arXiv:2304.02332v1 [math.AC] 5 Apr 2023

Hilbert函数的界及其在凸性中的应用

JULIAN VILL

Abstract. 给定一个子空间 $U \subseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_d$，我们考虑由 U 给出的有理映射 $\mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{\dim U - 1}$ 的像的闭包。其坐标环同构于 $\bigoplus_{i \geq 0} U^i$，其中 U^i 是次数为 i 的分量。当 U 包含一个正则序列时，我们研究这个代数的希尔伯特函数；等价地，此时该映射是一个态射。我们求得二次分量维数的下界，并将这些界用于研究某些凸集（称为Gram谱胚）的边界结构。这些凸集与非负多项式的平方和表示相关。

1. Introduction

标准分次多项式环中理想的一个重要研究性质是其希尔伯特函数。因此，一个自然的问题是：哪些整数序列可以作为这类理想的希尔伯特函数？Macaulay 回答了这个问题，并证明，只要存在一个具有某个希尔伯特函数的理想，就存在一个具有相同希尔伯特函数的字典序理想。特别地，这意味着只需考虑单项式理想。

后来，Eisenbud、Green 和 Harris [7] 提出了一个更精细的问题。给定一个理想 I，它位于 $\mathbb{C}$ 上的多项式环中，并包含一个次数为 $d_1, \ldots, d_s$ 的正则序列。我们能否找到一个包含 $x_i^{d_i} (i = 1, \ldots, s)$ 的单项式理想，使其希尔伯特函数相同？事实证明，这个问题非常困难，目前只证明了若干特殊情形。

我们对另一种情形下类似的精细化问题感兴趣。设 $n, d \in \mathbb{N}$, $n, d \geq 2$。我们用 $A := \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 表示 $\mathbb{C}$ 上的多项式环。我们也写作 $A(n)$，以强调变量的数量，但通常在记号中省略 n。对于实数上的多项式环，我们记作 $\mathbb{R}[\underline{x}] := \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$。

给定一个正整数 $r \leq$ 维数 A_d 和一个维数为 r 的子空间 $U \subseteq A_d$，可以考虑由 U 定义的有理映射 $\mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{r-1}$。该映射像的闭包的坐标环于是为由 U 定义的子代数 $\mathbb{C}[U]$。它自然地带有$\mathbb{Z}_+$分次结构，其次数为 i 的分量是 U^i，即由所有满足 $f_j \in U$ 的齐次多项式 $\prod_{j=1}^{i} f_j$ 张成的子空间。

在 [3] 中，作者提出了以下问题：给定 r、i、n、d，{dim U^i： $U \subseteq A_d$, dim $U = r$}的最小值是多少？他们证明，这个最小值由一个强稳定子空间取得。这些都是单项式子空间，因此在简单情形下可以通过检查有限多个情形来计算最小值。

我们关注这种情形下 EGH猜想的类似问题。具体而言，若进一步要求子空间 U 无基点，即不存在点 $\xi \in \mathbb{P}^{n-1}$，使得对每个 $f \in U$ 都有： $f(\xi) = 0$，那么最小值是多少？这也等价于要求由 U 定义的有理映射是一个态射，而非有理映射。

正如从 EGH猜想 中可以预料到的，这使问题变得更加困难。尤其是，现在已不再清楚是否只需考虑单项式子空间。

本文只关注二次分量 U^2。容易看出，最大维数由一般的子空间取得，也就是说，它是仿射（维数 r）空间中 A_d-平面的格拉斯曼流形中的一般点。人们可能会认为，对于一般的子空间，来自二次对称幂的乘法映射 $\mathcal{S}_2U \to U^2$ 要么是单射，要么是满射。然而，正如 [3,命题 2.8] 所示，一般情况下并非如此。

关于可能的最小维数，如果不要求子空间无基点，我们知道可以取一个强稳定子空间。然而，任何余维至少为 1 的强稳定子空间都有一个基点，因此不适用于我们的目的。

我们注意到，一般而言，即使在较小的情形下，确定这个值也很困难。例如，对于 $\mathbb{R}[x,y]_5$ 中余维为 2 的子空间，我们甚至还不知道其精确值。

事实证明，考虑这类子空间的余维比考虑其维数更方便。因此，我们现在关注 $\{\operatorname{codim} U^2 \colon U \subseteq A_d, \operatorname{codim} U = k, U \text{ 无基点}\}$ 的最大值。我们的主要结果是关于小余维子空间的以下界限。

定理 (定理 8.12)。 设 $k \leq d-1$。那么，对每个 $n \geq 2$ 以及每个无基点子空间 $U \subseteq \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]_d$（其余维为 k），都有

$$\operatorname{codim} U^2 \leq k^2 + \tbinom{k+2}{3} = \tfrac{1}{6}(k^3+9k^2+2k).$$

我们想强调，这个界与变量的数量无关 n，这与允许子空间含有基点的一般情形形成了鲜明对比。例如，若 U 的余维为 1，则唯一的余维为 1 的强稳定子空间满足 codim $U^2 = n$。

最后，我们将运用这些结果研究 Gram 谱胚的面的维数。设$f \in \mathbb{R}[\underline{x}]_{2d}$是一个平方和，即存在 f_1、……、 $f_r \in \mathbb{R}[\underline{x}]_d$，使得 $f = \sum_{i=1}^r f_i^2$。一般而言，对于一个固定的 f，这样的表示有无穷多个，长度既可能不同，也可能相同。此外，对于长度为 r 的表示，正交群 O(r) 对其有一个作用。对这一作用取商后，我们得到一个紧致凸集 Gram(f)，称为 f 的 Gram 谱胚，它参数化了 f的所有平方和表示。它是大小为 dim A_d的实对称正半定矩阵锥的一个子集。作为一个闭凸集，它的边界是各个面的并集；在此情形下，这些面由 Gram(f) 与超平面相交得到，而这些超平面只与 Gram(f) 的边界相交。对于 Gram(f) 的每个面 $F \subseteq$，我们都可以关联一个子空间$U \subseteq \mathbb{R}[\underline{x}]_d$。若 F的一个相对内部点由矩阵 G 给出，则该子空间就是这个嵌入到$\mathbb{R}[\underline{x}]_d$中的 dim $A_d \times \times$ dim A_d 矩阵的像。特别地，子空间 U 的维数恰好等于矩阵 G的秩。根据 Scheiderer 的一个结果[13] ，面 F的维数，即其仿射包的维数，由以下公式给出：

$$\dim F = \tbinom{\dim U+1}{2} - \dim U^2. \tag{1}$$

因此，若考虑相对内部点为某个固定秩的矩阵r的面，则该面的维数仅取决于 dim U^2。在表示 $f = \sum_{i=1}^r f_i^2$中，若所有形式 f_i 都在点 $\xi \in \mathbb{P}^{n-1}$处消失，则形式 f 在该点处二阶消失，这表明 f 是奇异的。因此，若我们关注非奇异形式的 Gram谱胚，就需要研究无基点子空间。换言之，将一般子空间与无基点子空间进行比较，相当于将奇异形式的 Gram谱胚与非奇异形式的 Gram谱胚进行比较。

我们上面的界立即给出了此类面的维数上界。由于它与变量的数量无关，我们看到面的维数

如果允许变量的数量增长，奇异形式和非奇异形式的 Gram谱胚可能相距任意远。

接下来我们解释论文的结构以及证明中使用的方法。在第2节中，我们回顾关于强稳定子空间的一些结果以及Boij和Conca [3]发现的余维 U^2的界。最后我们介绍Macaulay、Gotzmann和Green关于希尔伯特函数增长的著名定理。第3节包含一个简单的上界，而第4节我们关注余维1和2的子空间。特别是余维2情形中使用的方法稍后会再次使用。此后我们开始证明一般界，该证明分为第5节至第8节。在这些节的第一节中，我们研究 $m(n,d,k) = \max\{$余维 U^2: $U \subseteq A_d$ 子空间, 余维 $U = k\}$ 对次数 d的依赖性。之后，我们分析如何改变变量的数量，并以确定数 $m(k,k,k)$结束。在最后一节，第9节中，我们将结果应用于寻找Gram谱胚的面的维数的界。

2. Preliminaries

在本节开篇，我们回顾 Boij 和 Conca [3]证明的关于余维 U^2 的上界。达到这些上界的子空间是单项式子空间，甚至可以取为强稳定子空间。强稳定子空间和一般的初始理想是本文后续部分的重要工具。

对于大多数结果，单项式序并不起作用。为求简便，除非另有说明，我们总是采用字典序。每当考虑子空间的正交补时，我们总是采用 apolarity 配对。

定义 2.1. 设 $U \subseteq A_d$ 是一个单项式子空间。 U 称为强稳定的，如果对每个 $1 \le i \le n$，以下条件都成立：对于每个满足 $x_i | M$ 的单项式 $M \in U$ 以及每个$i < j \le n$，单项式 $x_j \frac{M}{x_i}$都包含在 U 中。

对于每个满足 $x_1 < \cdots < x_n$ 的单项式序 $\succeq$，以及每个满足$x_i | M$ 的单项式 M，对每个 $j > i$都有$x_j \frac{M}{x_i} \succeq M$。

注记 2.2. 另一种理解强稳定子空间的方式是考察它们的补空间。若 $U \subseteq A_d$ 是强稳定的，且 $W = U^\perp$，那么对每个 $1 \le i \le n$，都有如下结论：对每个满足 $x_i | M$ 且 $1 \le j < i$的单项式 $M \in W$，单项式 $x_j \frac{M}{x_i}$都包含于 W，也就是说，不等号方向相反。

根据定义，以下结论都可直接验证。

引理 2.3. 设 $U \subseteq A_d$ 是一个余维为 k.

(i) 子空间 $V := x_1 U \oplus \mathbb{C}[x_2, \ldots, x_n]_{d+1}$ 也强稳定。(ii) 若余维 $U \le d$，则 $U^\perp$ 中的每个单项式都能被 x_1^s 整除，且 $s := d - k + 1$。(iii) 若余维 $U \le n$，则 $U^\perp$ 中的每个单项式都包含于 $A(k)_d = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_k]_d$.

强稳定子空间特别有用，主要是因为以下命题。

命题 2.4 ([6, 定理 15.18]) 。设 $I \subseteq A$ 为一个齐次理想。存在一个扎里斯基开子集 $V \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，使得对于每个 G_1, $G_2 \in V$ 的初始理想满足 $\mathrm{in}(G_1 I) = \mathrm{in}(G_2 I)$，其中 $G_i I := \{p(G_i^{-1} x) : p \in I\}$ 是通过坐标变换 G_i 映射 I 所得的理想，对于 $i = 1$, 2。

定义 2.5。 设 $I \subseteq A$ 为一个齐次理想，并令 $G \in V$ 如命题 2.4 所示，则

$$\operatorname{gin}(I) := \operatorname{in}(GI)$$

称为 I的一般的初始理想。

一般的初始理想早在1966 年就已被 Hartshorne（[10]）用于证明希尔伯特概形的连通性，后来又用于获取射影簇的不变量。关于特征 0 中一般的初始理想的首次系统研究由 Galligo 于 [8] 完成。

命题2.6（[6, 定理 15.20，15.23]）。设 $I \subseteq A$ 是一个齐次理想，则对于每个 $s \geq 0$，向量空间 $\operatorname{gin}(I)_s$ 是强稳定的。

主要思想是下面这个简单的观察。

引理 2.7。设 $I \subseteq A$ 是一个齐次理想，则 $\operatorname{in}(I)^2 \subseteq \operatorname{in}(I^2)$。

注 2.8。一般而言，我们有 $\operatorname{in}(U)^2 \subsetneq \operatorname{in}(U^2)$。考虑 $U = \operatorname{span}(x_1^2 + x_2^2)^\perp \subseteq A_2$，其中 $n \geq 3$。那么 U 由除 x_1^2 和 x_2^2 之外的所有单项式以及二项式 $x_1^2 - x_2^2$ 张成。初始理想 $\operatorname{in}(U)_2$ 由除 x_1^2 之外的所有单项式张成，即 $\operatorname{in}(U)_2 = \operatorname{span}(x_1^2)^\perp$。现在容易验证，$\operatorname{codim} \operatorname{in}(U^2)_4 = \operatorname{codim} U^2 = 2$，且 $\operatorname{codim}(\operatorname{in}(U)_2)^2 = n$。

我们要比较以下两个值。

定义 2.9。对于 $n \geq 2$ 和 $d,\ k \geq 1$ 令

$$m(n,d,k) = \max\{\operatorname{codim} U^2 :\ U \subseteq A_d \text{ 子空间，} \operatorname{codim} U = k\},\ m^0(n,$$
$$d,k) = \max\{\operatorname{codim} U^2 :\ U \subseteq A_d \text{ 无基点子空间，} \operatorname{codim} U = k\}.$$

如果余维为 k 的子空间 $U \subseteq A_d$ 满足余维 $U^2 = m(n,d,k)$（分别地，$= m^0(n,d,k)$），则称其实现了 $m(n,d,k)$（分别地，$m^0(n,d,k)$）。

如下命题所示，数值 $m(n,d,k)$可以通过组合方法计算。

命题 2.10（[3, 命题 2.2]）。对于所有正整数 $n \geq 2$、$d \geq 2$ 和 k，存在一个余维为 k 的强稳定子空间 $U \subseteq A_d$，使得

$$m(n,d,k) = \operatorname{codim} U^2.$$

注记 2.11。事实上，任意余维为 $k \leq d$ 的强稳定子空间 $U \subseteq A_d$ 都是所有在某些 k 个点（按重数计）处消失的 d 次齐次形式构成的空间。等价地，对于任意 $t \geq d$，希尔伯特函数 $t \mapsto \dim\,(A/\langle U\rangle)_t$ 都等于 k。然而，一般而言，尚不清楚哪种 k 个点的配置能够实现 $m(n,d,k)$。

注记 2.12. 对于较小的 n, d, k，这是 $n = 2, 3, 4, 5, 6$ 对应的 $m(n,d,k)$ 列表。这是通过 SAGE [14] 计算得到的：先找出某个固定余维的所有强稳定子空间，然后求所有余维 U^2 的最大值。

在表中所示的每种情况下，我们都有 $m(n,d,1) = n$ 和 $m(n,d,2) = 2n$。也很容易验证这一结论在一般情况下也成立。

此外，我们看到，在这些例子中，$m(n,\ d,\ k) = m(n,\ k,\ k)$ 对任意 $d \geq k$，也就是说，右侧对角线上的值是常数。正如我们稍后将证明的那样，这一点总是成立（见推论 5.5）。

	$n=3$								$n=4$							
$d=$	2	3	4	5	6	7	8	9	2	3	4	5	6	7	8	9
余维 $U=$																
1	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
2	6	6	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8	8	8	8	8
3	10	10	10	10	10	10	10	10	13	13	13	13	13	13	13	13
4	12	13	13	13	13	13	13	13	20	20	20	20	20	20	20	20
5	14	16	17	16	16	16	16	16	23	24	25	24	24	24	24	24
6	–	21	21	21	21	21	21	21	26	29	29	31	28	28	28	28
7	–	23	24	24	25	24	24	24	30	35	35	35	37	35	35	35
8	–	25	27	27	28	29	27	27	32	39	40	41	41	43	40	40
9	–	27	30	31	31	32	33	31	34	45	45	45	47	47	49	45

	$n=5$								$n=6$							
$d=$	2	3	4	5	6	7	8	9	2	3	4	5	6	7	8	9
余维 $U=$																
1	5	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6
2	10	10	10	10	10	10	10	10	12	12	12	12	12	12	12	12
3	17	16	16	16	16	16	16	16	21	19	19	19	19	19	19	19
4	24	25	24	24	24	24	24	24	28	31	28	28	28	28	28	28
5	35	35	35	35	35	35	35	35	40	40	41	40	40	40	40	40
6	39	40	40	41	40	40	40	40	56	56	56	56	56	56	56	56
7	43	47	45	46	49	45	45	45	61	62	62	62	62	62	62	62
8	48	54	55	54	54	57	54	54	66	71	68	68	68	71	68	68
9	55	60	60	63	61	62	65	59	73	79	81	79	79	79	81	79

注 2.13. 现在我们讨论 $m(n,d,k)$ 的渐近行为。正如我们所提到的，对于固定的 n 和 k，当 d 足够大时，数值 $m(n,d,k)$ 会趋于稳定。更准确地说，对于每个 $d \geq k$，都有 $m(n,d,k) = m(n,k,k)$。

要精确确定当 n 或 k 增大时 $m(n,d,k)$ 的增长，似乎是一个相当困难的组合问题。不过，很明显，在固定另一个值和次数的情况下，增大 n 或 k 会使 $m(n,d,k)$ 的值增大。更准确地说，我们确实可以利用 Alexander-Hirschowitz 定理得到其增长的下界。

设 $X \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ 是一组 k 一般点，其一般性符合 Alexander-Hirschowitz 定理。假设 d 足够大，则 A_d 中在 X 上消失的形式构成的子空间 U 的余维为 k。根据 Alexander-Hirschowitz 定理，V 中所有次数为 $2d$ 且在 X 的每个点处至少二阶消失的形式所构成的空间，其余维为 kn。由于

$U^2 \subseteq V$，可得 codim $U^2 \geq kn$，特别是 $m(n,d,k) \geq kn$。因此，对于每个 $d' \geq k$，也有$m(n,d',k) \geq kn$。

注 2.14. 设 $U \subseteq A_d$ 是一个强稳定子空间，且 $U \neq A_d$。若 $x_1^d \in U$，根据定义可知 $U = A_d$。因此，$x_1^d \in U^\perp$，这表明 U 有一个基点。这说明，若 $f \in U^2$，则 f 在点 $(1:0:\cdots:0)$ 处是奇异的。

为便于后文引用，我们现在考虑无基点单项式子空间 U，并求出 codim U^2 的界。稍后将用到这一结果，因为我们会将问题化归到单项式情形。

引理 2.15. 设 $d \geq 2$，且 $U \subseteq A_d$ 是一个余维为 1 的无基点单项式子空间。则有以下结论：

(i) 若 $d = 2$，则 codim $U^2 = 2$;
(ii) 若 $d \geq 3$，则 codim $U^2 \in \{0, 1\}$。

证明。设 $U^\perp =$张成(M)，其中 $M \in A_d$ 是某个单项式。忽略变量的排列后，在 A_{2d} 中只有两个单项式仅有一种分解为次数为 d 的单项式之积，它们分别是 x_1^{2d} 和 $x_1^{2d-1}x_2$。

设 $T \in A_{2d}$ 是任意一个既不是 x_1^{2d} 也不是 $x_1^{2d-1}x_2$ 的单项式（对变量重新排列后）。那么它可以分解为两个次数为 d 的单项式之积，且有两种分解。特别地，其中一种分解不使用单项式 M，因此 $T \in U^2$。

上述两个单项式的分解为 $x_1^{2d} = (x_1^d)(x_1^d)$ 和 $x_1^{2d-1}x_2 = x_1^d(x_1^{d-1}x_2)$。因此，当且仅当 $M = x_1^d$ 时，这两个单项式都不包含于 U^2；当且仅当 $M = x_1^{d-1}x_2$ 时，只有$x_1^{2d-1}x_2$ 不包含于 U^2。第一种情况下，U 有一个基点；第二种情况下，若 $d \geq 3$，则唯一不包含于 U^2 的单项式是 $x_1^{2d-1}x_2$，因此余维 $U^2 = 1$。

若 $d = 2$ 和 U 是无基点的，则 $U^\perp$ 由 x_1x_2 张成（对变量进行置换后）。容易验证，U^2 包含除 $x_1^3x_2$ 和$x_1x_2^3$之外的所有 4 次单项式。因此，余维 $U^2 = 2$。□

引理 2.16. 设 $U \subseteq A_d$ 是一个余维为 2 的无基点单项式子空间。则有：

(i) 若 $d = 2$，则余维 $U^2 \leq 6$;
(ii) 若 $d \in \{3, 4\}$，则余维 $U^2 \leq 4$;
(iii) 若 $d \geq 5$，则余维 $U^2 \leq 2$。

此外，对于 $d \leq 4$，这个界是紧的。

证明。 证明方法与引理 2.15 相同，只需考察至多有两个不同分解的所有单项式。□

在接下来的几节中，我们需要了解由子空间生成的理想的希尔伯特函数。为便于后文引用，我们介绍 Macaulay 和 Gotzmann 关于希尔伯特函数的定理，以及 Green 超平面限制定理。

定义 2.17. 设 a、$d \in \mathbb{N}$，则 a 可唯一地写成如下形式

$$a = \binom{k(d)}{d} + \binom{k(d-1)}{d-1} + \cdots + \binom{k(1)}{1},$$

其中 $k(d) > k(d-1) > \cdots > k(1) \geq 0$，称为 d-阶 Macaulay 表示，其对象为 a(参见[4, 引理 4.2.6。])。对于任意整数 s，$t \in \mathbb{Z}$ 定义

$$a_{(d)}|_t^s := \binom{k(d)+s}{d+t} + \binom{k(d-1)+s}{d-1+t} + \cdots + \binom{k(1)+s}{1+t}.$$

此外，对于 $a < b$，我们定义 $\binom{a}{b} = 0$。

定理 2.18 (Macaulay 定理，[11, 推论 C.7。], [4, 定理 4.2。10])。设 $I \subseteq A$为一个齐次理想，并令 $H = (h_i)_{i\geq 0}$ 为 I的希尔伯特函数。那么

(i) $h_{i+1} \leq (h_i)_{(i)}|_1^1$ 对每个 $i \geq 0$都成立；(ii) 如果存在 $j \in \mathbb{N}$ 使得 $j \geq h_j$，那么 $h_i \geq h_{i+1}$ 对每个 $i \geq j$都成立。

事实上，Macaulay 在 1927 [12] 证明了，只要序列 $H = (h_i)_{i\geq 0}$满足定理 2.18中的性质 (i)，就存在 $n \geq 2$ 和一个齐次理想$I \subseteq A$，使得 I 的希尔伯特函数恰好为 H。这个理想 I 甚至可以取为单项式理想。

定理 2.19（Gotzmann 持久性定理，[11, 推论 C.17.], [1, 定理 2.6]）。设 $d \geq 0$ 为一个整数，I 为一个由次数至多为d（$I = \langle I_{\leq d}\rangle$）的元素生成的齐次理想。记 $H = (h_i)_{i\geq 0}$ 为 I的希尔伯特函数。若 $h_{d+1} = (h_d)_{(d)}|_1^1$，则对所有 $l \geq 1$，均有$h_{d+l} = (h_d)_{(d)}|_l^l$。

根据 Macaulay 定理 $h_{d+1} \leq (h_d)_{(d)}|_1^1$。因此，只要从某个次数 d 到下一个次数 $d+1$的增长达到最大值，Gotzmann 定理就能确定完整的希尔伯特函数。也就是说，之后所有次数上的增长也都是最大的。对于由子空间生成的理想，这意味着：

推论 2.20。设 $U \subseteq A_d$ 为余维 $k \leq d$ 的一个子空间，并设 $H = (h_i)$ $h_i := h_{\langle U\rangle}(i)$ 为 $\langle U\rangle$ 的希尔伯特函数。那么

(i) $h_{d+1} =$ 余维 $A_1U \leq k$ 以及 (ii) 若 $h_{d+1} = k$，则对所有 $i \geq 1$，$h_{d+i} =$ 余维 $A_iU = k$。

在情形 (ii) 下，$\mathcal{V}(U) \neq \varnothing$ 是有限的。

证明。(i)：我们有余维 $U = h_d = k \leq d$，因此余维 $A_1U = h_{d+1} \leq h_d = k$根据定理 2.18(ii)。

（ii)：我们首先注意到，h_d 的第 d 个 Macaulay 表示为

$$h_d = \binom{d}{d} + \cdots + \binom{d-k+1}{d-k+1} = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{d-i}{d-i}$$

因此 $(h_d)_{(d)}|_1^1 = h_d = k$。因此，假设 $h_{d+1} = k = (h_d)_{(d)}|_1^1$ 使我们可以应用定理 2.19，从中可得

$$h_{d+i} = (h_d)_{(d)}|_i^i = \binom{d+i}{d+i} + \cdots + \binom{d-h_d+1+i}{d-h_d+1+i} = k$$

对每个 $i \geq 1$。

在(ii)中，希尔伯特多项式是常数多项式 k，因此 $\mathcal{V}(U)$ 非空且有限。□

推论 2.21。设 $U \subseteq A_d$ 是一个余维为 $U = k \leq d$的无基点子空间。那么$h_{\langle U\rangle}(2d-1) \leq 1$。如果 $k < d$，那么 $h_{\langle U\rangle}(2d-1) = 0$。

证明。希尔伯特函数 $\langle U\rangle$ 必须小于 $(\ldots, k, k-1, k-2, \ldots, 1, 0)$（每一次数至少下降 1）：事实上，如果在任意两个连续次数 s 和 $s+1$ 上 $s \geq d$ 满足 $h_s \neq 0$，则由推论 2.20(ii) 可得 $\mathcal{V}(U) \neq \varnothing$。因此，我们得到次数 $2d-1$ 分量的$A/\langle U\rangle$不等式。□

对于次数为 $2d$ 的分量，Blekherman 利用 Cayley-Bacharach 对偶性得到了一个更强的结果。

定理 2.22 ([2, 定理 2.5。])。 设 $n \geq 3$， $d \geq 3$ 并设 $U \subseteq A_d$ 是一个无基点子空间。若余维 $U < 3d-2$，则 $UA_d = A_{2d}$。若 $n \geq 4$， $d = 2$ 且 余维 $U < 5$，则$UA_2 = A_4$。

注 2.23。 如果采用与推论2.21中相同的论证，我们只能得到$h_{\langle U\rangle}(2d) = 0$当余维$U \leq d$时，而不是在余维 $U < 3d-2\,(< 5$若 $d = 2)$ 时。

这也表明，在推论 $U \leq d$ 2.21 中，为了得到 $h_{\langle U\rangle}(2d-1) = 0$，余维界限 （$U \leq d$ ）在一般情况下远非必要。

然而，定理 2.22 只告诉我们有关 UA_d 的信息，而非 UA_{d-1} ；并且该证明不容易推广到其他次数，而是非常具体地针对次数 $2d$分量 UA_d。

定义 2.24. 设 $I \subseteq A$ 是一个齐次理想， $p \in A_s$ 是某个 $s \geq 1$。我们定义理想商

$$(I : p) := \bigoplus_{l \geq 0} (I : p)_l$$

其中

$$(I : p)_l := \{q \in A_l \colon pq \in I\} \subseteq A_l$$

对每个 $l \geq 0$都成立。若 $U \subseteq A_d$ 是一个子空间，我们记作 $(U : p) := (\langle U\rangle : p)_{d-s} \subseteq A_{d-s}$。

2.25. 我们考虑如下设置。设 $I \subseteq A$是一个齐次理想， $l \in A_1$ 是一个线性形式。我们有如下分次正合列

$$0 \to A/(I : l)(-1) \xrightarrow{\cdot l} A/I \to A/\langle I, l\rangle \to 0.$$

令 $h_i = \dim(A/I)_i$ 且 $c_i = \dim(A/(I, l))_i$。

在这种情况下，我们有以下由 Green 提出的定理。

定理 2.26（Green 超平面限制定理，[9, 定理 1]）。对于任意 $d \geq 0$，以及一般线性形式 $l \in A_1$，我们有

$$c_d \leq (h_d)_{(d)}|_0^{-1}.$$

这既可以看作是 $\dim\langle I$ 的下界， $l\rangle_d$ 也可以等价地看作是 $\dim(I : l)_{d-1}$ 的上界，它告诉我们 I 中有多少个元素能被 l 整除。

用符号表示，这意味着如果 $h_d = \binom{k(d)}{d} + \binom{k(d-1)}{d-1} + \cdots + \binom{k(1)}{1}$，那么

$$c_d \leq \binom{k(d)-1}{d} + \binom{k(d-1)-1}{d-1} + \cdots + \binom{k(1)-1}{1}.$$

例 2.27。 设 $U \subseteq A_d$ 是一个余维为 1 的子空间，并设 $l \in A_1$ 是一个一般线性形式。这意味着 $h_d = A_d/U = 1 = \binom{d}{d}$。因此，定理 2.26 表明

$$c_d \leq \binom{d-1}{d} = 0.$$

一方面，这意味着 $\langle U, l\rangle_d = A_d$，另一方面

$$\operatorname{codim}(U : l)_{d-1} = \operatorname{codim} U - \dim\langle I, l\rangle_d = 1.$$

也就是说，子空间 $(U : l)_{d-1}$ 的余维也是 1。

3. A first upper bound for base-point-free subspaces

获得小维数无基点子空间良好上界的一种方法如下。

命题 3.1. 设 $U \subseteq A_d$ 是一个维数为 r 的无基点子空间。那么

$$\dim U^2 \geq nr - \binom{n}{2}.$$

证明. 由于 U 是无基点的，因此可知 $\dim U \geq n$，且 U 包含一个正则序列 $p_1, \ldots, p_n$。考虑映射

$$\prod_{i=1}^{n} U \to A_{2d}, \quad (q_1, \ldots, q_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} p_i q_i.$$

由于 $p_1, \ldots, p_n$ 是一个正则序列，因此其协同关系显然，亦即核由向量 $(0, \ldots, 0, p_j, 0, \ldots, 0, -p_i, 0, \ldots, 0)$ 张成，其中 $i < j$ 和 p_j 位于向量的第 i 个位置，而 $-p_i$ 位于第 j 个位置。此类向量恰有 $\binom{n}{2}$ 个，因此像 $\operatorname{span}(p_1, \ldots, p_r)U$ 的维数为 $n \cdot \dim U - \binom{n}{2}$，且像包含于 U^2。□

推论 3.2. 对于任意 $n, d \geq 1$, $1 \leq k \leq$ 维数 A_d，我们有

$$m^0(n, d, k) \leq \binom{n-1+2d}{n-1} + \binom{n}{2} + nk - n\binom{n-1+d}{n-1}$$

例 3.3. 这个界取等号的最简单例子是 $U =$ 张成$(x_1^d, \ldots, x_n^d)$。由于U由一个正则序列张成，条件张成$(p_1, \ldots, p_n)U = U^2$ 显然成立。

一般而言，当子空间的维数接近 n 时，我们可以预期这个界较好；而当余维 U 较小时，这个界则相当差。

然而，即使对于更大的子空间，这个界也可能取等号或几乎取等号。事实上，在以下任一情形下，都存在一个无基点子空间 $U \subseteq A_d$，其维数为 r，使得命题 3.1 中的界取等号。

(i) $r = n$, (ii) d 为偶数, $n \geq 3$ 且 $r = n + 3$,
(iii) 存在 $s \in \mathbb{N}$ 使得 $s|d$, 且 $r = n + s - 1$。

在接下来的两种情形中，存在一个无基点子空间 $U \subseteq A_d$，其维数为 r，使得该界在 $U^2 = nr - \binom{n}{2} + 1$ 处恰好相差 1，即 $\dim U^2 = nr - \binom{n}{2} + 1$。

(iv) d 为偶数, $n \geq 4$ 和 $r = n + 6$;
(v) $3|d$、 $n \geq 3$ 和 $r = n + 7$。

证明并不难，但由于后文不会用到，这里就不再给出。主要原因是，$\mathbb{P}^2$ 的二次 Veronese 像以及 $\mathbb{P}^1$ ($s \in \mathbb{N}$) 的第 s 次 Veronese 像都是最小次数簇，而 $\mathbb{P}^3$ 的二次 Veronese 像（分别是 $\mathbb{P}^2$的三次 Veronese 像）是一个几乎最小次数的算术 Cohen–Macaulay 簇。

第三种情形尤其有趣，因为它表明，只要次数足够大，对于任意变量数和任意维数，都存在使该界取等的子空间。

这个界限的主要缺点是，对于较大的子空间，即余维较小的情况，该界限取决于 n，而定理 8.12表明这并非必要。从现在起，我们只考虑 U 的余维较小的情形。

4. Subspaces of codimension 1 and 2

我们首先确定在以下情形下 codim U^2 的界限：codim $U = 1$，2。我们证明，对于 codim U^2，存在一个不依赖于 n 或 d的统一界限。这也是下一节的主要动机之一：我们将在那里把这一结果推广到更高余维的情形。此外，我们还证明定理 4.5，这是下一节中用于减少变量个数的主要工具。

引理 4.1. 设 $U \subseteq A_d$是一个无基点子空间，且 $W := U^\perp$。若 $\mathcal{V}(W)$ 不包含于任何余维为 2 的线性簇中，则存在一个坐标变换，使得在U中，$_d$ 是无基点的。

在情　　形 $n = 2$ 下，应将其理解为 $\mathcal{V}(W) \neq \varnothing$，即维数 $\mathcal{V}(W) \in \{0, 1\}$。

证明。根据假设，存在彼此线性无关的线性形式 $l_1, \dots, l_{n-1} \in A_1$，使得 $l_1^d, \dots, l_{n-1}^d \in U$。经过坐标变换后，可假设 $x_1^d, \dots, x_{n-1}^d \in U$。由于 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$，对于任意 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \colon a_i \geq 0, \forall\, i = 1, \dots, n\}$，$|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i = d$，都有 $x_n^d \geq x^\alpha$。由于 U是无基点的，存在一个 U中的形式，使得其中出现 x_n^d。因此，在U中，$_d$包含 $x_1^d, \dots, x_n^d$，这说明子空间在U中，$_d$ 是无基点的。□

有了这个引理，我们来考察余维为 1 的子空间。首先，考虑子空间确实有基点这一简单情形。

引理 4.2. 如果 $U \subseteq A_d$ 是余维为 1 的子空间且 U 有一个基点，那么 codim $U^2 = n$。

证明. 我们可以进行坐标变换，使得 $U^\perp =$ 张成(x_1^d)。那么， U 就是由除 x_1^d之外的所有单项式张成的子空间。现在可以看出，对于每个 $1 \leq i \leq n$，单项式 $x_1^{2d-1}x_i$都不包含在 U^2中，因此 codim $U^2 = n$。□

命题 4.3. 设 $d \geq 2$ 和 $U \subseteq A_d$ 是余维为 1 的无基点子空间。那么有以下结论：

(i) 如果 $d \geq 3$，那么 codim $U^2 \leq 1$;
(ii) 如果 $d = 2$，那么 codim $U^2 \leq 2$。

证明。 记 $W := U^\perp =$ 张成(q) 对某个 $q \in A_d$。没有超曲面包含在线性余维为 2 的线性簇中，因此根据引理 4.1 我们可以进行坐标变换，并假设子空间 in$(U)_d$是无基点的。于是 dim $U^2 = \dim \operatorname{in}(U^2)_{2d} \geq \dim (\operatorname{in}(U)^2)_{2d}$根据引理 2.7。因此，只需验证单项式子空间的情形，这由引理 2.15证明。□

注 4.4. 在 $d = 2$ 的情形下，甚至有 codim $U^2 \in \{0, 2\}$，即 codim $U^2 = 1$ 的情形不会出现。这可通过考察 U 的正交补来证明。它由一个秩至少为 2 的二次型 $q \in A_2$ 张成。由于二次型可对角化，因此可归结为一个组合情形。若秩等于 2，则 U^2 的余维为 2；其他情况下 $U^2 = A_{2d}$。

现在我们转向余维 2 情形。通过将问题约化为单项式子空间或二元型子空间之一，我们得到余维 U^2 的一个界。

首先，我们展示如何减少变量的数量。证明的思路如下：如果 $U \subseteq A[x_{n+1}]_d = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]_d$是形如 $U = x_{n+1}A[x_{n+1}]_{d-1} \oplus U'$的子空间，且

$U' \subseteq A_d$，则 $U^2 = x_{n+1}^2 A[x_{n+1}]_{2d-2} \oplus x_{n+1}A_{d-1}U' \oplus (U')^2$。这表明 s

$$\operatorname{codim} U^2 = \operatorname{codim}(U')^2 + \operatorname{codim} A_{d-1}U'.$$

如果 U 不具有这种简洁的形式，我们就必须运用同样的思路，稍加仔细地论证。

定理 4.5。设 $U \subseteq A_d$ 是一个余维为 k的子空间。若存在 $2 \le m \le n$ （$R := A(m)$），使得 $U' := U \cap R_d$满足 $\operatorname{codim}_{R_d} U' = k$，则

$$\operatorname{codim}_{A_{2d}} U^2 \le (n-m)\operatorname{codim}_{R_{2d-1}} U'R_{d-1} + \operatorname{codim}_{R_{2d}}(U')^2.$$

证明。设 $\mathfrak{m} = \langle x_{m+1}, \dots, x_n \rangle \subseteq A_d$，则 $\mathfrak{m}_d = \sum_{i=m+1}^n x_i A_{d-1}$。我们写作

$$U = U' \oplus V \oplus W$$

其中 $U' \subseteq R_d$、$V \subseteq \mathfrak{m}_d$和 $W =$张成 $\operatorname{span}(p_i + q_i : i = 1, \dots, s)$，其中 $p_i \in R_d$和 $0 \ne q_i \in \mathfrak{m}_d$ 适用于 $i = 1, \dots, s$。根据假设，$\operatorname{codim}_{R_d} U' = k$，这意味着 $U + R_d = A_d$，因此

$$V \oplus \operatorname{span}(q_1, \dots, q_s) = \mathfrak{m}_d. \tag{2}$$

计算 U^2，得到

$$U^2 = (U')^2 + (V+W)^2 + U'(V+W).$$

由于我们采用字典序（且 $x_1 < \cdots < x_n$），任何包含任意 x_i, $i \ge m+1$、次数为 d 的单项式都大于 R_d 中的任何单项式。

首先，任取满足 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha| = 2d$ 和 $\sum_{j \ge m+1} \alpha_j \ge 2$ 的单项式 x^α，则存在 β, $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n, |\beta| = |\gamma| = d$ 和 x_i, x_j, $i, j \ge m+1$，使得 $x_i | x^\beta, x_j | x^\gamma$ 和 $x^\alpha = x^\beta x^\gamma$。于是，对于某些 $p_\beta, p_\gamma \in R_d$，有 $x^\beta + p_\beta$, $x^\gamma + p_\gamma \in V + W$。因此

$$x^\alpha = \operatorname{in}((x^\beta + p_\beta)(x^\gamma + p_\gamma)) \in \operatorname{in}((V+W)^2)_{2d} \subseteq \operatorname{in}(U^2)_{2d}.$$

其次，我们有

$$\operatorname{in}(U'(V+W)) \overset{Eq.\ (2)}{\supseteq} \operatorname{in}(U'\mathfrak{m}_d) = \operatorname{in}\left(\bigoplus_{i=m+1}^n x_i(U'A_{d-1})\right) \supseteq \operatorname{in}\left(\bigoplus_{i=m+1}^n x_i(U'R_{d-1})\right).$$

这表明，对于每个 $i = m+1, \dots, n$，我们都有

$$\mathfrak{m}^2 A_{2d-2},\ \operatorname{in}((U')^2)_{2d},\ \operatorname{in}(x_i U' R_{d-1})_{2d} \subseteq \operatorname{in}(U^2)_{2d}.$$

计算维数，得到

$$\operatorname{codim}_{A_{2d}} \operatorname{in}(U^2)_{2d} \le (n-m)\operatorname{codim}_{R_{2d-1}} U'R_{d-1} + \operatorname{codim}_{R_{2d}}(U')^2.$$

□

注 4.6。当 $U =$（x_{m+1}, ..., x_n）$A_{d-1} \oplus U'$时，该界是精确的，这一点可由定理 4.5 上方的注释看出。

推论 4.7。如果定理 U中的子空间U' 4.5是无基点的，并且 $k \le d-1$，那么

$$\operatorname{codim} U^2 \le \operatorname{codim}(U')^2.$$

证明。根据推论 2.21次数 $2d-1$的分量 $R/\langle U' \rangle$的维数为 0。因此，结论由定理 4.5得出。□

定理 4.8. 设 $U \subseteq A_d$ 是一个余维为 2 的无基点子空间。则以下结论成立：

(i) 若 $d = 2$，则余维 $U^2 \leq 6$；

(ii) 若 $d \geq 3$，则余维 $U^2 \leq 4$。

对于 $d \leq 4$，这些界是紧的。

证明。设 $W = U^\perp$。若 $\mathcal{V}(W) \neq \mathcal{V}(l, l')$ 对任意两个线性形式 $l, l' \in A_1$，则由引理 4.1和引理 2.16 以及余维数为 1 的情形（命题 4.3）中的相同论证即可得出结论，因为我们可以化归到无基点单项式子空间。

否则，经过坐标变换后，我们可以假设 $\mathcal{V}(W) = \mathcal{V}(x_1, x_2)$，因此$x_3^d, \ldots, x_n^d \in U$，$x_1^d, x_2^d \notin U$。于是，我们可以写成

$$U = \operatorname{span}(x^\alpha + \nu_\alpha x_1^d + \lambda_\alpha x_2^d \colon \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ |\alpha| = d,\ \exists\, i \geq 3 \colon x_i | x^\alpha) \oplus U'$$

其中 $U' \subseteq \mathbb{C}[x_1, x_2]_d$是一个余维为 2 的子空间。我们区分两种情形：要么 (a) 对所有 α，都有 $\nu_\alpha = \lambda_\alpha = 0$；要么 (b) 存在 α，使得$(\nu_\alpha, \lambda_\alpha) \neq (0, 0)$。

(a)：此处 U 具有如下形式

$$U = \operatorname{span}(x_3, \ldots, x_n) A_{d-1} \oplus U'.$$

若 $d = 2$，这种情况不可能发生，因为维数 $U' = 1$，因此 U有一个基点。因此，我们可以假设 $d \geq 3$。由于 U 无基点，因此可知 U' 作为 $\mathbb{C}[x_1, x_2]_d$的子空间也是无基点的。于是，余维 $U^2 \leq$余维$(U')^2 \leq 4$由推论 4.7得出。

(b)：取 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$、$|\alpha| = d$，使得 $(\nu_\alpha, \lambda_\alpha) \neq (0, 0)$。考虑子空间

$$V := U' \oplus \operatorname{span}(\nu_\alpha x_1^d + \lambda_\alpha x_2^d) \subseteq \mathbb{C}[x_1, x_2]_d.$$

该子空间的余维为 1，因此对于某个 $h \in \mathbb{C}[x_1, x_2]_d$，$V^\perp =$张成$(h)$。特别地，存在 $l \in \mathbb{C}[x_1, x_2]_1$ 使得 $l^d \in V$，即在 h 的某个零点处取值的那个 $l \in \mathbb{C}[x_1, x_2]_1$。因此，存在 $a \in \mathbb{C}$ 和 $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$、$|\beta| = d$、$x^\beta \notin \mathbb{C}[x_1, x_2]$，使得 $ax^\beta + l^d \in U$。将 $x^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} M$ 写作 $M \in \mathbb{C}[x_3, \ldots, x_n]$。令 ϕ 为 $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ 上的一个坐标变换，将 l 映到 x_2。于是 $aMg + x_2^d \in \phi(U)$，其中 $g \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ 是 $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ 在 ϕ 下的像。现在取任意一个单项式序，使得 $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$，并且 x_2^d 大于 Mg 中的任意单项式，例如注 4.9 中给出的序。关于此序，in$(\phi(U))_d$ 包含 x_1^d、……、x_n^d，因此无基点：单项式 x_3^d、……、x_n^d 包含于 U 中，因而根据假设也包含于 $\phi(U)$ 中。单项式 x_2^d 是 $aMg + x_2^d$ 的初始单项式，而 x_1^d 以某种形式出现在 $\phi(U)$ 中，因为它无基点；并且根据单项式序的选择，x_1^d 是该形式的初始单项式。现在与前面一样，余维 $U^2 =$ 余维 $\phi(U)^2 \leq$余维 $(\operatorname{in}(\phi(U))_d)^2$，再利用引理 2.16，即得所需的界。

这些界对 $d \leq 4$ 根据引理 2.16。 □

注 4.9. 我们希望定义一种单项式序，使得 $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$，并且使得 x_2^d大于对于任意 $i \in \{3, \ldots, n\}$ 而言可被 x_i 整除的次数为 d 的任意单项式。

我们考虑在集合 $\{x_1, x_2\}$ 和 $\{x_3, \ldots, x_n\}$ 上采用分块序 $\succeq_b$，并且在每个集合上采用分次字典序（grlex）。设 α、$\beta \in \mathbb{Z}_+^n$，则 grlex 序定义为

$$x^\alpha \succeq_{grlex} x^\beta : |\alpha| > |\beta| \text{ or } |\alpha| = |\beta| \text{ and } x^\alpha \succeq_{lex} x^\beta$$

其中，$\succeq_{lex}$ 是通常的字典序，变量按 $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ 排序。然后按如下方式定义块序。设 α、$\beta \in \mathbb{Z}_+^n$，则

$$x^\alpha \succeq_b x^\beta :\Leftrightarrow x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \succ_{grlex} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \text{ or } x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \text{ and } \frac{x^\alpha}{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}} \succeq_{grlex} \frac{x^\beta}{x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}}.$$

现在设 $x^\alpha \in A_d$ 是任意一个单项式，使得对于某个 $i \in \{3,\dots,n\}$，有 $\alpha_i > 0$。那么 $\alpha_1+\alpha_2 < d$，因此 $x_2^d \succ_b x^\alpha$。

注释 4.10. 选择一种单项式序，使初始理想的次数为 d 的部分无基点，这种做法在更高余维的情形下恐怕不会那么容易奏效。

Eisenbud、Green 和 Harris 提出的字典序加幂猜想（或 EGH猜想）[7] 预言，对于任意包含正则序列 $I \subseteq A$ 的齐次理想 $p_1,\dots,p_n$且满足 $d_i := \deg p_i$，还存在一个单项式理想，包含 $x_i^{a_i}$，其中 $i = 1,\dots,n$，且与 I具有相同的希尔伯特函数。该猜想仅在一些特殊情形下得到证明，例如参见 [5]。

这当然并非我们真正想要的。一方面，我们只关注所有 p_i 次数相同且理想由该次数的元素生成的情形。另一方面，单项式理想具有相同的希尔伯特函数还不够，因为 I 的希尔伯特函数并不能决定 I^2 的希尔伯特函数。

然而，这表明在更一般的情形下，我们不应期待约化为单项式理想能够轻易奏效。

我们已经看到，在余维数为1的情形下，U^2 的余维可以在 $d \geq 3$ 时界定为 1（相应地，在 $d = 2$时界定为2）；而在余维为 $U = 2$的情形下，余维可以在 $d \geq 3$ 时界定为4（相应地，在 $d = 2$时界定为6）。我们希望将其推广到更高的余维。看来，正确的做法是证明U^2 的余维存在一个界，只要 d 足够大，该界就不依赖于 n 或 d。

我们已经看到如何减少变量的数量，从而使我们的界独立于 n 使用定理 4.5.

在下一节中，我们将展示如何找到与次数 d 无关的界。

5. Reducing the degree

在本节中，我们证明对于 $d \geq k$，函数 $d \mapsto m(n,d,k)$ 对每个固定的 n,k 都是常数。根据定义，这等价于证明：对于某些余维为 k 的子空间$U \subseteq A_d$，存在一个余维为 k 的子空间 $V \subseteq A_{d-1}$，使得只要 $d > k$，就有余维 $U^2 =$余维 V^2。

在接下来的证明中，我们回顾一下，对任意子空间 $U \subseteq A_d$，在 2.25 中都有正合列：

$$0 \to A_{d-1}/(U : l) \to A_d/U \to A_d/\langle U, l\rangle_d \to 0.$$

特别地，如果 $\langle U, l\rangle_d = A_d$，则可得余维$(U\colon l)$ =余维 U。

引理 5.1. 设 $U \subseteq A_d$ 是一个余维为 k 的子空间，且 $k \leq d$。那么，对于一般线性形式 $l \in A_1$，有 $\langle U, l\rangle_d = A_d$，且余维$(U\colon l)$ =余维 U。

证明。 采用 2.25 中的记号，并且 $I = \langle U\rangle$，我们有

$$h_I(d) = h_d = k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{d-i}{d-i}$$

由于 $k \leq d$。因此，根据 Green 定理

$$\dim A_d/\langle U, l\rangle_d = c_d \leq (h_d)_{(d)}|_0^{-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{d-i-1}{d-i} = 0$$

这意味着 $A_d/\langle U、\ l\rangle_d = 0$，因此第一个结论得证。第二个结论可由上面的正合列立即推出。□

定理 5.2. 设 $U \subseteq A_d$ 是一个余维为 $k \leq d$ 的子空间，且 $l \in A_1$ 是一个一般线性形式。对于 V: $= (U : l) \subseteq A_{d-1}$，以下不等式成立

$$\operatorname{codim} U^2 \leq \operatorname{codim} UV.$$

此外，若 $k \leq d-1$，则

$$\operatorname{codim} U^2 \leq \operatorname{codim} V^2.$$

证明。由于 l 是一般的，且 $k \leq d$ 由引理 5.1 可知余维 $V =$ 余维 U 并且$\langle U,\ l\rangle_d = A_d$。此外，我们有

$$A_{2d} = (\langle U, l\rangle_d)^2 \subseteq \langle U^2, l\rangle_{2d},$$

因此余维$(U^2 :\ l) =$余维 U^2 由 2.25 中的正合列可知。由于 $UV \subseteq (U^2 : l)$我们有 e

$$\operatorname{codim} U^2 = \operatorname{codim} (U^2 : l) \leq \operatorname{codim} UV.$$

现在我们对 UVif $k \leq d-1$ 做同样的处理。如果我们证明 $\langle V, l\rangle_{d-1} = A_{d-1}$，那么

$$A_{2d-1} = \langle U, l\rangle_d \langle V, l\rangle_{d-1} \subseteq \langle UV, l\rangle_{2d-1}.$$

因此，codim$(UV : l) =$codim UV，且 $V^2 \subseteq (UV : l)$，这意味着 codim $UV \leq$codim V^2。

剩下要证明 $\langle V, l\rangle_{d-1} = A_{d-1}$。这等价于证明 codim$(V : l) =$codim V。由于 $((U : l) : l) = (U : l^2)$，这又等价于证明 codim$(U : l^2) =$codim $V =$codim U，或者 $\langle U, l^2\rangle_d = A_d$。由于 $l \in A_1$ 是一般的，我们还可以对 U 作一般的坐标变换，因此不妨假设 in$(U) =$ gin(U) 且 $l = x_1$。那么

$$\dim \langle U, x_1^2\rangle_d = \dim \operatorname{in}(\langle U, x_1^2\rangle)_d \geq \dim \langle \operatorname{in}(U), x_1^2\rangle_d.$$

这里，第一个等式是因为任一理想及其初始理想具有相同的希尔伯特函数；第二个等式显然成立，因为 in$(\langle U, x_1^2\rangle) \supseteq \langle$in$(U)\ x_1^2\rangle$。

因此，只需证明 $\langle$gin$(U)\ x_1^2\rangle_d = A_d$。由于 $k \leq d-1$ 次数为 d 且不属于 gin$(U)_d$ 的每个单项式都能被 x_1^2 整除。但这恰好意味着 gin$(U)_d + x_1^2 A_{d-2} = A_d$。□

注记 5.3. (i) 我们在证明的第二部分转而考虑初始理想的原因是，我们需要证明 $\langle UV,$ $l\rangle_{2d-1} = A_{2d-1}$。正如我们所见，$\langle U, l\rangle_d = A_d$，如果再取一个一般线性形式 l'，我们还有 $\langle V,$ $l'\rangle_{d-1} = A_{d-1}$。然而，由于 $V =$ （$U :\ l$），我们不知道 l 对于 V 是否具有一般性。

(ii) 一般而言，若 U 是无基点的，则 $(U :\ l)$ 不一定是无基点的。设 $n = 3$，令 $U =$ 张成 span$(x^2y, x^2z,$ $xy^2)^\perp \subseteq \mathbb{C}[x, y, z]_3$。那么 U 包含 A_1 张成 span(yz, z^2)，因此对于一般线性形式 $l \in A_1$，我们有 $(U : l) =$ 张成 span$(yz, z^2) \oplus$ 张成 span(p)，其中某个 $p \in A_2$。因此，空间 $(U : l)$ 有一个基点，即 $\nu(z, p)$。

可以证明 然而，当次数足够大时，$(U : l)$ 是无基点的。 .

现在我们证明定理 5.2 在强稳定子空间情形下的反向不等式。

命题 5.4. 设 $U \subseteq A_d$ 是余维为 $k \leq d-1$ 的强稳定子空间，且设 V:$= (U :\ x_1)$。则余维 $V^2 \leq$余维 U^2

证明. 设 $M \in A_{2d-2} \setminus V^2$。我们证明若 $x_1^2 M \notin U^2$，则 $x_1^2((V^2)^\perp) \subseteq (U^2)^\perp$，从而所声称的不等式成立。

假设 $x_1^2 M \in U^2$。那么以下两种情况之一成立：

(i) 存在单项式 S、$T \in A_{d-1}$，使得 $x_1^2 M = (x_1 S)(x_1 T)$，且 $x_1 S$、$x_1 T \in U$；

或 (ii) 存在 $S \in A_{d-2}$ 和 $T \in A_d$，使得 $x_1^2 = (x_1^2 S)T$，且 $x_1^2 S$、$T \in U$。

两种情况下都有 $M = ST$。在情形 (i) 中，由于 $V = (U : x_1)$，我们有 S、$T \in V$，因此 $M = ST \in V^2$，矛盾。

在情形 (ii) 中，我们看到 $x_1 S \in V$。若 $x_1 | T$，则 $\frac{T}{x_1} \in V$，并且再次有 $M = (x_1 S)\frac{T}{x_1} \in V^2$。因此可以假设 x_1 不整除 T。由于 $k \leq d-1$，每个次数为 $d-1$ 且不属于 V 的单项式都可被 x_1 整除。因此，对每个满足 $x_i | T$ 的 $i \in \{2, \ldots, n\}$，单项式 $\frac{T}{x_i}$ 都属于 V。任取这样的 $i \in \{2, \ldots, n\}$。由于 V 强稳定，且 $x_1 S \in V$，单项式 $x_i S$ 也属于 V。综合可得

$$M = ST = (x_i S)\frac{T}{x_i} \in V^2,$$

这再次构成矛盾。 □

结合定理5.2 和命题5.4中的两个不等式，我们得到以下结果。

推论 5.5. 若 $k \leq d$ 则

$$m(n, d, k) = m(n, k, k).$$

证明. 若 $d = k$ 无事可证，因此我们可以假设 $k \leq d-1$。设 $U \subseteq A_d$ 是一个余维为 k 的子空间，使得 codim $U^2 = m(n, d, k)$ 且 $k < d$。由定理 5.2 可知，对于一般线性形式 $l \in A_1$，有 codim $U^2 \leq$ codim V^2，其中 $V = (U : l)$。根据定义，codim $V^2 \leq m(n, d-1, k)$，因此 $m(n, d, k) \leq m(n, d-1, k)$。另一方面，设 $V \subseteq A_{d-1}$ 是一个余维为 k 的强稳定子空间，使得 codim $V^2 = m(n, d-1, k)$。令 $U := x_1 V \oplus \mathbb{C}[x_2, \ldots, x_n]_d$，则 $V = (U : x_1)$，且 U 是强稳定的。由命题 5.4 可得 $m(n, d-1, k) =$ codim $V^2 \leq$ codim $U^2 \leq m(n, d, k)$。综合可得 $m(n, d, k) = m(n, d-1, k)$，由归纳法即得结论。 □

注记 5.6. 这些证明还表明，若 $V \subseteq A_d$ 是余维为 k 的强稳定子空间，且 codim $V^2 = m(n, d, k)$ 和 $k \leq d$，则子空间 $U := x_1 V \oplus \mathbb{C}[x_2, \ldots, x_n]_{d+1}$ 满足 codim $U^2 = m(n, d+1, k)$。

6. Lifting subspaces

在定理 4.5 中，我们说明了如何减少变量的个数；现在我们还希望在保持 codim U^2 的同时增加变量的个数。

定义 6.1. 设 $U \subseteq A_d$ 是一个余维为 k 的子空间。定义

$$U^{(1)} := x_{n+1} A(n+1)_{d-1} \oplus U \subseteq A(n+1)_d$$

对于任意 $l \geq 2$

$$U^{(l)} := (U^{(l-1)})^{(1)} \subseteq A(n+l)_d$$

($U_{(0)} := U$)。

对于任意的 $l \geq 1$，子空间 $U^{(l)}$ 在 $A(n+l)_d$ 中的余维也为 k。事实上，我们知道 $U^{(l)}$ 的整个希尔伯特函数。

命题 6.2. 设 $U \subseteq A_d$ 是一个余维为 k的子空间。设 $H = (h_i)_{i\geq 0}$ 是 $\langle U\rangle$的希尔伯特函数。那么对于每个 $l \geq 0$，以下结论成立：

(i) 由 $U^{(l)}$ 在 $A(n+l)$中生成的理想的希尔伯特函数 $K = (k_i)_{i\geq 0}$ 满足

- $k_i =$ 维数 $A(n+l)_i$，其中 $0 \leq i \leq d-1$，并且
- $k_i = h_i$ 当 $i \geq d$时。此外，我们有 (ii) 余维$_{A(n+l)_{2d}}(U_{(l)})^2 =$余维$_{A_{2d}} U^2 + l \cdot h_{2d-1}$。

证明。只需对 $l = 1$ 证明这一点，其余部分由归纳法得出。将 $A' = A[y]$写成含有一个新不定元 y的形式，则

$$V := U^{(1)} = yA'_{d-1} \oplus U \subseteq A'_d.$$

对于任意 $s \geq 0$，我们有

$$VA'_s = yA'_{d-1}A'_s + UA'_s = \left(\bigoplus_{i=1}^{d+s} y^i A_{d+s-i}\right) + A_sU + yA_{s-1}U + \cdots + y^sU$$
$$= \bigoplus_{i=1}^{d+s} y^i A_{d+s-i} \oplus UA_s$$

由此可知 (i) 成立，因为 $A'_{d+s} = \bigoplus_{i=0}^{d+s} y^i A_{d+s-i}$。

对于 (ii)，我们计算 V^2，并用与上文相同的论证得到

$$V^2 = y^2A'_{2d-2} + yA'_{d-1}U + U^2 = \bigoplus_{i=2}^{2d} y^i A_{2d-i} \oplus y(A_{d-1}U) \oplus U^2$$

and

$$\operatorname{codim}_{A'_{2d}} V^2 = \operatorname{codim}_{A_{2d}} U^2 + h_{2d-1}.$$

□

由此可以很容易地确定 A_2 的余维 2 子空间的希尔伯特函数。

对于一般的 U，$\langle U\rangle$ 的希尔伯特函数尽可能小。在余维 2 情形下，这意味着一般而言希尔伯特函数为 (1, n,2)。我们证明，只要 U 无基点，这一结论就成立。

命题 6.3. 设 $U \subseteq A_2$ 是一个余维为 2 的无基点子空间。那么 $\langle U\rangle$ 的希尔伯特函数为 (1, n, 2)。

证明。根据定理 2.18，希尔伯特函数小于或等于 (1, n, 2, 2, ...)。因此假设$h_{\langle U\rangle}(3) > 0$。那么根据命题 6.2，子空间 $U^{(l)} \subseteq A(n+l)_2$ 的余维为 2，并且对于 $l \geq 7$，我们有余维$_{A(n+l)_4}(U_{(l)})^2 \geq 7$，这与定理 4.8矛盾。□

推论 6.4. 设 $U \subseteq A_d$ 是一个余维为 $k \in \{1, 2\}$ 且余维 $U^2 = s$ 的无基点子空间。那么对于每个 $N \geq n$，都存在一个余维为 k 的无基点子空间 $V \subseteq A(N)_d$，使得余维 $V^2 = s$。

证明。 根据命题 6.3 和推论 2.21 次数 $2d-1$ 分量的 $A/\langle U\rangle$ 维数为 0。因此

$$\operatorname{codim}_{A(n)_{2d}} U^2 = \operatorname{codim}_{A(n+l)_{2d}} (U^{(l)})^2.$$

由命题 6.2 (ii). □

7. Arbitrary codimension

我们给出 $m^0(n,d,k)$ 的界，这些界与 n 和 d无关，如果 d 足够大。最重要的一步是同时考虑我们的起始空间及其正交补。这在引理 7.2中得到精确表述。

主要想法如下：如果 $U \subseteq A_d$ 是余维为k的无基点子空间，我们考虑 $U' := U \cap A(m)_d$ 对某个 $2 \le m \le n$。为使用定理 4.5 我们需要确保余维 $U =$余维 U'，并且为得到与 n无关的界，我们希望U' 也是无基点的（且 $k \le d-1$），然后我们使用推论 4.7 来得出余维 $U^2 \le$余维$(U')^2$。为得到与 d无关的界，我们使用第 5节的结果。

我们仍始终假设 n、 $d \ge 2$ 和 $k \in \mathbb{N}$。

注 7.1（对偶问题）。设 $U \subseteq A_d$ 是余维为 k 的无基点子空间。我们不再问 $U' := U \cap A(m)_d$ 是否满足

(i) $\operatorname{codim}_{A(m)_d} U' = k$ 和 (ii) $\mathcal{V}(U') = \varnothing$，其中 $\mathcal{V}(U') \subseteq \mathbb{P}^{m-1}$，

与定理 4.5 和推论 4.7中一样，我们也可以考察对偶问题：

设 $W = U^\perp$。 $W' := W(x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)$ 的维数是否与 W 相同? 并且 W' 不包含线性形式的 d 次幂。

下一个引理是线性代数中的一个简单结论。

引理 7.2。设 $U \subseteq A_d$ 是一个子空间，且 $W := U^\perp$。设 $l_1,\dots,l_s \in A_1$ 是线性无关的线性形式，且 $V := \mathbb{C}[l_1,\dots,l_s]_d \subseteq A_d$。那么

$$(U \cap V)^\perp \cong (W + V^\perp)/V^\perp,$$

且 $V^\perp =$张成$(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-s})A_{d-1}$，其中张成$(l_1,\dots,l_s)^\perp =$张成$(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-s}) \subseteq A_1$。

记 $\overline{W}$ 为 $(W+V^\perp)/V^\perp$，那么特别有余维$U\cap V =$维数 $\overline{W}$，且 $U\cap V$ 无基点，当且仅当 $\overline{W}$ 不包含任何线性形式的 d 次幂。

现在我们要处理注记 7.1 中的条件 (i)，以确保维数 $W =$维数 $\overline{W}$。由于 W将起到 $U^\perp$的作用， k通常表示 W的维数，而非余维。

命题 7.3. 设 $k < n$ 且设 $W \subseteq A_d$ 为维数为 k 的子空间。设 $l \in A_1$ 为一般的。则维数$\overline{W} =$维数 W其中 $\overline{W} = W + \langle l\rangle_d/\langle l\rangle_d$。

证明。 使用 2.25 中的记号，且 $I = \langle W\rangle$，我们有

$$h_I(d) = h_d = \dim A_d - k = \sum_{i=0}^{d-2} \underbrace{\binom{(n-2)+d-i}{d-i}}_{=\dim A(n-1)_{d-i}} + \binom{n-k}{1}.$$

Green 定理 2.26然后表明

$$\dim A_d/\langle W, l\rangle_d = c_d \leq \underbrace{\sum_{i=0}^{d-2} \binom{(n-2)+d-i-1}{d-i}}_{C:=} + \binom{n-k-1}{1}.$$

容易验证，我们有 $C =$ 维数 $A(n-1)_d - (n-1)$，因此

$$c_d \leq \dim A(n-1)_d - (n-1) + \binom{n-k-1}{1} = \dim A(n-1)_d - k.$$

等价地，维数$\overline{W} \geq k$。由于维数 $\overline{W} \leq$ 维数 $W = k$，可得维数 $\overline{W} = k$。 □

注记 7.4. 命题 7.3 中的维数条件，即 $k < n$ 在以下意义下是必要且紧确的。设 $0 \neq F \in A_{d-1}$ 并设 $W = FA_1$。则维数 $W = n$且维数 $\overline{W} = n-1 <$ 维数 W对一般线性形式 $l \in A_1$成立。

事实上，由 [1, 定理 3。2] 可知，每个子空间 W 维数为 n 且维数 $\overline{W} <$ 维数 W对一般线性形式 $l \in A_1$，都具有 FA_1 的形式，其中某个 $F \in A_{d-1}$。

推论 7.5. 设 $U \subseteq A_d$ 是一个余维为 k 且满足 $k \leq n$的子空间。则

$$\operatorname{codim}(U \cap \mathbb{C}[l_1, \ldots, l_k]_d) = k$$

对于一般线性形式 $l_1, \ldots, l_k \in A_1$。

特别地，对 U 应用一般的坐标变换后，我们有 e

$$\operatorname{codim}(U \cap A(k)_d) = k.$$

证明。 设 $W = U^{\perp}$。若 $k = n$ 则无需证明，因此假设 $k < n$。由引理 7.2，只需考虑 $\overline{W} \subseteq A_d/\langle l_{k+1}, \ldots, l_n\rangle_d$对任意一组基 $l_{k+1}, \ldots, l_n$的维数，其中该基张成 $l_1, \ldots, l_k$的正交补。由于 $k < n$，由命题 7.3可得，维数 $W =$ 维数 $\overline{W}$。 □

推论 7.6。设 $W \subseteq A_d$ 是一个维数为 $k < n$ 的子空间，并设 $l \in A_1$ 是一个一般线性形式。则维数 $(W\colon l) = 0$。

证明。 这由命题 7.3 及正合序列

$$0 \to A_{d-1}/(W : l) \to A_d/W \to A_d/\langle W, l\rangle_d \to 0.$$

在 2.25：中间空间的维数为 $\dim A_d - k$，右侧空间的维数为 $\dim A(n-1) - k$ 根据命题 7.3。因此，左侧空间的维数为 $\dim A_d - k - \dim A(n-1) + k = \dim A_{d-1}$，因此 $\dim(W\colon l) = 0$。 □

这表明，只要 7.1 中的条件 (i) 得到满足，$k < n$ 并且我们将变量减少一个，该条件就成立。而一般来说，若 $n \leq k$，该条件并不成立，因为我们可以取 $W = FA_1$，其中 $0 \neq F \in A_{d-1}$。

现在我们来考察 7.1 中的条件 (ii)。根据引理 7.2，询问$U' := U \cap A(n-1)$ 是否无基点，等价于询问正交补中是否不含 d 次幂线性形式。因此，假设 U 无基点，且 W不含 d 次幂。

一般而言，当 $\dim W = \dim \overline{W}$ 时，对于一般的 $l \in A_1$，$\overline{W} \subseteq (A/\langle l\rangle)_d$ 是否不含 d 次幂？遗憾的是，情况并非如此，下面的例子就说明了这一点。

例 7.7. 设 $W := x_n^{d-1}A(n-1)_1 \subseteq A_d$，且 $l \in A_1$ 是一般线性形式。将 l 缩放后，我们可以写成 $l = x_n + l'$，其中 $l' \in A(n-1)_1$,，因此 $\overline{W} \subseteq (A/\langle l\rangle)_d$ 同构于 $(l')^{d-1}A(n-1)_1$。于是 $(l')^d \in \overline{W}$，且 dim $W =$ dim $\overline{W}$。

然而，正如下面的定理所示，只要变量的个数足够大，这一结论就成立。为方便起见，我们采用以下记号。对于子空间 $W \subseteq A_d$，我们称 $l \in A_1$ 是W-一般的，当且仅当 l 按照 Green 定理2.26的意义是一般的。

定理 7.8. 设 $W \subseteq A_d$ 是一个维数为 k 的子空间，且 $n \geq 2k+1$。若 W 不含任何线性形式的 d 次幂，则 $\overline{W} = W + \langle l\rangle_d/\langle l\rangle_d \subseteq (A/\langle l\rangle)_d$ 也满足这一性质，其中 $l \in A_1$ 是一般线性形式。

证明。假设结论不成立。令 $X = \mathcal{V}(W) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$。设 $l \in A_1$ 是一般的，则对于某个 $L \in A_1$，有 $\mathcal{V}(W, l) = \mathcal{V}(W, l, L^d)$，因为对于某个 $p \in A_{d-1}$，$L^d + pl \in W$。因此，X 的一般超平面截面是退化的。我们断言 X 是退化的。若 X 的任一不可约分支非退化，则该分支的一般超平面截面也非退化，因而 X 也非退化。因此，所有不可约分支都是退化的。假设 X 非退化。于是存在分支 X_1、.....、X_s，每个分支都包含于某个线性簇 T_i 中，但所有 T_i 的并集是非退化的。注意，所有 T_i 的余维至多为 k 和 $n \geq 2k+1$，因此没有 T_i 的维数为 0。将 X 与 $\mathcal{V}(l)$ 相交后，每个 X_i 都是包含于 $T_i \cap \mathcal{V}(l)$ 中的非退化簇，而并集 $\cup_{i=1}^{s}(T_i \cap \mathcal{V}(l))$ 是包含于 $\mathcal{V}(l)$ 中的非退化簇。但这样一来，$X \cap \mathcal{V}(l)$ 就是 $\mathcal{V}(l)$ 中的非退化簇，矛盾。

因此存在 $H_1, \ldots, H_r \in A_1$ 线性无关，使得 $X \subseteq \mathcal{V}(H_1, \ldots, H_r)$，$r \leq k$ 且 X 在 $\mathcal{V}(H_1, \ldots, H_r)$ 中非退化。设 $l_1, \ldots, l_{k+1} \in A_1$ 为一般的，则存在 $L_1, \ldots, L_{k+1} \in$ 张成 $(H_1, \ldots, H_r)$ 使得 $L_i^d + l_i g_i \in W$ 对某些 $g_i \in A_{d-1}$ 和 $i = 1, \ldots, k+1$。由于维数 $W = k$ 这些 $k+1$ 形式线性相关，且存在$\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1} \in \mathbb{C}$ 不全为零使得

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i (L_i^d + l_i g_i) = 0.$$

由于 $l_1, \ldots, l_{k+1}$ 是一般的且 $r+k+1 \leq 2k+1$，线性形式 $H_1, \ldots, H_r$，$l_1, \ldots, l_{k+1}$ 线性无关。经过坐标变换，我们因此可以假设 $H_i = x_i (i = 1, \ldots, r)$和 $l_i = x_{r+i} (i = 1, \ldots, k+1)$。由于

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i L_i^d + \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i l_i g_i = 0.$$

但第二个和中没有单项式包含于 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r]$ 我们看到两个和分别都必须为0。由 $j :=$ max$(i\colon\ \lambda_i \neq 0)$ 我们有

$$l_j g_j \in \operatorname{span}(l_1 g_1, \ldots, l_{j-1} g_{j-1}).$$

由于 dim 张成$(l_1 g_1, \ldots, l_{j-1} g_{j-1}) \leq k$，由 Green 定理可知，

$$(\operatorname{span}(l_1 g_1, \ldots, l_{j-1} g_{j-1})\colon l) = \{0\}$$

对于一般的 $l \in A_1$。尤其是，对于 l_j，这也成立，矛盾。 □

定理 7.9。设 $k \leq d-1$。那么对于每个 $n \geq 2$ 和每个余维为 k 的无基点子空间 $U \subseteq A_d$，我们有

$$\operatorname{codim} U^2 \leq m(2k, k, k).$$

特别地，数值 $m(2k,k,k)$ 与 n 和 d 无关。

证明。若 $n \leq 2k$ 和 $U \subseteq A_d$ 是余维为 k的无基点子空间，则由命题 6.2可得 codim U^2 =codim $(U^{(2k-n+1)})^2$且 codim U =codim $U_{(2k-n+1)}$，其中 $U^{(2k-n+1)} \subseteq A(2k+1)_d$。因此只需考虑 $n > 2k$的情形。

对 U进行一般的坐标变换。由推论 7.5 可知 $V := U \cap A(2k)_d$ 在 $A(2k)_d$ 中的余维为 k，且由定理 7.8 子空间 V 仍然是无基点的。

由推论 4.7 可得 codim $U^2 \leq \operatorname{codim} V^2 \leq m(2k,d,k)$。由推论 5.5 最终得到 $m(2k,d,k) = m(2k,k,k)$，证明完毕。□

注 7.10。假设 d 足够大是必要的。考虑以下例子：设 $R = A(4)$ $\mathfrak{m} = \langle x_5, \ldots, x_n \rangle \subseteq A(n)$ $n \geq 5$ 和

$$U = \operatorname{span}(x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_4^3, x_1^2x_2 + x_3^2x_4) \subseteq A(4)_3.$$

这个子空间在 $A(4)_3$ 中的余维为 15。我们用 SAGE [14] 验证，$\langle U \rangle$ 的希尔伯特函数为 (1，4，10，15，15，7，1)。定义子空间

$$V := U^{(n-4)} = \bigoplus_{i=1}^{3} \mathfrak{m}^i R_{3-i} \oplus U \subseteq A(n)_3.$$

这个子空间在 $A(n)$ 中的余维也为 15。根据命题 6.2，我们再次得知 6.2，余维 V^2 = 余维 $U^2 + 7 \cdot (n-4)$。

这表明，对于这种余维与次数的组合，我们无法得到一个不依赖于 n 的统一上界。

似乎不只是可以在定理 $2k$ 中将变量缩减至 7.8 个，实际上还可以缩减至 $k+1$ 个变量。至少，这是我们所知的唯一反例（对于 $k \leq n-1$而言）。我们还用计算机检查了小规模情形下的所有单项式子空间。

猜想 7.11。设 $k \leq d-1$、$n-1$ 和 $n \geq 3$。令 $W \subseteq A_d$ 为一个维数为 k 的子空间，并假设 W 不含任何线性形式的 d 次幂。那么对于一般线性形式 $l \in A_1$，以下情况之一成立：

(i) $\overline{W}$ 不含任何线性形式的 d 次幂；或 (ii) 对于 $A(k+1)_1$ 的某个基 $L_1, \ldots, L_{k+1}$，$n = k+1$ 和 $W = L_1^{d-1}\mathbb{C}[L_2, \ldots, L_{k+1}]_1$。

这将使我们能够通过额外的论证证明定理 $U^2 \leq m(k, k, k$中的余维 7.9。

注 7.12。(i) 如果允许 $n = k$，该猜想显然是错误的：对于 $n = k$，令 $W = x_1^{d-1}\mathbb{C}[x_2, \ldots, x_n]_1 \oplus$ 张成 span(p)，其中 $p \in A_d$ 为某个一般的对象。由于 p 是一般的，W 不含任何 d 次幂；但 $\overline{W} \cong x_1^{d-1}\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n-1}]_1 \oplus$ 张成 span($\overline{p}$)，其中确实含有一个这样的幂，且对于一般线性形式 $l \in A_1$，$\overline{W} \subseteq A_d/\langle l \rangle_d$。

(ii) 根据定理 $n \geq 2k+1$，该猜想对7.8成立。对于 $k = 1$，还可以由一个简单的几何观察得出：如果 W =span(p) 且 p 不是线性形式的幂，那么 $\mathcal{V}(p)$ 是非退化的。因此，对于一般的超平面截面也同样成立，而它不可能由线性形式的幂定义。

注 7.13. 根据 $m(n,d,k)$ 的定义，我们考虑的是 A_d 的复子空间。然而，在研究 Gramspectrahedra 的面时，我们只关注实子空间。

正如我们所见， $m(n,d,k)$ 可由一个单项式子空间实现，因此我们可以将其视为 $\mathbb{R}[\underline{x}]_d$ 的实子空间。因此，该界在实数情形下也可达到。

一般而言，在固定 n、d 和 k 时，我们并不知道余维 U^2 的所有可取值。即使对于余维为 2 的子空间，我们也不知道某些值是否可取。

8. 确定上界

本节中，我们确定 $m(2k,\ k,\ k)$ 的值。此外，我们找出实现 $m(k,\ k,\ k)$ 的强稳定子空间，并证明它是唯一的。主要结果是定理 8.8和命题 8.11 ，其大部分组合论工作依赖于命题 8.3和定理 8.12。

我们始终假设 $k \in \mathbb{N}$、 $k \geq 2$。

引理 8.1. 对任意 $k \geq 2$ ，我们有 $m(2k,k,k) \leq k^2 + m(k,k,k)$。

证明。设 $U \subseteq A(2k)_k$ 是余维为 k 且实现$m(2k,\ k,\ k)$ 的某个强稳定子空间。由于余维 $U = k$，每个不属于 U 的单项式都属于 $A(k)_k$。特别地， $V\colon = U \cap A(k)_k$ 的余维为 k。由定理 4.5 可知

$$\begin{aligned}\operatorname{codim} U^2 &\leq \operatorname{codim} V^2 + (2k-k)\dim(A(k)/\langle V\rangle)_{2k-1}\\ &\leq m(k,k,k) + k\dim(A(k)/\langle V\rangle)_{2k-1}.\end{aligned}$$

由于 $U \subseteq A(k)_k$ 的余维为 k，由推论 2.20 (i) 可知

$$\dim(A(k)/\langle V\rangle)_{2k-1} \leq k$$

由此完成证明。 □

事实上，由注记 2.11和注记 4.6 可知，上一引理中的等号成立。

现在，为了确定 $m(2k,k,k)$，只需确定 $m(k,k,k)$ 的一个上界。我们将证明，对于 $k \geq 2$ ，唯一达到上界 $m(k,k,k)$ 的强稳定子空间是 U =由单项式 x_1^k、 $x_1^{k-1}x_2$、……、 $x_1^{k-1}x_k$ 张成的子空间$^\perp$， 以及 $m(k,k,k) = \binom{k+2}{3}$。

首先，我们证明上述子空间 U 确实实现了界 $m(k,k,k)$。

引理8.2. 设 $U \subseteq A(k)_k$ 是由除 $x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \ldots, x_1^{d-1}x_k$外所有次数为 k的单项式张成的余维为 k 的子空间。则codim $U^2 = \binom{k+2}{3}$。

证明. 我们容易看出，不包含在 U^2 中的仅有单项式是

- $x_1^{2k-1}x_i$对于 $i = 1,\ldots,k$,
- $x_1^{2k-2}x_ix_j$对于 $i,j = 2,\ldots,k$,
- $x_1^{2k-3}x_ix_jx_l$对于 $i,j,l = 2,\ldots,k$

或者等价地 $x_1^{2k-3}x_ix_jx_l$对于 $i,j,l = 1,\ldots,n$。这些总共是 $_{16}(k^3+3k^2+2k) = \binom{k+2}{3}$单项式。 □

定理 8.3. 对于任意 $k \geq 2$ 我们有 $m(k,k,k) = \binom{k+2}{3}$。

证明。我们对 k 进行归纳法来证明这一点。对于 $k = 2$ ，这显然成立。假设该命题对某个 $k \geq 2$ 成立。设 $U \subseteq A(k+1)_{k+1}$ 是一个实现上界 $m(k+1,k+1,k+1)$ 的强稳定子空间。记 $d = k+1$ 为次数。若 $x_1^{d-1}x_{k+1}$ 不包含于 U，则由引理 8.7 可知 U =span$(x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \ldots, x_1^{d-1}x_{k+1})^\perp$。于是，由引理8.2可得余维 $U^2 = \binom{k+3}{3} = \binom{(k+1)+2}{3}$。我们证明这是唯一一个强稳定子空间

实现该上界的子空间。为导出矛盾，假设 $x_1^{d-1}x_{k+1}$ 包含于 U，那么 $U^\perp$ 中没有单项式能被 x_{k+1} 整除。事实上，若存在一个能被 x_{k+1} 整除的单项式 $M \in U^\perp$，我们可以写成 $M = Tx_{k+1}$，其中 $T \in A(k+1)_{d-1}$，于是 $M = T\frac{x_1^{d-1}x_{k+1}}{x_1^{d-1}} \in U$ 为 $x_1^{d-1}x_{k+1} \in U$，且 U 是强稳定的。因此，我们可以写成

$$U = x_{k+1}A(k+1)_{d-1} \oplus V$$

其中 $V \subseteq A(k)_d$ 是余维为 $k+1$的强稳定子空间。由定理 4.5 可得

$$m(k+1,d,k+1) = \operatorname{codim} U^2 \leq \operatorname{codim} V^2 + k + 1 \leq m(k,d,k+1) + k + 1.$$

在命题 8.11 中，我们证明 $m(k,\ d,\ k+1) < m(k,\ k,\ k) + \binom{k+1}{2}$，于是可得

$$m(k+1,k+1,k+1) = \operatorname{codim} U^2 < \underbrace{m(k,k,k)}_{=\binom{k+2}{3}} + \binom{k+1}{2} + k + 1 = \binom{k+3}{3}.$$

然而，子空间 $W := \text{张成}(x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \ldots, x_1^{d-1}x_{k+1})^\perp$ 满足余维 $W^2 = \binom{k+3}{3}$。这就产生了如下矛盾

$$\binom{k+3}{3} = \operatorname{codim} W^2 \leq m(k+1,k+1,k+1) < \binom{k+3}{3}.$$

□

还需证明命题 8.11，这是我们在上一个证明中用到的。为此，我们首先还需要做一些准备。

定义 8.4. 对于任意单项式 $M \in A_d$，将 $\mathrm{p}(M)$ 定义为满足 $x_j | M$ 的最小整数 $j > 1$。如果 $M = x_1^d$，我们定义 $\mathrm{p}(M) := 1$。我们用 M^- 表示 M 的约化结果，即单项式 $x_1\frac{M}{x_{\mathrm{p}(M)}}$。另一方面，我们用 M^+ 表示所有满足以下条件的单项式 $T \in A_d$ 的集合：M 是 T 的约化结果。

例 8.5. 考虑单项式 $M = x_1^2x_3x_4 \in A(4)_4$，则 $\mathrm{p}(M) = 3$，且 $M^- = x_1^3x_4$。集合 M^+ 由单项式 $x_1x_2x_3x_4$ 和 $x_1x_3^2x_4$ 组成。单项式 $x_1x_3x_4^2$ 不属于 M^+，因为它的约化结果是 $x_1^2x_4^2$。

如果 $M = x_1^d$，那么根据定义，$M^- = x_1^d$ 且 $M^+ = \{x_1^{d-1}x_i : \ 1 \leq i \leq n\}$.

引理 8.6. 设 $M \in A_d$ 是一个可被 x_1 整除的单项式，且 $\mathrm{p}(M) > 1$。那么 $|M^+| = \mathrm{p}(M) - 1$。

证明。M^+ 由元素 $x_j\frac{M}{x_1}$ 组成，其中 $j = 2, \ldots, \mathrm{p}(M)$：根据 $\mathrm{p}(M)$ 的定义，变量 $x_2, \ldots, x_{\mathrm{p}(M)-1}$ 不会出现在 M 中。因此，对于 $2 \leq j \leq \mathrm{p}(M)$，我们有 $\mathrm{p}\left(x_j\frac{M}{x_1}\right) = j$，从而

$$\left(x_j\frac{M}{x_1}\right)^- = \frac{x_1}{x_j}\left(x_j\frac{M}{x_1}\right) = M.$$

□

引理 8.7. 设 $U \subseteq A_d$ 是一个余维为 $k \leq n$ 的强稳定子空间。若存在一个单项式 $M \in U^\perp$ 使得 $\mathrm{p}(M) = k$，则 $U = \mathrm{span}(x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \ldots, x_1^{d-1}x_k)^\perp$。

证明。由于 $M \notin U$ 和 U 是强稳定的，因此对于 $i = 1, \ldots, k-1$，单项式 $x_i\frac{M}{x_k}$ 也不包含在U 中。因此，$U^\perp$ 由单项式 $x_i\frac{M}{x_k} (i = 1, \ldots, k-1)$ 和M张成。特别地，如果 $M = x_1^{d-1}x_k$，那么 U 具有所述形式。

假设 $M \neq x_1^{d-1}x_k$，因此 $M = x_1^a x_k T$，其中存在某个 $a \in \mathbb{N}$ 以及某个次数为 $d-a-1$ 的单项式 $1 \neq T \in \mathbb{C}[x_k, \ldots, x_n]$。与上文一样，单项式 $x_1^a x_i T$不包含于 U

对于 $i=1$，……，k。然而，由于 $T\neq 1$，存在 $k<i\leq n$ 使得 $x_i|T$，因此 $x_1^a x_k^2\frac{T}{x_i}$也不包含于 U。这与 $k+1$ 个不同的单项式不包含于 U矛盾。□

命题 8.8。设 $U\subseteq A_d$ 是余维为 k 且满足 $2\leq k\leq n$ 的强稳定子空间。设 S 为所有次数为 d 且不包含于 U 的单项式的集合。那么 $|\bigcup_{M\in S}M^+|\leq\binom{k}{2}+n$，当且仅当 $U=$ = $\operatorname{span}(x_1^d,x_1^{d-1}x_2,\ldots,x_1^{d-1}x_k)^\perp$ 时等号成立。此外，S 中的每个单项式都包含于$\bigcup_{M\in S}M^+$。

注 8.9。我们简要说明命题 8.8 为何应当成立。假设我们知道，只要 $U=\operatorname{span}(x_1^d,x_1^{d-1}x_2,\ldots,x_1^{d-1}x_k)^\perp$，命题 $U^\perp$ 中的等号就成立。我们将 A_d 中的一个单项式替换为 U 中的另一个单项式。为了使 $x_1^{d-1}x_k$ 仍保持强稳定，我们需要移除 $x_1^{d-2}x_2^2$并加入 引理 8.6 表明 $|(x_1^{d-2}x_2^2)^+|=1$ 以及$|(x_1^{d-1}x_k)$，因此此时不等式变为严格不等式。

继续这样做，我们必须移除 $x_1^{d-1}x_j$ 对于某个足够大的 j，并添加一个 M变量更少的单项式，尤其是 $\mathrm{p}(M)<\mathrm{p}(x_1^{d-1}x_j)=j$；根据引理 8.6，集合 $\bigcup_{M\in S}M^+$现在包含的元素更少了。

命题 8.8 的证明。设 $T\in S$，使得 $\mathrm{p}(T)=\max\{\mathrm{p}(M):M\in S\}$。由于 U是强稳定的，元素 $x_j\frac{T}{x_{\mathrm{p}(T)}}$对于 $j=2,\ldots,\mathrm{p}(T)-1$ 也不包含在 U中，因此属于 S。此外，它们满足 $\mathrm{p}(x_j\frac{T}{x_{\mathrm{p}(T)}})=j$，对所有 $j=2,\ldots,\mathrm{p}(T)-1$ 均成立。因此，集合 S 中有 $\mathrm{p}(T)-1$ 个元素，其 $\mathrm{p}(\cdot)$ 的值已知，即 $T,x_j\frac{T}{x_{\mathrm{p}(T)}}(j=2,\ldots,\mathrm{p}(T)-1)$。

接下来，我们考察元素 $x_1^d\in S$。我们有 $(x_1^d)^+=\{x_1^d,\ldots,x_1^{d-1}x_n\}$，因此$|(x_1^d)^+|=n$。总之，我们在 S 中确定了 $\mathrm{p}(T)$ 个元素，对于这些元素，我们知道 $\mathrm{p}(\cdot)$的值，而其余所有 $k-\mathrm{p}(T)$个元素 M在 S中都满足 $\mathrm{p}(M)\leq\mathrm{p}(T)$，这是根据 T的选择得到的。我们写道

$$S'=S\setminus\{x_1^d,x_2\frac{T}{x_{\mathrm{p}(T)}},\ldots,x_{\mathrm{p}(T)-1}\frac{T}{x_{\mathrm{p}(T)}},T\}$$

对于我们从 S 中移除所有单项式的集合，其中我们确定了值 $p(\cdot)$。我们计算。

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{M\in S}M^+\right|&\leq\sum_{i=2}^{\mathrm{p}(T)}\left|\left(x_i\frac{T}{x_{\mathrm{p}(T)}}\right)^+\right|+|(x_1^d)^+|+\left|\bigcup_{M\in S'}M^+\right|\\&\overset{\text{(Lemma 8.6)}}{\leq}\sum_{i=2}^{\mathrm{p}(T)}(i-1)+n+\underbrace{(|S|-\mathrm{p}(T))}_{=|S'|}(\mathrm{p}(T)-1)\\&=\sum_{i=1}^{\mathrm{p}(T)-1}i+(k-\mathrm{p}(T))(\mathrm{p}(T)-1)+n\\&=\sum_{i=1}^{\mathrm{p}(T)-1}i+\sum_{j=\mathrm{p}(T)}^{k-1}(\mathrm{p}(T)-1)+n\leq\sum_{i=1}^{k-1}i+n=\binom{k}{2}+n.\end{aligned}$$

接下来，我们证明等号成立当且仅当 $U=$张成$(x_1^d$、$x_1^{d-1}x_2$、……、$x_1^{d-1}x_k)^\perp$。首先，注意到 $\mathrm{p}(T)=k$蕴含 $S=\{x_1^d,x_1^{d-1}x_2,\ldots,x_1^{d-1}x_k\}$ 根据引理 8.7。

假设 U不具有这种形式，则 $\mathrm{p}(T) < k$，因此总和 $\sum_{j=\mathrm{p}(T)}^{k-1}(\mathrm{p}(T)-1)$ 非零。此外，我们有严格不等式 $\sum_{j=\mathrm{p}(T)}^{k-1}(\mathrm{p}(T)-1) < \sum_{j=\mathrm{p}(T)}^{k-1} j$ 这意味着在这种情况下，上面的倒数第二个不等式也严格成立。

因此，只有当 $U = \text{张成}(x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \dots, x_1^{d-1}x_k)^\perp$ 时，等号才成立。假设我们处于这种情形，则 $\mathrm{p}(T) = k$。首先，我们注意到这意味着 $S' = \varnothing$，因此得到

$$\left|\bigcup_{M\in S} M^+\right| \le \sum_{i=2}^{\mathrm{p}(T)} \left|\left(x_i\frac{T}{x_{\mathrm{p}(T)}}\right)^+\right| + |(x_1^d)^+| \overset{\text{(Lemma 8.6)}}{=} \sum_{i=2}^{\mathrm{p}(T)}(i-1)+n = \sum_{i=1}^{k-1} i + n = \binom{k}{2} + n.$$

因此，我们需要证明该不等式取等号，或者等价地证明集合 M^+ 与 $M \in S$ 不相交。

设 $x_1^{d-1}x_i \in S$, $i \ge 2$，则 $(x_1^{d-1}x_i)^+ = \{x_1^{d-2}x_ix_l\colon\ 2 \le l \le i\}$。我们看到，若 $(x_1^{d-1}x_i)^+$ 和 $(x_1^{d-1}x_j)^+$, $i, j \ge 2$ 含有一个公共元素，则该元素具有如下形式： $x_1^{d-2}x_ix_j$，其中 $i \le j$ 且 $j \le i$，这意味着 $i = j$。对于 x_1^d，我们有 $(x_1^d)^+ = \{x_1^d, \dots, x_1^{d-1}x_n\}$，并且每个元素在 x_1 中的次数至少为 $d-1$，因此它不属于任何 $i \ge 2$ 的 $(x_1^{d-1}x_i)^+$。这就完成了第一部分。

我们需要证明的最后一个断言是 $S \subseteq \bigcup_{M\in S} M^+$。令 $T \in S$。由于 U 是强稳定的，元素 $x_1\frac{T}{x_{\mathrm{p}(T)}} = T^-$ 也包含在 S中。但根据定义，这意味着

$$T \in \left(x_1\frac{T}{x_{\mathrm{p}(T)}}\right)^+ \subseteq \bigcup_{M\in S} M^+$$

至此证明完成。 □

引理 8.10. 设 $U \subseteq A_d$ 是余维为 $k+1$的强稳定子空间，则存在一个余维为 k 的强稳定子空间 $V \subseteq A_d$，使得 $U \subseteq V$。

证明. 若 $U = \{0\}$，取 $V = \mathrm{span}(x_n^d)$。现在假设 $U \ne \{0\}$。令 M 为任意一个不包含在 U中的单项式，并令 $I := \{i \in \mathbb{N}\colon\ x_i | M\} \setminus \{x_n\}$。那么，要么对每个 $i \in I$都有 $x_{i+1}\frac{M}{x_i} \in U$，要么存在 $j \in I$使得 $x_{j+1}\frac{M}{x_j} \notin U$。若它们全都包含在 U中，我们可以将M 加入到 U 中，而子空间 $V := U \oplus \mathrm{span}(M)$ 仍然是强稳定的。事实上，令 $i \in I$ 和 $i < l \le n$，则

$$x_l\frac{M}{x_i} = \frac{x_l}{x_{i+1}}\underbrace{\left(x_{i+1}\frac{M}{x_i}\right)}_{\in U} \in U.$$

除 M 之外的任何其他单项式都已包含在 U 中，且 U 是强稳定的。如果对于某个 $j \in I$，$x_{j+1}\frac{M}{x_j}$未包含在 U 中，那么对于任意单项式序 $\succeq$，我们有$x_{j+1}\frac{M}{x_j} \succeq M$。现在我们改用 $x_{j+1}\frac{M}{x_j}$，而不是 M。经过有限步后，我们找到M，使得对于每个 $i \in I$，都有 $x_{i+1}\frac{M}{x_i} \in U$，因为我们到达了 $x_{n-1}x_n^{d-1}$，而这个单项式只能被 x_{n-1}、 x_n 和 $x_n\frac{x_{n-1}x_n^{d-1}}{x_{n-1}} = x_n^d \in U \ne \{0\}$ 整除。□

命题 8.11. 对每个 $k \ge 2$，我们都有 $m(k, k+1, k+1) < m(k, k, k) + \binom{k+1}{2}$。

证明。只需证明 $m(k, k+1, k+1) < m(k, k+1, k) + \binom{k+1}{2}$ 因为由推论 5.5 我们有 $m(k, k+1, k) = m(k, k, k)$。我们再次用 $d := k+1$ 表示次数。设 $U \subseteq A(k)_d$是一个余维为 $k+1$ 的实现 $m(k, d, k+1)$ 的强稳定子空间，并设 $V \subseteq A(k)_d$

是任意余维为 k 包含 U 的强稳定子空间。这样的子空间 V 总是存在，由引理8.10。

现在我们比较 U^2和 V^2。对于某个单项式$M \in A(k)_d$，我们可以写成 $V = U \oplus \mathrm{span}(M)$，因此 $V^2 = U^2 + \mathrm{span}(M)V$。

设对于某个单项式 $T \in V$，有 $MT \in \mathrm{span}(M)V$。我们声称

$$MT = \left(x_{\mathrm{p}(T)}\frac{M}{x_1}\right)T^-$$

除至多 $\binom{k+1}{2} - 1$种 T 的取值外，它都包含于 U^2 中。注意，单项式$x_{\mathrm{p}(T)}\frac{M}{x_1}$总是包含于 U 中，因为 U是强稳定的。证明这一点后，我们即可如下完成证明：

$$\dim V^2 \le \dim U^2 + \tbinom{k+1}{2} - 1, \quad \text{or equivalently} \quad \operatorname{codim} V^2 \ge \operatorname{codim} U^2 - \tbinom{k+1}{2} + 1$$

因此

$$m(k, k+1, k+1) = \operatorname{codim} U^2 \le \operatorname{codim} V^2 + \tbinom{k+1}{2} - 1 \le m(k, k+1, k) + \tbinom{k+1}{2} - 1.$$

每当 T^-不包含于 U时，这意味着对于某个单项式$M \in A(k)_d \setminus U$， T包含于 M^+。子空间 U的余维为 $k+1$，且包含于 $A(k)_d$。因此，它不可能是 $A(k+1)_d$中 $\mathrm{span}(x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \ldots, x_1^{d-1}x_{k+1})$ 的正交补，因为其中出现了变量 x_{k+1}。

设 S 为 $A(k)_d$ 中所有不属于 U的单项式集合。由命题 8.8可知，$|\bigcup_{M\in S} M^+| < \binom{k+1}{2}+k$。这意味着至多有 $\binom{k+1}{2}+k-1$个单项式 $M \in A(k)_d$满足 $M^- \notin U$。

由于 $U \subseteq V$ 且 V 是强稳定的，所有不属于 V 的单项式也都不属于 U，因此属于 S，并由命题8.8可知，它们也属于$\bigcup_{M\in S} M^+$。

现在我们可以完成证明：设 $T \in V$满足 $T^- \notin U$。这意味着

$$T \in \left(\bigcup_{M\in S} M^+\right) \cap V = \left(\bigcup_{M\in S} M^+\right) \setminus V^\perp$$

而我们刚刚证明，右侧集合的基数至多为 $\left(\binom{k+1}{2} + k - 1\right) - k = \binom{k+1}{2} - 1.$ □

定理 8.12。设 $k \le d-1$。那么对于每个 $n \ge 2$ 以及每个无基点子空间$U \subseteq A(n)_d$， 其余维为 k， 我们有

$$\operatorname{codim} U^2 \le k^2 + \tbinom{k+2}{3} = \tfrac{1}{6}(k^3 + 9k^2 + 2k).$$

证明。从定理 7.9我们知道余维 $U^2 \le m(2k, k, k)$。从引理8.1我们看到$m(2k, k, k) \le k^2 + m(k, k, k)$，而定理 8.3 表明 $m(k, k, k) = \binom{k+2}{3}$。□

定理 8.13. 设 $k \ge 1$ 且 $n, d \ge k$. 则 $m(n, d, k) = \binom{k+2}{3} + (n-k)k$. 此外，实现 $m(n, d, k)$ 的唯一强稳定子空间 $U \subseteq A_d$ 为

$$U = \mathrm{span}(x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \ldots, x_1^{d-1}x_k)^\perp \subseteq A_d.$$

证明. 对于 $k = 1$，这可由引理 4.2 以及如下事实得出：余维为 1 的强稳定子空间只有一个。对于 $k \geq 2$，我们计算

$$m(n,d,k) \overset{(4.5)}{=} m(k,d,k) + (n-k)k \overset{(5.5)}{=} m(k,k,k) + (n-k)k$$
$$\overset{(8.3)}{=} \binom{k+2}{3} + (n-k)k = \tfrac{1}{6}(k^3 - 3k^2 + 2k) + nk.$$

对于第一个等式，我们还使用了注记 4.6 以及以下事实：由子空间 $U = \operatorname{span}(x_1^k, x_1^{k-1}x_2, \ldots, x_1^{k-1}x_k)^\perp \subseteq A(k)_k$ 生成的理想的希尔伯特函数 k 对于任意不小于 k 的次数均为 2.20 由推论可知，这些次数下的希尔伯特函数至多为 k，但我们可以立即验证 $x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \ldots, x_1^{d-1}x_k$ 均不包含在 UA_{d-k} 之中。

设 $U \subseteq A_d$ 是一个余维为 k 的强稳定子空间，实现了 $m(n,d,k)$。每个不属于 U 的单项式都属于 $A(k)_d$，因此余维 $V = k$，其中 $V := U \cap A(k)_d$。现在我们有

$$m(k,k,k) + (n-k)k \overset{(8.3)}{=} m(n,d,k) = \operatorname{codim} U^2 \overset{(4.5)}{\leq} \operatorname{codim} V^2 + (n-k)k$$
$$\leq \quad m(k,d,k) + (n-k)k \overset{(5.5)}{=} m(k,k,k) + (n-k)k,$$

因此两个不等式都是等式，并且我们有余维 $V^2 = m(k,k,k)$。注意，$V \subseteq A(k)_d$，而且 d 仍可能大于 k。根据定理 5.2 证明的最后一部分，我们有 $m(k,k,k) =$ 余维 $V^2 \leq$ 余维$(V : x_1^{d-k})^2 \leq m(k,k,k)$。特别地，$(V : x_1^{d-k}) \subseteq A(k)_k$ 是一个余维为 k 的子空间，实现了 $m(k,k,k)$，因此它等于 $\operatorname{span}(x_1^k, \ldots, x_1^{k-1}x_k)^\perp \subseteq A(k)_k$。这表明 $V^\perp = x_1^{d-k}\operatorname{span}(x_1^k, \ldots, x_1^{k-1}x_k) \subseteq A(k)_d$，因此也有 $U = \operatorname{span}(x_1^d, \ldots, x_1^{d-1}x_k)^\perp \subseteq A_d$。□

9. Application to Gram spectrahedra

在前几节讨论了子空间的平方之后，我们现在想要阐释这些结果对 Gram谱胚 的意义。

设 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个凸集，并且 $F \subseteq C$ 也是凸的。若 x、$y \in C$、$x + y \in F$ 蕴含 x、$y \in F$，则称集合 F 为C的一个面。有两个平凡的面：空集和整个集合 C。其他所有面都是 C的（欧几里得）边界的一部分。凸集 C的维数 $\dim C$定义为包含 C的最小仿射线性子空间的维数。

首先，我们可以利用关于余维为 1 的子空间的结果，给出 Gram谱胚的面的维数上界。我们将 $\Sigma_{n,2d} \subseteq \mathbb{R}[\underline{x}]_{2d}$ 记作所有平方和的集合，即所有满足以下条件的 $f \in \mathbb{R}[\underline{x}]_{2d}$：存在 f_1、……、$f_r \in \mathbb{R}[\underline{x}]_d$ 使得 $f = \sum_{i=1}^r f_i^2$。

命题 9.1. 设 $f \in \Sigma_{n,2d}$ 和 $F \subseteq \operatorname{Gram}(f)$ 为一个面。设 ϑ 是 F 和 $U = \operatorname{im}\vartheta$ 的相对内部点。若 $U \neq \mathbb{R}[\underline{x}]_d$，则

$$\dim F \leq \tbinom{\dim \mathbb{R}[\underline{x}]_d}{2} - \dim \mathbb{R}[\underline{x}]_{2d} + n.$$

证明。根据命题 2.10 存在一个强稳定子空间 $V \subseteq \mathbb{R}[\underline{x}]_d$ 使得余维 $U^2 \leq$余维 V^2 且维数 $U =$ 维数 V。由于 V 是强稳定的，V 以 $(1:0:\cdots:0)$ 为基点。

$$\dim F \overset{Eq.\ (1)}{=} \tbinom{\dim(U)+1}{2} - \dim(U^2) \leq \tbinom{\dim \mathbb{R}[\underline{x}]_d}{2} - \dim(V^2) = \tbinom{\dim \mathbb{R}[\underline{x}]_d}{2} - (\dim \mathbb{R}[\underline{x}]_d - n).$$

□

注9.2。事实上，可以证明，最后一个命题中的等式成立，当且仅当$f \in \partial P_{n,2d}$ 位于恰好具有一个实零点的非负多项式锥的边界上，且 $F = \mathrm{Gram}(f)$，或者 $n = 2$ 且余维 $U = 1$。

现在继续讨论界 $m(n,\ d,\ k)$，以及前几节中证明的结果。首先，由定理 8.12，我们得到以下结论。

定理9.3。设 $f \in \Sigma_{n,\ 2d}$ 非奇异。若 $F \subseteq \mathrm{Gram}(f)$ 是余秩为 k 且满足$1 \leq k \leq d-1$的一个面，则

$$\dim F \leq \binom{\dim \mathbb{R}[\underline{x}]_d - k + 1}{2} - \dim \mathbb{R}[\underline{x}]_{2d} + k^2 + \binom{k+2}{3}.$$

接下来，我们将这个界与由 $m(n,d,k)$ 得到的界进行比较。也就是说，我们比较奇异形式与非奇异形式的 Gram 谱胚。我们始终假设 $1 \leq k \leq d-1$。

注9.4（奇异形式）。设$U \subseteq \mathbb{R}[\underline{x}]_d$ 是余维为k且实现 $m(n,d,k)$ 的强稳定子空间，并设 $f \in$属于 $\Sigma U^2 \subseteq U^2$。由于 U有一个实基点，形式 f位于半正定锥 $P_{n,\ 2d}$的边界上。Gram 谱胚 $\mathrm{Gram}(f)$ 有一个与子空间 U对应的面，因为 $f \in$属于 ΣU^2。特别地，此面 F的维数为

$$\begin{aligned} \dim F &= \binom{\dim \mathbb{R}[\underline{x}]_d - k + 1}{2} - \dim \mathbb{R}[\underline{x}]_{2d} + m(n,d,k) \\ (\textit{Remark } 2.13) &\geq \binom{\dim \mathbb{R}[\underline{x}]_d - k + 1}{2} - \dim \mathbb{R}[\underline{x}]_{2d} + kn. \end{aligned}$$

注9.5 (非奇异形式)。 设 $f \in \Sigma_{n,\ 2d}$ 是一个非奇异形式，并设 $F \subseteq \mathrm{Gram}(f)$ 是一个面，其对应的子空间为 U，余维为 k。根据定理 9.3，我们得到 F 的维数上界，

$$\text{维数 } F = \binom{\dim \mathbb{R}[\underline{x}]_d - k + 1}{2} - \text{维数 } \mathbb{R}[\underline{x}]_{2d} + \text{余维 } U^2 \leq \binom{\dim \mathbb{R}[\underline{x}]_d - k + 1}{2} - \text{维数 } \mathbb{R}[\underline{x}]_{2d} + k^2 + \binom{k+2}{3}.$$

我们注意到，尽管 U^2 的余维上界与 n 无关，但 F 的维数显然并非如此。

注9.6. 我们看到，当 n 足够大时，奇异形式与非奇异形式的 Gram谱胚各面之间的维数差可以任意大。

此外，当 n 足够大且任意给定 $k < d$ 时，奇异形式的 Gram谱胚中余秩为 k 的每个面，其维数都高于非奇异形式的 Gram谱胚中余秩为 k 的任何面。事实上，对于任意无基点子空间，U^2 的余维至多为 $k^2 + \binom{k+2}{3}$；而如果 U 有基点，则 $U^2 \geq kn$ 的余维为 U。

注 9.7. (i) 我们指出，研究子空间的幂本身也很有趣，因为有理映射的像的坐标环

$$\mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^r, \quad x \mapsto (f_1(x) : \cdots : f_r(x))$$

is i同构于 $\bigoplus_{i=0}^{\infty} U^i$ 如果 $f_1, \ldots, f_r \in A_d$和 $U =$张成$(f_1, \ldots, f_r)$（参见 [3]）。

从这个角度来看，我们只考察了这个坐标环的二次分量，并发现当且仅当该映射不是态射时，U^2 的维数最小（如果 $r \geq$ 维数 $A_d - d + 1$且 n 足够大）。

(ii) 同样，理解无基点子空间的希尔伯特函数也是一个有趣的课题。这里我们给出 Blekherman 的论文 [2] 作为参考，其中还给出了若干关于优化的应用。他研究了无基点子空间 $U \subseteq A_d$ 满足 $UA_d \neq A_{2d}$ 的条件（见定理 2.22）。

(iii) 我们再次提及 EGH猜想（见注释 4.10），该猜想关注如何利用单项式理想来理解包含正则序列的理想的希尔伯特函数。齐次理想可能具有的希尔伯特函数 $I \subseteq A$已由 Macaulay 完全刻画。然而，若再加上注释 4.10中的条件，即单项式理想包含次数相同的正则序列，问题就会变得困难得多。

这与我们的情形非常相似：若允许子空间含有基点，那么求 codim U^2 的界相当容易；但若要求 U 无基点，则会困难得多。

References

[1] Jeaman Ahn、Juan C. Migliore 和 Yong-Su Shin。Green 定理与 Gorenstein 序列。《纯粹与应用代数杂志》，222(2):387–413，2018。7，18[2] Grigoriy Blekherman。正 Gorenstein 理想。《美国数学会会刊》，143(1):69–86，2015。8，27[3] Mats Boij 和 Aldo Conca。关于代数的 Fr¨oberg-Macaulay 猜想。《的里雅斯特大学数学研究所学报》，50:139–147，2018。1，2，3，4，27[4] Winfried Bruns 和 H. J¨urgen Herzog。Cohen-Macaulay 环。《剑桥高等数学研究》，剑桥大学出版社，第 2 版，1998。6，7[5] Giulio Caviglia 和 Diane Maclagan。Eisenbud–Green–Harris 猜想的若干情形。《数学研究通讯》，15(2-3):427–433，2008。13[6] David Eisenbud。《交换代数：兼论代数几何》。Springer New York，1995。3，4[7] David Eisenbud、Mark Green 和 Joe Harris。更高阶 Castelnuovo 理论。载于《奥尔赛代数几何日》，法国，1992 年 7 月 20–26 日，第 187–202 页。巴黎：法国数学会，1993。1，13[8] Andre Galligo。关于 Weierstrass 预备定理。《多复变函数》，François Norguet 研讨班，1970 年 10 月至 1973 年 12 月，数学讲义 409，543–579（1974）。1974。4[9] Mark Green。线性系对超平面的限制，以及 Macaulay 和 Gotzmann 的一些结果。载于《代数曲线与射影几何》，第 76–86 页。Springer Berlin Heidelberg，1989。8[10] Robin Hartshorne。希尔伯特概形的连通性。《IHÉS 数学出版物》，29:5–48，1966。4[11] Anthony Iarrobino 和 Steve L. Kleiman。Gotzmann 定理与希尔伯特概形。载于《幂和、Gorenstein 代数与行列式簇》，第 289–312 页。Springer Berlin Heidelberg，1999。7[12] F. S. Macaulay。模系统理论中的计数的一些性质。《伦敦数学会会刊》（第二辑），26:531–555，1927。7[13] C. Scheiderer。二元型 Gram 谱胚的极点。《离散与计算几何》，67:1174–1190，2022。2[14]Sage 开发团队。SageMath，Sage 数学软件系统（8.8 版），2019。https://www.sagemath.org。4，20

OvGU Magdeburg, FMA-IAG, D-39106 Magdeburg, Germany电子邮件地址：julian.vill@ovgu.de