arXiv:2304.02318v1 [math.CA] 5 Apr 2023

边值问题与海森堡唯一性对

S. Rigat 与 F. Wielonsky

2023年4月6日

摘要

我们基于偏微分方程边值问题的研究，描述一种在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中构造海森堡唯一性对(Γ,Λ) 的一般方法。因此，我们证明，例如，由有界凸集 Ω 的边界 Γ 和球面 Λ 组成的任意一对，当且仅当 Λ 的半径平方不是 Ω 上拉普拉斯算子的特征值时，才是海森堡唯一性对。证明的主要工具包括 Paley-Wiener 定理、齐次 Dirichlet 问题或初边值问题解的唯一性、单层势的连续性，以及 $\mathbb{C}^n$ 中的一些复分析。Denjoy 关于具有无理旋转数的圆微分同胚之间拓扑共轭的定理也很有用。

1 引言

不确定性原理在数学中的阐释是一个经典主题，尤其是在调和分析中；例如参见 [14] ，其中对该主题进行了全面介绍。海森堡唯一性对是一个相关概念，于 [15]中引入。其内容如下。

一对 (Γ,Λ)，其中 Γ 是 $\mathbb{R}^n$中的一个超曲面， $n\geqslant 2$是 Λ 中的一个集合，如果对于任意一个在 Γ 上相对于 $d\sigma$（即 Γ上的曲面测度）可积的复值函数 g，以下蕴含关系成立，则称其为海森堡唯一性对（有时简称为 HUP），

$$\widehat{g}(\lambda)=\int_\Gamma e^{-i\lambda\cdot x}g(x)d\sigma(x)=0 \text{ on } \Lambda \quad\Longrightarrow\quad g=0 \text{ a.e. on } \Gamma.$$

函数 $\widehat{g}(\lambda)$ 是测度$gd\sigma$的分布意义下的傅里叶变换，也称为 g的傅里叶–斯蒂尔切斯变换。注意，根据哈恩–巴拿赫定理，上述条件等价于这样一个事实：由指数函数族 $e^{i\lambda\xi}$、$\lambda\in\Lambda$张成的向量空间在 $L^\infty(\Gamma)$中是弱-*稠密的。此外，还有一个类似的概念，即 $(S$、$\Sigma)$ 这对 $\mathbb{R}$ 中具有正测度且满足以下条件的相互湮灭的博雷尔子集

$$\forall\varphi\in L^2(S),\ \operatorname{supp}(\widehat{\varphi})\subset\Sigma \quad\Longrightarrow\quad \varphi=0,$$

见 [14]。

很容易检验，海森堡唯一性对的概念满足两个基本性质，即，

1) 它在平移下不变：若 (Γ,Λ) 是一个 HUP，则对于 $x_0,\lambda_0\in\mathbb{R}^n$，$(\Gamma+x_0,\Lambda+\lambda_0)$ 也是一个 HUP，

2) 若 T 是一个可逆线性变换，其伴随变换为 T^*，那么

$$(\Gamma,\Lambda)\text{ is an HUP }\implies (T(\Gamma),(T^{-1})^*(\Lambda))\text{ is also an HUP.}\tag{1.1}$$

In [15]，已证明，由双曲线和一个交叉格构成的对 ce,

$$\Gamma=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:x_1x_2=1\right\},\quad \Lambda_{\alpha,\beta}:=(\alpha\mathbb{Z}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\beta\mathbb{Z}),\quad \alpha,\beta>0,$$

当且仅当 $\alpha\beta\leqslant 1$ 时是一个 HUP。自 [15]，发表以来，文献中又出现了许多其他例子。例如，在 $[2,3,11,17,19,23,24]$，中可以找到平面上的 HUP 例子 $\mathbb{R}^2$，涉及圆、直线的并、椭圆、抛物线、多边形或非常特殊的曲线。在 $[12,26]$，中也可以找到 $\mathbb{R}^n$,$n>2$ 中的 HUP 例子，同样涉及球面、抛物面或某些圆锥面。

本文旨在在相当一般的假设下，在 $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$ 中得到海森堡唯一性对；在我们的一些例子中，我们只假设集合 Γ 是某个有界凸集的边界。我们的方法受到 [1]，中研究的启发；该研究旨在为边值问题的 Fokas 方法奠定严格的理论基础，并证明：对于有界凸域上的线性椭圆型偏微分方程，狄利克雷与诺伊曼边界数据之间的全局关系存在解，意味着狄利克雷问题存在解，而且全局关系的解是唯一的。[1] 与确定海森堡唯一性对的问题之间的联系，似乎此前尚未有人注意到。

在方便时，我们将用 X 表示一个由 X_1, ..., X_n 组成的 n-元变量组，并用 D 表示偏导数 ∂_{X_1}, ..., ∂_{X_n}组成的元组。对于多项式 $P(X)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha X^\alpha\in\mathbb{C}[X]$，微分算子 $P(-iD)$ 定义为

$$P(-iD)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(-i)^{|\alpha|}\partial_{X_1}^{\alpha_1}\dots\partial_{X_n}^{\alpha_n}.$$

我们还将 $Z(P)$ 称为 $\mathbb{C}^n$ 中 P 的零点子集，并将 $Z_{\mathbb{R}}(P)=Z(P)\cap\mathbb{R}^n$ 称为其所有实零点的子集。

设 $E_P(x)$ 为微分算子 $P(-iD)$ 的一个基本解，即在分布意义下 $P(-iD)E_P=\delta$，其中 δ 表示狄拉克 delta 分布。我们将利用单层位势，

$$\Phi g(x):=\int_\Gamma g(y)E_P(x-y)d\sigma(y),\qquad x\in\mathbb{R}^n,\tag{1.2}$$

其中 g 是定义在 Γ 上的某个函数，详情请参阅第 2 节。

下面陈述我们的主要结果。

定理 1.1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中边界 Γ 分段光滑的有界凸域 C^1，且 $d\sigma$ 是定义在 Γ 上的曲面测度（当 $n=2$ 时为弧长测度）。设 $P(X_1,\dots,X_n)$ 是一个实系数多项式，使得

(i) P 是 $\mathbb{C}[X]$ 中的无平方因子多项式，即 P 的每个不可约因子的重数均为 1；并且对于至少一个变量（例如 X_1），有 $P(X) = a_1 X_1^d + \cdots$，其中非零首项系数 a_1 是常数（即与其他变量无关）。

(ii) V_i 的每个不可约分支由一个实多项式定义，并且在 $V_{i,\mathbb{R}} = V_i \cap \mathbb{R}^n$ 中包含一个点，该点作为 V_i 的点是光滑的（即雅可比矩阵在该点的秩为 1）。

(iii) 对于某些 函数空间 $\overline{\mathcal{D}}_P(\Omega)$，定义在 Ω 上的函数，齐次狄利克雷问题

$$P(-iD)u(x) = 0, \qquad x \in \Omega,$$
$$u(x) = 0, \qquad x \in \Gamma,$$

具有唯一解 $u = 0$ 在 $\overline{\mathcal{D}}_P(\Omega)$.

(iv) 对于某个空间 $\mathcal{G}(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$，其中包含定义在 Γ 上的复值函数 g，与 $g \in \mathcal{G}(\Gamma)$ 相关联并在 (1.2) 中定义的势 Φg 是 $\mathbb{R}^n$ 中的连续函数，且

$$\forall g \in \mathcal{G}(\Gamma), \quad \Phi g|_{\overline{\Omega}} \in \mathcal{D}_P(\overline{\Omega}).$$

那么，$(\Gamma, Z_{\mathbb{R}}(P))$ 是 $\mathcal{G}(\Gamma)$ 的海森堡唯一性对，也就是说，

$$\forall g \in \mathcal{G}(\Gamma), \quad \widehat{g} = 0 \text{ on } Z_{\mathbb{R}}(P) \quad \Longrightarrow \quad g = 0 \text{ a.e. on } \Gamma.$$

上述表述中的函数空间 $\mathcal{D}_P(\Omega)$ 和 $\mathcal{G}(\Gamma)$ 将根据域 Ω 和多项式 P来选取，详情见第 4 节。

将定理 1.1 应用于具体情形，我们得出如下的一般海森堡唯一性对。

定理 1.2. 以下结论成立:

i) 设 Γ 为 $\mathbb{R}^n$ 中任意一个 C^1类有界凸域的边界。设 $S_{n-1}(c_1)$为维数 $n-1$、半径 c_1的球面。那么，当且仅当 c_1^2 不是 Ω 上 $-\Delta$ 的特征值时，$(\Gamma, S_{n-1}(c_1))$ 是关于 $L^p(\Gamma)$,$p > n-1$的海森堡唯一性对。

ii) 设 Γ 为顶点为 $(0,0), (T,0), (T,L), (0,L)$, $T, L > 0$的矩形，并设 $\mathcal{P}$为 $\mathbb{R}^2$中的抛物线 $X_1 + X_2^2 = 0$。数对 $(\Gamma, \mathcal{P})$ 是关于 $C^2(\Gamma)$的海森堡唯一性对。

iii)设 Γ 是 ii)中的矩形，并假设 $T/L \notin \mathbb{Q}$。设 Δ_+ 和 Δ_- 是 $\mathbb{R}^2$中的两条直线 $\{X_1 = X_2\}$、$\{X_1 = -X_2\}$。那么，有序对 $(\Gamma、\ \Delta_+ \cup \Delta_-)$ 是 $C^1(\Gamma)$ 的海森堡唯一性对。

iv) 令 $\mathbb{T}$ 表示单位圆，并令 Δ_1、Δ_2 为过原点的两条直线。那么，当且仅当 Δ_1 和 Δ_2 的夹角为 $\pi\rho$，且ρ 为无理数时，$(\mathbb{T}、\ \Delta_1 \cup \Delta_2)$ 是 $L^1(\mathbb{T})$ 的海森堡唯一性对。

我们注意到，项目 iv) 中的海森堡唯一性对此前已在 [23], 中通过另一种方法得到。此外，利用性质(1.1)，项目iii)可改述为这样一个事实：对 $(\mathcal{C}、\ \Delta_\rho \cup \Delta_{-\rho})$ 是一个海森堡唯一性对，其中 $\mathcal{C}$ 是边长为 π 和 1的矩形，且$\Delta_{\pm\rho} = \{X_2 = \pm\pi\rho X_1\}$，其中 $\rho \notin \mathbb{Q}$。这表明 iii) 和 iv) 之间存在某种联系。

实际上，iv）项可以按以下方式扩展。

定理 1.3. 设 Γ 是任意一条 C^2 类的严格凸平面曲线。存在一个角 ρ，由经过原点的两条直线 Δ_1、Δ_2 构成，使得这一对 $(\Gamma、\ \Delta_1 \cup \Delta_2)$ 对于 $L^1(\Gamma)$ 是一个海森堡唯一性对。

遗憾的是，我们无法根据 Γ 刻画出使上述点对成为海森堡唯一性对的角 ρ。这或许是一个有趣的问题。

在第 2 节中，我们回顾或陈述若干对本研究有用的预备结果。在第 3 节中，我们给出定理1.1的证明。在第4节中，我们将我们的结果应用于椭圆方程（亥姆霍兹方程）、薛¨定谔方程、双曲型方程（波动方程），最后还应用于输运方程。对于这些方程中的每一个，我们都推导出相应的海森堡唯一性对。

2 预备知识

我们首先回顾一些关于单层位势概念的细节，该概念定义于 (1.2) 中。对于牛顿位势，以下内容可见 [7, 第 2 章，§3], 。下文中， φ 表示一个测试函数。对于 $g \in L^1(\Gamma)$, Radon 测度$gd\sigma$ 是支撑于 Γ上的分布，定义为

$$< gd\sigma, \varphi >= \int_\Gamma g(m)\varphi(m)d\sigma(m).$$

与 g 相关联的单层 Φg 的位势，随后定义为分布的卷积,

$$\Phi g = E * gd\sigma,$$

其中， E 表示微分算子 $\mathcal{P} = P(-iD)$的基本解。注意到，由于测度 $gd\sigma$ 具有紧支撑，卷积是良定义的。

根据 Malgrange 和 Ehrenpreis 的经典结果，具有常系数的线性微分算子 $P(-iD)$ 总是存在一个基本解 E ，满足

$$P(-iD)E = \delta. \tag{2.1}$$

$\check{}$ $\check{}$令 E 表示与 E对称的分布，其定义为 $< E, \varphi >=< E, \check{\varphi} >, \check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, 根据卷积的基本性质，我们得到

$$< \Phi g, \varphi >=< gd\sigma, \check{E} * \varphi >= \int_\Gamma (\check{E} * \varphi)gd\sigma = \int_\Gamma < \check{E}(y), \varphi(x-y) > g(x)d\sigma(x). \tag{2.2}$$

现在，令 $\mathcal{P}^*$为微分算子 $\mathcal{P}$的伴随算子，则有

$$\begin{aligned} < \mathcal{P}(\Phi g), \varphi > =< \Phi g, \mathcal{P}^*\varphi >= \int_\Gamma (\check{E} * \mathcal{P}^*\varphi)gd\sigma = \int_\Gamma (\mathcal{P}^*\check{E} * \varphi)gd\sigma \\ = \int_\Gamma (\widetilde{\mathcal{P}E} * \varphi)gd\sigma = \int_\Gamma (\delta * \varphi)gd\sigma = \int_\Gamma \varphi gd\sigma =< gd\sigma, \varphi >, \end{aligned}$$

因此， $\mathcal{P}(\Phi g) = gd\sigma$的支撑包含于 Γ上。于是

$$\mathcal{P}(\Phi g)|_{\mathbb{R}^n \setminus \Gamma} = 0. \tag{2.3}$$

当基本解 E 是局部可积函数时，由（2.2）可得,

$$< \Phi g, \varphi >= \int_{x\in\Gamma}\int_{y\in\mathbb{R}^n} \check{E}(x-y)\varphi(y)dyg(x)d\sigma(x) =< \int_{x\in\Gamma} E(y-x)g(x)d\sigma(x), \varphi(y) >$$

即 Φg 就是函数

$$\Phi g(y) = \int_\Gamma E(y-x)g(x)d\sigma(x).$$

接下来，我们回顾一个对我们有用的 Paley-Wiener 定理版本，参见 [16,定理 7.3.1]。

定理 2.1（Paley-Wiener）。设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个凸紧子集，其支撑函数为 H。每个属于 $\mathbb{C}^n$ 的整函数 u，若对某个正整数 N 满足如下估计。

$$|u(\zeta)| \leqq C(1+|\zeta|)^N e^{H(\operatorname{lm}\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

是支集包含于 K 的分布的傅里叶变换。

我们还将使用一个关于在 $\mathbb{C}^n$ 上于代数簇的实点处消失的解析函数的结果，参见例如 [25, 定理 5.1]。回忆一下，由一族多项式定义的、维数为 d的仿射代数簇$V \subset \mathbb{C}^n$ 的一个点，如果定义族的雅可比矩阵在该点的秩为 $n-d$，则称其为光滑点。我们首先考虑不可约代数簇 V 的情形。

命题 2.2. 设 $V \subset \mathbb{C}^n$ 是一个维数为 d 的不可约仿射簇，由一族 $n-d$ 多项式 $P_1, \ldots, P_{n-d} \in \mathbb{R}[X]$ 定义。假设 V 有一个光滑实点$a \in V_{\mathbb{R}}$。那么 $V_{\mathbb{R}}$ 在 V 中是 Zariski 稠密的，也就是说，任何在 V 中解析的函数 f，若在 $V_{\mathbb{R}}$ 上为零，就必定在 V 上为零。

证明。考虑光滑点 $a \in V$，并为简单起见，假设雅可比矩阵的第一个子式$(\partial_{z_j} P_i(a))_{i,\ j=1,\ \ldots,\ n-d}$非奇异。根据隐函数定理，存在一个小球 $\mathcal{B}_a$，位于 $\mathbb{C}^d$ 中，以 $(a_{n-d+1}$为中心，……，$a_n)$，以及 W 的一个邻域$(a_1$，……，$a_n)$，和 $n-d$ 个解析函数

$$h_j(z_{n-d+1}, \ldots, z_n), \qquad j = 1, \ldots, n-d,$$

定义于 $\mathcal{B}_a$ 使得，

$$\begin{aligned} (z_1, \ldots, z_n) \in W \quad \text{and} \quad P_i(z_1, \ldots, z_n) = 0,\ i = 1, \ldots, n-d \quad \Longleftrightarrow \\ (z_{n-d+1}, \ldots, z_n) \in \mathcal{B}_a \quad \text{and} \quad z_j = h_j(z_{n-d+1}, \ldots, z_n),\ j = 1, \ldots, n-d. \end{aligned} \tag{2.4}$$

由于 P_i具有实系数，a 也是 $V_{\mathbb{R}}$的正则点。应用隐函数定理，这次在 $\mathbb{R}^n$中，我们得到，

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) \in W \cap \mathbb{R}^n \quad \text{and} \quad P_i(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ i = 1, \ldots, n-d \quad \Longleftrightarrow \\ (x_{n-d+1}, \ldots, x_n) \in \mathcal{B}_a \cap \mathbb{R}^d \quad \text{and} \quad x_j = h_j(x_{n-d+1}, \ldots, x_n),\ j = 1, \ldots, n-d. \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中，（2.4）和（2.5）中的函数 h_j 实际上是同一个函数（限制在 $\mathbb{R}^d$上时为实值）。现在，对于在 V 上解析且在 $V_{\mathbb{R}}$ 上消失的 f，函数

$$g(z_{n-d+1}, \ldots, z_n) = f(h_1(z_{n-d+1}, \ldots, z_n), \ldots, h_{n-d}(z_{n-d+1}, \ldots, z_n), z_{n-d+1}, \ldots, z_n)$$

在 $\mathcal{B}_a$ 中是解析的，并且由于 (2.5)，在$\mathcal{B}_{a,\ \mathbb{R}}$ 上消失。因此，g 在整个 $\mathcal{B}_a$ 上消失。等价地，f 在 a 的一个邻域内（相对于 V 的拓扑）消失。最后，对不可约代数集V 上的全纯函数应用恒等原理，参见 [5, 第 1 章，第 5 节。3]，f 必在整个 V 上消失。□

上述结果很容易推广到非不可约簇的情形。

推论 2.3. 设 $V \subset \mathbb{C}^n$ 是一个维数为 d的仿射簇，并设 $V = \cup V_i$ 为其分解为有限个不可约分支 V_i。假设每个 V_i 都由实多项式定义，并包含一个光滑实点$a_i \in V_{i,\mathbb{R}}$。那么，与命题2.2 中一样， $V_{\mathbb{R}}$ 在 V 中是扎里斯基稠密的。

证明。只需注意到 $V_{\mathbb{R}} = \cup V_{i,\ \mathbb{R}}$ 并将命题 2.2 应用于各个分量 V_i。

□

关于 $\mathbb{C}^n$ 中解析函数的另一个对我们有用的结果是以下引理。

引理 2.4. 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个开连通子集，且 f 在 Ω 中解析。假设 $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ 是一个无平方因子多项式。如果 f 在 P 的零点集 $Z(P)$ 上消失，那么 f/P 在 Ω 中解析。

证明。根据局部解析零点定理，参见 [13, 第 3], 章，对于每个 $z \in \Omega$，都存在一个 z 的邻域 U_z 以及一个在 U_z 中解析的函数 g_z，使得 $f = g_z P$。应用于 Ω 中的恒等原理，我们可以将函数 g_z 粘合起来，得到一个在 Ω 中解析的函数 g，使得 $f = gP$ 在那里。□

最后，在一项应用中，我们需要一些关于单位圆 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上微分同胚的结果。保向同胚 $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 的旋转数定义为以下极限

$$\tau(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{f}^n(x) - x}{2\pi n}, \qquad \bmod 1,$$

~ ~且与 x 无关，其中 f^n 表示提升映射 f 在 f 上的第 n 次迭代，满足 ∼Π ∘ f = f ∘ Π，其中 Π 是投影 Π : $\mathbb{R} \to \mathbb{T}$。直观地说，旋转数表示一个点在旋转 f 作用下移动的圆周平均比例。

引理 2.5（ [18, 命题 11.1.6]）。映射 $f \mapsto \tau(f)$ 在 $C(\mathbb{T})$ 的一致拓扑下连续，其中 $C(\mathbb{T})$ 是从 $\mathbb{T}$ 到 $\mathbb{T}$ 的连续映射空间。

关于圆周微分同胚的一个基本结果是 Denjoy 定理。

定理 2.6（Denjoy, [18, 定理 12.1.1]）。具有无理旋转数 $\tau(f)$ 且导数有界变差的 C^1 微分同胚 $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ （例如 C^2 微分同胚），在拓扑上共轭于角度为 $2\pi\tau(f)$ 的旋转 $R_{\tau(f)}$。也就是说，存在一个圆周同胚 h，使得

$$f = h^{-1} \circ R_{\tau(f)} \circ h.$$

3 Proof of Theorem1.1

定理 1.1 的证明。设 $g \in \mathcal{G}(\Gamma)$ 为假设 (iv) 中引入的函数空间，使其傅里叶–斯蒂尔切斯变换 $\widehat{g}$ 满足

$$\widehat{g}(\lambda) = \int_\Gamma e^{-i\lambda\cdot x} g(x) d\sigma(x) = 0, \quad \lambda \in Z_{\mathbb{R}}(P),$$

其中 $d\sigma$ 是 Γ 上的曲面测度。对 (2.1) 两边在 $\mathbb{R}^n$ 中取傅里叶变换 $\mathcal{F}$，得到 $P(\lambda)\mathcal{F}(E) = 1$。此外，函数 $\widehat{g}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的整函数，根据假设，它在 $Z_{\mathbb{R}}(P)$ 上为零。因此，由命题 2.2 及其推论 2.3，它在 $Z(P)$ 上也为零；结合引理 2.4，这意味着商式 $\widehat{g}/P$ 也是整函数（回顾假设 (i)，P 是 $\mathbb{C}[X]$ 中的无平方因子多项式）。因此，对于 Φg 的傅里叶变换，有

$$\mathcal{F}(\Phi g) = \mathcal{F}(E * gd\sigma) = \mathcal{F}(E)\mathcal{F}(gd\sigma) = \widehat{g}\mathcal{F}(E) = (\widehat{g}/P)P\mathcal{F}(E) = \widehat{g}/P. \tag{3.1}$$

接下来，我们使用一个基本事实：若 $h(z)$ 是闭单位圆盘 $\overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{C}$ 邻域内的解析函数，且 $p(z)$ 是首项系数为 α 的多项式，则有

$$|\alpha h(0)| \leqslant \sup_{|z|=1} |h(z)p(z)|.$$

因此，将变量依次取为 z_1、$z = (z_1, 0, \ldots\ldots, 0)$、$p(z_1) = P(z + \lambda)$、$h(z_1) = \mathcal{F}(\Phi g)(z + \lambda)$，应用这个不等式，并回顾假设 (i) 的第二部分，可得

$$|\mathcal{F}(\Phi g)(\lambda)| \leqslant a_1^{-1} \sup_{|z_1|=1} |\mathcal{F}(\Phi g)(z + \lambda)P(z + \lambda)| \leqslant a_1^{-1} \sup_{|z_1|=1} \left| \int_\Gamma e^{-i(z+\lambda)\cdot y} g(y)d\sigma(y) \right|$$

$$\leqslant C \sup_{y\in\Gamma} e^{\mathrm{Im}\,(\lambda)\cdot y} = Ce^{H_{\overline{\Omega}}(\mathrm{Im}\,(\lambda))},$$

其中 C 是与 λ 无关的某个常数，而 $H_{\overline{\Omega}}$ 是 Ω 的支撑函数，Ω 表示 Ω 的闭包。现在，应用 Paley-Wiener 定理（见定理 2.1），可得 Φg 在 Ω 外为零。另一方面，由 Φg 在 $\mathbb{R}^n$ 中的连续性（回顾假设 (iv)），Φg 在 Γ 上也为零。根据假设 (iii)，算子 $P(-iD)$ 的齐次狄利克雷问题在 $\mathcal{D}_P(\Omega)$ 中有唯一的零解。因此，Φg 根据假设 (iv) 属于 $\mathcal{D}_P(\Omega)$，并且满足（见 (2.3)）

$$P(-iD)(\Phi g)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \Gamma,$$

必须在 Ω 内消失，因此在 $\mathbb{R}^n$ 中处处消失。因此，$\mathcal{F}(\Phi g) = 0$ 即 $\widehat{g} = \mathcal{F}(gd\sigma) = 0$。测度 $gd\sigma$ 是一个具有紧支撑的分布，因此是缓增分布。由傅里叶变换是从缓增分布空间到其自身的同构这一事实可知，我们得到 $g = 0$。由此我们证明了$(\Gamma, Z_{\mathbb{R}}(P))$ 是空间 $\mathcal{G}(\Gamma)$的一个海森堡对。 □

4 应用

我们将只考虑如下形式的二次多项式 $P(X_1, \ldots\ldots, X_n) \in \mathbb{R}[X]$

$$P(X_1, \ldots, X_n) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}X_iX_j + \sum_{i=1}^{n} b_iX_i + c, \qquad a_{i,j}, b_i, c \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

其中，$(a_{ij})_{i,\ j}$是一个对称矩阵。

4.1 椭圆方程

本节中，我们考虑椭圆算子，也就是说，假设 (4.1) 中的矩阵 $(a_{ij})_{i,\ j}$ 是正定的。通过实系数的变量的线性变换（使得 $Z(P)$ 的实点在变量变换下相对应），我们可以将算子限制为如下形式

$$P(-iD) = \Delta - i\sum_{i=1}^{n} b_i\partial_{x_i} + c \quad \text{where} \quad P(X) = -\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i X_i + c, \quad b_i, c \in \mathbb{R}.$$

假设 b_i 的值为零。那么， $Z(P)$ 由方程定义

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - c = 0. \tag{4.2}$$

– 若 $c < 0$， $Z_{\mathbb{R}}(P)$ 为空集，因此定理 1.1 不适用。 –若 $c = 0$ ，则 $Z_{\mathbb{R}}(P)$ 归约为单元素集合 0，而 0 是 $Z(P)$的一个奇点。
– 如果 $c = c_1^2 > 0$，且 $c_1 > 0$，那么 $Z_{\mathbb{R}}(P)$ 就是维数为 $n-1$ 、半径为 c_1的球面 $S_{n-1}(c_1)$ 。

在我们详细阐述第三种情形并证明定理1.2 中的第一项之前，先提及一个关于如下形式的单层位势的连续性结果

$$(\Phi g)(x) = \int_{\Gamma} g(y)\varphi(x-y)d\sigma(y), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.3}$$

定理 4.1. 假设以下条件成立：
1) 超曲面 Γ 属于 C^1类，2)函数 $\varphi:\ \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ 连续，3)函数 φ 在 0 处是弱奇异，即存在常数 $0 < \nu < n-1$和 $C > 0$ 使得

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{\nu}} \quad as\ x \to 0.$$

4) $g \in L^p_{d\sigma}(\Gamma)$ 与 $p > 1 + \nu/(n-1-\nu)$。

那么，(4.3)中的位势 Φg 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续。特别地，它从内部和外部在 Γ 处的极限相同，

$$(\Phi g)_+(x) = (\Phi g)_-(x), \qquad x \in \Gamma.$$

由于我们未能找到这一结果的便捷参考文献，现于附录中给出定理 4.1 的证明。

定理 1.2 中 i) 的证明。我们假设 $c = c_1^2 > 0$。当 $n \geqslant 2$ and $c \neq 0$ 时，(4.2) 中的多项式在 $\mathbb{C}[X]$ 中不可约，且 $Z(P)$ 的所有点都是非奇异的。此外，只有当 c_1^2 是 Ω 上正算子 $-\Delta$ 的一个特征值时，亥姆霍兹算子 $\Delta + c_1^2$ 在 Ω 上的齐次狄利克雷问题在 $C^0($Ω$) \cap C^2$(Ω) 中才有非平凡解。最后，亥姆霍兹算子的一个基本解（例如参见 [22, p.40]）在相差一个乘法常数的意义下由下式给出

$$E_n(x) = |x|^{1-n/2} Y_{n/2-1}(c_1|x|),$$

对于 $x \neq 0$，其中 Y_α 是阶数为 α 的第二类贝塞尔函数。在 0 附近，有以下估计：

$$Y_\alpha(z) \sim \begin{cases} (2/\pi)\log(z), & \alpha = 0, \\ -(\Gamma(\alpha)/\pi)(2/z)^\alpha, & \alpha > 0. \end{cases}$$

从而

$$E_n(x) \sim \begin{cases} (2/\pi)\log(|x|), & n = 2, \\ -(\Gamma(n/2-1)/\pi)(2/c_1)^{n/2-1}|x|^{2-n}, & n > 2. \end{cases} \tag{4.4}$$

鉴于 (4.4)，定理 4.1 适用于 $\varphi = E_n$ 和 $p > n-1$。结合定理 1.1，我们得到 $(\Gamma、\ S_{n-1}(c_1))$ 是 $L^p(\Gamma)$、$p > n-1$的海森堡唯一性对。

现假设 c_1^2 是 $-\Delta$ 在 Ω 上的特征值。则存在齐次狄利克雷问题在 Ω 中的某个非零解 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega)$。此外，已知（例如参见 [6] 中关于情形 $n = 3$的定理 3.27 和定理 3.1），u 实际上属于$C^1(\Omega)$，并且

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) E_n(x-y)\, d\sigma(y) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}, \end{cases}$$

其中 ν 表示曲面 Γ的外法向量。因此，由 $v = \partial u/\partial \nu \in C^1(\Gamma)$,可得 $u = \Phi v$。首先，注意到 $v \neq 0$，因为 $u \neq 0$。其次，类似于 (3.1)，有

$$P(\lambda)\mathcal{F}(u)(\lambda) = \widehat{v}(\lambda),$$

且 $\mathcal{F}(u)$ 是整函数，因为 u 连续且具有紧支撑，因此属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$。因此，$\widehat{v}$ 在 $Z_{\mathbb{R}}(P)$ 上消失，而 $(\Gamma$，故 $S_{n-1}(c_1))$ 不是海森堡唯一性对。这就完成了定理 1.2 中 i) 的证明。 □

注 4.2. 当 Ω 是一个球时，已知 Δ 的特征值是第一类贝塞尔函数的零点。

注 4.3. 根据 (1.1) 中的注释以及凸性在线性变换下保持不变这一事实，可以利用线性对角变换

$$T:\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (a_1 x_1, \ldots, a_n x_n), \quad a_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

以 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ 归一化，使得定理 1.2 中的陈述 i) 转化为以下内容。设 $\mathcal{E}_{n-1}(c_1)$ 为椭球

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{a_i}\right)^2 = c_1^2,$$

其半轴向量 $c_1(a_1, \ldots, a_n)$ 的范数为 c_1。设 Γ 是 $\mathbb{R}^n$中的一个有界凸域的边界。那么，当 c_1^2 不是算子的一个特征值时，$(\Gamma, \mathcal{E}_{n-1}(c_1))$ 是 $L^p(\Gamma)$, $p > n-1$ 的海森堡唯一性对

$$-\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \text{on } \Omega.$$

4.2 Schr¨odinger方程

本节通过考虑与算子对应的一维薛定谔方程，证明定理 1.2 的第 ii) 项

$$P(-iD) = i\partial_t + \partial_x^2 \quad \text{where} \quad P(X) = -X_1 - X_2^2.$$

那么， $Z(P) = \{(X_1、\ X_2) \in \mathbb{C}^2、\ X_1 + X_2^2 = 0\}$ 和 $Z_{\mathbb{R}}(P)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中是一条抛物线。

在文献中，薛定¨谔方程的基本解通常表示为

$$H(t)t^{-1/2}\exp(ix^2/(4t)), \qquad t \geqslant 0,$$

参见例如 [27, 第6节2], ，其中 $H(t)$表示海维赛德函数。

$$H(t) = 0 \text{ for } t \leqslant 0 \text{ and } H(t) = 1 \text{ for } t > 0.$$

实际上，也可以将其作为一个基本解,

$$E_1(t,x) = t^{-1/2}\exp(ix^2/(4t)), \qquad t \neq 0,$$

不带有因子 $H(t)$, 这使得人们能够重构薛¨丁格方程的解

uation for $t \in (-\infty, \infty)$ f来自一个 initial data at $t =$, 0参见 [10, Secti_ 4 3 1 b, Example 3]

。对于某些 T、 $L > 0$、 $I = (0$ 和 $L)$, 我们考虑矩形区域于……。

$$\Omega := (0,T) \times I \subset \mathbb{R}^2, \tag{4.5}$$

其顶点为

$$V_1 = (0,0), \quad V_2 = (T,0), \quad V_3 = (T,L), \quad V_4 = (0,L).$$

Let

$$\Phi g(t,x) = \int_\Gamma g(u,y)\frac{e^{i(x-y)^2/(4(t-u))}}{\sqrt{t-u}}d\sigma(u,y), \tag{4.6}$$

其中， g 是定义在 Ω 的边界 Γ 上的函数，而 $d\sigma$ 是 Γ 上的弧长测度，我们假设其取向为正。此外，我们假设 (4.6) 中的平方根满足

$$\sqrt{t-u} = -i\sqrt{|t-u|} \quad \text{when } t < u.$$

我们的目标是证明以下结果。

命题 4.4. 假设函数 g 在 Γ_1 和 Γ_3上属于 C^2 类。则函数 $\Phi g(t、\ x)$ 在 $\mathbb{R}^2\backslash(\Delta_0 \cup \Delta_T)$ 上属于 C^2 类，其中 Δ_0、 Δ_T分别为垂直线$t = 0$ 和 $t = L$ 。此外， $\Phi g(t、\ x)$ 在 Δ_0 （相应地， Δ_L）的每一点处都存在左右极限，且这些极限重合。

证明。我们将积分按照矩形的四条边 Γ_1、 Γ_2、 Γ_3、 Γ_4 分解，从水平边 Γ_1 （从 $(0$ 到 $0))$ ）到 $(T、\ 0)$ 开始，得到

$$\Phi g(t,x) = \Phi_1 g(t,x) + \Phi_2 g(t,x) - \Phi_3 g(t,x) - \Phi_4 g(t,x),$$

with

$$\Phi_1 g(t,x) := \int_{u=0}^{T} g(u,0)\frac{e^{ix^2/(4(t-u))}}{\sqrt{t-u}}du, \qquad \Phi_2 g(t,x) := \int_{y=0}^{L} g(T,y)\frac{e^{i(x-y)^2/(4(t-T))}}{\sqrt{t-T}}dy,$$

$$\Phi_3 g(t,x) := \int_{u=0}^{T} g(u,L)\frac{e^{i(x-L)^2/(4(t-u))}}{\sqrt{t-u}}du, \quad \Phi_4 g(t,x) := \int_{y=0}^{L} g(0,y)\frac{e^{i(x-y)^2/(4t)}}{\sqrt{t}}dy.$$

显然，第一和第三个积分对任意 $(t、\ x) \in \mathbb{R}^2$ 都有定义，因为被积函数绝对可积。第二个积分在 $t \neq T$ 时有定义，第四个积分在 $t \neq 0$ 时有定义。此外，这四个积分定义了关于变量 $x \in \mathbb{R}$ 的 C^∞ 函数。当 $t \notin \{0、\ T\}$ 时，第二和第四个积分定义了关于变量 t 的 C^∞ 函数。当 $t \notin [0、\ T]$ 时，第一和第三个积分也关于 t 是 C^∞ 函数。当 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时，作变量代换 $v = t - u$，可写为

$$\Phi_1 g(t,x) = \int_{v=t-T}^{t} g(t-v,0)\frac{e^{ix^2/(4v)}}{\sqrt{v}}dv, \quad \Phi_3 g(t,x) = \int_{v=t}^{t-T} g(t-v,L)\frac{e^{i(x-L)^2/(4v)}}{\sqrt{v}}dv,$$

这说明，结合莱布尼茨积分法则，两个积分是 C^2 关于 t 的函数（回想一下，我们假设 $g(u、\ y)$ 是 C^2 上的函数，且定义在 Γ_1 和 Γ_3 上）。

最后，当 $t = T$ 和$t = 0$时，仍需分别考虑 $\Phi_2 g(t,x)$ 和 $\Phi_4 g(t,x)$。显然， $\Phi_2 g(T,\ x)$ 和 $\Phi_4 g(0,x)$ 的积分表达式没有定义，因此我们计算 $t \to T_\pm$ 或 $t \to 0_\pm$时的左右极限。由驻相位法可知，对于 $\alpha < 0 < \beta$,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}}\int_\alpha^\beta e^{iy^2/\epsilon}a(y)dy = e^{i\pi/4}a(0) + O(\epsilon) \quad \text{as } \epsilon \to 0_+,$$

其中 $a(y)$是一个 C^1 函数，参见 [20, 定理 13.1] 或 [10, 第 4.5 节。于是，对于$0 < x < L$,

$$\lim_{t\to T_+}\Phi_2 g(t,x) = \lim_{t\to T_+}\int_{y=0}^{L} g(T,y)\frac{e^{i(x-y)^2/(4(t-T))}}{\sqrt{t-T}}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\pi/4}g(T,x),$$

and

$$\begin{aligned}\lim_{t\to T_-}\Phi_2 g(t,x) &= \lim_{t\to T_-}\int_{y=0}^{L} g(T,y)\frac{e^{-i(x-y)^2/(4(T-t))}}{-i\sqrt{T-t}}dy \\ &= i\lim_{t\to T_-}\int_{y=0}^{L} g(T,y)\frac{\overline{e^{i(x-y)^2/(4(T-t))}}}{\sqrt{T-t}}dy = i\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-i\pi/4}g(T,x) = \lim_{t\to T_+}\Phi_2 g(t,x),\end{aligned}$$

这表明，结合 $x \in [0、\ L] \mapsto g(T、\ x)$ 连续这一假设，$\Phi_2 g$ 可以延拓到右侧垂直边 Γ_2 上，且延拓后的函数连续。借助 [20, 定理 13.2], ，我们还可以验证，对于 $x \notin (0、\ L)$, $\Phi_2 g(t、\ x)$ 在 T 处的左右极限相等，并且当 $x \notin [0、\ L]$ 时等于 0。虽然这对我们的分析并不重要，但我们注意到，如果函数 $g(t、\ x)$ 在矩形的右侧顶点 $(T、\ 0)$ 和 $(T、\ L)$ 处不为零，则 $\Phi_2 g$ 在这些点处不连续。

可以验证，函数 $\Phi_4 g$ 在直线 $t = 0$ 上表现出类似的行为，特别是，它可以在矩形的左侧垂直边 Γ_4 上连续延拓。 □

接下来，为了应用定理 1.1，我们需要一个与 Schr¨odinger 方程相关的初边值问题的唯一性结果，参见 [4, 引理 7.1.1、定理 7.2.1],

定理4.5. 初边值问题

$$\begin{cases} iu_t(t,x)+\Delta u(t,x)=0, & x\in I,\ t>0,\\ u(0,x)=\varphi(x)\in H_0^1(I), & x\in \overline{I}=[0,L],\\ u(t,0)=0,\ u(t,L)=0, & t\geqslant 0, \end{cases}$$

在连续函数空间 $C([0,\infty),L^2(I))$（从 $[0,\infty)$ 到 $L^2(I)$ ）中有唯一解 u（实际上，该解属于

$$C([0,\infty),H_0^1(I))\cap C^1([0,\infty),H^{-1}(I)),$$

但我们不需要这一结果）。这里， $H_0^1(I)$ 和 $H^{-1}(I)$ 表示线段 I 上通常意义下的索伯列夫空间。

由于当 $t>0$ 时， $\Phi g(t,x)$ 是连续函数，也就是说，在竖直直线 Δ_0 的右侧，为了证明 $t\mapsto \Phi g(t,x)$ 是从 $[0,T)$ 到 $L^2(I)$ 的连续函数，只需验证

$$\|\Phi g(t,x)-\Phi g(0,x)\|_{L^2(I)}\to 0 \quad \text{as } t\to 0_+,$$

更确切地说，验证

$$\|\Phi_4 g(t,x)-\Phi_4 g(0,x)\|_{L^2(I)}\to 0 \quad \text{as } t\to 0_+, \tag{4.7}$$

因为在 $\{0\}\times I$ 线段的邻域内， $\Phi_i g$, $i=1,2,3$ 都属于 C^2 类。(4.7) 成立这一事实可由稳相近似的一致误差估计推出，见 [21]。细节留给读者。

结合命题 4.4和将初始数据 $\varphi(x)$ =0 应用于 $\overline{I}=[0、 L]$的定理4.5，我们看到定理 1.1 中的方法适用，从而得到定理 1.2 的 ii) 项。

4.3 双曲型方程

在此，我们通过考虑一维波动方程来证明定理 1.2 的第 iii) 项，即算子

$$P(-iD)=\partial_t^2-\partial_x^2 \quad \text{where} \quad P(X)=-X_1^2+X_2^2=(X_2-X_1)(X_2+X_1).$$

那么 $Z(P)$ 分解为两个不可约簇的并，即两条直线$X_1=\pm X_2$ ，位于 $\mathbb{C}^2$ 中，以及

$$Z_{\mathbb{R}}(P)=\Delta_+\cup\Delta_-\subset\mathbb{R}^2, \qquad \Delta_+: X_1=X_2, \quad \Delta_-: X_1=-X_2.$$

波动方程的一个基本（分布意义下的）解已知除一个乘法常数外为,

$$E_1(t,x)=H(t)H(t-x)H(t+x),$$

参见 [27, 第 7],节，其中 H 仍表示海维赛德函数。

与薛定谔方程的情形相同，我们考虑顶点为 $(0,0)$, $(T,0)$, (T,L), $(0,L)$ 的矩形区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$，其中 $T, L > 0$。设 g 是定义在 Ω 的边界 Γ 上的 C^1 函数。那么，

$$\Phi g(t,x) = \int_\Gamma g(u,y) H(t-u) H((t-u)-(x-y)) H((t-u)+(x-y)) d\sigma(u,y),$$

其中 $d\sigma$ 是 Γ上的弧长测度，我们假设其定向为正。根据 H的定义，函数 Φg 可改写为

$$\Phi g(t,x) = \int_{\Gamma_{t,x}} g(u,y) d\sigma(u,y), \tag{4.8}$$

其中$\Gamma_{t,\ x}$ 是 Γ的子弧（可能为空），它与扇形区域相交

$$\{(u,y) \in \mathbb{R}^2,\ u < t, \quad u-y < t-x, \quad u+y < t+x\}.$$

根据点 $(t$的位置，很容易验证 $x) \in \mathbb{R}^2$的端点$\Gamma_{t,\ x}$ 是以下各点中的两个

$$(0, x-t),\ (0, t+x),\ (t-x, 0),\ (t+x, 0),\ (T, T-t+x),\ (T, t+x-T),\ (L+t-x, L),\ (t+x-L, L).$$

由于假设 g 是一个 C^1 函数，且上述各点的坐标都是 t 和 x的仿射函数，由 (4.8) 可知，函数 Φg 在 $\mathbb{R}^2$中属于C^2 类。

假设 $\widehat{g} = 0$ 位于 $\mathbb{R}^2$中的两条直线 $X_1 = \pm X_2$ 上。由定理 1.1 的证明可知，函数 Φg 在 Ω 外为零，由连续性可知，它在 Γ上也为零。因此，属于 $C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ 的 Φg是波动方程的一个解，并且满足 Ω 中的齐次狄利克雷问题。现在我们回顾以下结果，参见 [8,定理 1],

定理 4.6. 齐次狄利克雷问题

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) f = 0 \ \text{in}\ \Omega, \quad f = 0 \ \text{on}\ \Gamma,$$

具有唯一的 解 $f = 0$ in $C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ 当且仅当 T/L 是一个无理数 .

事实上， [8] 讨论矩形区域中的 $(n+1)$ 维波动方程，而 [9]则讨论柱形区域中的更一般的双曲型方程。

由前面的内容可知，定理 1.1 适用，从而得到定理 1.2 的 iii) 项。更一般地，利用 (1.1) 可得，对于 $c > 0$, $(\Gamma, \Delta_{c,+} \cup \Delta_{c,-})$ 是 $C^1(\Gamma)$ 的一个海森堡唯一性对，当且仅当 $T/(cL) \notin \mathbb{Q}$, ，其中 $\Delta_{c,+}$ 和 $\Delta_{c,-}$ 是斜率分别为 c和 $-c$的直线。

4.4 一个简单的一阶方程

本节的目标是证明定理 1.2 和定理 1.3 的第 iv) 项。我们考虑与算子相关的简单一阶微分方程 $u_y = 0$ in $\mathbb{R}^2$

$$P(-iD) = i\partial_y \quad \text{where} \quad P(X) = -X_2,$$

在边界为 Γ 的凸域 Σ 中。集合 Λ 是水平直线 $\Delta_0 := \{X_2 = 0\}$。容易验证，一个基本解由以下分布给出

$$E : \varphi \mapsto \int_0^\infty \varphi(0, s)ds.$$

根据 (2.2)，对于定义在 Γ 上的函数 g，关于 $d\sigma$ 可积，测试函数 φ，以及 $x = (x_1$，有 $x_2)$,

$$< \Phi g, \varphi >= \int_\Gamma < E(y), \varphi(x + y) > g(x)d\sigma(x) = \int_{x\in\Gamma} \int_{y=0}^\infty \varphi(x_1, x_2 + y)g(x)dyd\sigma(x).$$

我们选取单位圆盘 $\Sigma = \mathbb{D}$ 作为区域，其边界为单位圆 $\Gamma = \mathbb{T}$。令

$$\mathbb{T}_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{T},\ x_2 \geqslant 0\}, \quad \mathbb{T}_- = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{T},\ x_2 < 0\},$$

并用函数 $s \in [-1、\ 1] \to (s、\ \pm\sqrt{1 - s^2})$ 对这两段弧进行参数化，使得

$$d\sigma(x) = \frac{|s|ds}{\sqrt{1 - s^2}}.$$

令 $g(x) = g_+(s)$ 对应 $x \in \mathbb{T}_+$，并令 $g(x) = g_-(s)$ 对应 $x \in \mathbb{T}_-$，得到,

$$\begin{aligned} < \Phi g, \varphi > = &\int_{s=-1}^1 \int_{y=0}^\infty \varphi(s, \sqrt{1 - s^2} + y)|s|g_+(s)\frac{dyds}{\sqrt{1 - s^2}} \\ &+ \int_{s=-1}^1 \int_{y=0}^\infty \varphi(s, -\sqrt{1 - s^2} + y)|s|g_-(s)\frac{dyds}{\sqrt{1 - s^2}}. \end{aligned}$$

在第一个二重积分中令 $u = y + \sqrt{1 - s^2}$，在第二个二重积分中令 $u = y - \sqrt{1 - s^2}$，上述表达式变为

$$< \Phi g, \varphi >= \int_{(s,u)\in D_+} \varphi(s, u)|s|g_+(s)\frac{d\lambda(s, u)}{\sqrt{1 - s^2}} + \int_{(s,u)\in D_-} \varphi(s, u)|s|g_-(s)\frac{d\lambda(s, u)}{\sqrt{1 - s^2}},$$

其中，D_+（分别为 D_-）表示 $\mathbb{R}^2$ 中位于 $\mathbb{T}_+$（分别为 $\mathbb{T}_-$）上方的子集，$d\lambda$ 表示平面勒贝格测度。因此，分布 Φg 实际上是 $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ 中的一个局部可积函数，即

$$\begin{aligned} \Phi g(s, u) &= \chi_{D_+}(s, u)\frac{g_+(s)|s|}{\sqrt{1 - s^2}} + \chi_{D_-}(s, u)\frac{g_-(s)|s|}{\sqrt{1 - s^2}} \\ &= \chi_{\mathbb{D}}(s, u)\frac{g_-(s)|s|}{\sqrt{1 - s^2}} + \chi_{D_+}(s, u)(g_+(s) + g_-(s))\frac{|s|}{\sqrt{1 - s^2}}, \end{aligned}$$

其中，χ_A 表示集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ 的特征函数。

现在，假设 $\widehat{g} = 0$ 在 Λ上。这里我们不能直接应用定理 1.1，因为先验地，Φg 并不是连续函数。不过，定理 1.1 证明的第一部分告诉我们，$\Phi g = 0$ 在 D_+上，也就是说

$$g_+(s) = -g_-(s), \quad a.e.\ s \in [-1, 1] \quad \Longleftrightarrow \quad g(e^{i\theta}) = -g(e^{-i\theta}), \quad a.e.\ \theta \in [0, 2\pi]. \quad (4.9)$$

现在，如果我们假设，对于某个给定的角 $\rho \in (0,\ \pi)$，在直线$\Delta_\rho := \{X_1 = (\cot \rho)X_2\}$上有 $\widehat{g} = 0$，并考虑如下微分方程，而非 $u_y = 0$

$$u_x - (\cot \rho)u_y = 0,$$

以完全类似的方式，我们推导出

$$g(e^{i(\rho+\theta)}) + g(e^{i(\rho-\theta)}) = 0, \quad a.e.\ \theta \in [0, 2\pi]. \tag{4.10}$$

结合 (4.9) 和 (4.10)，可得

$$g(e^{i(\theta+\rho)}) = g(e^{i(\theta-\rho)}), \quad a.e.\ \theta \in [0, 2\pi],$$

也就是说， 2ρ 是函数 $\theta \mapsto g(e^{i\theta})$的一个周期。根据函数在 $L^1(\mathbb{T})$中的傅里叶系数的唯一性，可得

$$a_n = a_n e^{i2n\rho}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

假设 $a_n \neq 0$，其中 $n \neq 0$。那么，对于某个 $k \in \mathbb{Z}$，有 $2n\rho = 2k\pi$，这意味着 ρ/π是一个有理数。因此，若 $\rho/\pi \notin \mathbb{Q}$, g 是常函数，那么根据 (4.9)，它几乎处处都必须为零。最后，利用性质 (1.1)，其中 T 是一个旋转，我们得到定理 1.2 的第 iv) 项所述的海森堡唯一性对。

反过来，假设 $\rho/\pi = k/n \in \mathbb{Q}$。那么，非零函数 $g(e^{i\theta}) = e^{in\theta} - e^{-in\theta}$ 满足 (4.9) 和 (4.10)。因此，令 $\Phi_1 g$ 和 $\Phi_2 g$ 分别为与 ∂_y 和 $\partial_x - (\cot \rho)\partial_y$ 的基本解对应的位势，可知 $\Phi_1 g$和 $\Phi_2 g$具有紧支撑，因为它们在 $\mathbb{D}$之外为零。由此，它们的傅里叶变换是 $\mathbb{C}^n$中的整函数；结合 (3.1)，这意味着 $\widehat{g}$ 在 $\Delta_0 \cup \Delta_\rho$上为零。因此，$(\mathbb{T}, \Delta_0 \cup \Delta_\rho)$ 不是海森堡唯一性对，定理 1.2 的第 iv) 项便得到了完整证明。

圆 $\mathbb{T}$ 的上述结果在某种意义下可以推广到任意 C^2类的严格凸曲线 Γ，见定理 1.3。本定理的证明即为本节剩余部分的目标。因此，我们考虑一个函数 $g \in L^1(\Gamma)$，使得 $\widehat{g}$ 在两条直线的并集 $\Delta_0 \cup \Delta_\rho$ 上消失。我们在 Γ 上引入两个微分同胚 s_0 和 s_ρ，其定义条件是：对于 $x \in \Gamma$，线段 $(x,\ s_0(x))$ 为竖直的（分别地，$(x,\ s_\rho(x))$ 与定向水平轴成角 $\rho + \pi/2$）。注意，由于 Γ的严格凸性，s_0 和 s_ρ 是良定义的。它们是对合映射，并且 s_0 恰好有两个不动点 M_1、M_2，它们是 Γ 的切线为竖直的点。令 $t_\rho = s_\rho \circ s_0$，类似于我们刚才对圆所作的推理可得结论：

$$g(s_0(x)) = -g(x), \qquad g(s_\rho(x)) = -g(x), \quad a.e.\ x \in \Gamma, \tag{4.11}$$

因此，

$$g(t_\rho(x)) = g(x), \quad a.e.\ x \in \Gamma. \tag{4.12}$$

接下来，任取 Γ 内的一个点。通过平移，我们可以假设它是平面的原点 O，并且通过位似变换，我们还可以假设单位圆 $\mathbb{T}$位于 Γ内。我们将从 Γ 到 $\mathbb{T}$ 的微分同胚记为 p,

$$p : \Gamma \to \mathbb{T}, \qquad x \mapsto x/\|x\|,$$

其中 $\|x\|$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的欧几里得范数。

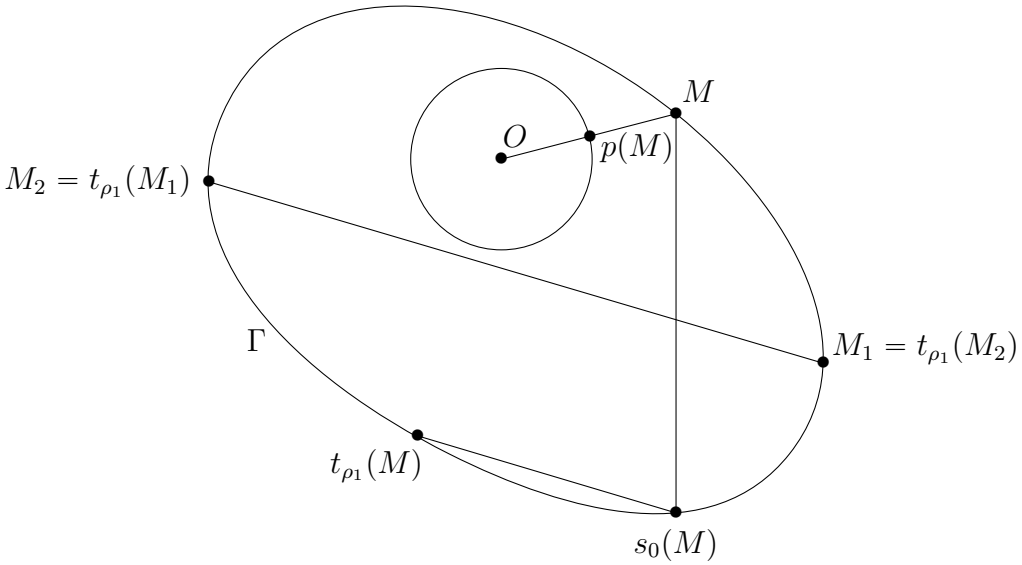


图1：凸曲线 Γ、圆 $\mathbb{T}$、 Γ 上的点 M, M_1, M_2 ，以及文中定义的它们的一些变换。

此外，令

$$\widetilde{t}_\rho := p \circ t_\rho \circ p^{-1} : \mathbb{T} \to \mathbb{T}, \qquad \widetilde{g} = g \circ p^{-1} \in L^1(\mathbb{T}),$$

其中我们注意到， $\widetilde{t}_\rho$ 是一个 C^2 微分同胚，作用于 $\mathbb{T}$。事实上，由于 Γ 是一条 C^2类曲线，所有双射 s_0、 s_ρ、 t_ρ、 p 都是 C^2类微分同胚。

~首先，显然，当 $\rho = 0$、 t_0 是 Γ的恒等映射，且 t_0 是 $\mathbb{T}$的恒等映射，旋转数为0时。其次，考虑上文提到的唯一的点 M_1、 M_2 ，例如 M_1 在 Γ上具有最大的 x_1-坐标，并选择 $\rho = \rho_1$ 使得线段 $(M_1$、 $M_2)$ 与定向水平轴成一个角 $\rho_1 + \pi/2$ 。然后，

$$t_{\rho_1}(M_1) = s_{\rho_1}(M_1) = M_2 \quad \text{and} \quad t_{\rho_1}(M_2) = s_{\rho_1}(M_2) = M_1.$$

因此， M_1是 t_{ρ_1}的二周期点，同样地， $p(M_1)$是 $\widetilde{t}_{\rho_1}$的二周期点，这意味着 $\widetilde{t}_{\rho_1}$的旋转数为 $1/2$。由映射$\rho \mapsto \tau(\widetilde{t}_\rho)$的连续性，回顾引理2.5，我们推导出存在某个角 $0 < \rho_2 < \rho_1$，使得$\tau_2 := \tau(\widetilde{t}_{\rho_2}) \notin \mathbb{Q}$。根据德尼约定理2.6，存在一个同胚 $h\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$，使得$h \circ \widetilde{t}_{\rho_2} \circ h^{-1}$是角 $2\pi\tau_2$的旋转R_{τ_2}。于是，结合（4.12），可得

$$(\widetilde{g} \circ h^{-1})(x) = (\widetilde{g} \circ h^{-1})(R_{\tau_2}(x)), \qquad x \in \mathbb{T}.$$

由 τ_2 是无理数这一事实，以及 $\widetilde{g} \circ h^{-1}$ 的傅里叶系数的唯一性，我们像上文一样得到，函数 $\widetilde{g} \circ h^{-1}$ 在 $\mathbb{T}$ 上为常数，因此函数 g 在 Γ 上也为常数。由 (4.11) 中的第一个等式，我们最终得出 $g = 0$ 在 Γ 上几乎处处成立。应用带旋转的性质 (1.1)，定理 1.3 的证明即告完成。

5 附录

我们给出定理 4.1 的证明，该定理讨论弱奇异核的单层势的连续性。

定理 4.1 的证明。首先，当 $x_0 \notin \Gamma$, Φg 在 x_0 处连续时，因为

– 对所有 $y \in \Gamma$，映射 $x \mapsto \varphi(x-y)g(y)$ 在 x_0 处连续，

– $|\varphi(x-y)g(y)| \leqslant Mg(y) \in L^p(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$，其中 M 是当 x 位于 x_0 的一个不与 Γ 相交的邻域内时，$|\varphi(x-y)|$ 的上确界，且 $y \in \Gamma$。

其次，假设 $x_0 \in \Gamma$。设 $\mathrm{T}\Gamma_{x_0}$ 和 n_{x_0} 分别为 Γ 在 x_0 处的 $(n-1)$ 维切空间和 Γ 在 x_0 处的单位法向量。我们将 $y = x_0 + \tau_y + \eta_y n_{x_0} \in \Gamma$ 写作 $\tau \in \mathrm{T}\Gamma_{x_0}$，并设 $\eta = \gamma(\tau)$ 为 Γ 在 x_0 的一个邻域内的方程。取足够小的 $\delta > 0$，令

$$\Gamma(x_0, \delta) = \{y \in \Gamma,\ \tau_y \in B(x_0, \delta)\},$$

其中 $B(x_0,\ \delta)$ 是 $\mathrm{T}\Gamma_{x_0}$ 中半径为 δ 的球。最后，对于充分接近 x_0 的 x，我们写作

$$x = x_0 + \tau_x + \eta_x n_{x_0}.$$

于是，我们有

$$\Phi g(x) - \Phi g(x_0) = \int_{y\in\Gamma(x_0,\delta)} \varphi(x-y)g(y)d\sigma(y) - \int_{y\in\Gamma(x_0,\delta)} \varphi(x_0-y)g(y)d\sigma(y) + \int_{y\in\Gamma\setminus\Gamma(x_0,\delta)} (\varphi(x-y)-\varphi(x_0-y))g(y)d\sigma(y). \quad (5.1)$$

对于前两个积分，当 x 可能等于 x_0 时，根据H¨older 不等式，其中 q 的共轭指数为 p,

$$\left|\int_{y\in\Gamma(x_0,\delta)} \varphi(x-y)g(y)d\sigma(y)\right| \leqslant \left(\int_{y\in\Gamma(x_0,\delta)} |\varphi(x-y)|^q d\sigma(y)\right)^{1/q} \left(\int_{y\in\Gamma(x_0,\delta)} |g(y)|^p d\sigma(y)\right)^{1/p}.$$

最后一个积分是有限的，因为 $g \in L^p_{d\sigma}(\Gamma)$。对于第二个积分，注意到

$$|\varphi(x-y)| \leqslant \frac{C}{|x-y|^\nu} \leqslant \frac{C}{|\tau_x - \tau_y|^\nu}.$$

此外,

$$d\sigma(y)^2 = d\tau^2 + d\eta^2 = (1+\gamma'(t)^2)d\tau^2 \leqslant 4d\tau^2$$

对于 δ 较小（回想 γ' 是连续的且 $\gamma'(0) = 0$）。因此

$$\left|\int_{y\in\Gamma(x_0,\delta)} |\varphi(x-y)|^q d\sigma(y)\right| \leqslant 2C \int_{B(x_0,\delta)} \frac{d\tau}{|\tau_x - \tau|^{\nu q}},$$

(其中 $\tau_x = 0$ 若 $x = x_0$)其中最后一个关于 $(n-1)$ 维球 $B(x_0,\delta)$的积分是收敛的，因为

$$1 + \nu/(n-1-\nu) < p \quad \Longleftrightarrow \quad \nu q < n-1.$$

Hence，通过取 δ 充分小，可以使其任意小（关于 τ_x一致).

还需证明可以使 (5.1) 中的第三个积分任意小。当 x 足够接近x_0，使得 $x \notin \Gamma \backslash \Gamma(x_0, \delta)$ 时，函数

$$x \mapsto \int_{y \in \Gamma \backslash \Gamma(x_0, \delta)} \varphi(x-y) g(y) d\sigma(y)$$

在 x_0 处连续（与第一种情形中的论证相同），因此，当 x 充分接近 x_0时，第三个积分很小。 □

参考文献

[1] A.C.L. Ashton，论 Fokas 方法用于线性椭圆型偏微分方程的严格基础。《伦敦皇家学会会刊 A 辑》468（2012年），1325-1331。[2] S. Bagchi，对应于有限条平行直线的海森堡唯一性对。《数学进展》325（2018年），814-823。[3] D. Blasi Babot，平面中的海森堡唯一性对。三条平行直线。《美国数学会会刊》141（2013年），3899-3904。[4] T. Cazenave，A. Haraux，《半线性演化方程导论》，牛津大学出版社，2006年。[5] E.M. Chirka，《复解析集》，《数学及其应用》（苏联丛书），第46卷。Kluwer Academic Publishers Group，多德雷赫特，1989年。[6] D. Colton，R. Kress，散射理论中的积分方程方法。《应用数学经典》，第72卷。工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州，2013年。[7] R.Dautray，J-L. Lions，面向科学与技术的数学分析与数值方法。第1卷。物理起源与经典方法。施普林格出版社，柏林，1990年。[8] D.R. Dunninger，E.C. Zachmanoglou，坐标矩形中波动方程狄利克雷问题解的唯一性条件。《数学分析与应用杂志》20（1967年），17-21。[9] D.R. Dunninger，E.C. Zachmanoglou，柱形区域中双曲型方程狄利克雷问题唯一性的条件。《数学与力学杂志》18，1969年，763-766。[10] L.C. Evans，《偏微分方程》。第二版。《数学研究生教材》，第19卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010年。[11] D. Giri，R.K. Srivastava，平面中某些代数曲线的海森堡唯一性对。《数学进展》310（2017年），993-1016。[12] F. Gonzalez Vieli，球面上测度的傅里叶变换的一个唯一性结果。《澳大利亚数学会公报》86（2012年），78-82。

[13] R.C. Gunning，H. Rossi，《多复变解析函数》。Prentice-Hall 公司，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1965年。[14] V. Havin，B. J¨oricke，调和分析中的不确定性原理。数学及其交叉领域成果 28。施普林格出版社，柏林，1994年。[15] H. Hedenmalm，A. Montes-Rodriguez，海森堡唯一性对与 Klein-Gordon 方程。《数学年刊》173（2011年），1507-1527。[16] L. H¨ormander，线性偏微分算子分析。I. 分布理论与傅里叶分析，第二版，施普林格出版社，柏林，1990年。[17] P. J aming，K. Kellay，海森堡唯一性对的一种动力系统方法。《数学分析杂志》134（2018年），273-301。[18] A. Katok，B. Hasselblatt，现代动力系统理论导论。《数学及其应用百科全书》，第54卷。剑桥大学出版社，剑桥，1995年。[19] N. Lev，傅里叶变换的唯一性定理。《数学科学通报》135（2011年），134-140。[20] F.W.J. Olver，渐近理论与特殊函数。《计算机科学与应用数学》。学术出版社，纽约-伦敦，1974年。[21] F.W.J. Olver，稳相近似的误差界。《工业与应用数学学会数学分析杂志》5（1974年），19-29。[22] N. Ortner，P. Wagner，线性偏微分算子的基本解。理论与实践。施普林格，查姆，2015年。[23] P. Sjölin，海森堡唯一性对与 Beurling 和 Malliavin 定理。《数学科学通报》135（2011年），125-133。[24] P. Sjölin，抛物线的海森堡唯一性对。《傅里叶分析与应用杂志》19（2013年），410-416。[25] F. Sottile，面向几何约束的实代数几何。《几何约束系统原理手册》，273-285，《离散数学及其应用》（博卡拉顿），CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2019年。[26] R.K. Srivastava，非调和锥是 $\mathbb{R}^n$ 上傅里叶变换的海森堡唯一性对。《傅里叶分析与应用杂志》24（2018年），1425-1437。[27] F. Tr`eves，《线性偏微分方程基础》。《纯粹与应用数学》，第62卷。学术出版社，纽约-伦敦，1975年。

Stéphane Rigat，stephane.rigat@univ-amu.frFranck Wielonsky，franck.wielonsky@univ-amu.frAix Marseille Univ，CNRS，I2M，Marseille，France