兼容粗方形节点的分量（此时共识是可解的），或者 $\mathcal{RRG}_{i+1} = \mathcal{RRG}_i$ （此时如果不兼容粗方形节点仍然连通，则共识不可解），该过程就停止。

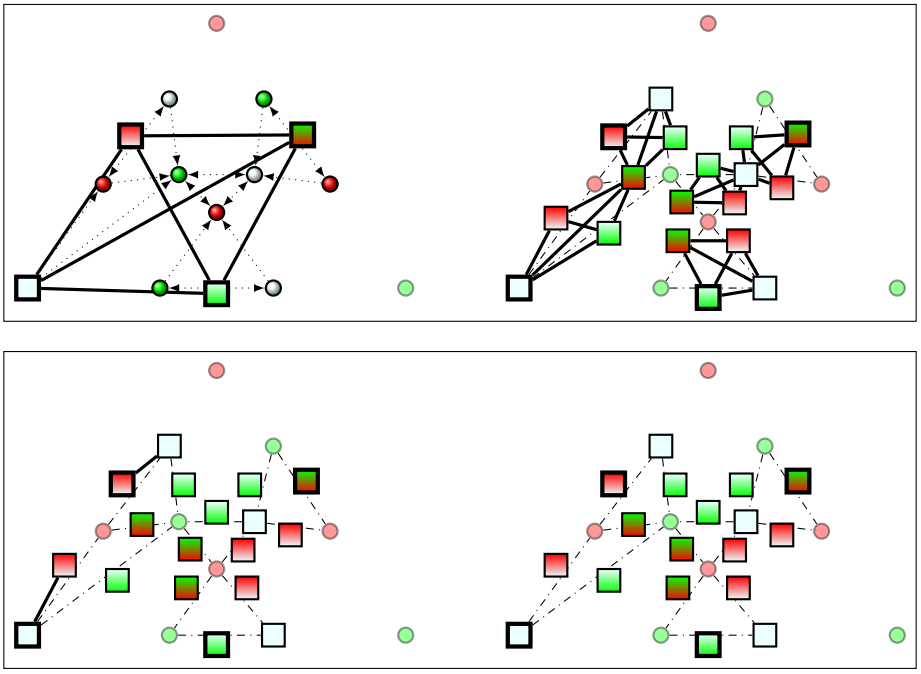


图 17. 从 RAS 的 1层协议复形构造根分量可达图 $\mathcal{RRG}_0$–$\mathcal{RRG}_3$：初始根可达图 $\mathcal{RRG}_0$（左上）和 $\mathcal{RRG}_1$（右上）。由于 $\mathcal{RRG}_1$ 已经划分为若干连通分量，且这些分量不再包含不相容的边界根分量，因此此时就可以判定共识问题可解。为完整起见，我们还展示了 $\mathcal{RRG}_2$（左下）和 $\mathcal{RRG}_3$（右下），其中所有边最终都已移除。

图 18 和图14展示了 iRAS 消息对手的 RRG构造，其中无法实现共识，正如图10 中所介绍的。2 链消息对手 2C 的情况如图 19 所示。

回到图 16 的例子，显然，基于根可达图的决策不会像基于神经图的过程那样尽早终止，因为它会明确跟踪边界根分量之间的所有路径。更具体地说，图 16 上半部分中， $\mathcal{P}_1$ 里的根分量 $R_1 = \{y\}$ 和 $R_2 = \{w\}$ 之间的路径 P_a 在 $\mathcal{P}_2$ 中消失了，因此在 $\mathcal{RRG}_1$ 中也消失了；而连接边界根分量 $\{g\}$ 和 $\{p, w\}$ 的路径 P_b 则被提升到 $\mathcal{P}_2$，因此在 $\mathcal{RRG}_1$ 中仍然存在。因此，在能够判定共识是否可解之前，该判定过程会继续推进到 $\mathcal{RRG}_2$ 。一般而言，它会忠实地跟踪彼此绕行的路径/连通分量，直到它们全部消失。

因此，基于 $\mathcal{RRG}$ 的判定过程自然可以作为开发一种判定过程的候选方案，用于判断能否在 k 轮次内实现分布式共识。然而，与基于神经图的判定过程一样，它无法涵盖由情形 (2) 导致的延迟路径断裂。要将这种情况也纳入考虑，一个简单的方法是将终止性所需的轮次数乘以 $n-1$，即根据 k 次决策迭代推断

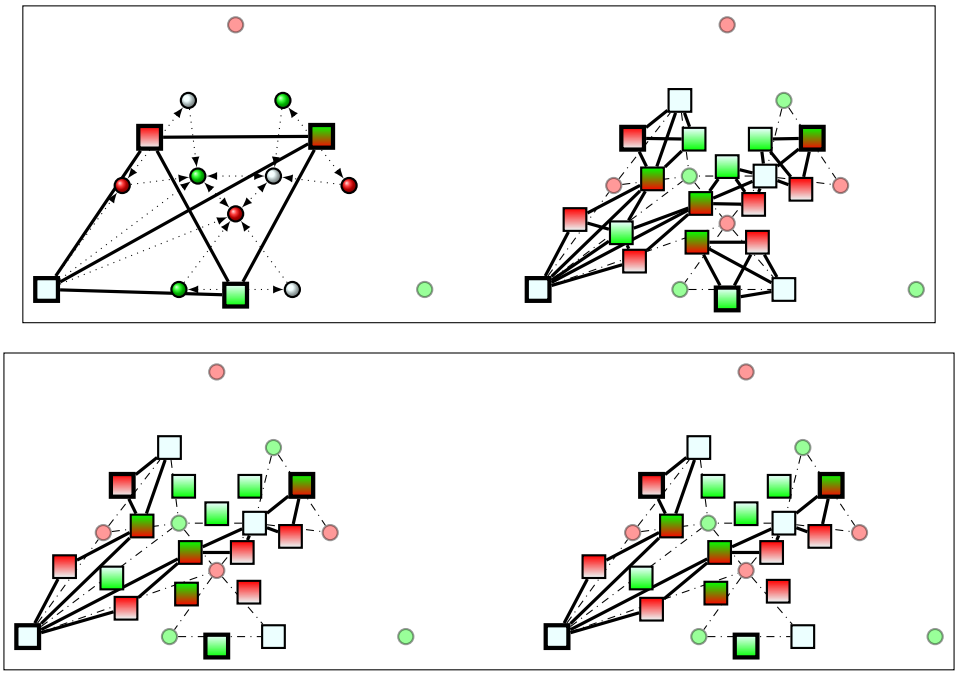


图 18. 根据 iRAS 消息对手的 1层协议复形构造根分量可达图 $\mathcal{RRG}_0$–$\mathcal{RRG}_3$：初始根可达图 $\mathcal{RRG}_0$（左上）和 $\mathcal{RRG}_1$（右上）。由于 $\mathcal{RRG}_1$ 划分为若干个包含不相容边界根分量的连通分量，因此必须构造 $\mathcal{RRG}_2$（左下）。由于不相容的边界根分量仍然通过 $\mathcal{RRG}_2$保持连通，经过又一次迭代最终得到 $\mathcal{RRG}_3 = \mathcal{RRG}_2$，因此在此处共识不可解。

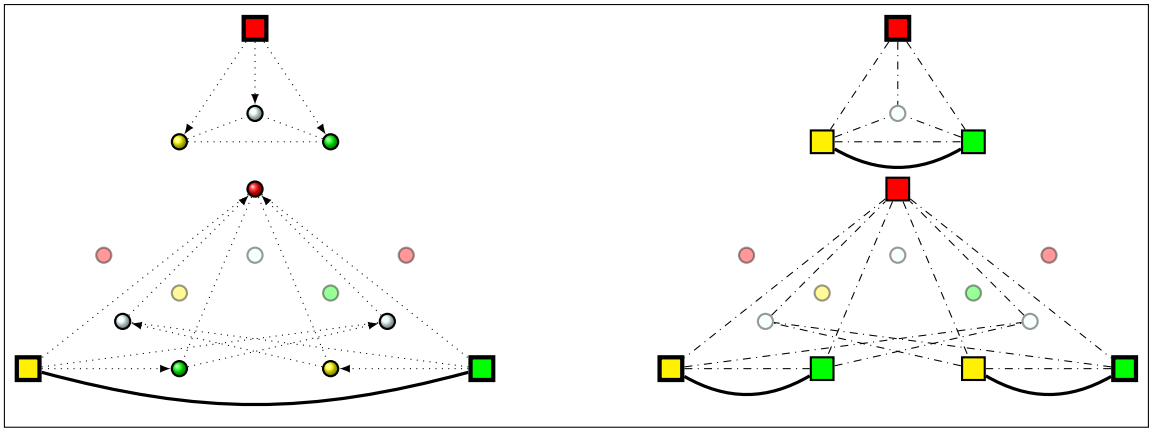


图 19. 根据 2 链消息对手 2C 的 1层协议复形构造根分量可达图 $\mathcal{RRG}_0$ 和 $\mathcal{RRG}_1$。由于 $\mathcal{RRG}_1$ 已经划分为仅包含相容边界根分量的连通分量，因此在此处共识可解。注意，再进行一次迭代甚至会移除 $\mathcal{RRG}_2$中的所有边。

判定过程的共识终止时间上界为 $k(n-1)$，这相当保守。基于 $\mathcal{RRG}$的判定过程的主要缺点在于其计算复杂度：毕竟，不同边界根分量的数量关于 n 呈指数增长，因此使初始根可达图 $\mathcal{RRG}_1$ 比初始神经图 $\mathcal{N}_0$大得多。

6 结论

我们提出了一个拓扑视角，用于判定由无记忆消息对手控制的动态图中的共识可解性。与纯组合方法 [39], 相比，它不仅进一步揭示了判定过程的迭代复杂度和分布式共识终止时间可能呈指数级膨胀的根源，还得出了一个可在 k 轮次内判定共识终止性的判定过程。得益于我们提出的通信伪球面这一新概念——它可以被视为色彩细分在消息传递方面的对应物——该概念也为进一步推广提供了有希望的基础，例如推广到其他判定问题和其他消息对手。

参考文献

1. Abraham, I., Malkhi, D. 等：区块链共识层与拜占庭容错。EATCS 通报 **3**(123)（2017年）2. Afek, Y., Gafni, E.：从同步性到异步性。载于：Frey, D., Raynal, M., Sarkar, S., Shyamasundar, R., Sinha, P.（编）《分布式计算与网络》，《计算机科学讲义》，第 7730 卷，第 225–239 页。Springer Berlin Heidelberg（2013年）。https://doi.org/10.1007/978-3-642-35668-1_16 10 1007 978 3 642 35668 1_16，http://dx.doi.org/ 。 / - - - - . Attiya, 3 H., Castañeda, A.：关于 k-集合一致性不可能性的一种非拓扑证明。《理论计算机科学》**512**，41–48（2013年）4. Attiya, H., Castañeda, A., Herlihy, M., Paz, A.：重命名的步数与命名空间复杂度界。SIAM J. Comput. **48**(1)，1–32（2019年）。https://doi.org/10.1137/16M1081439，https://doi. org/10 1081439 5 1137 16. / M . Biely, M., Robinson, P., Schmid, U.：有向动态网络中的一致性。载于：第 19 届结构信息与通信复杂性国际研讨会论文集（SIROCCO'12）。第 73–84 页。LNCS 7355，Springer-Verlag（2012年）6. Biely, M., Robinson, P., Schmid, U., Schwarz, M., Winkler, K.：有向动态网络中的渐进式降级共识与 k-集合一致性。《理论计算机科学》**726**，41–77（2018年）。https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.tcs.2018.02.019，http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397518301166 7. Biely, M., Schmid, U., Weiss, B.：混合进程与链路故障下的同步共识。《理论计算机科学》**412**(40)，5602 – 5630（2011年），http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397510005359，032 8 10 1016 2010 09 http://dx.doi.org/ 。 /j.tcs. . . . Castañeda, A., Fraigniaud, P., Paz, A., Rajsbaum, S., Roy, M., Travers, C.：任意图中的同步 t-容错共识。载于：SSS。《计算机科学讲义》，第 11914 卷，第 53–68 页。Springer（2019年）9. Castañeda, A., Fraigniaud, P., Paz, A., Rajsbaum, S., Roy, M., Travers, C.：分布式网络算法的拓扑学视角。《理论计算机科学》**849**，121–137（2021年）10. Charron-Bost, B., Függer, M., Nowak, T.：高度动态网络中的近似共识：平均算法的作用。载于：《自动机、语言与编程》，《计算机科学讲义》，第 9135 卷，第 528–539 页。Springer Berlin Heidelberg（2015年）11. Charron-Bost, B., Schiper, A.：Heard-Of 模型：存在良性故障的分布式系统中的计算。《分布式计算》**22**6 12 1 49 71 2009年 10 1007 00446 009 0084 ( )，–（Apr ）。https://doi.org/ . /s - - - . Coulouma, É., Godard, E., Peters, J.G.：共识可解的无知消息对手的刻画。《理论计算机科学》**584**，80–90（2015年）。https://doi.org/10 024 13 1016 2015 01 024，10 1016 2015 01 . / j.tcs. . . http://dx.doi.org/ . /j.tcs. . . . El-Hayek, A., Henzinger, M., Schmid, S.：动态网络中广播及其变体时间复杂度的渐近紧界。载于：第 14 届理论计算机科学创新会议（ITCS）（2023年）14. Fevat, T., Godard, E.：协调攻击问题及其扩展的最小障碍。载于：第 25 届 IEEE 并行与分布式处理国际研讨会，IPDPS 2011，美国阿拉斯加州安克雷奇，2011年5月16–20日——会议论文集。第 1001–1011 页（2011年）。https://doi.org/10.1109/IPDPS.2011.96，https://doi.org/10.1109/IPDPS.2011.96

15. Fraigniaud, P., Paz, A.: 网络中的局部计算拓扑。在：第 47 届自动机、语言与编程国际学术讨论会，ICALP。LIPIcs，第 168 卷，第 128:1–128:18 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik（2020）。https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ICALP.2020.128，https://doi.org/10 128 16 4230 2020 . / LIPIcs.ICALP. . . Függer, M., Nowak, T., Schwarz, M.: 渐近共识与近似共识的紧确界。在：2018年 ACM 分布式计算原理研讨会论文集。第 325–334 页。PODC '18，ACM，纽约，美国（2018）。https://doi.org/10.1145/3212734.3212762，http://doi.acm. org/10 3212762 17 1145 3212734 . / . . Gafni, E.: 逐轮故障检测器（扩展摘要）：统一同步性与异步性。在：第十七届 ACM 分布式计算原理年度研讨会论文集。第 143 277724 18 152 1998 10 1145 277697 – 页。ACM Press，巴亚尔塔港，墨西哥（）。https://doi.org/ . / . . Galeana, H.R., Rajsbaum, S., Schmid, U.: 连续任务与异步可计算性定理。在：Braverman, M.（编）第 13 届理论计算机科学创新会议，ITC S 2022，2022年1月31日—2月3日，美国加利福尼亚州伯克利。LIPIcs，第 215 卷，第 73:1–73:27 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik（2022）。https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ITCS.2022.73，https://doi.org/10 73 19 4230 2022 . /LIPIcs.ITCS. . . Godard, E., Perdereau, E.: 存在遗漏故障的通信网络中的 k- 集合一致性。在：Fatourou, P., Jiménez, E., Pedone, F.（编）第 20 届国际分布式系统原理会议，OPODIS 2016，2016年12月13—16日，西班牙马德里。LIPIcs，第 70 卷，第 8:1–8:17 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Infor matik（2016）。https://doi.org/10.4230/LIPIcs.OPODIS.2016.8，https://doi.org/10 8 20 4230 2016 . / LIPIcs.OPODIS. . . Herlihy, M., Kozlov, D.N., Rajsbaum, S.: 组合拓扑视角下的分布式计算。Morgan Kaufmann（ 2013 =9780124045781 ），
21
https://store.elsevier.com/product.jsp?isbn . Herlihy, M., Rajsbaum, S.: 并发计算与可剖分复形。在：Lynch, N.A., Shvarts- man, A.（编）《分布式计算》，《计算机科学讲义》，第 6343 卷，第 109–123 页。Springer Berlin Heidelberg（2010）。https://doi.org/10.1007/978-3-642-15763-9_10，http://dx.doi. org/ 10 1007 978 3 642 15763 9_10 . / - - - - . Herlihy, M., Rajsbaum, S., Tuttle, M.R.: 同步消息
22
传递与拓扑概述。《电子理论计算机科学札记》**39**(2)，1–17（2001）。https://doi.org/10.1016/S1571- 0661 5 23 05 01148 5，10 1016 1571 0661 05 01148（ ）- https://doi.org/ . /S - ( ) - . Herlihy, M., S havit, N.: 异步可计算性的拓扑结构。《ACM 杂志》**46**(6)，858–923（1999年11月）。https://doi.org/10.1145/331524.331529，http://doi.acm.org/10.1145/331524. 331529 24. Keidar, I., Shraer, A.: 及时性、故障检测器与共识性能。在：第二十五届 ACM SIGACT-SIGOPS 分布式计算原理研讨会（PODC'06）论文集。第 169–178 页。ACM Press，纽约，美国（2006）25. Kozlov, D.N.: 单纯复形的色彩细分。《同调、同伦与应用》**1**412 26 1 197 209 2012年10 4310 2012 14 2（），–（）。https://doi.org/https://dx.doi.org/ . /HHA. .v .n .a . Kozlov, D.N.: 翻转图的结构理论及其在弱对称性破缺中的应用。CoRR**abs**/**151**100457 2**700457** 2015年1511.（），http://arxiv.org/abs/ . . Kozlov, D.N.: 标准色彩细分的组合拓扑与六个进程的弱对称性破缺，第 155–194 页。Springer International Publishing（2016）28. Kuhn, F., Oshman, R.: 动态网络：模型与算法。《SIGACT News》**42**(**1**)，82–96（2011）29. Kuhn, F., Lynch, N.A., Oshman, R.: 动态网络中的分布式计算。在：STOC。第 513–522 页（2010）30. Kuhn, F., Oshman, R., Moses, Y.: 动态网络中的协调共识。在：第 30 届 ACM SIGACT-SIGOPS 分布式计算原理年度研讨会论文集。PODC '11，ACM（2011）31. Newport, C., Kotz, D., Yuan, Y., Gray, R.S., Liu, J., Elliott, C.: 无线仿真假设的实验评估。《模拟：国际建模与仿真学会会刊》**83**(9)，643–661（2007年9月）。https://doi.org/10.1177/0037549707085632，http://dx.doi. org/10 0037549707085632 32 1177. / . Nowak, T., Schmid, U., Winkler, K.: 一般消息对手下共识的拓扑刻画。在：2019年 ACM 分布式计算原理研讨会论文集，PODC 2019，加拿大安大略省多伦多，2019年7月29日—8月2日。第 218–227 页（2019）。https://doi.org/10.1145/3293611.3331624，https://doi.org/10.1145/3293611.3331624，（完整版本：http://arxiv.org/abs/1905.09590）33. Ongaro, D., Ousterhout, J.: 探寻易于理解的共识算法。在：USENIX 年度技术会议（ATC）论文集。第 305–319 页（2014）34. Santoro, N., Widmayer, P.: 时间并非良药。在：第六届计算机科学理论方面年度研讨会（STACS'89）论文集。第 304–313 页。《计算机科学讲义》349，Springer-Verlag，德国帕德博恩（1989年2月）

35. Santoro, N., Widmayer, P.：具有普遍故障的同步网络中的一致性。《理论计算机科学》**384**(2–3), 232–249（2007年10月） 36. Schmid, U., Weiss, B., Keidar, I.：链路故障下共识的不可能性结果与下界。《SIAM计算杂志》**38**(5)，1912–1951（2009年）。https://doi.org/10.1137/S009753970443999X, https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/ S009753970443999X 37. Schwarz, M., Winkler, K., Schmid, U.：最终稳定的消息对手下的快速共识。载于：第17届国际分布式计算与网络会议论文集。第7:1–7:10页。ICDCN '16，ACM，美国纽约州纽约市（2016年）。https://doi.org/10.1145/2833312.2833323, http://doi.acm.org/10 2833323 38 1145 2833312 . / . . Shimi, A., Castañeda, A.：通过组合拓扑研究基于轮次的模型中的k-集合一致性下界。载于：第39届分布式系统原理研讨会论文集。第395–404页。PODC '20，计算机协会，美国纽约州纽约市（2020年）。https://doi.org/10 3405752 39 1145 3382734 3405752，10 1145 3382734 . / . https://doi.org/ . / . . Winkler, K., Paz, A., Rincon Galeana, H., Schmid, S., Schmid, U.：无状态消息对手下共识的时间复杂度。载于：Tauman Kalai, Y.（编）第14届理论计算机科学创新会议（ITCS 2023）。莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs），第251卷，第100:1–100:28页。Schloss Dagstuhl – Leibniz信息学中心，Dagstuhl，德国（2023年）。https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ITCS.2023.100, https://drops.dagstuhl.de/opus/ volltexte/2023/17603 40. Winkler, K., Schmid, U.：有向动态网络中共识近期结果概述。EATCS通报**128** （2019年），http://bulletin.eatcs.org/index.php/beatcs/article/view/581 41. Winkler, K., Schmid, U., Moses, Y.：闭合消息对手的共识可解性刻画。载于：第23届分布式系统原理国际会议，OPODIS 2019，2019年12月17–19日，纳沙泰尔，瑞士。LIPIcs，第153卷，第17:1–17:16页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik（2019年）。https://doi.org/10.4230/LIPIcs.OPODIS.2019.17，https:// doi.org/10 17 42 4230 2019 . /LIPIcs.OPODIS. . . Winkler, K., Schwarz, M., Schmid, U.：具有短暂稳定性的有向动态网络中的共识。《分布式计算》 **32**(5), 443–458（2019年）。https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s00446- 019-00348-0, https://doi.org/10.1007/s00446-019-00348-0