arXiv:2304.02334v2 [math.NA] 2 May 2023

非局域¨非线性薛定谔方程暗孤子的数值计算

´ ´ ´ANDRE DE LAIRE、GUILLAUME DUJARDIN 和 SALVADOR LOPEZ-MARTINEZ

Abstract. 近期已证明，一大类具有非零边界条件的一维非线性非局域 Gross-Pitaevskii 方程存在暗孤子，并确定了它们的衰减性质 [10]。从数学上说，这些孤子对应于固定动量下的能量极小化子，并且轨道稳定。本文提出了一种数值方法，用于计算这类方程中此类孤子的近似解，并针对若干种具有实际物理意义的非局域势进行了数值实验。这些模拟使我们能够获得多种暗孤子，并根据非局域势的参数讨论其形状。特别是，模拟结果表明，给定色散关系后，声速和朗道速度是理解这些暗孤子性质的重要量。此外，模拟也使我们能够检验证明暗孤子存在性的理论结果中若干充分条件是否必要。

AMS分类号。 35Q55; 35C07; 35B35; 35C08; 37K40

关键词。 非局部薛定谔¨方程、Gross–Pitaevskii 方程、数值方法、数值计算、行波、暗孤子、无穷远处的非零条件。

1. Introduction

我们考虑如下关于 Ψ 的一维非局域 Gross–Pitaevskii 方程： $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$

$$i\partial_t\Psi = \partial_x^2\Psi + (\mathcal{W}\star(1-|\Psi|^2))\Psi, \tag{1}$$

具有无穷远处非零边界条件，即

$$\lim_{|x|\to+\infty}|\Psi(x,t)| = 1, \quad \text{for all } t, \tag{2}$$

以及适当的初始条件，其中 $\star$ 表示与缓增分布 $\mathcal{W}$在空间中的卷积。该方程例如可作为强度为 $|\Psi|^2$ 的一维光学光束在自散焦非局域类克尔介质中演化的模型，其中 $\mathcal{W}$ 刻画介质 [18, 15]的非局域响应。在这种情况下，研究暗光学孤子时，条件(2)是自然的。在所有物理情形中，假定 $\mathcal{W}$ 为实值且对称的分布，从而(1)是一个哈密顿方程，并且能量和动量

$$E(\Psi(t)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|\partial_x\Psi(t)|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}(\mathcal{W}\star(1-|\Psi(t)|^2))(1-|\Psi(t)|^2)\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

$$P(\Psi(t)) = \int_{\mathbb{R}}\langle i\partial_x\Psi(t),\Psi(t)\rangle_{\mathbb{C}}\left(1-\frac{1}{|\Psi(t)|^2}\right)\mathrm{d}x, \tag{4}$$

是形式上守恒的，其中 $\langle z_1,\ z_2\rangle_{\mathbb{C}} = \Re(z_1\bar{z}_2)$，对于 $z_1, z_2\in\mathbb{C}$。

在最典型的一阶近似中， $\mathcal{W}$ 被视为狄拉克δ函数 δ_0，由式 (1) 可得到标准的 Gross–Pitaevskii 方程

$$i\partial_t\Psi = \partial_x^2\Psi + (1-|\Psi|^2)\Psi, \tag{5}$$

在无穷远处满足非零条件。有关方程 (1) 和 (5) 的理论与应用的更多细节，请参阅 [11, 10, 9] 。

暗孤子在以恒定背景传播的方程 (1) 的有限能量解的动力学中发挥着基础作用。因此，近几十年来，这些解引起了理论和实验方面的关注（参见例如 [12, 3, 7]）。确切地说，这些孤子对应于形如 $\Psi(x,t) = u(x-ct)$ 的光滑行波解，其中速度为 $c \in \mathbb{R}$，且导数局域化。因此，我们专注于寻找函数 $u:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 求解

$$icu' + u'' + (\mathcal{W} \star (1-|u|^2))u = 0, \tag{TW$_c$}$$

并属于能量空间

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}) = \{v \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) : 1-|v|^2 \in L^2(\mathbb{R}),\ v' \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

注意到，这一点可由假设 $\mathcal{W}$ 的傅里叶变换有界来证明，即 $\mathcal{W} \in L^\infty(\mathbb{R})$ （见 [10]）。注意，在本文中，我们采用如下约定：对于 $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

使得 $\delta_0 = 1$。此外，我们只考虑分布 $\mathcal{W}$，使得 $\mathcal{W}$ 是（有界且）连续的，因此我们也可以并且将假设归一化条件 $\mathcal{W}(0) = 1$。

注意，任意模为 1 的常值函数 u 都是 (TW$_c$) 的一个零能量解。我们将此类函数称为平凡解。还可观察到，(TW$_c$) 也存在能量为无穷的振荡解，例如

$$u^{\pm}_{r,c}(x) = r\exp\Big(ix\Big(\frac{-c \pm \sqrt{c^2+4(1-r^2)}}{2}\Big)\Big), \quad \text{for all } r \in (0,1) \text{ and } c \in \mathbb{R}.$$

另一个备注是，通过对方程(TW$_c$) 中的 u 取复共轭，我们只需考虑 $c \geqslant 0$。

下文中，当我们提及（TW$_c$）的解或孤子时，均默认它是（TW$_c$）的非平凡有限能量解。我们回顾以下关于这些解性质的结果。

引理1(暗孤子的衰减性质（参见 [10]）。设 $\mathcal{W}$ 是一个实值偶温和分布，使得 $\mathcal{W} \in L^\infty(\mathbb{R})$。假设 $c \geqslant 0$ 且 $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ 是 （TW$_c$）的一个解。则u 有界且属于 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$类。此外，如果 $c > 0$，则 u 在 $\mathbb{R}$ 上不为零，并且存在 u的一个光滑提升。更确切地说，存在实值函数 $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ 以及另一个 $\mathcal{C}^\infty$ 函数η，其定义在 $\mathbb{R}$ 上，取值于 $(-\infty, 1)$，使得 $u = \sqrt{1-\eta}e^{i\theta}$ 在 $\mathbb{R}$上成立，并且对所有 $k \in \mathbb{N}$, $\theta', \eta \in H^k(\mathbb{R})$，以及

$$|u|(\pm\infty) = 1,\ D^j u(\pm\infty) = D^j\theta(\pm\infty) = D^j\eta(\pm\infty) = 0, \quad \textit{for all } j \geqslant 1. \tag{6}$$

此外， [10], 也证明了此类解的存在性，我们可以将这一结果改写如下。为完整起见，我们在附录中给出证明。

定理 2. 设 $\mathcal{W}$ 是一个实值偶缓增分布，满足 $\mathcal{W} \in L^\infty(\mathbb{R})$。假设存在 $\sigma \in (0,1]$ 使得

$$\inf_{\mathbb{R}} \big(\widehat{\mathcal{W}}(\xi) + \xi^2/2\big) = \sigma. \tag{7}$$

Then，对于几乎处处的 $c \in (0, \sqrt{2}\sigma)$，存在一个非平凡解 $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ 满足(TW$_c$)。

此外，通过对 $\mathcal{W}$ 施加一些额外条件， [10] 证明了对每个 $c \in (0,\ \sqrt{2}\sigma)$，存在性结论成立。例如，狄拉克 δ 函数 函数 $\mathcal{W} = \delta_0$ 满足这类条件，因此 $\mathcal{W} = 1$。这与 [5], 中的结果一致，作者在那里证明, 对于$c \in [0,\ \sqrt{2})$，唯一的解（相差一个平移和一个模为一的复常数因子）可显式表示为

$$u_c(x) = \sqrt{\frac{2-c^2}{2}}\tanh\left(\frac{\sqrt{2-c^2}}{2}x\right) - i\frac{c}{\sqrt{2}}. \tag{8}$$

此外，他们表明，如果 $c \geqslant \sqrt{2}$，方程（2）的唯一解是平凡解。

关于非局部方程（1），如 [11], 中所述，Bogoliubov色散关系为

$$\omega(\xi) = \sqrt{\xi^4 + 2\widehat{\mathcal{W}}(\xi)\xi^2}. \tag{9}$$

因此，假设 $\widehat{\mathcal{W}}$ 在0处连续且非负，我们得到 $\omega(\xi) \approx (2\widehat{\mathcal{W}}(0))^{1/2}|\xi|$, 对于 $\xi \approx 0$。我们推断声速度的值为

$$c_s(\mathcal{W}) := \lim_{\xi \to 0} \frac{\omega(\xi)}{\xi} = (2\widehat{\mathcal{W}}(0))^{1/2}. \tag{10}$$

在我们的归一化 $\widehat{\mathcal{W}}(0) = 1$ 下，声速因此设为 $c_s = \sqrt{2}$。

在 [10], 中，作者证明，如果 $\mathcal{W}$ 在原点的邻域内光滑，且 $\mathcal{W} \geqslant 0$ 几乎处处于 $\mathbb{R}$、 $\mathcal{W}(0) = 1$ 和 $(\mathcal{W})''(0) \neq -1$，那么（TW$_c$）在声速$c_s = \sqrt{2}$下不存在非平凡解。

研究超流体时的另一个重要概念是朗道临界速度，它解释了超流体中称为旋子的激发的存在。数学上，朗道速度定义为

$$c_L(\mathcal{W}) := \inf_{\mathbb{R}} \frac{\omega(\xi)}{|\xi|}, \tag{11}$$

而朗道判据是：存在一点 $\xi_{\mathrm{rot}} > 0$，我们称之为旋子极小值，使得$c_L(\mathcal{W}) = \omega(\xi_{\mathrm{rot}})/|\xi_{\mathrm{rot}}|$. 因此，若 ω 在 $\xi_{\mathrm{rot}} > 0$处可微，则旋子极小值 ξ_{rot} 是群速度 $\omega'(\xi_{\mathrm{rot}})$ 与相位速度 $\omega(\xi_{\mathrm{rot}})/\xi_{\mathrm{rot}}$ 相等的一点。在经典弱相互作用玻色–爱因斯坦凝聚中，朗道速度与声速相等 $c_L(\mathcal{W}) = c_s(\mathcal{W})$，而在某些超流体（例如^{4}He）中，朗道速度小于声速 [2]。在物理文献中，人们预期当 $c_L(\mathcal{W}) < c_s(\mathcal{W})$时，由于存在旋子极小值，孤子解应在涡旋周围包含一些额外的密度振荡。此外，Berloff与Roberts在更高维情形下给出了一些形式论证，表明条件 $c < c_L(\mathcal{W})$ 对于获得非平凡孤子应当是必要的 [4]。

为说明旋子极小值的存在性，我们考虑高斯势 $\widehat{\mathcal{W}_\lambda}(\xi) = e^{-\lambda^2\xi^2}$。如果 $\lambda \in [0, \sqrt{2}/2)$, 色散曲线 $\xi \mapsto \omega(\xi)$ 是凸的，那么我们有 $c_L(\mathcal{W}_\lambda) = c_s = \sqrt{2}$，且这条曲线的形状类似于图1左图所示。相反，如果$\lambda > \sqrt{2}/2$, ω 在原点附近是凹的，并且存在旋子极小值 $\xi_{\mathrm{rot}} > 0$ （如图 1 右图所示），其中绿色直线的斜率对应于朗道速度。

在此背景下，我们可以将定理 2 重新表述如下

推论3。 令 $\mathcal{W}$ 如定理 *2* 中所述。则朗道临界速度为

$$c_L(\mathcal{W}) = \sqrt{2\sigma}, \tag{12}$$

并且，对于几乎所有的 $c \in (0, c_L(\mathcal{W}))$，都存在一个非平凡解 $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$，满足 (TW_c)。

如引理1所示，若 $c > 0$，则(TW$_c$)的解不会消失，即对所有 $x \in \mathbb{R}$有 $|u(x)| > 0$。此外，如 [10], 中对 $c > 0$所示，变量替换 $\eta = 1 - |u|^2$ 使我们能够将(TW$_c$)改写为单个实值方程

$$J_c(\eta, \lambda) = 0, \tag{13}$$

其中

$$J_c(\eta, \lambda) := \eta'' - 2\mathcal{W}_\lambda \star \eta + c^2\eta + \frac{c^2\eta^2}{2(1-\eta)} + \frac{(\eta')^2}{2(1-\eta)} + 2(\mathcal{W}_\lambda \star \eta)\eta. \tag{14}$$

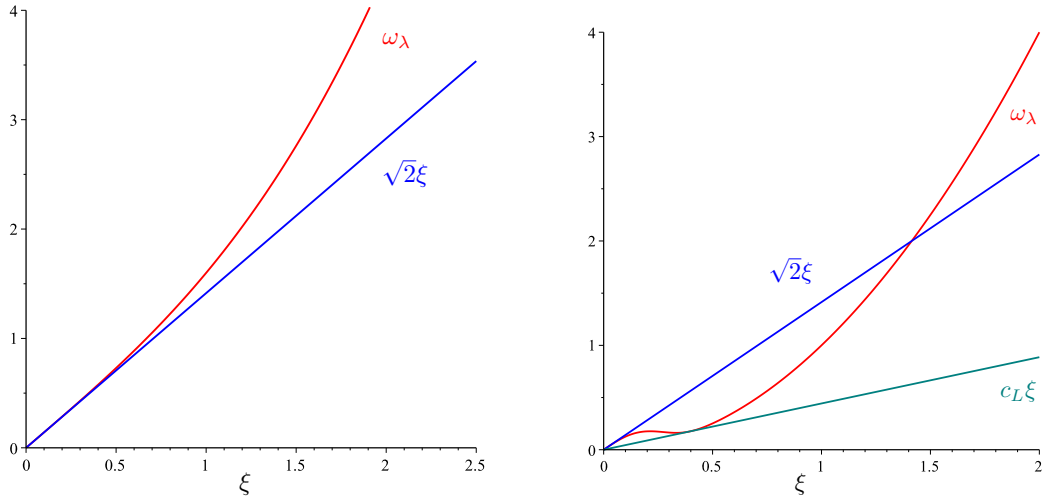


FIGURE 1. 高斯势$\widehat{\mathcal{W}}(\xi) = e^{-\lambda^2\xi^2}$ 下的色散曲线 $\xi \mapsto \omega_\lambda(\xi)$ (红色)、声速曲线 $\xi \mapsto \sqrt{2} \times \xi$(蓝色)和朗道速度曲线 $\xi \mapsto c_L \times \xi$(绿色)，其中 $\lambda = 1/2$ （左图），$\lambda = 5$ （右图）。在左图中，声速 $c_s = \sqrt{2}$ 等于朗道速度 c_L。

注意，在(14) 中，我们引入的不是单个势 $\mathcal{W}$，而是一族势 $\mathcal{W}_\lambda$，其由一个实参数 λ索引。这将使我们能够将非局部方程(13)与局部方程联系起来。事实上，在下面的几个例子中，我们将选择这一族 $\mathcal{W}_\lambda$ 使得 $\mathcal{W}_0 = \delta_0$。

根据引理1，如果 u 是（TW$_c$）的一个解，且 $c > 0$，那么 $\eta < 1$ 在 $\mathbb{R}$上，从而 J_c 定义良好。此外，我们可以通过令来从 η 恢复 u

$$u(x) = \sqrt{1-\eta(x)}e^{i\theta(x)}, \quad \text{where} \quad \theta(x) = \frac{c}{2}\int_0^x \frac{\eta(s)}{1-\eta(s)}\mathrm{d}s. \tag{15}$$

此外，若 η 满足（13），则动量（4）和能量（3）可按如下方式计算（详情参见[10]）

$$E(\eta) = \frac{c^2}{8}\int_{\mathbb{R}} \frac{\eta(x)^2}{1-\eta(x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}} \frac{\eta'(x)^2}{1-\eta(x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W}_\lambda \star \eta)(x)\eta(x)\mathrm{d}x, \tag{16}$$

$$P(\eta) = \frac{c}{4}\int_{\mathbb{R}} \frac{\eta(x)^2}{1-\eta(x)}\mathrm{d}x. \tag{17}$$

例如，在这些新变量中，与方程 (TW$_c$) 在 $\mathcal{W} = \delta_0$ 时的解相关的 (8) 中的孤子 u_c，对于 $c \in (0, \sqrt{2})$, 可写为:

$$\eta_c(x) = \frac{2-c^2}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{2-c^2}}{2}x\right), \quad \text{and} \quad \theta_c(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{2-c^2}}{c}\tanh\left(\frac{\sqrt{2-c^2}}{2}x\right)\right). \tag{18}$$

本文的主要目的是提出一种数值方案，求得某些 $c > 0$ 下 (TW$_c$) 的近似解，并运用该方法开展实际数值实验，从而获得若干具有重要物理意义的势 $\mathcal{W}$对应的暗孤子族。为此，我们在第2节介绍六类具有重要物理意义的势 $\mathcal{W}_\lambda$。我们还分析相应的色散关系、声速和朗道速度，并讨论旋子极小值的存在性。第3节专门讨论一项稳定性判据，该判据可确保暗孤子的轨道稳定性。第4节介绍我们提出的数值方法，用于计算.....的近似

暗孤子（即 (TW$_c$) 的解）。该方法采用 η 中的等价方程 (13)：首先利用衰减性质（引理1），将其约化到一个有界区间上，并施加齐次狄利克雷边界条件；随后通过有限差分进行离散。接着，通过梯度下降最小化残差，数值求解方程 (13) 对应的离散形式。借助这一方法，我们在第5节得到了数值结果，研究了第2节介绍的六类非局部势 $\mathcal{W}_\lambda$。具体而言，这些结果揭示了 (TW$_c$) 的暗孤子剖面，并有助于探究朗道速度的作用以及孤子的稳定性（与第3节相关）。

2. Examples of interaction potentials

我们考虑在 [10] 中研究的六个相互作用势 $\mathcal{W}_\lambda$。它们满足定理 2 和推论3的假设。更准确地说，它们是偶缓增分布，其中 $\mathcal{W}\in L^\infty(\mathbb{R})$，且 $\widehat{\mathcal{W}}$ 在原点的邻域内属于 $\mathcal{C}^2$ 类，满足归一化条件

$$\widehat{\mathcal{W}}(0)=1. \tag{19}$$

此外，在我们所有的示例中，除了最后一个之外，势均由 $\lambda\in\Lambda\subset\mathbb{R}$ 参数化，满足 $\mathcal{W}_0=\delta_0$。因此，对于 $\lambda=0$，(TW$_c$) 的一些解由速度为 $c\in(0,\sqrt{2})$ 的孤子 (18) 显式给出，我们稍后将使用它来启动我们的数值方法。

我们使用(9)中定义的色散曲线 ω 以及(11)中的朗道速度。当势由 $\lambda\in\Lambda$参数化时，我们为简便起见将 ω_λ 称为相应的色散曲线，并

$$c_L(\lambda)=c_L(\mathcal{W}_\lambda).$$

我们注意到，对于较小的正 ξ， $\omega''(\xi)$的符号与 $1+(\mathcal{W})''(\xi)$的符号相对应。因此，若 $(\mathcal{W})''(0)>-1$，则曲线 ω 在原点附近为凸曲线，且当 $\xi>0$较小时位于切线$\sqrt{2}\xi$上方。若 $(\widehat{\mathcal{W}})''(0)<-1$，则曲线 ω 在原点附近为凹曲线，且当 $\xi>0$较小时位于切线 $\sqrt{2}\xi$下方。例如，参见图1中的势。

例1。令 $\beta>0$ 和 $\lambda\in(-\infty,\ \beta/2)$, 我们考虑

$$\mathcal{W}_\lambda(x)=\frac{\beta}{\beta-2\lambda}\left(\delta_0-\lambda \mathrm{e}^{-\beta|x|}\right),\ x\in\mathbb{R},\quad \text{i.e.}\quad \widehat{\mathcal{W}}_\lambda(\xi)=\frac{\beta}{\beta-2\lambda}\Big(1-\frac{2\lambda\beta}{\xi^2+\beta^2}\Big),\ \xi\in\mathbb{R}. \tag{E1}$$

这种势已在 [18] 中用于研究自散焦非局域类克尔介质中的暗孤子。若 $\lambda>0$，势 $\mathcal{W}_\lambda$ 表示空间位置重合的粒子之间存在强烈排斥作用，而在其他情况下相互作用则转为吸引，且这种吸引在短距离时更为显著。相较之下，若 $\lambda<0$，势 $\mathcal{W}_\lambda$ 则为纯排斥势。根据定理 2和推论3，对于这种势，我们区分以下几种情况：

(1) 如果 $\beta\geqslant\sqrt{2}$，那么对于几乎所有的 $c\in(0,\sqrt{2})$ 以及每个 $\lambda\in(-\infty,\beta/2)$，都存在一个孤子。(2) 如果 $\beta\in(0,\sqrt{2})$, 那么对于几乎所有的 $c\in(0,c_L(\lambda))$ 以及每个 $\lambda\in(-\infty,\beta/2),$, 其中$c_L(\lambda)=\sqrt{2\sigma(\lambda)}$ 且

$$\sigma(\lambda)=\begin{cases}1 & \text{if } -\frac{\beta^3}{2(2-\beta^2)}<\lambda<\frac{\beta}{2},\\ \dfrac{\beta(1+\sqrt{-\lambda(\beta-2\lambda)})}{\beta-2\lambda}+\beta\sqrt{\dfrac{-\lambda}{\beta-2\lambda}}-\dfrac{\beta^2}{2} & \text{if } \lambda\leqslant-\frac{\beta^3}{2(2-\beta^2)}.\end{cases} \tag{20}$$

特别地，在第二种情况下，作为 λ的函数， c_L 是连续的、正的，并且 $\lim_{\lambda\to-\infty}c_L(\lambda)=(\beta(2\sqrt{2}-\beta))^{1/2}$。注意，临界值 $-\beta^3/(2(2-\beta^2))$, 对应于函数$1+(\mathcal{W}_\lambda)''$的零点。

在图2中，我们描绘了 ω_λ 在 $(\beta,\ \lambda)$两种取值下的色散曲线。左图中，我们有$\beta=0.15$ 和 $\lambda=0.05$, 因此 $\mathcal{W}_\lambda''(0)>-1$，函数 ω 是凸函数，其图像位于原点处切线 $\xi\mapsto\sqrt{2}\xi$的上方。不存在旋子极小值，且朗道速度为 $c_L=\sqrt{2}$。中图中，我们有 $\beta=0.5$ 和 $\lambda=-1$，因此 $\mathcal{W}_\lambda''(0)<-1$，并且 ω_λ 在

原点附近是凹函数，且在 $\xi \lesssim 1$时位于切线 $\sqrt{2}\xi$下方。在这种情况下，朗道速度 $c_L \sim 1.19$ 小于$\sqrt{2}$ ，并且在 ω_λ时存在旋子。为清晰起见，右图展示了$\beta = 0.5$ 时的曲线 $\omega_\lambda(\xi)/\xi$ ， 以及 $\lambda = -1$。

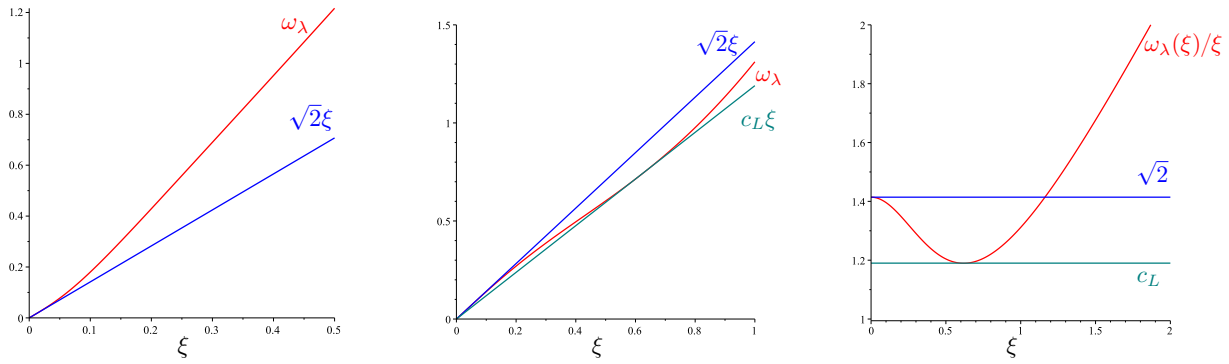


FIGURE 2. 势(E1)的色散曲线 $\xi \mapsto \omega_\lambda(\xi)$ 。左： $\beta = 0.15$和 $\lambda = 0.05$。中间和右侧： $\beta = 0.5$ 和 $\lambda = -1$，因此 $c_L \sim 1.19$。

示例 2。 [17] 中提出的另一个有趣例子是高斯函数，对于 $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$\mathcal{W}_\lambda(x) = \frac{1}{2|\lambda|\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\lambda^2}}, \ x \in \mathbb{R}, \quad \text{i.e.} \quad \widehat{\mathcal{W}_\lambda}(\xi) = \mathrm{e}^{-\lambda^2\xi^2}, \ \xi \in \mathbb{R}, \tag{E2}$$

其中 $\mathcal{W}_0 = \delta_0$ 且 $\mathcal{W}_0 \equiv 1$。当 λ趋于零时，该势是狄拉克δ函数光滑逼近的经典模型。函数 $1 + (\widehat{\mathcal{W}_\lambda})''$在 $\lambda^* = \sqrt{2}/2$处为零。根据推论3，对于 $\lambda \in [0, \ 1/\sqrt{2}),$，几乎对所有 $c \in (0, \ \sqrt{2})$，我们都能证明其存在性。此外，对于 $\lambda \geqslant \sqrt{2}/2,$，几乎对所有 $c \in (0, \ c_L(\lambda))$，都能证明孤子的存在，其中

$$c_L(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sqrt{1 + \ln(2\lambda^2)}. \tag{21}$$

在图 3 中，我们绘出了两个 λ值下的色散曲线 ω_λ 。在左侧和中间的面板中，我们有 $\lambda = 1$，存在一个旋子极小值，并且 $c_L \sim 1.3$，因此朗道速度非常接近声速。在右侧面板中，我们有 $\lambda = 3$，也存在一个旋子极小值，并且 $c_L \sim 0.66$。

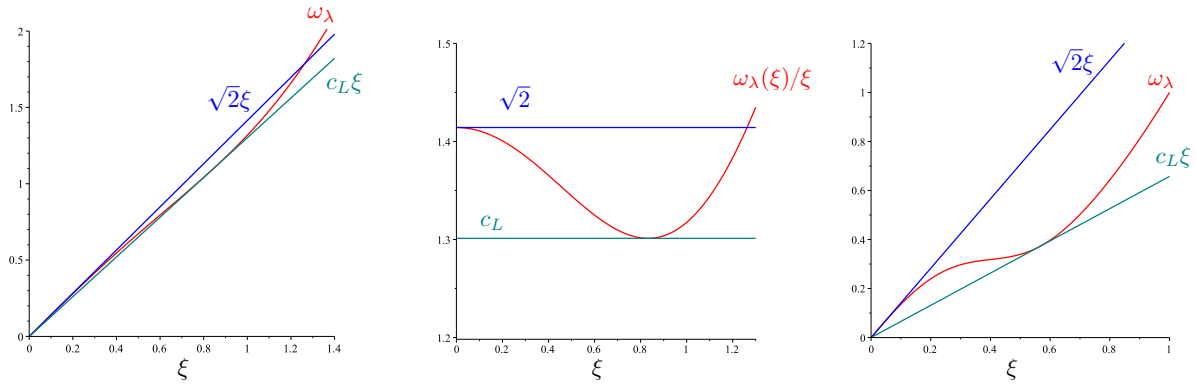


FIGURE 3. 势 (E2) 的色散曲线 $\xi \mapsto \omega_\lambda(\xi)$ 。左图和中图：$\lambda = 1$ 使得 $c_L \sim 1.3$。右图： $\lambda = 3$ 使得 $c_L \sim 0.66$。

例3。下一个势，即所谓的矩形势，曾在 [1] 中用于研究超固体，也曾在 [14] 中用作非局部材料的模型。此外，它也可以看作一种非光滑的

当 $\lambda > 0$ 较小时对狄拉克 δ 函数的近似，

$$\text{(E3)} \qquad \mathcal{W}_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{2|\lambda|} & \text{if } |x| \leqslant |\lambda| \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{i.e.} \quad \widehat{\mathcal{W}}_\lambda(\xi) = \operatorname{sinc}(\lambda\xi) = \frac{\sin(\lambda\xi)}{\lambda\xi}, \ \xi \in \mathbb{R}.$$

在此情况下，作为 λ的函数，函数 $1+(\widehat{\mathcal{W}}_\lambda)''(0)$ 在 $\lambda^* = \sqrt{3}$处为零。此外，对于 $\lambda > \sqrt{3}$，朗道速度 $c_L(\lambda)$ 小于 $\sqrt{2}$ 。注意，$\lambda = 2$ 产生的朗道速度为 $c_L(2) \sim 1.374$，而 $\lambda = 4.5$产生的朗道速度为 $c_L(4.5) \sim 0.624$。在图 4 中，我们展示了相应的色散曲线：在左侧和中间面板中，我们看到，对于 $\lambda = 2$，存在一个旋子极小值。在右侧面板中，我们看到对于 $\lambda = 4.5$ 存在一个旋子极小值。

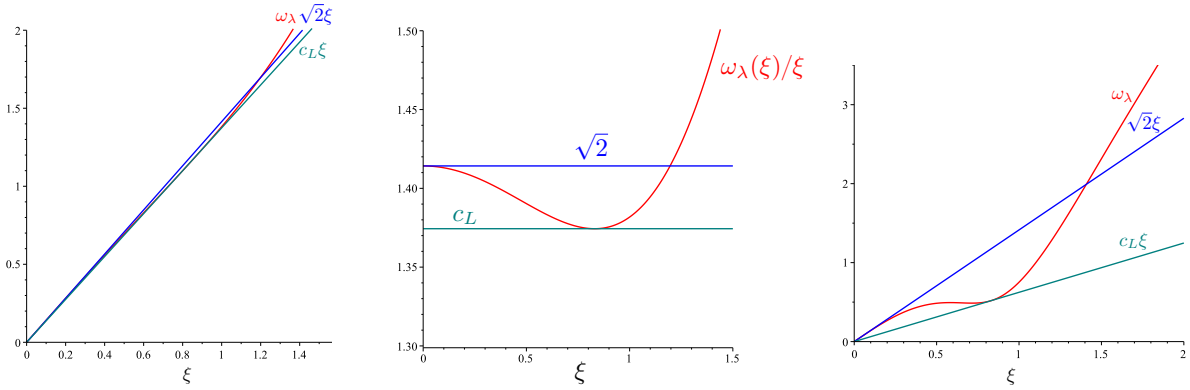


FIGURE 4. 势(E3)的色散曲线 $\xi \mapsto \omega_\lambda(\xi)$ 。左侧和中间：$\lambda = 2$，因此 $c_L \sim 1.374$。右侧： $\lambda = 4.5$，因此 $c_L \sim 0.624$。

例4。以下势在 [20] 中被提出，作为玻色–爱因斯坦凝聚态中相互作用的一个简单模型。它由一个接触相互作用 δ_0 和两个以$\pm\lambda$为中心的狄拉克δ函数组成，如此。

$$\text{(E4)} \qquad \mathcal{W}_\lambda = 2\delta_0 - \frac{1}{2}\left(\delta_{-\lambda} + \delta_\lambda\right), \quad \text{i.e.} \quad \widehat{\mathcal{W}}_\lambda(\xi) = 2 - \cos(\lambda\xi), \ \xi \in \mathbb{R}.$$

对于任意 $\lambda \geqslant 0$，我们有 $c_L(\lambda) = \sqrt{2}$，且推论3证明，对于几乎所有速度 $c \in (0, \sqrt{2})$，孤子都存在。注意，色散曲线 ω_λ 可能存在拐点，如图5所示。然而，对于任意 $\lambda \geqslant 0$，色散曲线都没有旋子极小值。

例5。正如 [15] 中所指出的，在非局域介质中的孤子背景下，当响应函数相较于光束的范围较窄时，可以使用泰勒展开

$$\widehat{\mathcal{W}}(\xi) \approx \widehat{\mathcal{W}}(0) + \xi(\widehat{\mathcal{W}}(0))' + \frac{\xi^2}{2}(\widehat{\mathcal{W}}(0))'' = 1 - \lambda\frac{\xi^2}{2}, \qquad \text{with } \lambda = \int_{\mathbb{R}} x^2 \mathcal{W}(x)dx.$$

这里我们用到了(19)，以及 $\mathcal{W}$ 为偶函数这一事实。在这种情况下， $\mathcal{W}$ 不是有界的，从而导出一个拟线性方程。为了得到真正的非局域模型，我们通过考虑如下给出的博赫纳–里斯势来对其进行修正

$$\text{(E5)} \qquad \widehat{\mathcal{W}}_\lambda(\xi) = \left(1 - \lambda\frac{\xi^2}{2}\right)^+, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

从数学角度来看，博赫纳–里斯势也很有趣，因为它在傅里叶变量中并不光滑。尽管我们的模拟不需要使用物理变量中的势，但我们仍给出其表达式，以展示其在无穷远处的缓慢衰减和振荡：

$$\mathcal{W}_\lambda(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi x^2}\left(\sqrt{\lambda}\frac{\sin\left(x\sqrt{2/\lambda}\right)}{x} - \sqrt{2}\cos\left(x\sqrt{2/\lambda}\right)\right).$$

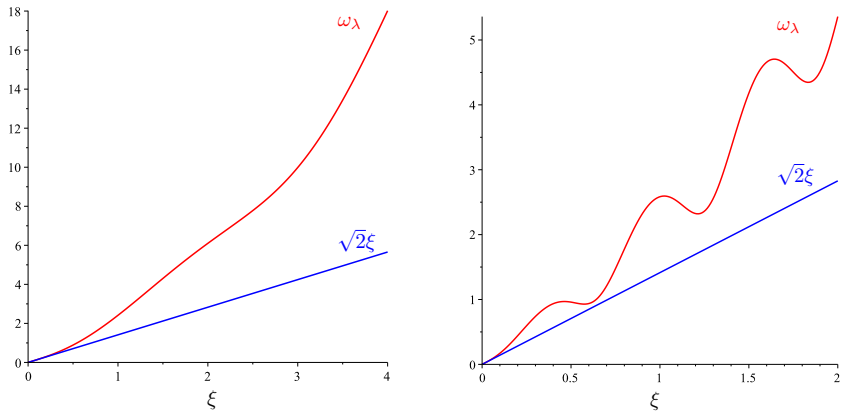


FIGURE 5. 势 (E4) 的色散曲线 $\xi \mapsto \omega_\lambda(\xi)$ 。左： $\lambda = 2$。右： $\lambda = 10$。

在第5节中，我们对 $\lambda = 1$ 和 $\lambda = 4$进行数值模拟。对于 $\lambda = 1$，我们得到 $c_L(1) = \sqrt{2}$。这是一个临界值，因为对于 $\xi \in [0, \sqrt{2}]$，色散曲线与切线 $\sqrt{2}\xi$重合，如图5左图所示。对于 $\lambda = 4$，朗道速度为 $c_L = \sqrt{2}/2 \sim 0.7,$ ，并且存在一个旋子极小值，如图5右图所示。

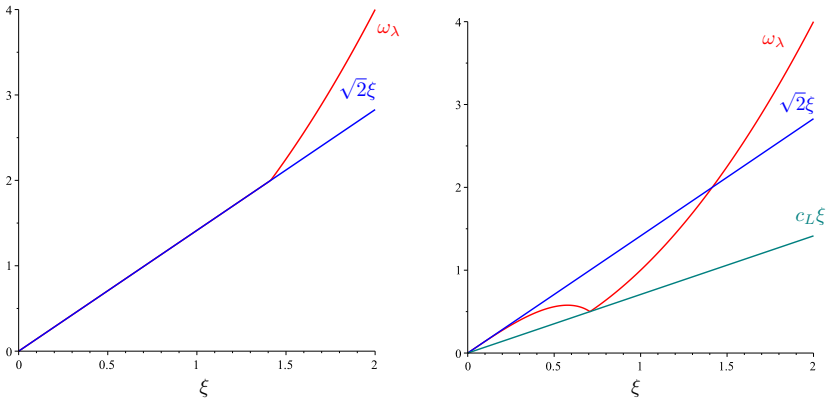


FIGURE 6. 色散曲线 $\xi \mapsto \omega_\lambda(\xi)$ 对应于 (E5)。左侧： $\lambda = 1$。右侧： $\lambda = 4$，因此 $c_L = \sqrt{2}/2$。

示例 6。对于最后一个示例，我们考虑由其傅里叶变换定义的势

$$\widehat{\mathcal{W}}(\xi) = (1 + a\xi^2 + b\xi^4)\mathrm{e}^{-c\xi^2}. \tag{E6}$$

该势是在 [4, 19]中提出的，用于描述表现出类似氦-4的旋子-声子谱的量子流体。在 [11], 中，对 $a = -36$、 $b = 2687$、 $c = 30$进行了数值模拟，并发现了一支速度位于 $(0, \sqrt{2})$的孤子分支。因此，我们将考虑(a, b, c)的相同取值，以便将我们的结果与其结果进行比较。此外， c_L 的值约等于0.596，因此推论3给出了几乎所有速度 $c < c_L$下孤子存在的结论。

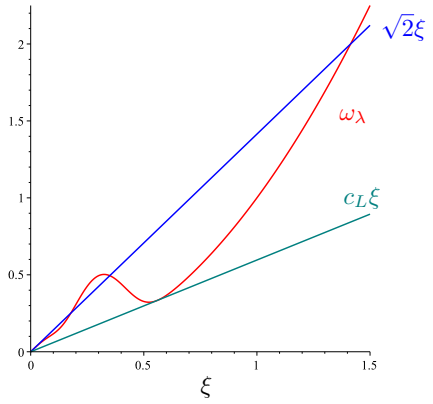


FIGURE 7. （E6）的色散曲线，其中 c_L#0。596。

3. STABILITY OF DARK SOLITONS

在 $\mathcal{W} = \delta_0$的情形下，暗孤子由公式 (18) 显式给出，Lin 在[16] 中证明了它们对于 $c \in (0,\sqrt{2})$ 的轨道稳定性（另见 [8]）。他的证明依赖于一般的Grillakis-Shatah-Strauss理论 [13], ，该理论仍可应用于非局部演化方程 (1)，以确定暗孤子是否轨道稳定。现在我们简要回顾该方法在本文背景下的思想。固定 $\mathcal{W}$，并假设存在 $\mathfrak{c} > 0$，使得对于任意 $c \in (0, \mathfrak{c})$，存在方程 (TWc) 的解 $u(c)$，且局部分支 $c \in (0, \mathfrak{c}) \to u(c) \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ 是 $\mathcal{C}^1$，从而 $c \in (0, \mathfrak{c}) \to \eta(c) \in H^1(\mathbb{R})$ 是$\mathcal{C}^1$，其中 $\eta(c) = 1 - |u(c)|^2$.

利用（16）和（17），我们可以检验函数 $\tilde{E}(c) = E(\eta(c))$和 $\tilde{P}(c) = P(\eta(c))$ 满足哈密顿群关系

$$\tilde{E}'(c) = c\tilde{P}'(c). \tag{22}$$

我们还假设 Grillakis-Shatah-Strauss 理论中的谱假设成立。这可能是正确的，因为证明定理 2 时用到了山路定理。于是，函数 $d(c) = E(c) - cP(c)$ 的二阶导数决定了稳定性。更确切地说，如果 $d''(c) < 0$, 孤子就是稳定的。由 (22) 可知，我们有 $d''(c) = -P(c)$，因此，当 $c \mapsto P(c)$的导数为负时，稳定性成立。

在文献中，通常使用能量-动量 $(E,\ P)$ 图来描绘孤子的局部分支。假设映射 $P \to E$属于 $\mathcal{C}^2$类，则其严格凹性 可保证稳定性，因为

$$\frac{dE}{dP} = c, \quad \text{and} \quad \frac{d^2E}{dP^2} = \frac{d}{dP}\left(\frac{dE}{dP}\right) = \frac{dc}{dP}. \tag{23}$$

在 [11]中，通过采用极小化方法建立轨道稳定性的另一种方法是，假设 $\mathcal{W}$ 是在 $\mathbb{R}$上满足 $\mathcal{W} \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$、 $\widehat{\mathcal{W}} \geqslant 0$ 的偶缓增分布，且 $\widehat{\mathcal{W}}(0) = 1$ 满足：对所有 $|\xi| < 1/\sqrt{2}$., $\widehat{\mathcal{W}}(\xi) \geqslant 1 - \xi^2/2$,

对于 $\mathfrak{q} \geqslant 0$，他们考虑极小化曲线

$$E_{\min}(\mathfrak{q}) := \inf\{E(v) : v \in \mathcal{E}(\mathbb{R}),\ p(v) = \mathfrak{q}\}, \tag{24}$$

并设

$$\mathfrak{q}_* = \sup\{\mathfrak{q} > 0 \mid \forall v \in \mathcal{E}(\mathbb{R}),\ E(v) \leqslant E_{\min}(\mathfrak{q}) \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}}|v| > 0\}. \tag{25}$$

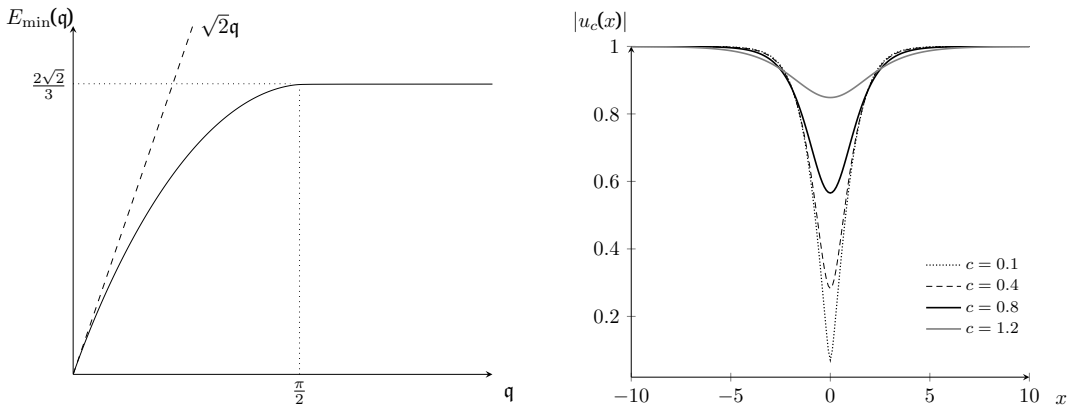


FIGURE 8. 势 $E_{\min}$ 与情形 $\mathcal{W} = \delta_0$下的孤子。

[11] 中的定理4表明，若 $E_{\min}$ 在 $\mathbb{R}^+$上凹，则极小化问题(24)的解集对所有 $\mathfrak{q} \in (0,\ \mathfrak{q}_*)$ 是轨道稳定的。其证明基于Lions-Cazenave论证。当 $\mathcal{W} = \delta_0$时，利用(8)可以直接验证 $E_{\min}$ 在 $\mathbb{R}^+$上光滑，在 $[0,\ \pi/2]$, 上严格凹，并在 $(\pi/2, \infty)$, 上为常数，如图8所示。此外，由(23)可知，该曲线切线的斜率恰好为 c，对$\mathfrak{q} \in (0,\ \pi/2)$, 成立，且该曲线始终位于临界线 $\sqrt{2}\mathfrak{q}$.之下

因此，上述两项判据均可用于证明，对于每个 $c \in (0,\ \sqrt{2})$，暗孤子都是稳定的。对应于黑孤子的情形 $c = 0$ 更为复杂，超出了本文的范围。问题之一在于，对于黑孤子的扰动，动量 (4) 没有明确定义，因此有必要引入某种重整化动量（见 [6]）。

关于第2节中的例子，de Laire 和 Mennuni 证明了，在 [11] 中，势 (E1) 的极小化曲线 $E_{\min}$ 确实是凹的，这意味着孤子的稳定性。他们猜想，在所有这些例子中，我们应有 $\mathfrak{q}_* = \pi/2,$，即 $E_{\min}$ 在 $[0,\ \pi/2]$, 上应当是严格凹的，并在 $(\pi/2, \infty)$ 上为常数。 [11]中的一些数值模拟证实了这一点。

在本文中，我们采用一种不同的方法。事实上，我们并不在固定动量下使能量最小化，以得到某个速度的暗孤子，而该速度还需要随后计算。相反，我们利用（TW$_c$）的等价形式（13），该形式隐式地使用了引理1的部分结果，并在离散化后，通过对其残差采用一种简单的梯度下降法来求解。该方法将在第4节中进行描述，并在第5节中应用于第2节的六个势。它至少有两个优点。首先，它允许我们在计算孤子之前固定其速度。其次，它使我们能够在一个向量空间中进行计算，因为将（TW$_c$）中的未知量从 u 变为（13）中的 η ，消除了非齐次边界条件。

4. THE DISCRETIZED PROBLEM

4.1. .....的离散化(13)。对于 J_c(·的离散化，λ) 其定义见(14)，我们固定一些 $L > 0$ ，并在有界闭区间 $[-L/2, L/2]$上进行处理。我们引入$N \geqslant 1$ 个内点，并令 $\delta x = L/(N+1)$ ，其中 $k \in \{0,\ .....,\ N+1\}$，$x_k = k\delta x - L/2$。我们

将对应于具有齐次 Dirichlet 边界条件的中心差分一阶导数的矩阵定义为

$$D = \frac{1}{2\delta x}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

使得 $D \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ 是斜对称的。我们还定义与具有齐次狄利克雷边界条件的经典二阶导数对应的矩阵：

$$A = \frac{1}{\delta x^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

当然， $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ 是对称的。对于 $\lambda \in \Lambda$，我们定义相互作用势向量 $V_\lambda \in \mathbb{R}^N$，其分量为 $(V_\lambda)_k = \mathcal{W}_\lambda(x_k)$，其中 $k \in \{1, \dots, N\}$，前提是 $\mathcal{W}_\lambda$ 是足够光滑的函数。

最后，我们将式 (14) 中定义的 J_c 对于 $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^N$ 和 $\lambda \in \Lambda$ 的离散类比定义为

$$J_c^{\delta x}(\boldsymbol{\eta}, \lambda) = A\boldsymbol{\eta} - 2V_\lambda * \boldsymbol{\eta} + c^2\boldsymbol{\eta} + c^2\boldsymbol{\eta}.\boldsymbol{\eta}./(2(\mathbb{1} - \boldsymbol{\eta})) + (D\boldsymbol{\eta}.D\boldsymbol{\eta})./(2(\mathbb{1} - \boldsymbol{\eta})) + 2(V_\lambda * \boldsymbol{\eta}).\boldsymbol{\eta} \tag{28}$$

其中 . 和 ./ 分别表示逐分量乘法和除法，而 $*$ 表示向量的卷积。这种离散卷积对应于由零补齐的两个无限序列的通常卷积在 $\{1, \cdots, N\}$ 上的限制。这与连续情形一致，因为我们认为，只要 $L > 0$ 选得足够大，两个参数的首尾分量（V_λ 和 $\boldsymbol{\eta}$）就会很小。我们通过式 (17) 和 (16) 的离散类比，定义 $\boldsymbol{\eta}$ 关于 $J_c^{\delta x}(\boldsymbol{\eta}, \lambda) = 0_{\mathbb{R}^N}$ 的解的数值动量

$$P^{\delta x} = \frac{c}{4}\delta x \sum_{k=1}^{N} \frac{\boldsymbol{\eta}_k^2}{1 - \boldsymbol{\eta}_k}, \tag{29}$$

$$E^{\delta x} = \frac{c^2}{8}\delta x \sum_{k=1}^{N} \frac{\boldsymbol{\eta}_k^2}{1 - \boldsymbol{\eta}_k} + \frac{1}{8}\delta x \sum_{k=1}^{N} \frac{(D\boldsymbol{\eta})_k^2}{1 - \boldsymbol{\eta}_k} + \frac{1}{4}\delta x \sum_{k=1}^{N} (V_\lambda * \boldsymbol{\eta})_k \boldsymbol{\eta}_k. \tag{30}$$

4.2. 最小化算法。由于我们关注的是在固定 $c \in \mathbb{R}$ 时函数 J_c 的非平凡零点，因此我们采用以下策略：在固定 $\lambda \in \Lambda$ 和 $c \in \mathbb{R}$ 的情况下，使用具有自适应步长的梯度法，从已知非平凡解 (18) 的离散化开始（对于 $\lambda = 0$ 以及给定的 c），最小化向量值函数 $\boldsymbol{\eta} \mapsto J_c^{\delta x}(\boldsymbol{\eta}, \lambda)$ 的欧几里得范数平方。这需要引入函数

$$F_\lambda^{\delta x}(\boldsymbol{\eta}) = \delta x \| J_c^{\delta x}(\boldsymbol{\eta}, \lambda) \|^2. \tag{31}$$

注意， $\boldsymbol{\eta} \mapsto J_c^{\delta x}(\boldsymbol{\eta},\ \lambda)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中 0的某个邻域上的光滑函数， $F_\lambda^{\delta x}$ 也是如此。此外，它在某点 $(\boldsymbol{\eta},\ \lambda)$ 处关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的偏导数为

$$\begin{aligned}(32)\quad \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^N, \qquad \partial_{\boldsymbol{\eta}} J_c^{\delta x}(\boldsymbol{\eta},\lambda)(\boldsymbol{\omega}) &= A\boldsymbol{\omega} - 2V_\lambda * \boldsymbol{\omega} + c^2\boldsymbol{\omega} \\ &+ \left[(2c^2\boldsymbol{\eta}.(\mathbb{1}-\boldsymbol{\eta}/2) + D\boldsymbol{\eta}.D\boldsymbol{\eta})./(2(\mathbb{1}-\boldsymbol{\eta}).(\mathbb{1}-\boldsymbol{\eta}))\right].\boldsymbol{\omega} \\ &+ (D\boldsymbol{\eta}./(\mathbb{1}-\boldsymbol{\eta})).(D\boldsymbol{\omega}) + 2(V_\lambda \star \boldsymbol{\eta}).\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\eta}.(V_\lambda * \boldsymbol{\omega}).\end{aligned}$$

由此，我们推断

$$(33)\qquad \nabla F_\lambda^{\delta x}(\boldsymbol{\eta}) = 2\delta x \left[\partial_{\boldsymbol{\eta}} J_c^{\delta x}(\boldsymbol{\eta},\lambda)\right]^t J_c^{\delta x}(\boldsymbol{\eta},\lambda),$$

其中 $\left[\partial_{\boldsymbol{\eta}} J_c^{\delta x}(\boldsymbol{\eta},\lambda)\right]^t$ 是式（32）中定义的从 $\mathbb{R}^N$ 到其自身的线性映射 $\boldsymbol{\omega} \mapsto \partial_{\boldsymbol{\eta}} J_c^{\delta x}(\boldsymbol{\eta},\lambda)(\boldsymbol{\omega})$ 的伴随。

根据上述记号，从给定的 $\boldsymbol{\eta}_n \in \mathbb{R}^N$ 出发的梯度迭代为

$$(34)\qquad \boldsymbol{\eta}_{n+1} = \boldsymbol{\eta}_n - h\nabla F_\lambda^{\delta x}(\boldsymbol{\eta}_n),$$

对于某个 $h > 0$。在此步骤之后，计算数值 $F_\lambda^{\delta x}(\boldsymbol{\eta}_{n+1})$ 并将其与 $F_\lambda^{\delta x}(\boldsymbol{\eta}_n)$进行比较。如果它更大，则将步长 h 除以 2，并使用新的h 和相同的 n再次执行步骤 (34)。否则，将 n 在 $n+1$ 中进行更改，并再次执行 (34)。如果以下三个标准中至少有一个得到满足，则方法停止：

(i) 对于某个给定的 $\varepsilon > 0$， $F_\lambda^{\delta x}(\boldsymbol{\eta}_n)$ 小于 ε^2 。在这种情况下，我们认为该方法已经收敛。(ii) h 低于某个给定的 $h_{\min} > 0$。在这种情况下，我们认为该方法没有收敛。
(iii) n 已经大于某个给定的整数 $n_{\max}$。在这种情况下，我们认为该方法没有收敛。

当然，如果方法(34)收敛，则其极限是函数$F_\lambda^{\delta x}$的一个临界点。该点未必是函数 $F_\lambda^{\delta x}$的零点。这正是上文第(i)点中检验 $F_\lambda^{\delta x}$大小的原因。此外，该方法的收敛性在$\mathbb{R}^N$中仅仅是局部的。为了避免收敛到 $F_\lambda^{\delta x}$的平凡临界点（即 $\boldsymbol{\eta} \equiv 0$），我们用(18)中定义的连续孤子 η_c 在网格 x_1, $\cdots$， x_N上的投影来初始化方法(34)。当然，该孤子 η_c对于固定的 $\mathcal{W}_\lambda$ 一般并不是孤子（尤其是当 $\lambda \neq 0$时），但它与平凡孤子相距足够远，因而在下一节给出的数值算例中能够收敛到非平凡孤子。

除了使用显式梯度法(34)来最小化(31) 外，还可以选择其他几种方案，例如隐式梯度法或高斯–牛顿法。在本文中，我们关注 (34)，因为它是显式的（与前述其他方法不同，它不要求在每一步求解线性方程组或非线性方程组），并且事实证明，在这一背景下它具有足够的稳定性。确实，人们会预期需要对 $h/\delta x^3$ 施加CFL 型条件，以确保 (34) 的稳定性。然而，对于第5节数值实验中使用的 δx 值，该条件似乎没有由连续两次迭代之间 $F_\lambda^{\delta x}$ 值之差的符号条件（即 $F_\lambda^{\delta x}(\boldsymbol{\eta}_{n+1}) - F_\lambda^{\delta x}(\boldsymbol{\eta}_n) < 0$）所隐含的关于 h 的条件那么严格。

5. Numerical results

在本节中，我们考虑第2节所述的六种势，并针对若干个 λ 值，数值计算式 (31) 中定义的函数 $F_\lambda^{\delta x}$ 的非平凡极小化子 $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^N$ 。

以及 $c \in (0, \sqrt{2})$，使用第4节.2中所述的算法。在下文中，内点的数量 N 为奇数，因此 $M = (N+1)/2$ 是对应于向量 $\boldsymbol{\eta}$ 中间位置的索引k 的一个整数（按照第4节.1中的记号，它满足 $x_M = 0$ ）。利用（15），通过设定，我们从 $\boldsymbol{\eta}$ 中恢复出方程（TW$_c$）的解 u 的一个近似解 $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{\theta}_k = \begin{cases} -\dfrac{c}{2}\delta x \displaystyle\sum_{p=k}^{M-1} \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{\eta}_p}{1-\boldsymbol{\eta}_p} + \frac{\boldsymbol{\eta}_{p+1}}{1-\boldsymbol{\eta}_{p+1}}\right) & \text{if } k \leqslant M-1, \\ 0 & \text{if } k = M, \\ \dfrac{c}{2}\delta x \displaystyle\sum_{p=M+1}^{k} \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{\eta}_{p-1}}{1-\boldsymbol{\eta}_{p-1}} + \frac{\boldsymbol{\eta}_p}{1-\boldsymbol{\eta}_p}\right) & \text{if } k \geqslant M+1, \end{cases}$$

and

$$\boldsymbol{u}_k = \sqrt{1-\boldsymbol{\eta}_k}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{\theta}_k},$$

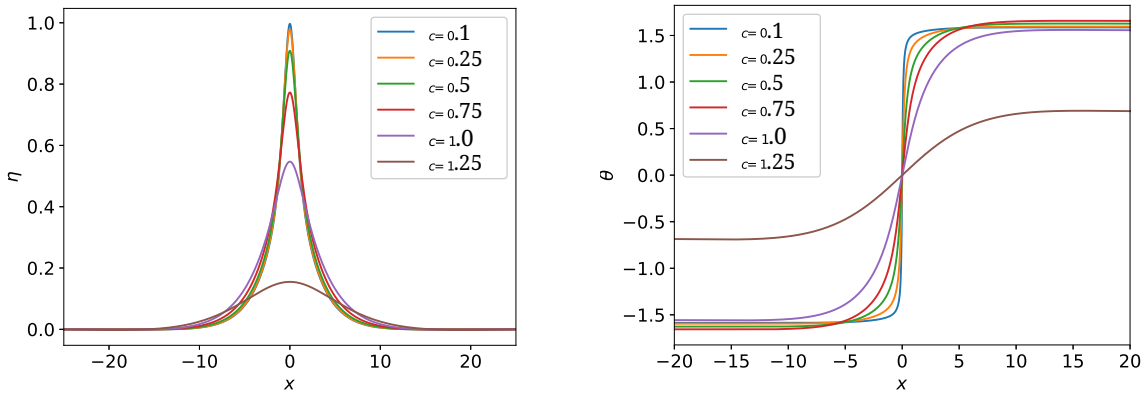
对 $k \in \{1、\cdots、N\}$。

回顾一下，我们使用 η_c 初始化方法，它对应于 $\mathcal{W} = \delta_0$ 时 (TW$_c$)的解（见(18)）。困难之一是，对于接近$\sqrt{2}$ 的 c 值，孤子 η 的数值支集大小趋于无穷大。

5.1. 带势的孤子(E1)。我们考虑在 (E1) 中定义的势 $\mathcal{W}_\lambda$ ，其中$\beta = 1.0$ 且 $\lambda = 0.4$，因此 $\beta/(\beta - 2\lambda) = 5.0$。特别地，根据 (20)，我们有$c_L(\lambda) = \sqrt{2}$、 $\widehat{\mathcal{W}}''(0) > -1$，并且 ω 的形状与图2左图中的相同。数值实验采用 $L = 50$、 $N = 999$，因此$\delta x = 0.05$，且 $\varepsilon^2 = \delta x/4$。参数 $h_{\min}$ 足够小，参数 $n_{\max}$ 足够大，因此在这些数值实验中，方法始终收敛。图9所示的结果让我们得以观察数值极小化子 $\boldsymbol{\eta}$ 关于 x的形状，以及若干个 c取值下的相位 $\boldsymbol{\theta}$。这些结果证实，极小化子 $\boldsymbol{\eta}$ 的支撑随速度 c 增大而趋于扩展。此外， $\boldsymbol{\eta}$ 的最大值（对应于 $\boldsymbol{u}$的最小值）随 c 增大而趋于减小。这与此非局部情形（$\lambda = 0.4$）下狄拉克势 $\lambda = 0$ 的情况相似。图10所示的结果展示了数值极小化子的动量 $P^{\delta x}$ 和能量 $E^{\delta x}$ （见 (29) 和 (30)）随速度 c的变化，以及 $E^{\delta x}$ 随$P^{\delta x}$的变化。

关于第 3 节中阐述的稳定性判据和猜想，我们从数值上看到一切都得到了满足：映射 $c \mapsto P^{\delta x}$ 严格递减，曲线 $P^{\delta x} \mapsto E^{\delta x}$ 位于直线 $\sqrt{2}P^{\delta x}$ 的下方并与之相切，并且在 $(0, \pi/2)$ 上严格凹。因此，这些事实从数值上证实了 $c \in (0, \sqrt{2})$ 的孤子的稳定性。

接下来，我们考虑带有 $\beta = 0.15$ 和 $\lambda = 0.05$ 的相同势（E1），使得 $\beta/(\beta - 2\lambda)$ =3.0 和$c_L = \sqrt{2}$。数值实验采用 $L = 400$ 和 $N = 6399$ 进行，因此 $\delta x = 6.25\mathrm{e}-2$ 和 $\varepsilon^2 = 0.01$。参数 $h_{\min}$ 非常小，而参数$n_{\max}$ 非常大，因此在这些数值实验中，方法始终能够收敛。数值结果显示于图 11 中。注意，尽管在此情况下$c_L = \sqrt{2}$ ，数值方法从速度为 $c = 1.25$的孤子出发时仍收敛到 0，该结果不 显示在数值结果中。对于其他速度，数值方法收敛到了非零孤子，这些孤子显示于图11 中。能量 $P^{\delta x}$ 作为动量 $P^{\delta x}$ 的函数显示在图12的左图中。色散曲线描绘于图2的左图中，其中不存在旋子极小值，并且计算出的



势 (E1)下数值计算得到的孤子，其中 $\beta = 1.0$和 $\lambda = 0.4$ ，显示 $\boldsymbol{\eta}_k$ （左图）和 $\boldsymbol{\theta}_k$ （右图）随 x_k 的变化。数值参数见正文。

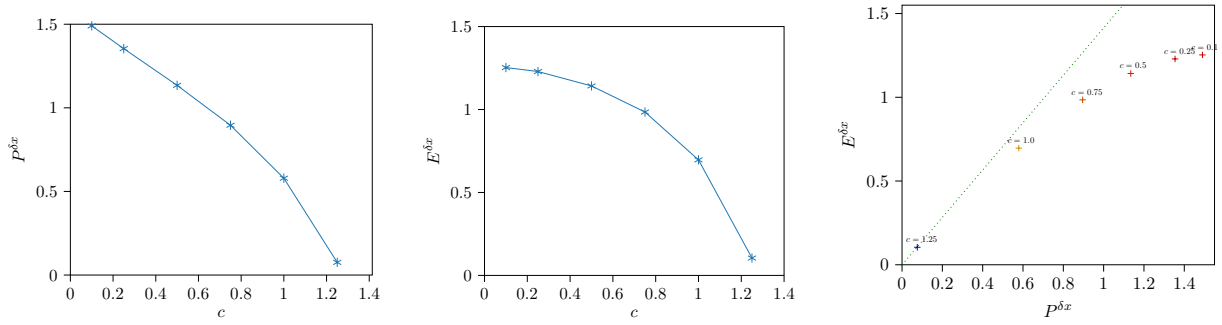


FIGURE 10. 对于势（E1）以及 $\beta = 1.0$ 和 $\lambda = 0.4$数值计算得到的孤子的能量和动量。前两个面板显示 $P^{\delta x}$ 和$E^{\delta x}$ 关于 c的函数关系，而最后一个面板描述 $E^{\delta x}$ 关于 $P^{\delta x}$的函数关系。在最后一个面板中，虚线对应于 $P^{\delta x} \mapsto P^{\delta x}\sqrt{2}$。

孤子在 $\mathbb{R}^+$上严格递减，动量 $P^{\delta x}$ 和能量$E^{\delta x}$的曲线也是如此。

我们考察带有 $\beta = 0.5$ 和 $\lambda = -1.0$ 的势 (E1)，使得 $\beta/(\beta - 2\lambda) = 0.2$,，其色散曲线绘于图2的右图中。注意到 ω_λ 具有一个旋子极小值，并且 $c_L(\lambda) \sim 1.19$。数值实验采用 $L = 60$和 $N = 2399$进行，因此 $\delta x = 2.5\mathsf{e} - 2$ 和 $\varepsilon^2 = 6.25\mathsf{e} - 3$。参数 $h_{\min}$ 非常小，而参数 $n_{\max}$ 非常大，因此该方法在这些数值实验中始终收敛。数值结果显示于图13中。注意，尽管朗道速度为 c_L#1.19，数值方法仍在 $c = 1.25$ 时收敛到了一个非零孤子，该结果显示在数值结果中。观察到，与势(E1)的前两个实验不同，极小化子 $\boldsymbol{\eta}$ 在$\mathbb{R}^+$上并非严格递减，除 $c = 1.25$ 外还取负值，这意味着 $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{1 - \boldsymbol{\eta}}$ 的取值高于 1.0。这使人想到，色散曲线存在旋子极小值

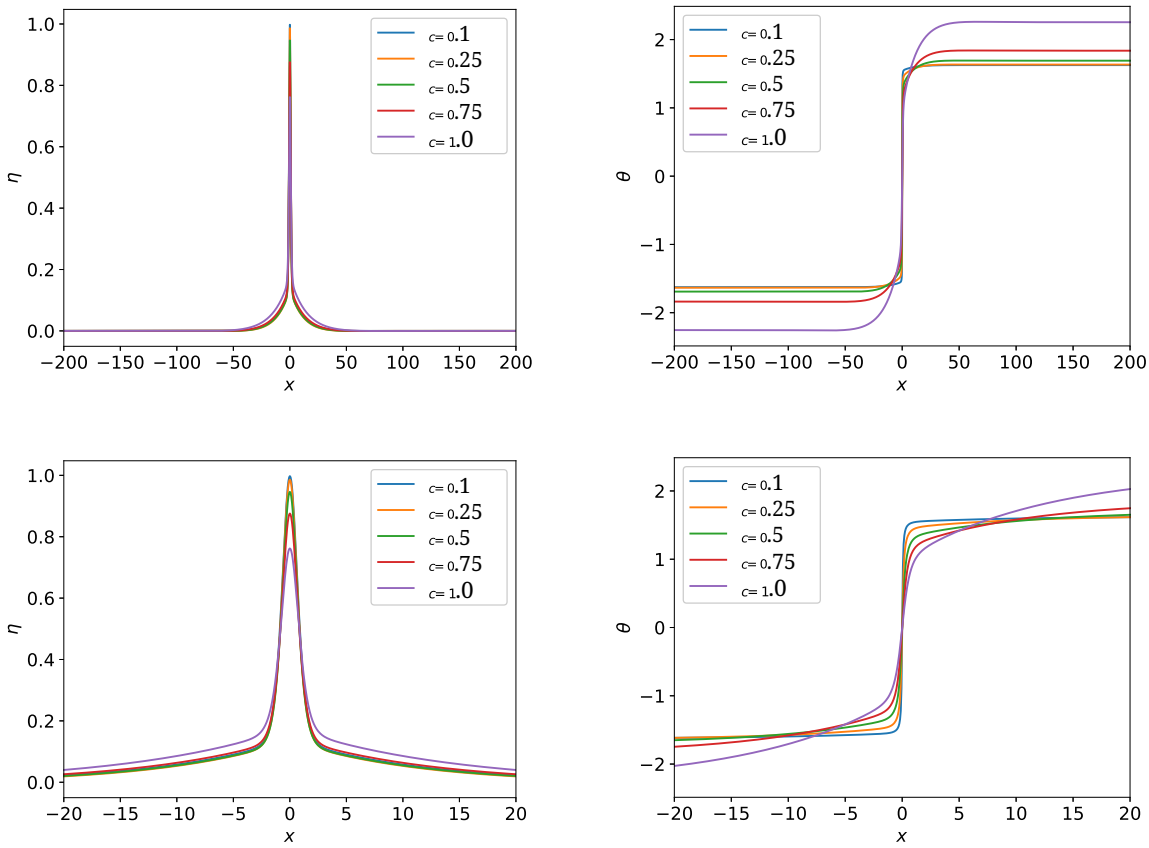


FIGURE 11. 势 (E1)下数值计算得到的孤子，其中 $\beta = 0.15$和 $\lambda = 0.05$，显示了 $\boldsymbol{\eta}_k$（左图）和 $\boldsymbol{\theta}_k$（右图）随 x_k的变化。第一行：从 $-L/2$到 $L/2$。第二行：从 -20到 $+20$。

与孤子的振荡有关。值得注意的是，唯一没有振荡的极小化子对应于 $c = 1.25$，其高于朗道速度。

能量 $E^{\delta x}$ 作为动量 $P^{\delta x}$ 的函数，显示在图 12 的右图中，对应于 $(\beta, \lambda) = (0.15, 0.05)$ 和 $(\beta, \lambda) = (0.5, -1.0)$。我们看到，旋子极小值的存在并不会改变曲线 $(E^{\delta x}, P^{\delta x})$的形态；该曲线似乎是严格凹的，因此计算得到的孤子应当是稳定的。

我们通过研究参数 λ 对相同势 (E1) 下 $|\boldsymbol{u}|$的最小值，以及孤子的 L^2 和 H^1-范数的影响来结束本小节。为此，我们固定 $\beta = 0.5$ 和 $c = 0.1$，并令 λ 在区间 $[-10, 0.2]$内变化。在数值计算中，我们取 $L = 60$ 和 $N = 1201$，从而 δx#4.99e−2 以及 ε^2#1.25e−2。数值孤子 $\boldsymbol{\eta}$ 及其相位 $\boldsymbol{\theta}$ 显示于图 14 中。孤子宽度的最小值，以及孤子的 L^2 和 H^1 范数作为 λ 的函数的变化显示于图 15 中。我们回顾一下，ω 中出现旋子极小值的临界值为 $\lambda^* = -\beta^3/(2(2-\beta^2)),$，即当 $\beta = 0.5$ 时 λ*# -0.0357。从图 14 可以看出，当 $\lambda \leqslant \lambda^*$ 时，孤子表现出一个负向隆起；而当 $\lambda > \lambda^*$ 时，它们严格递减，

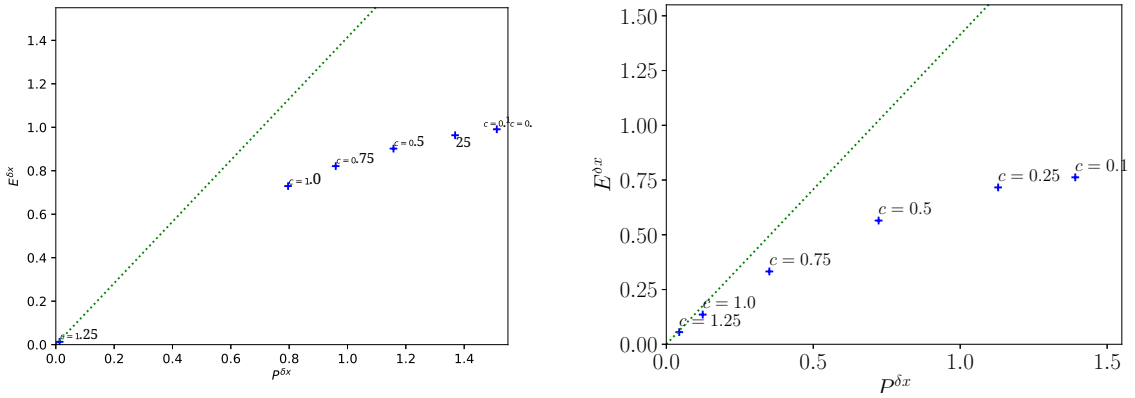


FIGURE 12. $E^{\delta x}$ 作为 $P^{\delta x}$ 的函数，在几种速度下。左： $\beta = 0.15$ 和$\lambda = 0.05$。右： $\beta = 0.5$和 $\lambda = -1.0$。在两个面板中，虚线对应于 $P^{\delta x} \mapsto P^{\delta x}\sqrt{2}$。

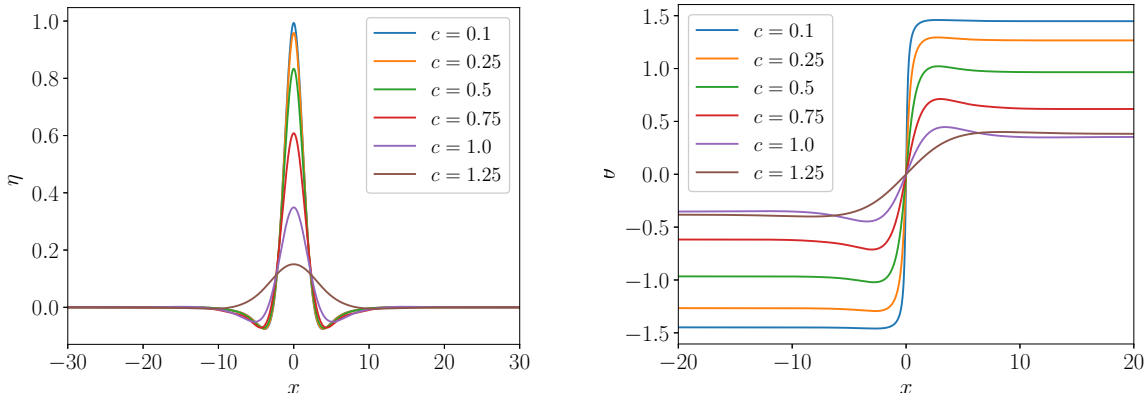
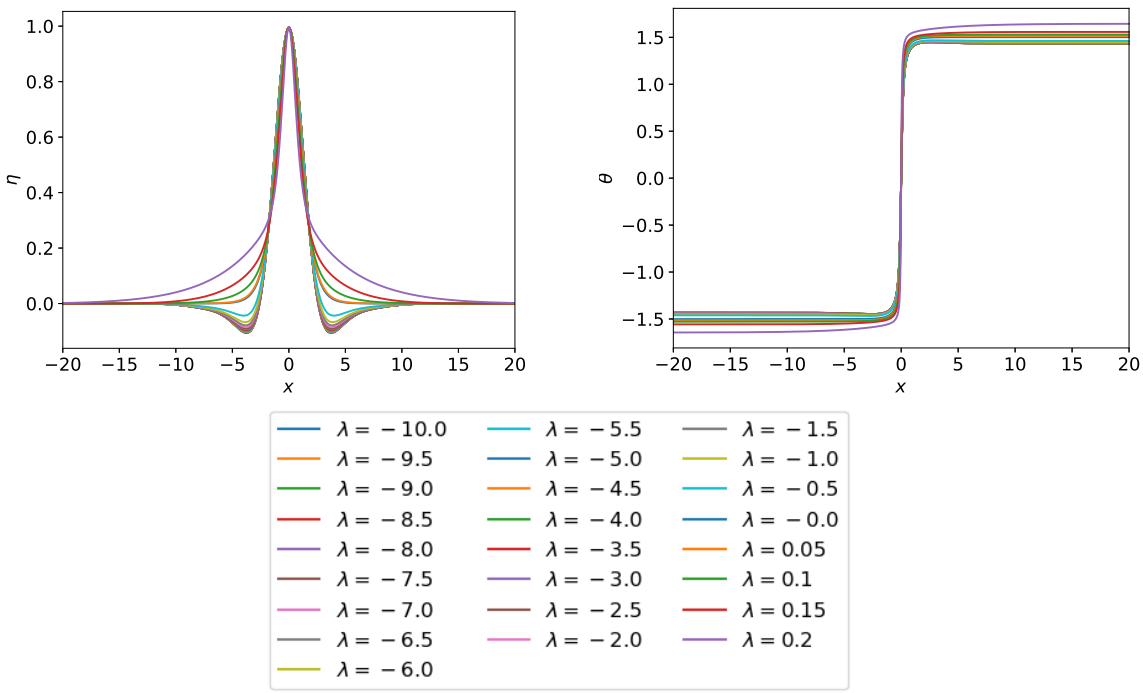


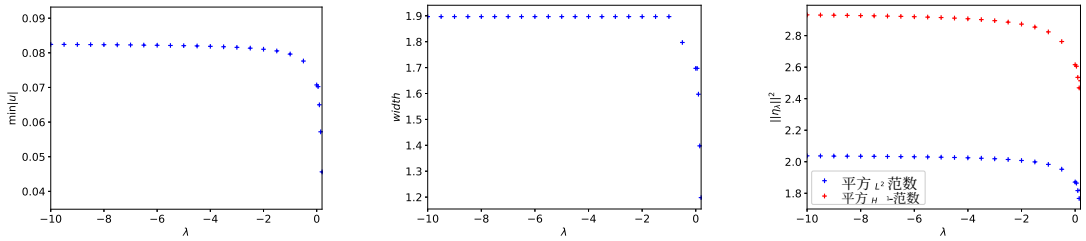
FIGURE 13. 势 (E1)在 $\beta = 0.5$和 $\lambda = -1.0$条件下数值计算得到的孤子，显示了 $\boldsymbol{\eta}_k$ （左图）和 $\boldsymbol{\theta}_k$ （右图）随 x_k 的变化。

这支持了旋子极小值与振荡之间的联系。此外，我们注意到，无论是否存在旋子极小值， $|\boldsymbol{u}|$ 的最小值、 $\boldsymbol{\eta}$ 的宽度以及孤子的 L^2 和 H^1- 范数均呈现单调变化。

5.2.具有势的孤子 (E2)。我们现在考虑示例2中(E2)定义的高斯势 $\mathcal{W}_\lambda$ 。我们首先取 $\lambda = 1.0$ ，并使用第4.2小节中描述的算法，对函数 $F_\lambda^{\delta x}$（定义见(31)） $\lambda = 1.0$ 以及 c 的若干值数值计算非平凡极小化子。数值实验在 $L = 50$、 $N = 999$下进行，因此 $\delta x = 0.05$，且 $\varepsilon^2 = \delta x/4$。在这种情况下， $\delta\xi = 2\pi/L$#0。13。结果显示于图16和图17中。如示例2中所述，我们预期对于每个 $c \in (0,\ c_L(1))$都有解，其中 $c_L(1) =$ #1。30，这与图16和图17一致。此外，旋子极小值的存在（见图3中间面板）应意味着在



势(E1) 下，当 $\beta = 0.5$和 $c = 0.1$ 取 λ的若干值时数值计算得到的孤子。上图： $\boldsymbol{\eta}_k$ （左）和 $\boldsymbol{\theta}_k$ （右）关于 x_k 的函数。下图为上图图例。



$\boldsymbol{u}$ 的最小值（左图）、孤子宽度（中图）以及 L^2 和 H^1 范数（右图）作为 λ 的函数，其中势为（E1），且$\beta = 0.5$ 和 $c = 0.1$。数值参数已在正文中标明。

$\mathbb{R}^+$，这一点确实可以从这些图中看出。注意，对于 $c = 1.25$， $\boldsymbol{\eta}_k$ 在 $\mathbb{R}^+$上没有显示出振荡，但其相位 $\boldsymbol{\theta}_k$中存在一个凸起，因此 $\boldsymbol{u}_k$发生了振荡。

接下来，我们将 λ 调得更大，以使势的作用范围更长。我们取 $\lambda = 3$，并像之前一样，对若干个 c 值进行另一系列数值极小化子的计算。如例 2 所示，存在一个旋子极小值，且朗道速度为 $c_L(3)$#0.66。为考虑极小化子的支撑范围更大这一情况，我们取 $L = 100$ 和 $N = 1999$，使得 $\delta x = 0.05$ 和 $\varepsilon^2 = 1.25\mathrm{e} - 2$。结果见图 18。

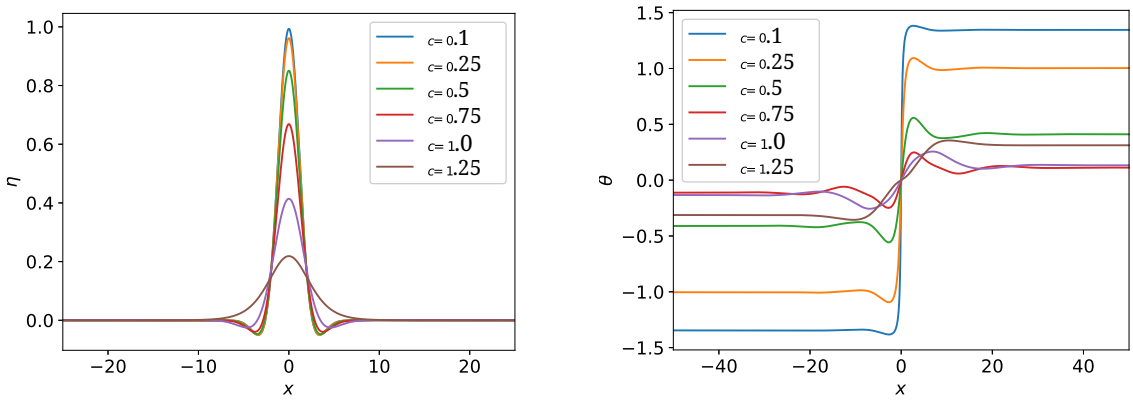


FIGURE 16. 对于势(E2) 在 $\lambda = 1.0$下数值计算得到的孤子，展示了 $\boldsymbol{\eta}_k$ （左图）和 $\boldsymbol{\theta}_k$ （右图）随 x_k 的变化。

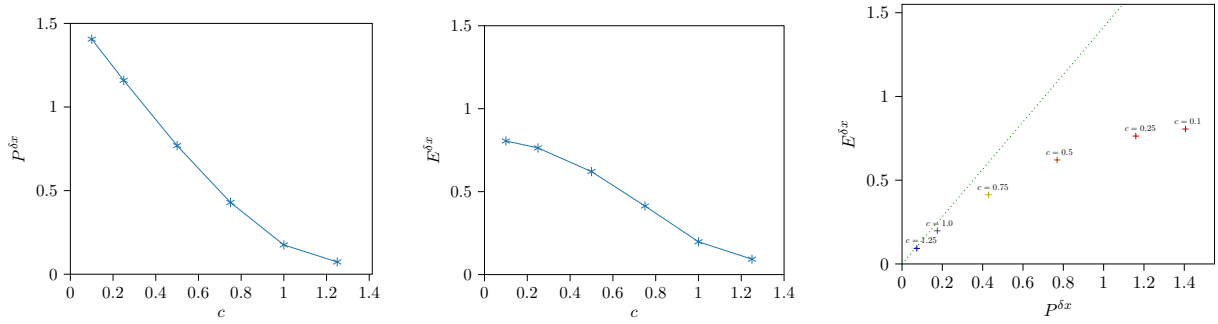


FIGURE 17. 对于势 (E2) 和 $\lambda = 1.0$数值计算得到的孤子。左图： $P^{\delta x}$ 作为 c 的函数。中图： $E^{\delta x}$ 作为 c 的函数。右图： $E^{\delta x}$ 作为 $P^{\delta x}$ 的函数。

和19。因此，我们获得了速度高于朗道速度的孤子；根据图19中曲线的形态，这些孤子似乎是稳定的。这是一个出乎意料的结果，表明在此情况下关于朗道速度作用的物理猜想并不成立。然而， c_L 和 $\sqrt{2}$ 之间存在更大的间隔（相较于 $\lambda = 1$而言），可能表明图18中的孤子具有更强的振荡行为。

5.3. 带势的孤子 (E3)。我们现在研究例3中(E3)定义的矩形势 $\mathcal{W}_\lambda$ 。我们首先按照第4.2小节中的描述，对 $\lambda = 2.0$ 以及 c 的若干取值，数值计算(31)中的函数$F_\lambda^{\delta x}$的非平凡极小化子。数值实验在 $L = 50$、 $N = 999$下进行，因此 $\delta x = 0.05$，且 $\varepsilon^2 = \delta x/4$。在这种情况下，$\delta\xi = 2\pi/L \sim 0.13$。结果显示于图20和图21中。如图4所示，存在一个旋子极小值，并且朗道速度 c_L#1。374与声速非常接近。这与 η_k上的小凸起一致，但速度为 $c = 1.25$的孤子除外，其轮廓 $\boldsymbol{\eta}_k$ 和相位 $\boldsymbol{\eta}_k$ 在 $\mathbb{R}^+$上似乎是严格单调的。与之前所有例子一样， $c \mapsto P^\delta$ 的单调性表明这些是稳定的孤子。

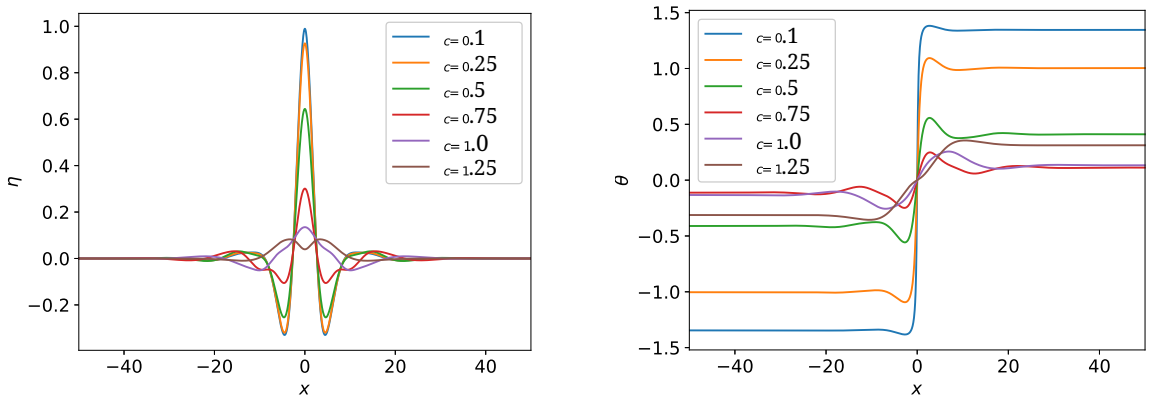


FIGURE 18. 针对势 (E2) 在 $\lambda = 3.0$ 下数值计算得到的孤子，显示 $\boldsymbol{\eta}_k$ （左图）和 $\boldsymbol{\theta}_k$ （右图）作为 x_k 的函数。

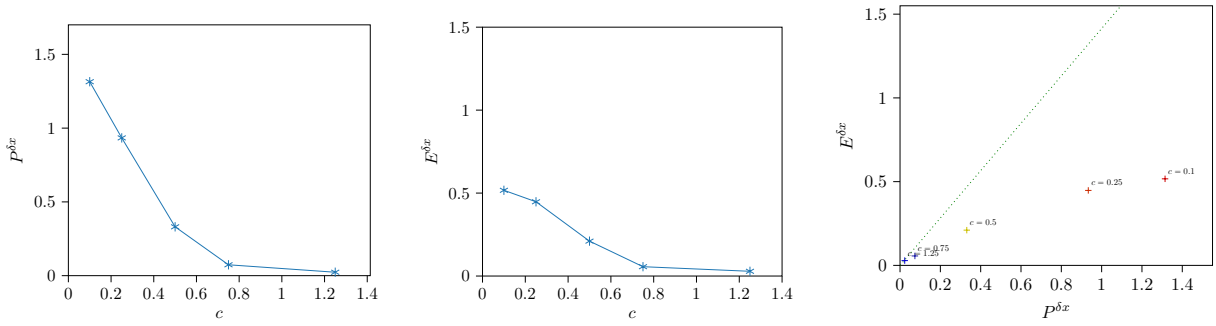


FIGURE 19. 势(E2) 下、 $\lambda = 3.0$条件下数值计算得到的孤子，显示了 $P^{\delta x}$ （左）和 $E^{\delta x}$ （中）随 c 的变化。右侧显示 $E^{\delta x}$ 随 $P^{\delta x}$ 的变化。

我们针对 $\lambda = 4.5$进行了另一次实验，取 $L = 80$、 $N = 1599$ ，容差为$\varepsilon^1 = \delta x/4 = 1.25\mathrm{e}-2$。结果显示于图22和图23中。

在此情况下， c_L#。624，色散曲线如图4所示。我们发现，孤子的行为发生了变化，这与第5.2小节中检测到的变化相似，即孤子表现出更加振荡的行为。关于稳定性，对于 $c \leqslant 075$，曲线 $P^{\delta x}$ 严格递减，但尚不清楚曲线对于 $c > 0.75$的确切行为。

5.4. 含势的孤子 (E4)。在本小节中，我们考虑例4中(E4)里的势 $\mathcal{W}_\lambda$ ，它由三个狄拉克δ函数给出，因此对于任意 $\lambda \geqslant 0$，朗道速度为$c_L(\lambda) = \sqrt{2}$，且不存在旋子极小值。我们将研究 $\lambda = 2$和 $\lambda = 10$的数值孤子，其色散曲线如图5所示。

我们首先使用第4.2小节中描述的算法，对 $F_\lambda^{\delta x}$在(31)中的非平凡极小化子进行数值计算。数值实验在 L =50, $N = 999$下进行，因此 $\delta x = 0.05$，并且 $\varepsilon^2 = \delta x/4$。在此情况下，$\delta\xi = 2\pi/L \sim 0.13$。结果显示于图24和图25中。正如预期，左侧色散曲线的形状

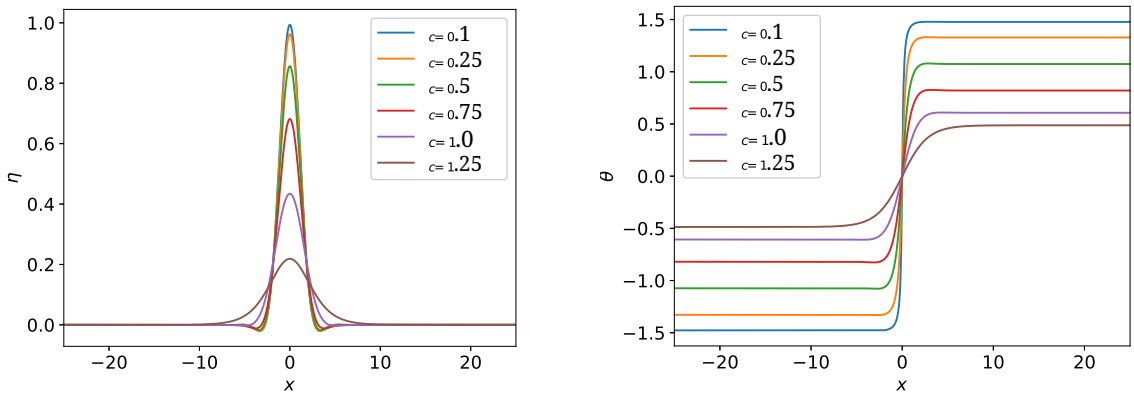


FIGURE 20. 对于势(E3) 且 $\lambda = 2.0$时数值计算得到的孤子，显示 $\boldsymbol{\eta}_k$ （左图）和 $\boldsymbol{\theta}_k$ （右图）随 x_k 的变化。

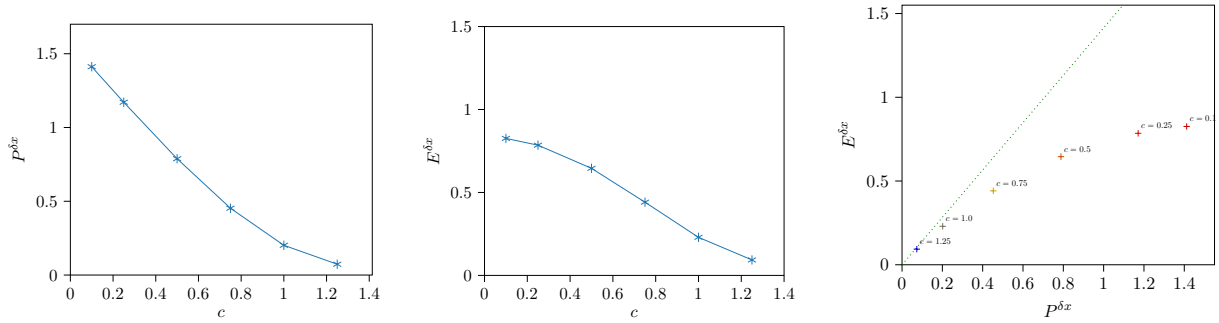


FIGURE 21. 数值计算得到的势 (E3) 孤子（ $\lambda = 2.0$），显示 $P^{\delta x}$ （左）和 $E^{\delta x}$ （中）随 c 的变化。右侧为 $E^{\delta x}$ 随 $P^{\delta x}$ 的变化。

图5的面板与图24中数值孤子的单调性一致，根据图25中的结果，这些数值孤子应当是稳定的。

我们对 $\lambda = 10.0$ 、 $L = 300$和 $N = 5999$进行了另一项实验，使得 $\delta x = 0.05$ 和 $\varepsilon^2/\delta x/4$。在这种情况下， $\delta\xi = 2\pi/L \sim 0.021$。数值结果显示于图26和图27中。尽管不存在旋子极小值且朗道速度与声速重合，但我们观察到解呈现振荡行为。鉴于图5中的色散曲线，我们猜想这种振荡与色散曲线拐点的存在有关。再次说明，鉴于图27中的曲线，这些孤子应当是稳定的。

另一个要点是，尽管 $\boldsymbol{\eta}$ 在图26中存在振荡，但对于所有速度，最小值均为负几个 10^{-3} 的量级。这可能表明，相应的连续孤子 η 确实是非负的，因此相应函数 u 的模长有界于1。

5.5. **带势的孤子 (E5)**。 在本小节中，我们考虑在例5中所述、由 (E5) 定义的 Bochner-Riesz 势 $\mathcal{W}_\lambda$ ，其中 $\lambda = 2$ 和 $\lambda = 4$。

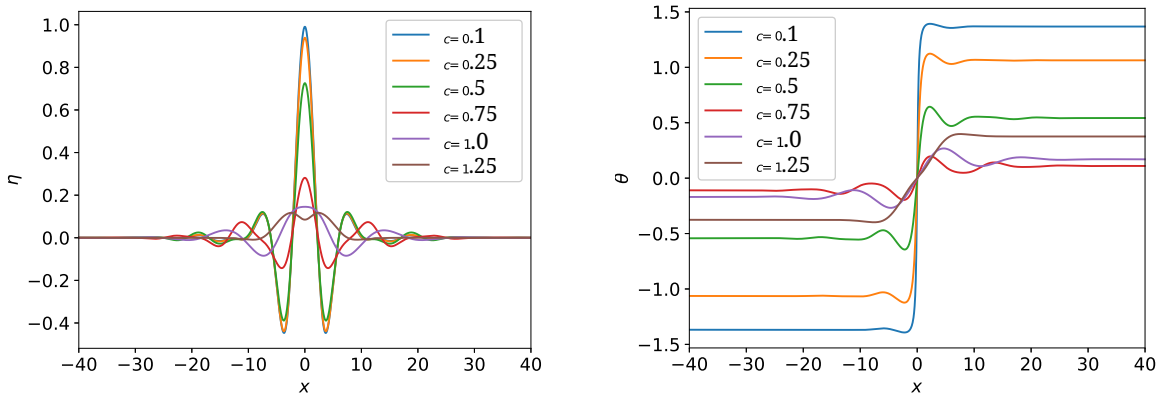


FIGURE 22. 势 (E3) 下数值计算得到的孤子，其中 $\lambda = 4.5$，展示了 $\boldsymbol{\eta}_k$ （左）和 $\boldsymbol{\theta}_k$ （右）随 x_k 的变化。

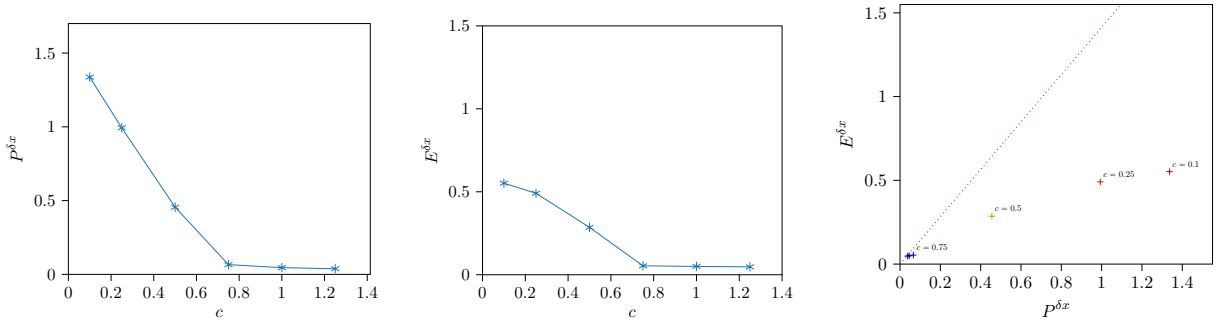


FIGURE 23. 势 (E3) 下数值计算得到的孤子，其中 $\lambda = 4.5$，展示了 $P^{\delta x}$ （左）和 $E^{\delta x}$ （中）随 c 的变化。右侧展示了 $E^{\delta x}$ 随 $P^{\delta x}$ 的变化。

我们首先计算函数 $F_\lambda^{\delta x}$在 $\lambda = 1.0$下的非平凡极小化子，和之前一样，取$L = 200$ 和 $N = 3999$，使得 $\delta x = 0.05$，并且 $\varepsilon^2 = \delta x/4$。在这种情况下， $\delta\xi = 2\pi/L \sim 0.13$。结果显示在图28和图29中。显然， $\lambda = 1$是色散曲线的一个临界情形，因为如图6所示，它在区间 $[0,\sqrt{2}]$内由一条直线给出。尽管 ω_λ 没有拐点，但 $\xi = \sqrt{2}$ 处的不可微性可能与图28中孤子的振荡有关。鉴于图29，这些孤子应当是稳定的。

我们用 $\lambda = 4.0$、 $L = 300$、 $N = 5999$ 进行了另一项实验，使得 $\delta x = 0.05$。结果展示于图 30 和图 31。尽管在这种情况下 c_L#0.7，我们再次获得了每个亚声速下的孤子；由于 $c \mapsto P^{\delta x}$ 在减小，这些孤子似乎是稳定的。孤子更为振荡的行为，可能可以用 $c_{\overline{L}}$ 与 $\sqrt{2}$ 之间的间隙来解释，与第 5.3 小节中的情况相同。

5.6. 具有势的孤子(E6)。我们考虑 (E6) 中定义的势 $\mathcal{W}$ 。使用 $L = 800$ 和 $N = 7999$ 计算极小化子，使得 $\delta x = 0.1$。结果见图 32 和图 33。如图 7 所示，存在一个旋子极小值，且 c_L#0。596。这并不妨碍我们计算任意亚声速下的孤子。由于 $P^{\delta x}$ 是一个

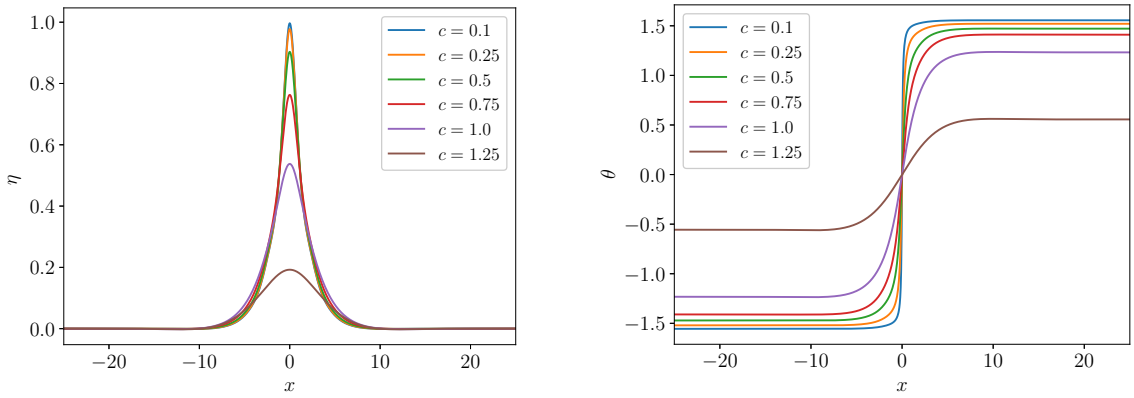
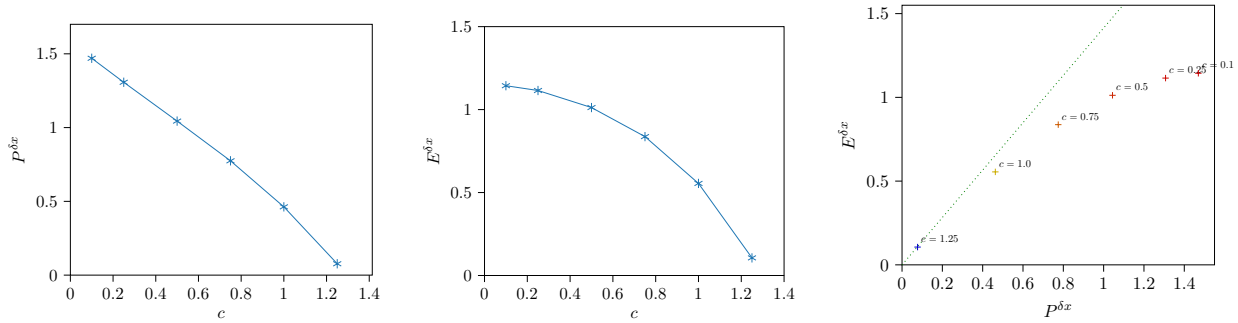


FIGURE 24. 数值计算得到的势 (E4) 对应的孤子，其中 $\lambda = 2.0$，展示了 $\boldsymbol{\eta}_k$（左图）和 $\boldsymbol{\theta}_k$（右图）随 x_k 的变化。



对于势(E4) 在 $\lambda = 2.0$时数值计算得到的孤子，显示了 $P^{\delta x}$（左）和 $E^{\delta x}$（中）随 c 的变化。右图显示了 $E^{\delta x}$ 随 $P^{\delta x}$ 的变化。

严格递减函数，这些孤子应当是稳定的。高度振荡的行为也可以用朗道速度与声速之间的差距来解释。

6. CONCLUSION

本文介绍了一种数值方法，用于计算具有预设速度的、带有非局域现实势的非局域 Gross–Pitaevskii 方程的暗孤子。利用问题的一个特设表述（见（13）–（14）以及离散类比式（28）），需要在一个猜测值的邻域内求解非线性非局域问题（$J_c^{\delta x}(\boldsymbol{\eta},\ \lambda) = 0_{\mathbb{R}^N}$对于固定的参数值 $\lambda \in \mathbb{R}$），该猜测值与 $\lambda = 0$具有相同速度的已知连续孤子相关联。通过最小化残差的梯度下降法对该问题进行数值求解，并可针对若干物理上现实的非局域相互作用势进行数值模拟。

这些数值模拟有助于深入了解孤子的行为，并使我们能够讨论非局域相互作用对暗孤子形状及其稳定性的影响。此外，它们表明声速和朗道速度，

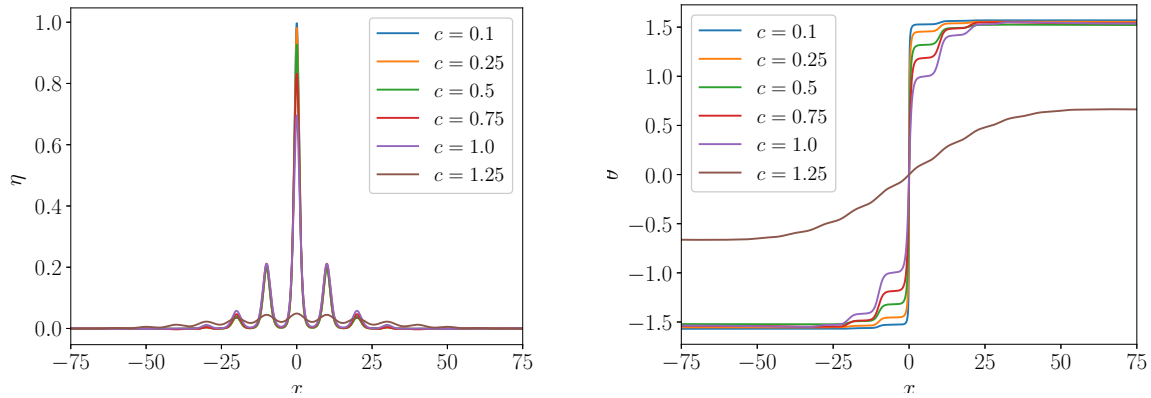


FIGURE 26. 数值计算得到的势 (E4) 对应的孤子，其中 $\lambda = 10.0$，展示了 $\boldsymbol{\eta}_k$（左图）和 $\boldsymbol{\theta}_k$（右图）随 x_k 的变化。

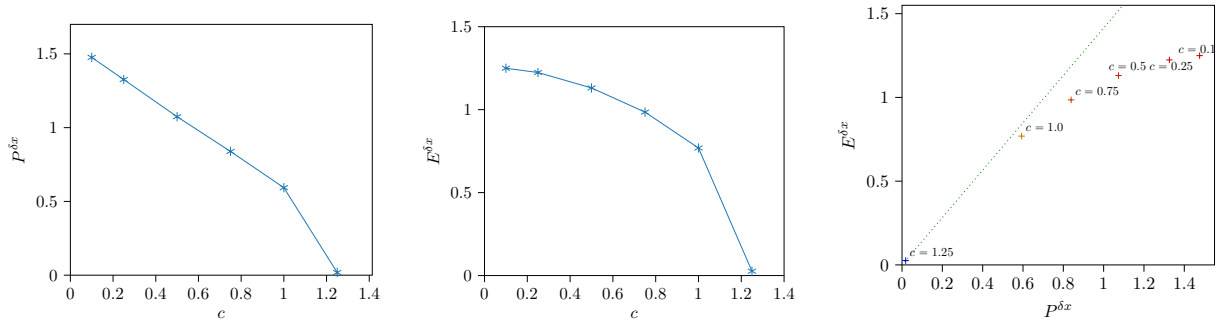


FIGURE 27. 势(E4)在 $\lambda = 10.0$条件下数值计算得到的孤子，显示了 $P^{\delta x}$（左）和 $E^{\delta x}$（右）随 c 的变化。右侧为 $E^{\delta x}$ 随 $P^{\delta x}$ 的变化。

由色散关系给出的数值，对于理解这些暗孤子的性质十分重要。

在未来的研究中，我们希望找到更精确的判据，以确定暗孤子的行为。例如，我们旨在获得关于相互作用势的条件，从而确保相应的暗孤子呈现单调行为或振荡行为。

致谢。作者感谢 Labex CEMPI（ANR-11-LABX- 0007-01）的资助。A. de Laire 还获得了法国国家研究署 ODA 项目（ANR-18-CE40-0020-01）的资助。S. L´opez-Mart´ınez 获得马德里自治区政府（马德里自治区——西班牙）在第五届区域研究与技术创新计划框架下与马德里自治大学签订的多年期协议中“大学研究人员卓越计划”专项的资助。

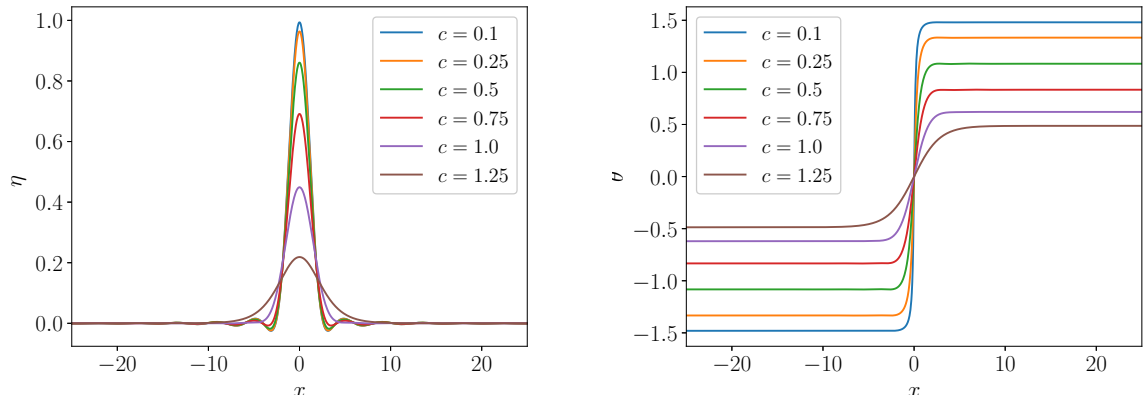


FIGURE 28. 势（E5）在 $\lambda = 1.0$ 下数值计算得到的孤子，展示了 $\boldsymbol{\eta}_k$（左）和 $\boldsymbol{\theta}_k$（右）随 x_k 的变化。

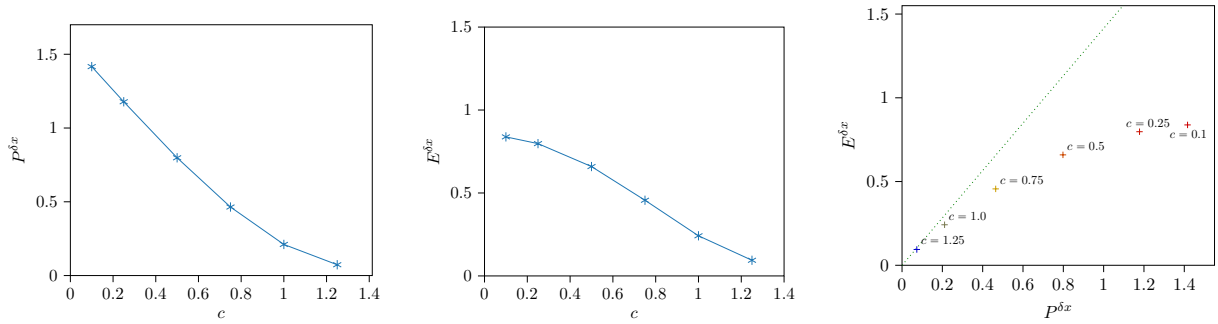


FIGURE 29. 势（E5）在 $\lambda = 1.0$ 下数值计算得到的孤子，展示了 $P^{\delta x}$（左）和 $E^{\delta x}$（中）随 c 的变化。右侧为 $E^{\delta x}$ 随 $P^{\delta x}$ 的变化。

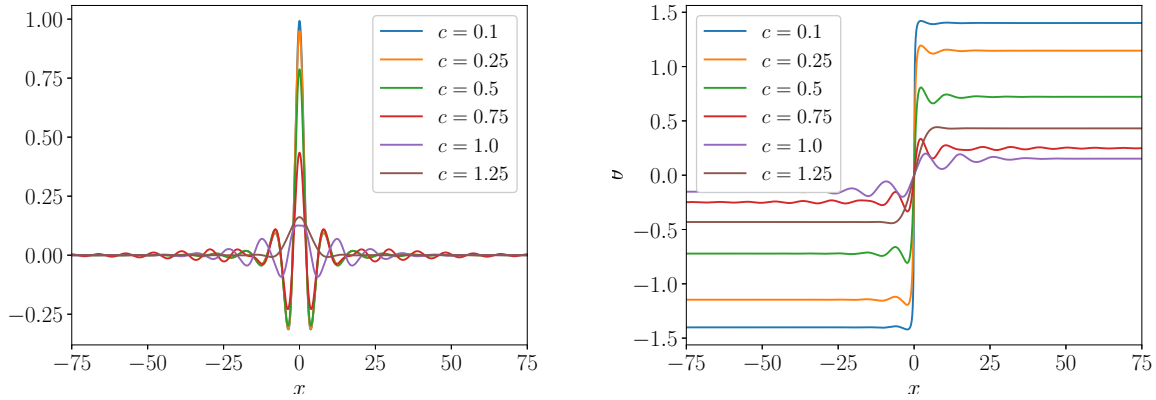


FIGURE 30. 势（E5）在 $\lambda = 4.0$ 下数值计算得到的孤子，展示了 $\boldsymbol{\eta}_k$（左）和 $\boldsymbol{\theta}_k$（右）随 x_k 的变化。

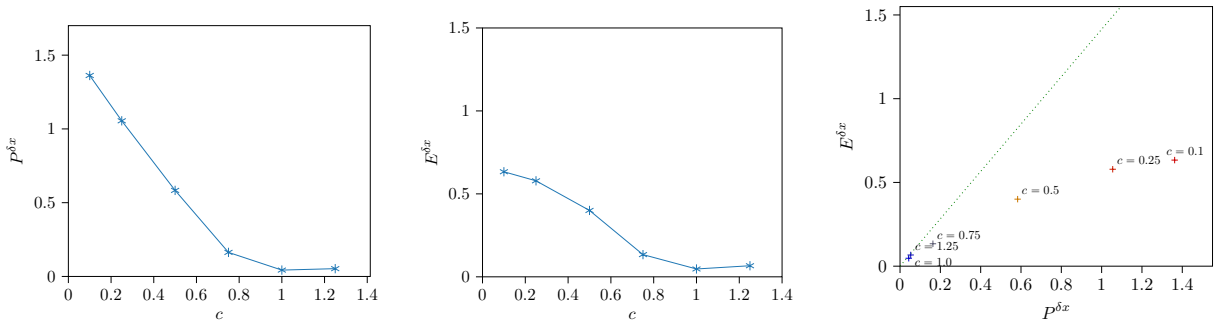


FIGURE 31. 对于势(E5) 在 $\lambda = 4.0$下数值计算得到的孤子，显示了 $P^{\delta x}$ （左）和 $E^{\delta x}$ （中）随 c 的变化。右图中， $E^{\delta x}$ 是 $P^{\delta x}$ 的函数。

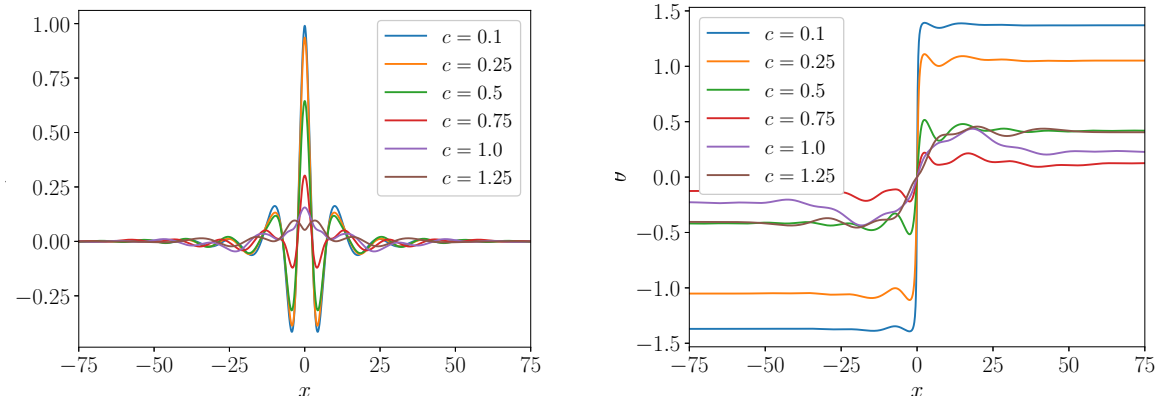


FIGURE 32. 针对势 (E6) 数值计算得到的孤子，显示 $\boldsymbol{\eta}_k$（左）和 $\boldsymbol{\theta}_k$ （右）作为 x_k 的函数。

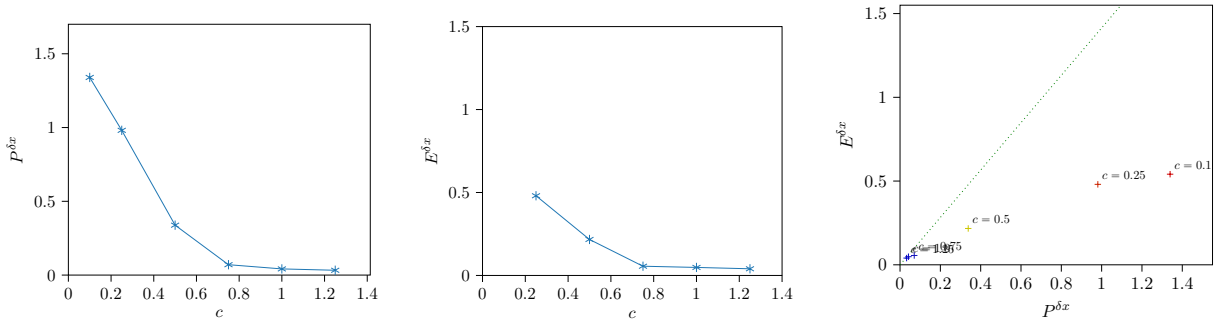


FIGURE 33. 对于势（E6）数值计算得到的孤子，显示 $P^{\delta x}$（左）和 $E^{\delta x}$（中）随 c的变化。右侧为 $E^{\delta x}$ 随$P^{\delta x}$的变化。

Appendix

定理 *2*的证明。令 $m = \inf_{\xi\in\mathbb{R}}(\widehat{\mathcal{W}}(\xi)^-)$，其中 $s^- = \min\{s,\ 0\}$，且令 $R = \sqrt{2(\sigma - m)}$。对于任意 $\tilde{\sigma} \in (0,\ \sigma)$，取 $k = (\tilde{\sigma} - m)/R^2 = (\tilde{\sigma} - m)/(2(\sigma - m))$。显然，$k \in (0,\ 1/2)$。

一方面，对几乎处处的 $|\xi| \geqslant R$，平凡地有

$$\widehat{\mathcal{W}}(\xi) \geqslant m = \tilde{\sigma} - kR^2 \geqslant \tilde{\sigma} - k\xi^2.$$

另一方面，注意到 $\sigma - \xi^2/2 \geqslant \tilde{\sigma} - k\xi^2$ 当且仅当 $|\xi| \leqslant R$。因此，对于几乎处处的 $|\xi| \leqslant R$，我们得到

$$\widehat{\mathcal{W}}(\xi) \geqslant \sigma - \frac{\xi^2}{2} \geqslant \tilde{\sigma} - k\xi^2.$$

现在我们可以在 [10] 中应用定理 1.1，并得到对于几乎处处的 $c \in (0, \sqrt{2\tilde{\sigma}})$的 (TW$_c$)的一个解。取 $\tilde{\sigma}$ 任意接近 σ，我们便得到对于几乎处处的 $c \in (0, \sqrt{2\sigma})$ 的一个解，从而证明完成。□

References

[1] A. Aftalion、X. Blanc 和 R. L. Jerrard。超固体建模中的数学问题。《Nonlinearity》，22(7):1589–1614，2009年。[2] C. F. Barenghi、R. J. Donnelly 和 W. Vinen。量子化涡旋动力学与超流体湍流，第 571 卷。Springer Science & Business Media，2001年。[3] C. Becker、S. Stellmer、P. Soltan-Panahi、S. D¨orscher、M. Baumert、E.-M. Richter、J. Kronj¨ager、K. Bongs 和 K. Sengstock。玻色–爱因斯坦凝聚体中暗孤子和暗-亮孤子的振荡与相互作用。《Nature Physics》，4(6):496–501，2008年。[4] N. G. Berloff 和 P. H. Roberts。玻色凝聚体中的运动 VI：非局域模型中的涡旋。《J. Phys. A》，32(30):5611–5625，1999年。[5] F. B´ethuel、P. Gravejat 和 J.-C. Saut。Gross-Pitaevskii 方程行波的存在性与性质。载于《定态与时变Gross-Pitaevskii 方程》，当代数学第 473 卷，第 55–103 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008年。[6] F. B´ethuel、P. Gravejat、J.-C. Saut 和 D. Smets。Gross-Pitaevskii 方程黑孤子的轨道稳定性。《印第安纳大学数学杂志》，57(6):2611–2642，2008年。[7] F. Bethuel、P. Gravejat 和 D. Smets。Gross-Pitaevskii 方程暗孤子在能量空间中的渐近稳定性。《高等师范学校科学年鉴》（第 4 辑），48(6):1327–1381，2015年。[8] D. Chiron。一维非线性薛定谔方程亚声速行波的稳定性与不稳定性。《分析与偏微分方程》，6(6):1327–1420，2013年。[9] A. de Laire。满足无穷远处非零条件的非局域 Gross-Pitaevskii 方程的整体适定性。《偏微分方程通讯》，35(11):2021–2058，2010年。[10] A. de Laire 和 S. L´opez-Mart´ınez。非局域 Gross-Pitaevskii 方程行波的存在性与衰减。《偏微分方程通讯》，47(9):1732–1794，2022年。[11] A. de Laire 和 P. Mennuni。满足无穷远处非零条件的若干非局域一维 Gross-Pitaevskii 方程的行波。《离散与连续动力系统》，40(1):635–682，2020年。[12] D. J. Frantzeskakis。原子玻色–爱因斯坦凝聚体中的暗孤子：从理论到实验。《物理学杂志 A：数学与理论》，43(21):213001，2010年。[13] M. Grillakis、J. Shatah 和 W. Strauss。存在对称性时孤立波的稳定性理论 I。《泛函分析杂志》，74(1):160–197，1987年。[14] Q. Kong、Q. Wang、O. Bang 和 W. Krolikowski。暗非局域孤子的解析理论。《光学快报》，35(13):2152–2154，2010年。[15] W. Kr´olikowski 和 O. Bang。非局域非线性介质中的孤子：精确解。《物理评论 E》，63(1):016610，2000年。[16] Z. Lin。行进孤子泡的稳定性与不稳定性。《微分方程进展》，7 918，2002 8 897( ): – 。[17] S. Lopez-Aguayo、A. S. Desyatnikov、Y. S. Kivshar、S. Skupin、W. Krolikowski 和 O. Bang。非局域光学介质中的稳定旋转偶极孤子。《光学快报》，31(8):1100–1102，2006年。

[18] N. I. Nikolov、D. Neshev、W. Kr´olikowski、O. Bang、J. J. Rasmussen 和 P. L. Christiansen。非局域暗光孤子的吸引作用。《光学快报》，29(3):286–288，2004年。[19] J. Reneuve、J. Salort 和 L. Chevillard。超流体非局域模型中的涡旋结构、动力学与重联。《物理评论：流体》，3(11):114602，2018年。[20] H. Veksler、S. Fishman 和 W. Ketterle。相互作用及 Gross-Pitaevskii 方程修正的简单模型。《物理评论 A》，90(2):023620，2014年。