arXiv:2304.02337v1 [math.NT] 5 Apr 2023

正特征下的霍普夫代数与交错多重ζ值

BO-HAE IM、HOJIN KIM、KHAC NHUAN LE、TUAN NGO DAC 和 LAN HUONG PHAM

Abstract. 在[32]我们系统地研究了正特征下多重zeta值的代数结构。这类多重zeta值由 Thakur 引入，是欧拉经典多重zeta值的类似物。本文在先前工作的基础上，构造了 Harada 引入的交错多重ζ值的代数结构和霍普夫代数结构。我们的结果可视为经典情形下 Hoffman [28]和 Racinet [42]结果的类似物。证明基于两个新的要素：第一，直接且明确地构造洗牌霍普夫代数结构；第二，引入水平映射的概念。

Contents

1. 引言 1
2. 霍普夫代数综述 6
3. 多重zeta值的洗牌霍普夫代数综述 9
4. 交错多重ζ值 11
5. 交错多重ζ值的洗牌代数 13
6. 交错多重ζ值的洗牌霍普夫代数 20
参考文献 35

1. Introduction

1.1. 经典情形。

设 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ 为正整数集。多重ζ值（简称 MZV）是由下式定义的无穷级数:

$$\zeta(n_1, \dots, n_r) = \sum_{0<k_1<\cdots<k_r} \frac{1}{k_1^{n_1} k_2^{n_2} \dots k_r^{n_r}},$$

对于 $n_i \in \mathbb{N}$ 满足 $n_r \geq 2$ 收敛条件。这里 r 和 $w: = n_1 + \cdots + n_r$ 分别称为表示式 $\zeta(n_1, .., n_r)$ 的深度和权。18 世纪，欧拉 [20] 研究了深度为 1 和 2 的多重ζ值。两个世纪后，Za- gier [54] 研究了一般的多重zeta值，由此开启了与多个领域相关的大量研究

Date: 2023年4月6日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 11M32；次要分类号 11M38、16S10、16T30、11R58。*Key words and phrases.* 多重zeta值、特征 p下的 zeta 函数与 L-函数、霍普夫代数、洗牌代数、水平映射、函数域算术。

数学和物理学领域，包括数论、K 理论、纽结理论和高能物理（例如参见 [9, 17, 18, 27, 35, 30, 38, 44]）。

存在更一般的对象，称为着色多重ζ值。设$N \in \mathbb{N}$ 为正整数且 Γ_N 为 N次单位根群，我们定义着色多重ζ值如下

$$\zeta\begin{pmatrix}\epsilon_1 & \dots & \epsilon_r\\ n_1 & \dots & n_r\end{pmatrix} = \sum_{0<k_1<\cdots<k_r} \frac{\epsilon_1^{k_1}\dots\epsilon_r^{k_r}}{k_1^{n_1}\dots k_r^{n_r}}$$

对于 $\epsilon_i \in \Gamma_N$和 $n_i \in \mathbb{N}$，其中$(n_r, \epsilon_r) \neq (1, 1)$以保证收敛。这些对象首先由Arakawa-Kaneko、Deligne、Goncharov和Racinet系统地研究（见 [5, 6, 15, 17, 22, 23, 42]）。此后，它们也被众多数学家和物理学家研究，包括 Broadhurst [7, 8], Hoffman [29], Kaneko- Tsumura [34], 和Zhao [55]，涉及数学和物理的各个领域。对于 $N = 1$我们恢复多重ζ值。对于 $N = 2$ 着色多重ζ值也称为交错多重ζ值（简称AMZV）或欧拉和。

着色多重ζ值理论的主要目标，是在适当的系数域上找出着色多重ζ值之间所有的线性关系和代数关系。这促成了若干重要猜想，由 Ihara-Kaneko-Zagier[30], Zagier [54] 和 Hoffman [27]提出。下文将解释 Ihara-Kaneko-Zagier 猜想；关于 Zagier 和 Hoffman 的猜想，更多详情请参阅优秀的著作 [11]。

对于 MZV（情形 $N = 1$），Ihara-Kaneko-Zagier [30] 引入了双重洗牌关系和正则化。粗略地说，他们使用了 Hoffman 的代数 $\mathfrak{h}$ （见 [28]）以及与 MZV 相关的子代数 $\mathfrak{h}^0 \subset \mathfrak{h}^1 \subset \mathfrak{h}$，并给出了两种不同的代数结构（$\mathfrak{h}^1$, $*$）和（$\mathfrak{h}$, $\sqcup\!\sqcup$）。这些结构可以扩展为霍普夫代数结构（例如参见 Hoffman 的工作 [28]）。通过正则化，可以在 MZV 层面上通过“比较”两种乘法得到双重洗牌关系。双重洗牌关系和正则化产生了 MZV 之间的线性关系，而 Ihara-Kaneko-Zagier 猜想这些关系足以揭示 MZV 之间的全部线性关系（见 [30, 猜想1]）。

对于着色多重ζ值，Racinet 在 [42] 中将 Ihara-Kanako-Zagier 和 Hoffman 先前的工作加以推广。不过需要提醒读者，正如同上文所述，对于一般的 N，双重洗牌关系和正则化并不能穷尽着色多重ζ值之间的所有线性关系。

1.2. 正特征情形。

1.2.1. 正特征下的多重ζ值和交错多重ζ值。

Carlitz [12] 和 Thakur [45, 49] 通过函数域类比（见 [33, 39, 52]）定义了正特征下的 zeta 值和多重zeta值。令 q 为素数 p 的幂，且 $\mathbb{F}_q$ 为阶为 q 的有限域。采用以下记号：

$A = \mathbb{F}_q[\theta]$ θ 上的多项式环，其中 θ 是变量，A_+ A中的首一多项式集合，$K = \mathbb{F}_q(\theta)$是 A 的分式域（其有理点为 ∞），$K_\infty = \mathbb{F}_q((1/\theta))$是 K 在 ∞处的完备化，v_∞ 是 K 上与赋值点 ∞相关联的离散赋值，

规范化为 $v_\infty(\theta) = -1$,
$|\cdot|_\infty = q^{-v_\infty(\cdot)}$ 是 K上相应的绝对值。

Carlitz [12] 定义了 Carlitz ζ 值 $\zeta_A(n)$ 对于 $n \in \mathbb{N}$ 为

$$\zeta_A(n) := \sum_{a \in A_+} \frac{1}{a^n} \in K_\infty.$$

请注意，这一定义是经典 ζ 值 $\zeta(n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^n}$ 的类比。在此基础上，Thakur [45] 定义了正特征下的多重 zeta 值，对于元组 $\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{N}^r$，其定义为

$$\zeta_A(\mathfrak{s}) = \sum \frac{1}{a_1^{s_1} \ldots a_r^{s_r}}.$$

这里的求和遍及所有次数递减的首一多项式元组，即 $(a_1, \ldots, a_r) \in A_+^r$ 满足 $\deg(a_1) > \cdots > \deg(a_r)$。可以看出，经典多重ζ值与正特征下的多重ζ值之间存在类比。我们将 $\zeta_A(\mathfrak{s})$ 的深度和权分别定义为 r 和 $w(\mathfrak{s}) := s_1 + \cdots + s_r$。请注意，Carlitz ζ 值是深度为一的多重ζ值。Thakur 证明了它们的一些性质，包括非消失性、和式洗牌关系 [48], 等。关于正特征下多重ζ值的更多参考资料，见 [3, 4, 21, 24, 36, 37, 41, 45, 47, 48, 49, 50, 53]。

在 [25] Harada 引入了正特征下交错多重ζ值的概念。设 $\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{N}^r$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \in (\mathbb{F}_q^*)^r$，我们定义

$$\zeta_A\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \mathfrak{s}\end{pmatrix} = \sum \frac{\varepsilon_1^{\deg a_1} \ldots \varepsilon_r^{\deg a_r}}{a_1^{s_1} \ldots a_r^{s_r}} \in K_\infty.$$

此处，求和遍历所有次数递减的首一多项式元组，与多重ζ值中的情形相同，即 $(a_1, \ldots, a_r) \in A_+^r$ 满足 $\deg(a_1) > \cdots > \deg(a_r)$。我们以类似方式定义 $\zeta_A\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \mathfrak{s}\end{pmatrix}$ 的深度和权，即 r 是深度，而 $w(\mathfrak{s}) = s_1 + \cdots + s_r$ 是权。

在前引文献中，Harada 还证明了 AMZV 的一些基本性质，这些性质也适用于 MZV，包括非消失性、求和洗牌关系、周期解释和线性无关性。

1.2.2. 正特征下 AMZV 的 Zagier-Hoffman猜想。

正特征下多重ζ值和交错多重ζ值理论的首要目标，是像经典情形那样理解它们所有的 K-线性关系。Todd [51] 和 Thakur [49]提出了正特征下关于多重ζ值的 Zagier-Hoffman猜想。这些猜想的代数部分由第四位作者 [40] 利用 Chen [14], 、Thakur [48, 49]和 Todd [51]的方法解决。第四位作者在 [40] 中通过运用 Anderson 的动机理论 [1, 10, 26], 以及 Anderson-Brownawell-Papanikolas判据 [2] 作为超越性的工具，解决了较小权值情形下的超越性部分。

在[31], 中，通过发现交错多重ζ值与交错 Carlitz 多重对数之间的深层联系，我们解决了正特征下 Zagier-Hoffman 猜想的多重ζ值版本和交错多重ζ值版本。我们指出，后者比前者难得多（详细讨论见 [31, §0.3]）。

更确切地说，我们证明了

$$\dim_K \mathcal{AZ}_w = s(w)$$

其中 $\mathcal{AZ}_w$ 是由正特征下权为 w 、底域为 K的交错多重ζ值张成的向量空间，而 $s(w)$ 是一个类似斐波那契数列的数列，定义如下：

$$s(w) = \begin{cases} 1 & \text{if } w = 0, \\ (q-1)q^{w-1} & \text{if } 1 \le w \le q-1, \\ (q-1)(q^{w-1}-1) & \text{if } w = q, \\ (q-1)\sum_{i=1}^{q-1} s(w-i) + s(w-q) & \text{if } w > q. \end{cases}$$

此外，我们给出了在 K 上 $\mathcal{AZ}_w$的一个显式基。与多重ζ值的情形不同，这个基由交错多重ζ值的线性组合构成，而非交错多重ζ值本身。这一关键之处已由 Charlton 在经典情形中指出[13] ，Deligne 也有相关观察 [15]。

1.2.3. 正特征下多重ζ值的代数结构。

在我们最近的论文 [32] 中，我们回应了此前一篇论文 [40] 的审稿人提出的问题。该论文由第四位作者撰写，研究正特征下多重ζ值的代数结构。结果发现[1] ，2016 年，Shuji Yamamoto [49] 构造了洗牌积的字代数，Shi [43] 则为其赋予了一个猜想性的霍普夫代数结构，但没有明确给出霍普夫代数的若干公理（见 [43, 猜想 3.2.2 和 3.2。11]）。随后，Thakur 写信给 Deligne，后者[16] 于 2017 年回信，提供了有益的意见。Deligne 在信中表示，他以前从未见过这样的构造，并就如何继续证明和研究它提出了建议。

猜想 1.1。正特征下的多重ζ值集合可以赋予混洗霍普夫代数结构。

在 [32] 中，我们证明了猜想1.1：

定理 1.2 ([32, 定理 B])。 猜想*1.1* 成立。

此外，基于先前引入的交错多重ζ值与交错 Carlitz 多重对数之间的联系 [31], ，我们得到了一个关于多重ζ值在缠结乘法下的霍普夫代数（见 [32, §9]）。

1.3. 主要结果与关键要素。

1.3.1. 主要结果。

本文系统研究了正特征下 AMZV 的代数结构，从而扩展了我们此前关于多重ζ值的工作。这可以视为经典情形中上述 Hoffman 和 Racinet 研究结果的类比。

我们要强调，从多重ζ值的情形扩展到 AMZV 的情形并非易事。对此并不意外，因为在 [31] 中，我们在将 Zagier-Hoffman猜想从多重zeta值扩展到 AMZV 时也遇到了类似的问题。

粗略地说，对于多重ζ值的情形，如果我们考虑记作 $\mathfrak{C}$ 的相应字代数（见 §3.2），那么对于每个固定的权，只有一个字母 n

[1]感谢 Thakur 协助处理事件顺序。

记作 x_n。因此，可以唯一且规范地定义余乘 $\Delta(x_n)$，使得对所有 x_1 和x_n，它们都满足相容性 $n \in \mathbb{N}$ （见 §3.3）。遗憾的是，在处理交错多重ζ值时，情况要复杂得多。虽然定义交错多重ζ值的字代数 $\mathfrak{D}$ 并证明其满足结合律并不困难，但余乘的定义却远非显而易见。主要问题在于，在 $\mathfrak{D}$ 中，每个固定的权都有 $q-1$ 个字母，而且无法利用权为 1 的字母与其他字母之间的相容性，以规范的方式定义字母的余乘。要继续推进，我们需要一些新思路。

1.3.2. 关键要素。

我们在此给出的解法在若干关键点上不同于多重ζ值的情形，并且需要两个新的要素。

第一个新要素是给出余乘的直接且显式的公式Δ （参见§6.1）。我们不像多重ζ值的情形那样，通过对权作递归归纳法来定义它。

第二个新要素是引入所谓的水平映射，使我们能够处理权相同的字母（参见§5.2）。特别地，若某个性质对以特定字母开头的字成立，比如 x，那么利用水平映射，我们便能推出该性质对所有以与 x权相同的字母开头的字都成立。

借助这些工具，我们证明余乘满足所有所需性质，因此 AMZV 的字代数 $\mathfrak{D}$ 确实是一个连通分次霍普夫代数。

1.3.3. 正特征中着色多重ζ值的推广。

我们现在对我们的结果给出一些评论。

首先，如上所述，我们在先前的工作中发现了交错多重ζ值与Carlitz多重多对数对应物之间的联系 [31, §1]。利用这一联系，我们可以在 $\mathfrak{D}$ 上定义另一个霍普夫代数结构，称为交错多重ζ值的stuffle霍普夫代数，它扩展了 [32, §9]。由于这一扩展可以毫不困难地完成，我们将其留给读者作为练习。

其次，我们对交错多重ζ值的字代数 $\mathfrak{D}$ 的霍普夫代数结构的构造可以以直接的方式扩展到所有 $N \in \mathbb{N}$ 的着色多重ζ值的字代数 $\mathfrak{D}_N$。更精确地说， $\mathfrak{D}_N$ 的字母由 $x_{n,\varepsilon}$ 组成，其中 $n \in \mathbb{N}$ 且 ε 是 $\overline{\mathbb{F}}_q$ 中的 N 次单位根。然而，我们警告读者，一般来说，着色多重ζ值不属于 K_∞，而只属于 K_∞ 的有限扩张。

1.3.4. 手稿的结构。

本文的结构如下。

- 在 §2 中，我们回顾霍普夫代数的一些概念。我们的表述与 [32] 中给出的相同。
- 在 §3中，我们回顾多重ζ值的字代数 $\mathfrak{C}$ （在 [32] 中称为组合空间）以及 $\mathfrak{C}$ 的混洗霍普夫代数结构。随后，我们回顾 上述文献 的主要结果，并陈述本文所需的全部必要结果，以便读者无需参阅 [32] 也能轻松阅读本文。
- 在§4 中，我们回顾 Harada 引入的正特征下交错多重ζ值的定义和基本性质 [25]。

- 在§5 中，我们引入交错多重ζ值的字代数或组合空间 $\mathfrak{D}$ ，并为其赋予洗牌代数结构。随后，我们在 §5.2 中定义水平映射。最后，利用这些映射，我们证明 $\mathfrak{D}$ 是一个代数（即满足结合性），并证明存在一个适用于交错多重ζ值的洗牌映射（见定理5.9 和定理 5.11）。
- 在 §6 中，我们在 $\mathfrak{D}$上定义余乘。此定义不同于$\mathfrak{C}$ 上的定义，因为它是直接且明确的，不使用任何按权进行的归纳法。我们利用水平映射证明相容性和余结合性结论（分别参见定理6.5 和定理 6.8），从而确立本文的主定理（精确表述见定理6.9 ）：

定理 1.3. AMZV 的字代数 $\mathfrak{D}$ 配备洗牌积和上述余乘后，是一个定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的有限型连通分次霍普夫代数。

致谢。我们感谢 Dinesh Thakur 对本文的关注、在文献方面给予的指导以及有益的讨论。Bo-Hae Im 获得了韩国国家研究基金会（NRF）基础科学研究计划的资助，该计划由韩国政府（MSIT）资助（NRF- 2023R1A2C1002385）。KN. Le 和 T. Ngo Dac 部分获得了诺曼底大区资助的卓越研究主席项目的支持，项目名称为“L-函数在正特征中的研究及其应用”。T. Ngo Dac 和 LH. Pham 部分获得了越南科学技术院（VAST）的资助，项目编号 CTTH00.02/23-24，项目名称为“函数域上概形的算术与几何及其应用”。

2. Review on Hopf algebra

我们简要回顾霍普夫代数的基本概念，参见我们此前关于 [31, §2] 正特征下多重ζ值的霍普夫代数结构的论文。

2.1. 霍普夫代数。

设 k 是一个域。从现在起，张量积均取在 k上。设 H 是一个 k-向量空间，且 $\iota\colon H\otimes H\to H\otimes H$ 是转置映射，定义为$\iota(x\otimes y)=y\otimes x$，并将其线性延拓。

定义 2.1. k 上的代数是一个三元组(H,m,u)，由一个 k-向量空间 H 以及 k-线性映射 m: $H\otimes H\to H$ （称为乘法）和 u: $k\to H$ （称为单位元）构成，并满足下列图表交换:

(1) 结合性

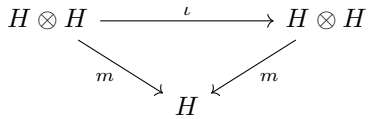
$$\begin{array}{ccc} H\otimes H\otimes H & \xrightarrow{m\otimes \mathrm{id}} & H\otimes H \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ H\otimes H & \xrightarrow{\quad m\quad} & H \end{array}$$

(2) 酉

$$\begin{array}{ccccc} H\otimes k & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes u} & H\otimes H & \xleftarrow{u\otimes \mathrm{id}} & k\otimes H \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle m} & \swarrow & \\ & & H & & \end{array}$$

其中对角箭头是典范同构。

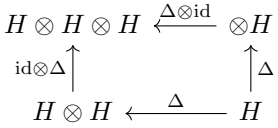
如果以下图表是交换的，则称该代数是交换的：



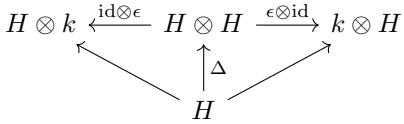
域 k 上的余代数与域 k上的代数互为对偶，后者由反转箭头得到。

定义 2.2. 域 k上的余代数是一个三元组（H, Δ, ϵ），由一个 k-向量空间 H 以及 k-线性映射 Δ: $H \to H \otimes H$ （称为余乘）和ϵ: $H \to k$ （称为余单位）组成，并满足下列图表交换：

(1) 余结合性

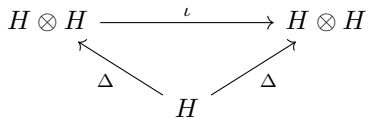


(2) 余单位性



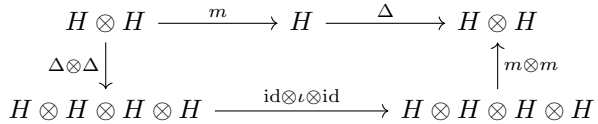
其中，对角箭头是典范同构。

如果下图交换，则称该余代数是余交换的：

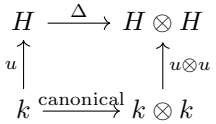


定义 2.3. k上的双代数是一个五元组（H、 m、 u、 Δ、 ϵ），由 k上的代数（H、 m、 u）和 k上的余代数（H、 Δ、 ϵ）组成，二者相容，即下列图表交换：

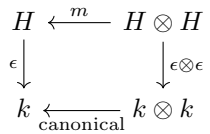
（1）乘法与余乘



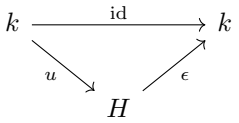
（2）单位元与余乘



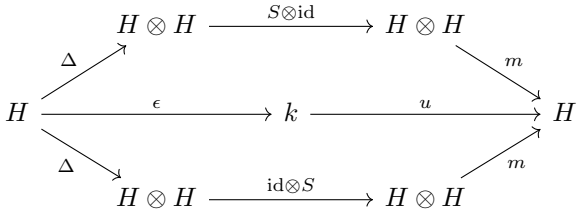
(3) 余单位与乘法



(4) 单位与余单位



定义 2.4. 在 k 上的霍普夫代数是一个在 k 上的双代数 $(H, m, u, \Delta, \epsilon)$，并配有一个 k-线性映射 $S\colon H \to H$，称为反幺半群，使得下图是交换的：



注意，存在不具有反幺半群的双代数（示例见 [11,练习 3。83]）。

2.2. 分次霍普夫代数。

我们回顾连通分次双代数的概念。

定义 2.5.

(1) 若双代数 $(H, m, u, \Delta, \epsilon)$ 上的 k 满足可将 H 写成 k-子空间的直和，则称其为分次双代数

$$H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n,$$

使得对所有整数 $r, s \geq 0$，都有

$$m(H_r \otimes H_s) \subseteq H_{r+s} \quad \text{and} \quad \Delta(H_r) \subseteq \bigoplus_{i+j=r} H_i \otimes H_j.$$

若 $H_0 = k$，则称分次双代数为连通的。

(2) 若霍普夫代数 H 的底层双代数是分次的，且反幺半群 S 满足 $S(H_n) \subseteq H_n$，则称其为分次霍普夫代数。

(3) 若 $H_0 = k$，则称分次霍普夫代数为连通的。

(4) 若 H_n 是有限维数的 k-向量空间，则称分次霍普夫代数为有限型。

下面的命题表明，连通分次双代数自动具有反幺半群，因此它总是一个霍普夫代数。

命题 2.6. 设 $(H, m, u, \Delta, \epsilon)$ 是定义在 k 上的连通分次双代数。

(1) 对于每个满足 $n \geq 1$ 的元素 $x \in H_n$，有

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 + \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)},$$

其中 $\sum x_{(1)} \otimes x_{(2)} \in \bigoplus H_i \otimes H_j$。此外，余单位 ϵ 在 H_n $^{i,\ j>0}{}_{i+j=n}$ 上为零

对所有 $n \geq 1$。

(2) 我们沿用 (1) 中的记号，并递归地定义一个 k-线性映射 S: $H \to H$ ，其定义如下:

$$S(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in H_0, \\ -x - \sum m(S(x_{(1)}) \otimes x_{(2)}) & \text{if } x \in H_n \text{ with } n \geq 1. \end{cases}$$

那么 H 是一个分次霍普夫代数，其反幺半群是 S。

证明。 见 [19, 引理 2。1]。 □

3. Review of shuffle Hopf algebra of MZV's

我们简要回顾我们此前关于正特征下多重ζ值代数结构的一些结果[32] 。

3.1. 字母表。

设 I 是一个可数集， $A = \{x_n\}_{n\in I}$ 是一组由 I 索引的变量，并赋予权重 w $(x_n) \in \mathbb{N}$。集合 A 称为字母表，其元素称为字母。字母表 A 上的一个字是由有限个字母组成的字符串。特别地，空字记作 1。字 $\mathfrak{a}$ 的深度 depth($\mathfrak{a}$) 是字符串 $\mathfrak{a}$ 中字母的个数，因此 depth(1) $= 0$。一个字的权是其各字母的权之和，并令 w (1) $= 0$。令 $\langle A\rangle$ 表示字母表 A 上所有字构成的集合。我们在 $\langle A\rangle$ 上定义连接乘法，其定义公式如下:

$$x_{i_1} \dots x_{i_n} \cdot x_{j_1} \dots x_{j_m} = x_{i_1} \dots x_{i_n} x_{j_1} \dots x_{j_m}.$$

令 $\mathbb{F}_q\langle A\rangle$ 为以 $\langle A\rangle$ 为基的自由 $\mathbb{F}_q$-向量空间。连接乘法通过线性性扩张到 $\mathbb{F}_q\langle A\rangle$ 。对于字母 $x_a \in A$ 和元素 $\mathfrak{a} \in \mathbb{F}_q\langle A\rangle$，我们简单地记作 $x_a\mathfrak{a}$ ，而不记作 $x_a \cdot \mathfrak{a}$。对于每个非空字 $\mathfrak{a} \in \langle A\rangle$，可以写作 $\mathfrak{a} = x_a\mathfrak{a}_-$ ，其中 x_a 是 $\mathfrak{a}$ 的首字母，而 $\mathfrak{a}_-$ 是从 $\mathfrak{a}$ 中去掉 x_a 后得到的字。

3.2. 与多重ζ值相关的字母表与洗牌代数。

我们回顾 [32, §4.2] 中给出的与多重ζ值相关的字母表。集合 I 将是 $\mathbb{N}$ ，我们将权为 w (x_n) 的 $\Sigma = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $= n$ 称为附属于多重ζ值的字母表。我们令 $\mathfrak{C} = \mathbb{F}_q\langle\Sigma\rangle$，即以 $\langle\Sigma\rangle$ 为基的自由 $\mathbb{F}_q$-向量空间。

对于正整数 r、 s， 以及所有满足 $i + j = r + s$ 的正整数 i、 j， 我们令

$$\Delta^i_{r,s} = \begin{cases} (-1)^{r-1}\binom{i-1}{r-1} + (-1)^{s-1}\binom{i-1}{s-1} & \text{if } (q-1) \mid i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.1}$$

然后，我们递归地在 $\mathfrak{C}$ 上定义两个乘法，它们是 $\mathbb{F}_q$-双线性映射

$$\diamond\colon \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C} \quad \text{and} \quad \sqcap\!\sqcup\colon \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}$$

通过设定 $1 \diamond \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \diamond 1 = \mathfrak{a}$、$1 \sqcap\!\sqcup \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \sqcap\!\sqcup 1 = \mathfrak{a}$ 和

$$\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b} = x_{a+b}(\mathfrak{a}_- \sqcap\!\sqcup \mathfrak{b}_-) + \sum_{i+j=a+b} \Delta^j_{a,b} x_i (x_j \sqcap\!\sqcup (\mathfrak{a}_- \sqcap\!\sqcup \mathfrak{b}_-)),$$

$$\mathfrak{a} \sqcap\!\sqcup \mathfrak{b} = x_a(\mathfrak{a}_- \sqcap\!\sqcup \mathfrak{b}) + x_b(\mathfrak{a} \sqcap\!\sqcup \mathfrak{b}_-) + \mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}$$

对于任意非空字 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b} \in \langle\Gamma\rangle$。我们称 $\diamond$ 为菱形积，称 $\sqcap\!\sqcap$ 为洗牌积。单位元 $u : \mathbb{F}_q \to \mathfrak{C}$ 由将 1 映射到空字给出。 [32] 的一个主要结果如下（见 [32, 定理 A]）：

定理 3.1. 空间 $(\mathfrak{C}, \diamond)$ 和 $(\mathfrak{C}, \sqcap\!\sqcap)$ 是交换的 $\mathbb{F}_q$-代数。

3.3. 与多重ζ值相关的混洗霍普夫代数。

我们简要回顾一下 [32, §7.1] 中的余乘。

$$\Delta : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C} \otimes \mathfrak{C}.$$

我们首先在 $\langle\Sigma\rangle$ 上通过按权归纳法定义它，再通过 $\mathbb{F}_q$-线性将其扩张到 $\mathfrak{C}$。我们令

$$\Delta(1) := 1 \otimes 1, \qquad \Delta(x_1) := 1 \otimes x_1 + x_1 \otimes 1.$$

设 $w \in \mathbb{N}$，并假设对于所有权为 $w(\mathfrak{u}) < w$ 的字 $\mathfrak{u}$，我们已经定义了 $\Delta(\mathfrak{u})$。现在我们给出一个公式，用于所有满足 $w(\mathfrak{u}) = w$ 的字 $\mathfrak{u}$ 的 $\Delta(\mathfrak{u})$。对于这样一个深度$(\mathfrak{u})$ 为 > 1 的字 $\mathfrak{u}$，我们令 $\mathfrak{u} = x_u\mathfrak{v}$，其中 $w(\mathfrak{v}) < w$。由于 x_u 和 $\mathfrak{v}$ 的权都小于 w，我们已经定义了

$$\Delta(x_u) = 1 \otimes x_u + \sum a_u \otimes b_u, \qquad \Delta(\mathfrak{v}) = \sum a_\mathfrak{v} \otimes b_\mathfrak{v}.$$

于是我们定义

$$\Delta(\mathfrak{u}) := 1 \otimes \mathfrak{u} + \sum (a_u \triangleright a_\mathfrak{v}) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\sqcap} b_\mathfrak{v}).$$

我们最后要定义 $\Delta(x_w)$。我们知道，

$$x_1 \mathbin{\sqcap\!\sqcap} x_{w-1} = x_w + x_1x_{w-1} + x_{w-1}x_1 + \sum_{0<j<w} \Delta^j_{1,w-1} x_{w-j}x_j$$

其中所有的字 $x_{w-j}x_j$ 的权为 w 且深度为 2，并且所有 Δ^j_1，$w-1$ 按照（3.1）定义的元素都属于 $\mathbb{F}_q$。因此，我们定义

$$\Delta(x_w) := \Delta(x_1) \mathbin{\sqcap\!\sqcap} \Delta(x_{w-1}) - \Delta(x_1x_{w-1}) - \Delta(x_{w-1}x_1) - \sum_{0<j<w} \Delta^j_{1,w-1} \Delta(x_{w-j}x_j).$$

通过对权进行归纳，我们可以验证 Δ 保持分次结构。

接下来，将余单位 $\epsilon : \mathfrak{C} \to \mathbb{F}_q$ 定义为令 $\epsilon(1) = 1$ 且 $\epsilon(\mathfrak{u}) = 0$ 在其他情况下成立。我们证明了（见 [32, 定理 B]）：

定理 3.2。连通分次双代数 $(\mathfrak{C}, \sqcap\!\sqcap, u, \Delta, \epsilon)$ 是一个定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的连通分次霍普夫代数。

3.4. 余乘的一些性质。

本节汇集余乘的一些性质，这些性质将在后文中用到。

引理 3.3. 对于所有字 $\mathfrak{u} \in \mathfrak{C}$，我们有

$$\Delta(\mathfrak{u}) = 1 \otimes \mathfrak{u} + \sum a_\mathfrak{u} \otimes b_\mathfrak{u}, \ \textit{where } a_\mathfrak{u} \neq 1.$$

证明。参见 [32, 引理 7.1]。 □

引理3.4。设 $\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{v}$ 是 $\langle\Sigma\rangle$ 中的两个非空字。假设

$$\Delta(\mathfrak{u})=1\otimes\mathfrak{u}+\sum\mathfrak{u}_{(1)}\otimes\mathfrak{u}_{(2)},\ \ and\quad \Delta(\mathfrak{v})=1\otimes\mathfrak{v}+\sum\mathfrak{v}_{(1)}\otimes\mathfrak{v}_{(2)}.$$

Then

$$\Delta(\mathfrak{u}\diamond\mathfrak{v})=1\otimes(\mathfrak{u}\diamond\mathfrak{v})+\sum(\mathfrak{u}_{(1)}\diamond\mathfrak{v}_{(1)})\otimes(\mathfrak{u}_{(2)}\sqcup\!\sqcup\mathfrak{v}_{(2)}).$$

证明。 见[32, 引理 8。5]。 □

最后，对于 $x_n\in\Sigma$，有一个关于 $\Delta(x_n)$ 的有用公式，我们将在下面简要说明。

引理 3.5。设 $n\in\mathbb{N}$。那么我们有

(1) 对所有 $j<n$,

$$\Delta^{j}_{1,n}=\begin{cases}1 & if\ (q-1)\mid j\\ 0 & otherwise.\end{cases}$$

(2) $\Delta^{n}_{1,n}=0$.

证明。根据 Δ^{j}_{1} 的定义，结果显而易见。n。 参见 [32, 引理 8.1].□

接下来，我们通过以下公式引入括号算子：对于任意 $\mathfrak{a}=x_{i_1}\dots x_{i_m}\in\langle\Sigma\rangle$,

$$[\mathfrak{a}]:=(-1)^m\Delta^{i_1}_{1,w(\mathfrak{a})+1}\cdots\Delta^{i_m}_{1,w(\mathfrak{a})+1}x_{i_1}\sqcup\!\sqcup\cdots\sqcup\!\sqcup x_{i_m}. \tag{3.2}$$

按照惯例，我们也约定 $[1]=1$。于是我们证明了（参见 [32,定理 C]）：

命题 3.6。沿用上述记号。则对于所有 $n\in\mathbb{N}$，有

$$\Delta(x_n)=1\otimes x_n+\sum_{\substack{r\in\mathbb{N},\mathfrak{a}\in\langle\Sigma\rangle\\ r+w(\mathfrak{a})=n}}\binom{r+\mathrm{depth}(\mathfrak{a})-2}{\mathrm{depth}(\mathfrak{a})}x_r\otimes[\mathfrak{a}].$$

4. Alternating multiple zeta values

我们回顾正特征下多重zeta值和交错多重ζ值的一些概念，参见 [25, 31, 32]。

令 $\mathfrak{s}=(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{N}^n$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in(\mathbb{F}_q^\times)^n$，我们设 $\mathfrak{s}_-:=(s_2,\dots,s_n)$ 以及 $\boldsymbol{\varepsilon}_-:=(\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)$。正数组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \mathfrak{s}\end{pmatrix}$ 是如下形式的数组

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \mathfrak{s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n\\ s_1 & \cdots & s_n\end{pmatrix}.$$

我们回顾 Thakur [48] 研究的幂和。对于 $d\in\mathbb{Z}$，以及对于 $\mathfrak{s}=(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{N}^n$，我们定义

$$S_d(\mathfrak{s})=\sum_{\substack{a_1,\dots,a_n\in A_+\\ d=\deg a_1>\cdots>\deg a_n\geq 0}}\frac{1}{a_1^{s_1}\dots a_n^{s_n}}\in K$$

and

$$S_{<d}(\mathfrak{s}) = \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_n\in A_+\\ d>\deg a_1>\cdots>\deg a_n\geq 0}} \frac{1}{a_1^{s_1}\ldots a_n^{s_n}} \in K.$$

我们还回顾 Harada 提出的以下幂和类比 [25]。对于正数组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \mathfrak{s}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_n\\ s_1 & \ldots & s_n\end{pmatrix}$，我们定义

$$S_d\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \mathfrak{s}\end{pmatrix} = \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_n\in A_+\\ d=\deg a_1>\cdots>\deg a_n\geq 0}} \frac{\varepsilon_1^{\deg a_1}\ldots\varepsilon_n^{\deg a_n}}{a_1^{s_1}\ldots a_n^{s_n}} \in K$$

and

$$S_{<d}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \mathfrak{s}\end{pmatrix} = \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_n\in A_+\\ d>\deg a_1>\cdots>\deg a_n\geq 0}} \frac{\varepsilon_1^{\deg a_1}\ldots\varepsilon_n^{\deg a_n}}{a_1^{s_1}\ldots a_n^{s_n}} \in K.$$

容易验证以下公式:

$$\begin{aligned} S_d\begin{pmatrix}\varepsilon\\ s\end{pmatrix} &= \varepsilon^d S_d(s),\\ S_d\begin{pmatrix}1 & \ldots & 1\\ s_1 & \ldots & s_n\end{pmatrix} &= S_d(s_1,\ldots,s_n),\\ S_{<d}\begin{pmatrix}1 & \ldots & 1\\ s_1 & \ldots & s_n\end{pmatrix} &= S_{<d}(s_1,\ldots,s_n),\\ S_d\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \mathfrak{s}\end{pmatrix} &= S_d\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ s_1\end{pmatrix} S_{<d}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_-\\ \mathfrak{s}_-\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

在 [25] Harada 通过如下定义，在正特征下引入了交错多重ζ值（AMZV）：

$$\zeta_A\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \mathfrak{s}\end{pmatrix} := \sum_{d\geq 0} S_d\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \mathfrak{s}\end{pmatrix} = \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_n\in A_+\\ \deg a_1>\cdots>\deg a_n\geq 0}} \frac{\varepsilon_1^{\deg a_1}\ldots\varepsilon_n^{\deg a_n}}{a_1^{s_1}\ldots a_n^{s_n}} \in K_\infty.$$

随后，他证明了这些值的若干基本性质。特别地，两个 AMZV 的乘法可表示为 AMZV 的线性组合，其系数属于 $\mathbb{F}_q$。为此，我们先回顾 [14] 中的 Chen 公式。对于满足 $b\geq 0$ 的整数 a、b，回顾如下定义的二项式数:

$$\binom{a}{b} := \frac{a(a-1)\ldots(a-b+1)}{b!}.$$

应当指出，$\binom{a}{b} = 0$ 若 $b > a \geq 0$。随后，Thakur [48]，和 Chen [14，对此进行了进一步研究，并在定理 3.1] 中证明，对于正整数 r、s 以及所有 $d\in\mathbb{N}$,

$$S_d(r)S_d(s) = S_d(r+s) + \sum_{i+j=r+s} \Delta_{r,s}^j S_d(i,j),$$

其中系数 $\Delta_{r,s}^j$ 按（3.1）中的定义给出。

作为Chen公式的直接推论，我们得到

引理 4.1. 设 α,β 为 $\mathbb{F}_q^*$中的两个元素，并设 r,s 为两个正整数。则对所有 $d\in\mathbb{N}$，我们有

$$S_d\begin{pmatrix}\alpha\\ r\end{pmatrix}S_d\begin{pmatrix}\beta\\ s\end{pmatrix}=S_d\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ r+s\end{pmatrix}+\sum_{i+j=r+s}\Delta^j_{r,s}S_d\begin{pmatrix}\alpha\beta & 1\\ i & j\end{pmatrix},$$

其中指标 i、j 均为正整数。

证明。 例如参见 [25,引理 2。3]。 □

5. Shuffle algebra of AMZV's

在以下各节中，§5 和 §6 我们将构造交错多重ζ值的霍普夫洗牌代数，并指出，从多重ζ值的情形推广到交错多重ζ值的情形并非易事，正如我们在引言中所解释的那样。我们构造的关键要素是本节中引入的所谓水平映射概念。这些映射将使我们能够处理权相同的字母（见 §5.2）。在下一节中，我们将给出余乘的直接且显式的公式，并证明这些公式满足所有期望的性质。

5.1. 与交错多重ζ值相关的字母表与洗牌代数。

我们令 $I=\{(n,\varepsilon)\colon\ n\in\mathbb{N},\varepsilon\in\mathbb{F}_q^*\}$。令 $\Gamma=\{x_{n,\varepsilon}\}_{n\in\mathbb{N},\varepsilon\in\mathbb{F}_q^*}$ 为由 I 索引的交错多重ζ值所关联的字母表（记号见 §3.1 ）。我们定义权 $w(x_{n,\varepsilon})=n$。定义 $\mathfrak{D}:=\mathbb{F}_q\langle\Gamma\rangle$ 为以 $\langle\Gamma\rangle$ 为基的自由 $\mathbb{F}_q$- 向量空间。

受 §3 的启发，我们递归地在 $\mathfrak{D}$ 上定义两个乘法：$\mathbb{F}_q$-双线性映射

$$\diamond\colon\mathfrak{D}\times\mathfrak{D}\longrightarrow\mathfrak{D}\quad\text{and}\quad{}_{\sqcup\!\sqcup}\colon\mathfrak{D}\times\mathfrak{D}\longrightarrow\mathfrak{D}$$

通过设定 $1\diamond\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\diamond1=\mathfrak{a}$, $1\,{}_{\sqcup\!\sqcup}\,\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\,{}_{\sqcup\!\sqcup}\,1=\mathfrak{a}$ 和

$$\mathfrak{a}\diamond\mathfrak{b}=x_{a+b,\alpha\beta}(\mathfrak{a}_-\,{}_{\sqcup\!\sqcup}\,\mathfrak{b}_-)+\sum_{i+j=a+b}\Delta^j_{a,b}x_{i,\alpha\beta}(x_{j,1}\,{}_{\sqcup\!\sqcup}\,(\mathfrak{a}_-\,{}_{\sqcup\!\sqcup}\,\mathfrak{b}_-)),$$

$$\mathfrak{a}\,{}_{\sqcup\!\sqcup}\,\mathfrak{b}=x_{a,\alpha}(\mathfrak{a}_-\,{}_{\sqcup\!\sqcup}\,\mathfrak{b})+x_{b,\beta}(\mathfrak{a}\,{}_{\sqcup\!\sqcup}\,\mathfrak{b}_-)+\mathfrak{a}\diamond\mathfrak{b}$$

对于任意非空字 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in\langle\Gamma\rangle$，其中 $\mathfrak{a}=x_{a,\alpha}\mathfrak{a}_-$,$\mathfrak{b}=x_{b,\beta}\mathfrak{b}_-$。我们称 $\diamond$ 为菱形积，称 $\sqcup\!\sqcup$ 为洗牌积。

命题 5.1。 $\mathfrak{D}$ 上的菱形积和洗牌积是交换的。

证明. 设 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in\langle\Gamma\rangle$ 为两个任意的字. 只需证明

$$\mathfrak{a}\diamond\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\diamond\mathfrak{a}\quad\text{and}\quad\mathfrak{a}\,{}_{\sqcup\!\sqcup}\,\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\,{}_{\sqcup\!\sqcup}\,\mathfrak{a}.$$

我们对深度进行归纳证明$(\mathfrak{a})$ +深度$(\mathfrak{b})$. 若 $\mathfrak{a}$ 或 $\mathfrak{b}$ 是空字，则 (5.1) 显然成立。假设当深度$(\mathfrak{a})$+深度$(\mathfrak{b})$ $<n$ 且 $n\in\mathbb{N}$ 和 $n\geq2$时，(5.1) 成立。我们需要证明当深度$(\mathfrak{a})$ +深度$(\mathfrak{b})$ $=n$时，(5.1) 成立。

事实上，假设 $\mathfrak{a}=x_{a,\ \alpha}\mathfrak{a}_-,\mathfrak{b}=x_{b,\ \beta}\mathfrak{b}_-$，我们有

$$\mathfrak{a}\diamond\mathfrak{b}=x_{a+b,\alpha\beta}(\mathfrak{a}_-\,{}_{\sqcup\!\sqcup}\,\mathfrak{b}_-)+\sum_{i+j=a+b}\Delta^j_{a,b}x_{i,\alpha\beta}(x_{j,1}\,{}_{\sqcup\!\sqcup}\,(\mathfrak{a}_-\,{}_{\sqcup\!\sqcup}\,\mathfrak{b}_-)),$$

$$\mathfrak{b}\diamond\mathfrak{a}=x_{b+a,\beta\alpha}(\mathfrak{b}_-\,{}_{\sqcup\!\sqcup}\,\mathfrak{a}_-)+\sum_{i+j=b+a}\Delta^j_{b,a}x_{i,\beta\alpha}(x_{j,1}\,{}_{\sqcup\!\sqcup}\,(\mathfrak{b}_-\,{}_{\sqcup\!\sqcup}\,\mathfrak{a}_-)).$$

由归纳假设可得 $\mathfrak{a}_- \sqcap \mathfrak{b}_- = \mathfrak{b}_- \sqcap \mathfrak{a}_-$，因此 $\mathfrak{a}\diamond\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\diamond\mathfrak{a}$。另一方面，我们有

$$\mathfrak{a} \sqcap \mathfrak{b} = x_{a,\alpha}(\mathfrak{a}_- \sqcap \mathfrak{b}) + x_{b,\beta}(\mathfrak{a} \sqcap \mathfrak{b}_-) + \mathfrak{a}\diamond\mathfrak{b},$$
$$\mathfrak{b} \sqcap \mathfrak{a} = x_{b,\beta}(\mathfrak{b}_- \sqcap \mathfrak{a}) + x_{a,\alpha}(\mathfrak{b} \sqcap \mathfrak{a}_-) + \mathfrak{b}\diamond\mathfrak{a}.$$

由归纳假设和上述论证可得 $\mathfrak{b} \sqcap \mathfrak{a}_- \ \mathfrak{a} \sqcap \mathfrak{b}_- = \mathfrak{b}_- \sqcap \mathfrak{a}$ $\mathfrak{a}\diamond\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\diamond\mathfrak{a}$ $\mathfrak{a} \sqcap \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \sqcap \mathfrak{a}$ $\mathfrak{a}_- \sqcap \mathfrak{b} =$，因此。

这证明了该命题。□

5.2. 水平映射。

本节将介绍后续内容中至关重要的水平映射。对于每个元素 $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$，我们考虑 $\mathbb{F}_q$-线性映射

$$\varphi_\alpha \colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D},$$

该映射将空字 $1 \in \langle\Sigma\rangle$ 映射为空字 $1 \in \langle\Gamma\rangle$，并将非空字 $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$ 映射为 $x_{i_1,\ \alpha}x_{i_2,\ 1}\ldots x_{i_n,\ 1}$。对于所有满足 $\mathfrak{a} = x_a\mathfrak{a}_-$ 的非空字 $\mathfrak{a} \in \langle\Sigma\rangle$，我们得到

$$\varphi_\alpha(\mathfrak{a}) = \varphi_\alpha(x_a)\varphi_1(\mathfrak{a}_-) = x_{a,\alpha}\varphi_1(\mathfrak{a}_-).$$

由于对所有 $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$ 和 $\mathfrak{a} \in \mathfrak{C}$，$w(\varphi_\alpha(\mathfrak{a})) = w(\mathfrak{a})$，我们称这些映射为水平映射。注意，它们都是单射。

引理 5.2. 设 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b}$ 是 $\langle\Sigma\rangle$ 中的两个字。则有

$$\varphi_1(\mathfrak{a}\diamond\mathfrak{b}) = \varphi_1(\mathfrak{a})\diamond\varphi_1(\mathfrak{b}) \quad \textit{and} \quad \varphi_1(\mathfrak{a} \sqcap \mathfrak{b}) = \varphi_1(\mathfrak{a}) \sqcap \varphi_1(\mathfrak{b}).$$

证明. 证明可通过对 $\mathsf{depth}(\mathfrak{a}) + \mathsf{depth}(\mathfrak{b})$ 进行归纳法得到。细节从略。□

因此，φ_1 是从 $(\mathfrak{C}, \diamond)$ 到 $(\mathfrak{D}, \diamond)$（分别地，从 $(\mathfrak{C}, \sqcap)$ 到 $(\mathfrak{D}, \sqcap)$）的代数同态。

记号 5.3. 由于 φ_1 是单射，今后对于 $\mathfrak{a} \in \mathfrak{C}$，我们用 $\mathfrak{a} \in \mathfrak{D}$ 代替 $\varphi_1(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{D}$。

此外，我们将水平映射扩展如下：

$$\varphi_\alpha \colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}; \quad 1 \mapsto 1, \quad \mathfrak{u} \mapsto x_{u,\alpha\varepsilon}\mathfrak{u}_-$$

对于非空字 $\mathfrak{u} \in \langle\Gamma\rangle$，其中 $\mathfrak{u} = x_{u,\ \varepsilon}\mathfrak{u}_-$。这是在将 $\mathfrak{a} \in \mathfrak{C}$ 与 $\varphi_1(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{D}$认同下的自然扩张。注意，如果 $\mathfrak{u} \in \langle\Gamma\rangle$ 是写作 $\mathfrak{u} = x_{u,\ \varepsilon}\mathfrak{u}_-$的非空字，那么对于所有 $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$，

$$\varphi_\alpha(\mathfrak{u}) = \varphi_\alpha(x_{u,\varepsilon})\mathfrak{u}_-.$$

在此扩张下，上述引理对 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \langle\Gamma\rangle$成立。

引理 5.4. 设 α, β是 $\mathbb{F}_q^*$的元素，且 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$是 $\langle\Sigma\rangle$中的非空字。我们有

$$\varphi_\alpha(\mathfrak{a})\diamond\varphi_\beta(\mathfrak{b}) = \varphi_{\alpha\beta}(\mathfrak{a}\diamond\mathfrak{b}).$$

此外，对于非空字 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \langle\Gamma\rangle$，

$$\varphi_\alpha(\mathfrak{a})\diamond\varphi_\beta(\mathfrak{b}) = \varphi_{\alpha\beta}(\mathfrak{a}\diamond\mathfrak{b}).$$

证明。 考虑定义在 $\langle\Sigma\rangle$ 上的水平映射。记 $\mathfrak{a}=x_a\mathfrak{a}_-,\mathfrak{b}=x_b\mathfrak{b}_-$，其中 $x_a,x_b\in\Sigma$，并且 $\mathfrak{a}_-,\mathfrak{b}_-\in\langle\Sigma\rangle$。根据引理 5.2，有

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha\beta}(\mathfrak{a}\diamond\mathfrak{b})&=\varphi_{\alpha\beta}\left(x_{a+b}(\mathfrak{a}_-\sqcup\!\sqcup\mathfrak{b}_-)+\sum_{i+j=a+b}\Delta^j_{a,b}x_i(x_j\sqcup\!\sqcup(\mathfrak{a}_-\sqcup\!\sqcup\mathfrak{b}_-))\right)\\&=x_{a+b,\alpha\beta}(\mathfrak{a}_-\sqcup\!\sqcup\mathfrak{b}_-)+\sum_{i+j=a+b}\Delta^j_{a,b}x_{i,\alpha\beta}(x_j\sqcup\!\sqcup(\mathfrak{a}_-\sqcup\!\sqcup\mathfrak{b}_-))\\&=x_{a,\alpha}\mathfrak{a}_-\diamond x_{b,\beta}\mathfrak{b}_-\\&=\varphi_\alpha(\mathfrak{a})\diamond\varphi_\beta(\mathfrak{b}).\end{aligned}$$

关于 $\langle\Gamma\rangle$ 上的水平映射的证明是类似的。设$\mathfrak{a}=x_{a,\ \varepsilon_1}\mathfrak{a}_-$，$\mathfrak{b}=x_{b,\ \varepsilon_2}\mathfrak{b}_-$满足$x_{a,\ \varepsilon_1}$，$x_{b,\ \varepsilon_2}\in\Gamma$ 且 $\mathfrak{a}_-$，$\mathfrak{b}_-\in\langle\Gamma\rangle$。由引理 5.2 及其后续评注可得

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha\beta}(\mathfrak{a}\diamond\mathfrak{b})&=\varphi_{\alpha\beta}\left(x_{a+b,\varepsilon_1\varepsilon_2}(\mathfrak{a}_-\sqcup\!\sqcup\mathfrak{b}_-)+\sum_{i+j=a+b}\Delta^j_{a,b}x_{i,\varepsilon_1\varepsilon_2}(x_j\sqcup\!\sqcup(\mathfrak{a}_-\sqcup\!\sqcup\mathfrak{b}_-))\right)\\&=x_{a+b,\alpha\beta\varepsilon_1\varepsilon_2}(\mathfrak{a}_-\sqcup\!\sqcup\mathfrak{b}_-)+\sum_{i+j=a+b}\Delta^j_{a,b}x_{i,\alpha\beta\varepsilon_1\varepsilon_2}(x_j\sqcup\!\sqcup(\mathfrak{a}_-\sqcup\!\sqcup\mathfrak{b}_-))\\&=x_{a,\alpha\varepsilon_1}\mathfrak{a}_-\diamond x_{b,\beta\varepsilon_2}\mathfrak{b}_-\\&=\varphi_\alpha(\mathfrak{a})\diamond\varphi_\beta(\mathfrak{b}).\end{aligned}$$

这就证明了该引理。 □

本节最后指出，水平映射满足结合律。更确切地说，我们证明

引理 5.5。设 $\alpha,\beta\in\mathbb{F}_q^*$。对任意字 $\mathfrak{a}\in\langle\Gamma\rangle$，有

$$\varphi_{\alpha\beta}(\mathfrak{a})=\varphi_\alpha(\varphi_\beta(\mathfrak{a})).$$

证明。根据水平映射的定义，证明是直接的。 □

5.3. 结合性。

在本小节中，我们首先证明菱形积在 Γ上具有结合性（见命题 5.6），然后证明菱形积与洗牌积在 $\mathfrak{D}$ 上的结合性（见命题5.8）。

命题 5.6. 设 $x_{a、\ \alpha}$、$x_{b、\ \beta}$、$x_{c、\ \gamma}$ 是 Γ 中的字母。则有

$$(x_{a,\alpha}\diamond x_{b,\beta})\diamond x_{c,\gamma}=x_{a,\alpha}\diamond(x_{b,\beta}\diamond x_{c,\gamma}).$$

证明。 由引理 5.4，可得

$$\begin{aligned}(x_{a,\alpha}\diamond x_{b,\beta})\diamond x_{c,\gamma}&=(\varphi_\alpha(x_a)\diamond\varphi_\beta(x_b))\diamond\varphi_\gamma(x_c)\\&=\varphi_{\alpha\beta}(x_a\diamond x_b)\diamond\varphi_\gamma(x_c)\\&=\varphi_{\alpha\beta\gamma}((x_a\diamond x_b)\diamond x_c),\\x_{a,\alpha}\diamond(x_{b,\beta}\diamond x_{c,\gamma})&=\varphi_\alpha(x_a)\diamond(\varphi_\beta(x_b)\diamond\varphi_\gamma(x_c))\\&=\varphi_\alpha(x_a)\diamond\varphi_{\beta\gamma}(x_b\diamond x_c)\\&=\varphi_{\alpha\beta\gamma}(x_a\diamond(x_b\diamond x_c)).\end{aligned}$$

由 $\mathfrak{C}$ （见定理 3.1），可得 $(x_a \diamond x_b) \diamond x_c = x_a \diamond (x_b \diamond x_c)$。这证明了该命题。□

接下来，我们递归地定义 $\mathfrak{D}$ 上的乘法，作为一个 $\mathbb{F}_q$-双线性映射

$$\triangleright \colon \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}$$

规定 $1 \triangleright \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \triangleright 1 = \mathfrak{a}$，并且

$$\mathfrak{a} \triangleright \mathfrak{b} = x_{a,\alpha}(\mathfrak{a}_- \amalg \mathfrak{b})$$

对于任意非空字 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b} \in \langle \Gamma \rangle$，满足 $\mathfrak{a} = x_{a,\alpha}\mathfrak{a}_-$。我们称 $\triangleright$ 为三角乘法。容易验证，三角乘法既不满足交换性，也不满足结合性。

引理 5.7. 对于所有字 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b} \in \langle \Gamma \rangle$，满足 $\mathfrak{a} = x_{a,\alpha}\mathfrak{a}_-$、$\mathfrak{b} = x_{b,\beta}\mathfrak{b}_-$，有

(1) $\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b} = (x_{a,\ \alpha} \diamond x_{b,\ \beta}) \triangleright (\mathfrak{a}_- \amalg \mathfrak{b}_-)$。

（2）$\mathfrak{a} \amalg \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \triangleright \mathfrak{b} + \mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}$。

证明。我们有

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b} &= x_{a+b,\alpha\beta}(\mathfrak{a}_- \amalg \mathfrak{b}_-) + \sum_{i+j=a+b} \Delta^j_{a,b} x_{i,\alpha\beta}(x_j \amalg (\mathfrak{a}_- \amalg \mathfrak{b}_-)) \\
&= x_{a+b,\alpha\beta} \triangleright (\mathfrak{a}_- \amalg \mathfrak{b}_-) + \sum_{i+j=a+b} \Delta^j_{a,b}(x_{i,\alpha\beta} x_j) \triangleright (\mathfrak{a}_- \amalg \mathfrak{b}_-) \\
&= \left(x_{a+b,\alpha\beta} + \sum_{i+j=a+b} \Delta^j_{a,b} x_{i,\alpha\beta} x_j \right) \triangleright (\mathfrak{a}_- \amalg \mathfrak{b}_-) \\
&= (x_{a,\alpha} \diamond x_{b,\beta}) \triangleright (\mathfrak{a}_- \amalg \mathfrak{b}_-).
\end{aligned}$$

这证明了部分 (1)。由洗牌积的交换性可直接得到部分 (2)（参见命题 5.1）。证明完毕。□

现在我们来证明本小节的主要结果。

命题 5.8。$\mathfrak{D}$ 上的菱形积和洗牌积满足结合律。

证明。设 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b}$、$\mathfrak{c} \in \langle \Gamma \rangle$ 为任意的字。只需证明

$$(\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}) \diamond \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \diamond (\mathfrak{b} \diamond \mathfrak{c}) \quad \text{and} \quad (\mathfrak{a} \amalg \mathfrak{b}) \amalg \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \amalg (\mathfrak{b} \amalg \mathfrak{c}).$$

我们通过对深度$(\mathfrak{a})$ + 深度$(\mathfrak{b})$ + 深度$(\mathfrak{c})$作归纳来进行证明。若 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b}$或 $\mathfrak{c}$ 中有一个是空字，则 (5.3) 平凡成立。我们假设当深度$(\mathfrak{a})$ +深度$(\mathfrak{b})$ + 深度$(\mathfrak{c})$ $< n$ 且满足 $n \in \mathbb{N}$ 和 $n \geq 3$时，(5.3)成立。我们需要证明当深度$(\mathfrak{a})$ + 深度$(\mathfrak{b})$ + 深度$(\mathfrak{c})$ $= n$时，(5.3)成立。

我们首先证明 $(\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}) \diamond \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \diamond (\mathfrak{b} \diamond \mathfrak{c})$。假设$\mathfrak{a} = x_{a,\ \alpha}\mathfrak{a}_-$，$\mathfrak{b} = x_{b,\ \beta}\mathfrak{b}_-$ =$\mathfrak{c} = x_{c,\ \gamma}\mathfrak{c}_-$。由引理5.7，可得

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}) \diamond \mathfrak{c} \\
&= \left(x_{a+b,\alpha\beta}(\mathfrak{a}_- \amalg \mathfrak{b}_-) + \sum_{i+j=a+b} \Delta^j_{a,b} x_{i,\alpha\beta}(x_j \amalg (\mathfrak{a}_- \amalg \mathfrak{b}_-)) \right) \diamond \mathfrak{c} \\
&= x_{a+b,\alpha\beta}(\mathfrak{a}_- \amalg \mathfrak{b}_-) \diamond \mathfrak{c} + \sum_{i+j=a+b} \Delta^j_{a,b} x_{i,\alpha\beta}(x_j \amalg (\mathfrak{a}_- \amalg \mathfrak{b}_-)) \diamond \mathfrak{c}
\end{aligned}$$

$$= (x_{a+b,\alpha\beta} \diamond x_{c,\gamma}) \triangleright ((\mathfrak{a}_- \sqcup \mathfrak{b}_-) \sqcup \mathfrak{c}_-) + \sum_{i+j=a+b} \Delta^j_{a,b}(x_{i,\alpha\beta} \diamond x_{c,\gamma}) \triangleright ((x_j \sqcup (\mathfrak{a}_- \sqcup \mathfrak{b}_-)) \sqcup \mathfrak{c}_-).$$

对于所有满足 $i+j=a+b$的 i、 $j \in \mathbb{N}$，由归纳假设可得

$$\begin{aligned}
&(x_{i,\alpha\beta} \diamond x_{c,\gamma}) \triangleright ((x_j \sqcup (\mathfrak{a}_- \sqcup \mathfrak{b}_-)) \sqcup \mathfrak{c}_-) \\
&= (x_{i,\alpha\beta} \diamond x_{c,\gamma}) \triangleright (x_j \sqcup ((\mathfrak{a}_- \sqcup \mathfrak{b}_-) \sqcup \mathfrak{c}_-)) \\
&= \left(x_{i+c,\alpha\beta\gamma} + \sum_{i_1+j_1=i+c} \Delta^{j_1}_{i,c} x_{i_1,\alpha\beta\gamma} x_{j_1} \right) \triangleright (x_j \sqcup ((\mathfrak{a}_- \sqcup \mathfrak{b}_-) \sqcup \mathfrak{c}_-)) \\
&= x_{i+c,\alpha\beta\gamma} \triangleright (x_j \sqcup ((\mathfrak{a}_- \sqcup \mathfrak{b}_-) \sqcup \mathfrak{c}_-)) \\
&\quad + \sum_{i_1+j_1=i+c} \Delta^{j_1}_{i,c} x_{i_1,\alpha\beta\gamma} x_{j_1} \triangleright (x_j \sqcup ((\mathfrak{a}_- \sqcup \mathfrak{b}_-) \sqcup \mathfrak{c}_-)) \\
&= x_{i+c,\alpha\beta\gamma} (x_j \sqcup ((\mathfrak{a}_- \sqcup \mathfrak{b}_-) \sqcup \mathfrak{c}_-)) \\
&\quad + \sum_{i_1+j_1=i+c} \Delta^{j_1}_{i,c} x_{i_1,\alpha\beta\gamma} ((x_{j_1} \sqcup x_j) \sqcup ((\mathfrak{a}_- \sqcup \mathfrak{b}_-) \sqcup \mathfrak{c}_-)) \\
&= (x_{i+c,\alpha\beta\gamma} x_j) \triangleright ((\mathfrak{a}_- \sqcup \mathfrak{b}_-) \sqcup \mathfrak{c}_-) \\
&\quad + \sum_{i_1+j_1=i+c} \Delta^{j_1}_{i,c} x_{i_1,\alpha\beta\gamma} (x_{j_1} \sqcup x_j) \triangleright ((\mathfrak{a}_- \sqcup \mathfrak{b}_-) \sqcup \mathfrak{c}_-) \\
&= \left(x_{i+c,\alpha\beta\gamma} x_j + \sum_{i_1+j_1=i+c} \Delta^{j_1}_{i,c} x_{i_1,\alpha\beta\gamma} (x_{j_1} \sqcup x_j) \right) \triangleright ((\mathfrak{a}_- \sqcup \mathfrak{b}_-) \sqcup \mathfrak{c}_-) \\
&= ((x_{i,\alpha\beta} x_j) \diamond x_{c,\gamma}) \triangleright ((\mathfrak{a}_- \sqcup \mathfrak{b}_-) \sqcup \mathfrak{c}_-).
\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}) \diamond \mathfrak{c} \\
&= (x_{a+b,\alpha\beta} \diamond x_{c,\gamma}) \triangleright ((\mathfrak{a}_- \sqcup \mathfrak{b}_-) \sqcup \mathfrak{c}_-) \\
&\quad + \sum_{i+j=a+b} \Delta^j_{a,b} ((x_{i,\alpha\beta} x_j) \diamond x_{c,\gamma}) \triangleright ((\mathfrak{a}_- \sqcup \mathfrak{b}_-) \sqcup \mathfrak{c}_-) \\
&= \left((x_{a+b,\alpha\beta} \diamond x_{c,\gamma}) + \sum_{i+j=a+b} \Delta^j_{a,b} (x_{i,\alpha\beta} x_j \diamond x_{c,\gamma}) \right) \triangleright ((\mathfrak{a}_- \sqcup \mathfrak{b}_-) \sqcup \mathfrak{c}_-) \\
&= ((x_{a,\alpha} \diamond x_{b,\beta}) \diamond x_{c,\gamma}) \triangleright ((\mathfrak{a}_- \sqcup \mathfrak{b}_-) \sqcup \mathfrak{c}_-).
\end{aligned}$$

另一方面，由命题5.1 以及上述论证，我们推得

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} \diamond (\mathfrak{b} \diamond \mathfrak{c}) &= (\mathfrak{b} \diamond \mathfrak{c}) \diamond \mathfrak{a} \\
&= ((x_{b,\beta} \diamond x_{c,\gamma}) \diamond x_{a,\alpha}) \triangleright ((\mathfrak{b}_- \sqcup \mathfrak{c}_-) \sqcup \mathfrak{a}_-) \\
&= (x_{a,\alpha} \diamond (x_{b,\beta} \diamond x_{c,\gamma})) \triangleright (\mathfrak{a}_- \sqcup (\mathfrak{b}_- \sqcup \mathfrak{c}_-)).
\end{aligned}$$

由命题 5.6 可知 $(x_{a,\ \alpha} \diamond x_{b,\ \beta}) \diamond x_{c,\ \gamma} = x_{a,\ \alpha} \diamond (x_{b,\ \beta} \diamond x_{c,\ \gamma})$。此外，由归纳假设可知 $(\mathfrak{a}_- \sqcup \mathfrak{b}_-) \sqcup \mathfrak{c}_- = \mathfrak{a}_- \sqcup (\mathfrak{b}_- \sqcup \mathfrak{c}_-)$。因此我们得出结论 $(\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}) \diamond \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \diamond (\mathfrak{b} \diamond \mathfrak{c})$。

接下来，我们证明 $(\mathfrak{a} \sqcup \mathfrak{b}) \sqcup \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \sqcup (\mathfrak{b} \sqcup \mathfrak{c})$。由引理 5.7，可得

$$(\mathfrak{a} \sqcup \mathfrak{b}) \sqcup \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} \triangleright \mathfrak{b} + \mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}) \sqcup \mathfrak{c}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mathfrak{a} \triangleright \mathfrak{b}) \sqcap \mathfrak{c} + (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{a}) \sqcap \mathfrak{c} + (\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}) \sqcap \mathfrak{c} \\
&= ((\mathfrak{a} \triangleright \mathfrak{b}) \triangleright \mathfrak{c} + \mathfrak{c} \triangleright (\mathfrak{a} \triangleright \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \triangleright \mathfrak{b}) \diamond \mathfrak{c}) \\
&\quad + ((\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{a}) \triangleright \mathfrak{c} + \mathfrak{c} \triangleright (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{a}) + (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{a}) \diamond \mathfrak{c}) \\
&\quad + ((\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}) \triangleright \mathfrak{c} + \mathfrak{c} \triangleright (\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}) \diamond \mathfrak{c}) \\
&= (\mathfrak{a} \triangleright \mathfrak{b}) \triangleright \mathfrak{c} + (\mathfrak{a} \triangleright \mathfrak{b}) \diamond \mathfrak{c} + (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{a}) \triangleright \mathfrak{c} + (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{a}) \diamond \mathfrak{c} + (\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}) \triangleright \mathfrak{c} \\
&\quad + (\mathfrak{c} \triangleright (\mathfrak{a} \triangleright \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} \triangleright (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{a}) + \mathfrak{c} \triangleright (\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b})) + (\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}) \diamond \mathfrak{c} \\
&= (\mathfrak{a} \triangleright \mathfrak{b}) \triangleright \mathfrak{c} + (\mathfrak{a} \triangleright \mathfrak{b}) \diamond \mathfrak{c} + (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{a}) \triangleright \mathfrak{c} + (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{a}) \diamond \mathfrak{c} + (\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}) \triangleright \mathfrak{c} \\
&\quad + \mathfrak{c} \triangleright (\mathfrak{a} \sqcap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}) \diamond \mathfrak{c}
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{a} \sqcap (\mathfrak{b} \sqcap \mathfrak{c}) &= \mathfrak{a} \sqcap (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{c} + \mathfrak{c} \triangleright \mathfrak{b} + \mathfrak{b} \diamond \mathfrak{c}) \\
&= \mathfrak{a} \sqcap (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{c}) + \mathfrak{a} \sqcap (\mathfrak{c} \triangleright \mathfrak{b}) + \mathfrak{a} \sqcap (\mathfrak{b} \diamond \mathfrak{c}) \\
&= (\mathfrak{a} \triangleright (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{c}) \triangleright \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \diamond (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{c})) \\
&\quad + (\mathfrak{a} \triangleright (\mathfrak{c} \triangleright \mathfrak{b}) + (\mathfrak{c} \triangleright \mathfrak{b}) \triangleright \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \diamond (\mathfrak{c} \triangleright \mathfrak{b})) \\
&\quad + (\mathfrak{a} \triangleright (\mathfrak{b} \diamond \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b} \diamond \mathfrak{c}) \triangleright \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \diamond (\mathfrak{b} \diamond \mathfrak{c})) \\
&= (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{c}) \triangleright \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \diamond (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{c}) + (\mathfrak{c} \triangleright \mathfrak{b}) \triangleright \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \diamond (\mathfrak{c} \triangleright \mathfrak{b}) + (\mathfrak{b} \diamond \mathfrak{c}) \triangleright \mathfrak{a} \\
&\quad + (\mathfrak{a} \triangleright (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{c}) + \mathfrak{a} \triangleright (\mathfrak{c} \triangleright \mathfrak{b}) + \mathfrak{a} \triangleright (\mathfrak{b} \diamond \mathfrak{c})) + \mathfrak{a} \diamond (\mathfrak{b} \diamond \mathfrak{c}) \\
&= (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{c}) \triangleright \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \diamond (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{c}) + (\mathfrak{c} \triangleright \mathfrak{b}) \triangleright \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \diamond (\mathfrak{c} \triangleright \mathfrak{b}) + (\mathfrak{b} \diamond \mathfrak{c}) \triangleright \mathfrak{a} \\
&\quad + \mathfrak{a} \triangleright (\mathfrak{b} \sqcap \mathfrak{c}) + \mathfrak{a} \diamond (\mathfrak{b} \diamond \mathfrak{c}).
\end{aligned}
$$

现在我们比较上述展开式。我们已经证明了 $(\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}) \diamond \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \diamond (\mathfrak{b} \diamond \mathfrak{c})$。另一方面，我们有

$\mathfrak{c} \triangleright (\mathfrak{a} \sqcap \mathfrak{b}) = x_{c,\ \gamma}(\mathfrak{c}^{-} \sqcap (\mathfrak{a} \sqcap \mathfrak{b}))$ 和 $(\mathfrak{c} \triangleright \mathfrak{b}) \triangleright \mathfrak{a} = x_{c,\ \gamma}(\mathfrak{c}_{-} \sqcap \mathfrak{b}) \triangleright \mathfrak{a} = x_{c,\ \gamma}((\mathfrak{c}_{-} \sqcap \mathfrak{b}) \sqcap \mathfrak{a})$。
由归纳假设和洗牌积的交换律，可推出 $\mathfrak{c} \triangleright (\mathfrak{a} \sqcap \mathfrak{b}) = (\mathfrak{c} \triangleright \mathfrak{b}) \triangleright \mathfrak{a}$。类似地，可推出 $(\mathfrak{a} \triangleright \mathfrak{b}) \triangleright \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \triangleright (\mathfrak{b} \sqcap \mathfrak{c})$。

我们有

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{a} \triangleright \mathfrak{b}) \diamond \mathfrak{c} &= x_{a,\alpha}(\mathfrak{a}_{-} \sqcap \mathfrak{b}) \diamond \mathfrak{c} = (x_{a,\alpha} \diamond x_{c,\gamma}) \triangleright ((\mathfrak{a}_{-} \sqcap \mathfrak{b}) \sqcap \mathfrak{c}_{-}), \\
\mathfrak{a} \diamond (\mathfrak{c} \triangleright \mathfrak{b}) &= \mathfrak{a} \diamond x_{c,\gamma}(\mathfrak{c}_{-} \sqcap \mathfrak{b}) = (x_{a,\alpha} \diamond x_{c,\gamma}) \triangleright (\mathfrak{a}_{-} \sqcap (\mathfrak{c}_{-} \sqcap \mathfrak{b})).
\end{aligned}
$$

由归纳假设和洗牌积的交换律，可推出 $(\mathfrak{a} \triangleright \mathfrak{b}) \diamond \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \diamond (\mathfrak{c} \triangleright \mathfrak{b})$。

我们有

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{a}) \triangleright \mathfrak{c} &= x_{b,\beta}(\mathfrak{b}_{-} \sqcap \mathfrak{a}) \triangleright \mathfrak{c} \\
&= x_{b,\beta}((\mathfrak{b}_{-} \sqcap \mathfrak{a}) \sqcap \mathfrak{c})
\end{aligned}
\quad \text{and} \quad
\begin{aligned}
(\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{c}) \triangleright \mathfrak{a} &= x_{b,\beta}(\mathfrak{b}_{-} \sqcap \mathfrak{c}) \triangleright \mathfrak{a} \\
&= x_{b,\beta}((\mathfrak{b}_{-} \sqcap \mathfrak{c}) \sqcap \mathfrak{a}).
\end{aligned}
$$

根据归纳假设以及洗牌积的交换性，可以推得 $(\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{a}) \triangleright \mathfrak{c} = (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{c}) \triangleright \mathfrak{a}$。

由归纳假设以及.....可得。

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}) \triangleright \mathfrak{c} &= \left(x_{a+b,\alpha\beta}(\mathfrak{a}_{-} \sqcap \mathfrak{b}_{-}) + \sum_{i+j=a+b} \Delta^{j}_{a,b} x_{i,\alpha\beta}(x_j \sqcap (\mathfrak{a}_{-} \sqcap \mathfrak{b}_{-})) \right) \triangleright \mathfrak{c} \\
&= x_{a+b,\alpha\beta}(\mathfrak{a}_{-} \sqcap \mathfrak{b}_{-}) \triangleright \mathfrak{c} + \sum_{i+j=a+b} \Delta^{j}_{a,b} x_{i,\alpha\beta}(x_j \sqcap (\mathfrak{a}_{-} \sqcap \mathfrak{b}_{-})) \triangleright \mathfrak{c}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= x_{a+b,\alpha\beta}((\mathfrak{a}_- \sqcap \mathfrak{b}_-) \sqcap \mathfrak{c}) + \sum_{i+j=a+b} \Delta^j_{a,b} x_{i,\alpha\beta}((x_j \sqcap (\mathfrak{a}_- \sqcap \mathfrak{b}_-)) \sqcap \mathfrak{c}) \\
&= x_{a+b,\alpha\beta}((\mathfrak{a}_- \sqcap \mathfrak{b}_-) \sqcap \mathfrak{c}) + \sum_{i+j=a+b} \Delta^j_{a,b} x_{i,\alpha\beta}(x_j \sqcap ((\mathfrak{a}_- \sqcap \mathfrak{b}_-) \sqcap \mathfrak{c})) \\
&= x_{a+b,\alpha\beta} \triangleright ((\mathfrak{a}_- \sqcap \mathfrak{b}_-) \sqcap \mathfrak{c}) + \sum_{i+j=a+b} \Delta^j_{a,b} x_{i,\alpha\beta} x_j \triangleright ((\mathfrak{a}_- \sqcap \mathfrak{b}_-) \sqcap \mathfrak{c}) \\
&= \left(x_{a+b,\alpha\beta} + \sum_{i+j=a+b} \Delta^j_{a,b} x_{i,\alpha\beta} x_j \right) \triangleright ((\mathfrak{a}_- \sqcap \mathfrak{b}_-) \sqcap \mathfrak{c}) \\
&= (x_{a,\alpha} \diamond x_{b,\beta}) \triangleright ((\mathfrak{a}_- \sqcap \mathfrak{b}_-) \sqcap \mathfrak{c})
\end{aligned}
$$

and

$$\mathfrak{a} \diamond (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \diamond x_{b,\beta}(\mathfrak{b}_- \sqcap \mathfrak{c}) = (x_{a,\alpha} \diamond x_{b,\beta}) \triangleright (\mathfrak{a}_- \sqcap (\mathfrak{b}_- \sqcap \mathfrak{c})).$$

由归纳假设可推出 $(\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}) \triangleright \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \diamond (\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{c})$。同样地，可推出 $(\mathfrak{b} \triangleright \mathfrak{a}) \diamond \mathfrak{c} = (\mathfrak{b} \diamond \mathfrak{c}) \triangleright \mathfrak{a}$。

根据上述论证，我们得出 $(\mathfrak{a} \sqcap \mathfrak{b}) \sqcap \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \sqcap (\mathfrak{b} \sqcap \mathfrak{c})$。证明至此完成。□

至于 $\mathfrak{C}$，我们定义单位元 u： $\mathbb{F}_q \to \mathfrak{D}$，将 $1 \in \mathbb{F}_q$ 映射为空字 $1 \in \mathfrak{D}$。然后，由命题 5.1 和命题5.8，我们直接得到以下结果。

定理 5.9. 空间 $(\mathfrak{D}, \diamond)$ 和 $(\mathfrak{D}, \sqcap)$ 是交换的 $\mathbb{F}_q$-代数。

以下命题总结了上述不同乘法 $\triangleright$,$\diamond$ 和 $\sqcap$ 的若干性质，这些性质在后文中将会用到。

命题 5.10. 对所有非空字 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \langle \Gamma \rangle$，我们有

(1) $(\mathfrak{a} \triangleright \mathfrak{b}) \triangleright \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \triangleright (\mathfrak{b} \sqcap \mathfrak{c})$, (2) $(\mathfrak{a} \triangleright \mathfrak{b}) \diamond \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \diamond (\mathfrak{c} \triangleright \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{c}) \triangleright \mathfrak{b}$.

5.4. 正特征中交错多重ζ值的 Shuffle 映射。

对于每个 $d \in \mathbb{Z}$，我们定义以下两个 $\mathbb{F}_q$-线性映射

$$S_{<d} \colon \mathfrak{D} \to K_\infty \quad \text{and} \quad \zeta_A \colon \mathfrak{D} \to K_\infty,$$

两者都将空字 $1 \in \mathfrak{D}$ 映射到 $1 \in K_\infty$，并将字 $x_{s_1,\varepsilon_1} \dots x_{s_r,\varepsilon_r}$分别映射到 $S_{<d}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n \\ s_1 & \cdots & s_n \end{pmatrix}$ 和 $\zeta_A\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n \\ s_1 & \cdots & s_n \end{pmatrix}$，识别表示

$$
\begin{aligned}
S_{<d}(x_{s_1,\varepsilon_1} \dots x_{s_r,\varepsilon_r}) &= S_{<d}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n \\ s_1 & \cdots & s_n \end{pmatrix}, \\
\zeta_A(x_{s_1,\varepsilon_1} \dots x_{s_r,\varepsilon_r}) &= \zeta_A\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n \\ s_1 & \cdots & s_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

定理 5.11。对于 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b} \in \mathfrak{D}$ 和 $d \in \mathbb{Z}$，我们有

$$
\begin{aligned}
S_{<d}(\mathfrak{a} \sqcap \mathfrak{b}) &= S_{<d}(\mathfrak{a}) S_{<d}(\mathfrak{b}). \\
\zeta_A(\mathfrak{a} \sqcap \mathfrak{b}) &= \zeta_A(\mathfrak{a}) \zeta_A(\mathfrak{b}).
\end{aligned}
$$

证明。定义 $\sqcap$ 乘法是为了满足这个等式。我们可以如下验证，$\sqcap$ 遵循幂和乘法的归纳步骤，而 ζ_A 则遵循相应步骤。

当 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 中任意一个为空字时，定理显然成立。设 $\mathfrak{a} = x_{a,\alpha}\mathfrak{a}_-$ 和 $\mathfrak{b} = x_{b,\beta}\mathfrak{b}_-$ 为非空字。我们对深度($\mathfrak{a}$) + 深度($\mathfrak{b}$)进行归纳证明。按照 [25, 引理 2。5] 的证明，并应用引理4.1，

$$\begin{aligned}
S_{<d}(\mathfrak{a})S_{<d}(\mathfrak{b}) &= \sum_{m<d} S_m(x_{a,\alpha})S_{<m}(\mathfrak{a}_-)S_{<m}(\mathfrak{b}) + \sum_{m<d} S_m(x_{b,\beta})S_{<m}(\mathfrak{a})S_{<m}(\mathfrak{b}_-) \\
&\quad + \sum_{m<d} S_m(x_{a,\alpha})S_m(x_{b,\beta})S_{<m}(\mathfrak{a}_-)S_{<m}(\mathfrak{b}_-) \\
&= \sum_{m<d} S_m(x_{a,\alpha})S_{<m}(\mathfrak{a}_-)S_{<m}(\mathfrak{b}) + \sum_{m<d} S_m(x_{b,\beta})S_{<m}(\mathfrak{a})S_{<m}(\mathfrak{b}_-) \\
&\quad + \sum_{m<d} S_m(x_{a+b,\alpha\beta})S_{<m}(\mathfrak{a}_-)S_{<m}(\mathfrak{b}_-) \\
&\quad + \sum_{m<d} \Delta^j_{a,b} \sum_{i+j=a+b} S_m(x_{i,\alpha\beta}x_j)S_{<m}(\mathfrak{a}_-)S_{<m}(\mathfrak{b}_-).
\end{aligned}$$

这与$\sqcap$的递归定义相对应。 ζ_A的证明相同。 □

6. Shuffle Hopf algebra of AMZV's

在§5 节中，我们定义了交错多重ζ值的洗牌代数结构。本节致力于构造交错多重ζ值的霍普夫代数结构。在§6.1 节中，我们给出了字代数 $\mathfrak{D}$上的余乘。在§6.2 节中，我们证明了定理6.5中的余乘相容性。与多重ζ值的情形不同，该定理的证明使用深度归纳法，而非按权归纳。接着，在§6.3 节中，我们证明了定理6.8中的余乘余结合性。综合以上结果，我们得到本文的主要结论（见定理6.9）。

6.1. 余乘。

本节受我们先前工作的启发[32, §8]。我们将介绍余乘

$$\Delta : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D} \otimes \mathfrak{D}.$$

首先，我们定义深度为一时的余乘。令

$$\Delta(1) := 1 \otimes 1, \qquad \Delta(x_{1,\varepsilon}) := 1 \otimes x_{1,\varepsilon} + x_{1,\varepsilon} \otimes 1$$

对所有 $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*$。

此外，我们如下定义深度为一时的余乘。

定义 6.1. 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*$，令

$$\Delta(x_{n,\varepsilon}) = 1 \otimes x_{n,\varepsilon} + \sum_{\substack{r\in\mathbb{N},\mathfrak{a}\in\langle\Sigma\rangle \\ r+w(\mathfrak{a})=n}} \binom{r+\operatorname{depth}(\mathfrak{a})-2}{\operatorname{depth}(\mathfrak{a})} x_{r,\varepsilon} \otimes [\mathfrak{a}].$$

在此我们回顾 $[\mathfrak{a}]$ 由（3.2）给出，并且我们将 $\mathfrak{a} \in \Sigma$ 与 $\varphi_1(\mathfrak{a}) \in \Gamma$等同。

接下来，我们定义深度大于一的字的余乘。设 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n > 1$，并假设我们已对所有深度$(\mathfrak{u}) < n$的字 $\mathfrak{u}$ 定义了 $\Delta(\mathfrak{u})$。现在我们给出所有深度$(\mathfrak{u}) = n$的字 $\mathfrak{u}$ 的 $\Delta(\mathfrak{u})$的公式。对于这样的字 $\mathfrak{u}$，我们令$\mathfrak{u} = x_{u,\varepsilon}\mathfrak{v}$ 满足深度$(\mathfrak{v}) = n-1 < n$。由于 $x_{u,\varepsilon}$ 和 $\mathfrak{v}$ 的深度都严格小于 n，我们已经定义了

$$\Delta(x_{u,\varepsilon}) = 1 \otimes x_{u,\varepsilon} + \sum a_{u,\varepsilon} \otimes b_{u,\varepsilon}, \text{ and } \quad \Delta(\mathfrak{v}) = \sum a_{\mathfrak{v}} \otimes b_{\mathfrak{v}},$$

其中$a_{u,\varepsilon} \in \Gamma$ 和$b_{u,\varepsilon}$、 $a_{\mathfrak{v}}$、 $b_{\mathfrak{v}} \in \langle\Gamma\rangle$。然后我们设

$$\begin{aligned}\Delta(\mathfrak{u}) &:= 1 \otimes \mathfrak{u} + \sum (a_{u,\varepsilon} \triangleright a_{\mathfrak{v}}) \otimes (b_{u,\varepsilon} \sqcap\!\sqcap b_{\mathfrak{v}}) \\ &= 1 \otimes \mathfrak{u} + \sum (a_{u,\varepsilon} a_{\mathfrak{v}}) \otimes (b_{u,\varepsilon} \sqcap\!\sqcap b_{\mathfrak{v}}).\end{aligned}$$

这里最后一个等式成立，因为$a_{u,\varepsilon} \in \Gamma$。

我们以证明以下结果结束本节：

命题 6.2. 对任意非空字 $\mathfrak{u} \in \langle\Gamma\rangle$，我们有

$$\Delta\left(\varphi_\varepsilon(\mathfrak{u})\right) = \left(\varphi_\varepsilon \otimes \mathrm{Id}\right)\left(\Delta(\mathfrak{u})\right) + (\mathrm{Id} \otimes \varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(1 \otimes \mathfrak{u}).$$

证明。注意，对于 $\mathfrak{a} = x_a\mathfrak{a}_- \in \langle\Gamma\rangle$, $\mathfrak{b} \in \langle\Gamma\rangle$ 和 $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*$,

$$\varphi_\varepsilon(\mathfrak{a}) \triangleright \mathfrak{b} = x_{a,\varepsilon}(\mathfrak{a}_- \sqcap\!\sqcap \mathfrak{b}) = \varphi_\varepsilon(\mathfrak{a} \triangleright \mathfrak{b}).$$

我们提到，当 $\mathfrak{a} = 1$时，这不成立。

我们首先考虑深度$(\mathfrak{u}) = 1$的情形，即 $\mathfrak{u}$ 属于 Γ。我们令$\mathfrak{u} = x_{n,\alpha}$，其中 $n \in \mathbb{N}$ 且 $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$。因此 $\varphi_\varepsilon(\mathfrak{u}) = x_{n,\varepsilon\alpha} = \varphi_{\varepsilon\alpha}(x_n)$。

回顾（参见命题3.6）

$$\Delta(x_n) = 1 \otimes x_n + \sum_{\substack{r \in \mathbb{N}, \mathfrak{a} \in \langle\Sigma\rangle \\ r + w(\mathfrak{a}) = n}} \binom{r + \mathrm{depth}(\mathfrak{a}) - 2}{\mathrm{depth}(\mathfrak{a})} x_r \otimes [\mathfrak{a}].$$

因此，定义 6.1 可以写成

$$\begin{aligned}\Delta\left(\mathfrak{u}\right) &= \Delta\left(\varphi_\alpha(x_n)\right) \\ &= \left(\varphi_\alpha \otimes \mathrm{Id}\right)\left(\Delta(x_n) - 1 \otimes x_n\right) + \left(\mathrm{Id} \otimes \varphi_\alpha\right)\left(1 \otimes x_n\right) \\ &= \left(\varphi_\alpha \otimes \mathrm{Id}\right)\left(\Delta(x_n)\right) + \left(\mathrm{Id} \otimes \varphi_\alpha - \varphi_\alpha \otimes \mathrm{Id}\right)\left(1 \otimes x_n\right).\end{aligned}$$

类似地，

$$\begin{aligned}\Delta\left(\varphi_\varepsilon(\mathfrak{u})\right) &= \Delta\left(\varphi_{\varepsilon\alpha}(x_n)\right) \\ &= \left(\varphi_{\varepsilon\alpha} \otimes \mathrm{Id}\right)\left(\Delta(x_n) - 1 \otimes x_n\right) + \left(\mathrm{Id} \otimes \varphi_{\varepsilon\alpha}\right)\left(1 \otimes x_n\right) \\ &= \left(\varphi_{\varepsilon\alpha} \otimes \mathrm{Id}\right)\left(\Delta(x_n)\right) + \left(\mathrm{Id} \otimes \varphi_{\varepsilon\alpha} - \varphi_{\varepsilon\alpha} \otimes \mathrm{Id}\right)\left(1 \otimes x_n\right).\end{aligned}$$

根据引理 5.5，我们得出，对于$\mathfrak{u} = x_{n,\alpha}$,

$$\Delta\left(\varphi_\varepsilon(\mathfrak{u})\right) = \left(\varphi_\varepsilon \otimes \mathrm{Id}\right)\left(\Delta(\mathfrak{u})\right) + (\mathrm{Id} \otimes \varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(1 \otimes \mathfrak{u}).$$

接下来，假设$\mathfrak{u} = x_{u,\alpha}\mathfrak{v} \in \langle\Gamma\rangle$ 且其深度为$(\mathfrak{u}) \geq 2$。令 $\Delta(x_u) = 1 \otimes x_u + \sum a_u \otimes b_u$, 并令 $\Delta(\mathfrak{v}) = \sum a_{\mathfrak{v}} \otimes b_{\mathfrak{v}}$。我们有 $a_u \in \Sigma$, $b_u \in \langle\Sigma\rangle$ 其中 $a_u \neq 1$ 由引理3.3，且 $a_{\mathfrak{v}}$, $b_{\mathfrak{v}} \in \langle\Gamma\rangle$。我们已经看到

$$\Delta(x_{u,\alpha}) = 1 \otimes x_{u,\alpha} + \sum a_{u,\alpha} \otimes b_u.$$

根据定义，

$$\begin{aligned}\Delta(\mathfrak{u}) &= 1\otimes\mathfrak{u} + \sum (a_{u,\alpha} \triangleright a_{\mathfrak{v}}) \otimes (b_u \sqcap\!\sqcap b_{\mathfrak{v}}) \\ &= 1\otimes\mathfrak{u} + \sum (a_{u,\alpha} a_{\mathfrak{v}}) \otimes (b_u \sqcap\!\sqcap b_{\mathfrak{v}}).\end{aligned}$$

最后一个等式源于以下事实：深度$(a_{u,\alpha}) = 1$。

由于 $\varphi_\varepsilon(\mathfrak{u}) = x_{u,\ \varepsilon\alpha}\mathfrak{v}$ 且 $\Delta(\varphi_\varepsilon(x_{u,\ \alpha})) = 1\otimes\varphi_\varepsilon(x_{u,\ \alpha}) + \sum \varphi_\varepsilon(a_{u,\ \alpha})\otimes b_u$，

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi_\varepsilon(\mathfrak{u})) &= \Delta(\varphi_\varepsilon(x_{u,\alpha})\mathfrak{v}) \\ &= 1\otimes\varphi_\varepsilon(\mathfrak{u}) + \sum (\varphi_\varepsilon(a_{u,\alpha})a_{\mathfrak{v}}) \otimes (b_u \sqcap\!\sqcap b_{\mathfrak{v}}) \\ &= 1\otimes\varphi_\varepsilon(\mathfrak{u}) + \sum \varphi_\varepsilon(a_{u,\alpha}a_{\mathfrak{v}}) \otimes (b_u \sqcap\!\sqcap b_{\mathfrak{v}}).\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\Delta(\varphi_\varepsilon(\mathfrak{u})) = (\varphi_\varepsilon\otimes\mathrm{Id})(\Delta(\mathfrak{u})) + (\mathrm{Id}\otimes\varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\otimes\mathrm{Id})(1\otimes\mathfrak{u}).$$

□

6.2. 相容性。

6.2.1. 字母的相容性。

我们想要证明以下结果（关于多重ζ值，参见[32, 命题 7。5]）：

命题 6.3. 设 $u, v\in\mathbb{N}$ 和 $\alpha,\beta\in\mathbb{F}_q^*$。则

$$\Delta(x_{u,\alpha} \sqcap\!\sqcap x_{v,\beta}) = \Delta(x_{u,\alpha}) \sqcap\!\sqcap \Delta(x_{v,\beta}).$$

证明. 设

$$\Delta(x_u) = 1\otimes x_u + \sum a_u\otimes b_u, \quad \Delta(x_v) = 1\otimes x_v + \sum a_v\otimes b_v.$$

由命题6.2，我们有

$$\Delta(x_{u,\alpha}) = 1\otimes x_{u,\alpha} + \sum a_{u,\alpha}\otimes b_u, \quad \Delta(x_{v,\beta}) = 1\otimes x_{v,\beta} + \sum a_{v,\beta}\otimes b_v,$$

其中 $a_{u,\ \alpha} = \varphi_\alpha(a_u)$ 和 $a_{v,\ \beta} = \varphi_\beta(a_v)$。这里回顾一下，$a_u$ 和 a_v 的深度均为 1。

由于$x_{u,\ \alpha} \sqcap\!\sqcap x_{v,\ \beta} = x_{u,\ \alpha}x_{v,\ \beta} + x_{v,\ \beta}x_{u,\ \alpha} + \varphi_{\alpha\beta}(x_u \diamond x_v)$（根据引理5.4），

$$\begin{aligned}\Delta(x_{u,\alpha} \sqcap\!\sqcap x_{v,\beta}) =& 1\otimes x_{u,\alpha}x_{v,\beta} + \sum a_{u,\alpha}\otimes(b_u \sqcap\!\sqcap x_{v,\beta}) + \sum (a_{u,\alpha}a_{v,\beta})\otimes(b_u \sqcap\!\sqcap b_v) \\ &+ 1\otimes x_{v,\beta}x_{u,\alpha} + \sum a_{v,\beta}\otimes(b_v \sqcap\!\sqcap x_{u,\alpha}) + \sum (a_{v,\beta}a_{u,\alpha})\otimes(b_v \sqcap\!\sqcap b_u) \\ &+ \Delta(\varphi_{\alpha\beta}(x_u \diamond x_v)).\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\Delta(x_{u,\alpha}) \sqcap\!\sqcap \Delta(x_{v,\beta}) =& 1\otimes(x_{u,\alpha} \sqcap\!\sqcap x_{v,\beta}) + \sum a_{u,\alpha}\otimes(b_u \sqcap\!\sqcap x_{v,\beta}) \\ &+ \sum a_{v,\beta}\otimes(b_v \sqcap\!\sqcap x_{u,\alpha}) + \sum (a_{u,\alpha} \sqcap\!\sqcap a_{v,\beta})\otimes(b_u \sqcap\!\sqcap b_v).\end{aligned}$$

在每个张量因子中展开⊓⊓ 并消去后，该命题成立，当

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi_{\alpha\beta}(x_u \diamond x_v)) &= 1\otimes\varphi_{\alpha\beta}(x_u \diamond x_v) + \sum (a_{u,\alpha} \diamond a_{v,\beta})\otimes(b_u \sqcap\!\sqcap b_v) \\ &= 1\otimes\varphi_{\alpha\beta}(x_u \diamond x_v) + (\varphi_{\alpha\beta}\otimes\mathrm{Id})\left(\sum (a_u \diamond a_v)\otimes(b_u \sqcap\!\sqcap b_v)\right).\end{aligned}$$

根据命题 6.2，该命题归结为

$$\Delta(x_u \diamond x_v) = 1 \otimes (x_u \diamond x_v) + \sum (a_u \diamond a_v) \otimes (b_u \sqcup\!\sqcup b_v),$$

这是引理3.4的特例。 □

6.2.2. 任意深度字的相容性。

引理 6.4. 设 $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \langle \Gamma \rangle$。那么，$\mathfrak{u} \sqcup\!\sqcup \mathfrak{v}$ 可以表示为若干字之和，这些字的深度均小于或等于 $\mathrm{depth}(\mathfrak{u}) + \mathrm{depth}(\mathfrak{v})$。

证明. 我们对总深度 $\mathrm{depth}(\mathfrak{u}) + \mathrm{depth}(\mathfrak{v})$ 进行归纳。

当 $\mathfrak{u}$ 或 $\mathfrak{v}$ 是平凡情形时，引理显然成立。若 $\mathfrak{u} = x_{u,\alpha}$ 且 $\mathfrak{v} = x_{v,\beta}$，则由表达式也可立即得到该引理

$$\mathfrak{u} \sqcup\!\sqcup \mathfrak{v} = x_{u+v,\alpha\beta} + x_{u,\alpha}x_{v,\beta} + x_{v,\beta}x_{u,\alpha} + \sum_{i+j=u+v} \Delta^j_{u,v} x_{i,\alpha\beta} x_j.$$

因此我们假设 $\mathrm{depth}(\mathfrak{u})$、$\mathrm{depth}(\mathfrak{v}) \geq 1$，且 $\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{v}$ 中至少有一个的深度为 > 1。现在假设对于所有满足 $\mathrm{depth}(\mathfrak{a}) + \mathrm{depth}(\mathfrak{b}) < \mathrm{depth}(\mathfrak{u}) + \mathrm{depth}(\mathfrak{v})$ 的 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b} \in \langle \Gamma \rangle$，引理均成立。令 $\mathfrak{u} = x_{u,\alpha}\mathfrak{u}_-$, $\mathfrak{v} = x_{v,\beta}\mathfrak{v}_-$。那么

$$\begin{aligned} x_{u,\alpha}\mathfrak{u}_- \sqcup\!\sqcup x_{v,\beta}\mathfrak{v}_- &= x_{u+v,\alpha\beta}(\mathfrak{u}_- \sqcup\!\sqcup \mathfrak{v}_-) + x_{u,\alpha}(\mathfrak{u}_- \sqcup\!\sqcup \mathfrak{v}) + x_{v,\beta}(\mathfrak{u} \sqcup\!\sqcup \mathfrak{v}_-) \\ &\quad + \sum_{i+j=u+v} \Delta^j_{u,v} x_{i,\alpha\beta}(x_j \sqcup\!\sqcup \mathfrak{u}_- \sqcup\!\sqcup \mathfrak{v}_-) \end{aligned}$$

根据归纳假设，前三项可以表示为深度小于或等于 $\mathrm{depth}(\mathfrak{u} + \mathfrak{v} + j\ x_j \sqcup\!\sqcup \mathfrak{u}_- = \mathfrak{u}_- \sqcup\!\sqcup x_j)$ 的字之和。对于每个，根据归纳假设，可以表示为深度小于或等于 $\mathrm{depth}(\mathfrak{u})$ 的字之和。因此，$x_i(x_j \sqcup\!\sqcup \mathfrak{u}_- \sqcup\!\sqcup \mathfrak{v}_-)$ 可以表示为深度 $\mathrm{depth}(\mathfrak{u}) + \mathrm{depth}(\mathfrak{v})$ 的字之和。这就证明了该引理。□

Δ 与$\sqcup\!\sqcup$ 关于 $\langle \Gamma \rangle$ 的相容性证明，与 $\langle \Sigma \rangle$的情形平行。

定理6.5. 设 $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \langle \Gamma \rangle$。那么 Δ 与$\sqcup\!\sqcup$ 关于 $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$相容，也就是说

$$\Delta(\mathfrak{u} \sqcup\!\sqcup \mathfrak{v}) = \Delta(\mathfrak{u}) \sqcup\!\sqcup \Delta(\mathfrak{v}).$$

注意，当 $\mathfrak{u}$ 或 $\mathfrak{v}$ 是平凡的时，该定理显然成立。此外，深度为$(\mathfrak{u}) = $深度为$(\mathfrak{v}) = 1$ 的情形已在命题6.3中证明。在证明该定理之前，我们需要一些准备性结果。

引理6.6. 设$\mathfrak{u} = x_{u,\alpha}\mathfrak{u}_-$, $\mathfrak{v} = x_{v,\beta}\mathfrak{v}_-$ 是 $\langle \Gamma \rangle$中的两个字，其深度分别为≥ 1。假设对于所有深度$(\mathfrak{a}) + $ 深度$(\mathfrak{b}) < \mathfrak{u} + \mathfrak{v}$ 的字 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \langle \Gamma \rangle$，$\Delta$ 与$\sqcup\!\sqcup$ 都相容。此外，我们假设 $\Delta(x_u\mathfrak{u}_- \sqcup\!\sqcup x_v\mathfrak{v}_-) = \Delta(x_u\mathfrak{u}_-) \sqcup\!\sqcup \Delta(x_v\mathfrak{v}_-)$。

于是我们有

$$\Delta(\mathfrak{u} \sqcup\!\sqcup \mathfrak{v}) = \Delta(\mathfrak{u}) \sqcup\!\sqcup \Delta(\mathfrak{v}).$$

证明。设

$$\begin{aligned} &\Delta(x_u) = 1 \otimes x_u + \sum a_u \otimes b_u, && \Delta(x_v) = 1 \otimes x_v + \sum a_v \otimes b_v, \\ &\Delta(\mathfrak{u}_-) = \sum a_{\mathfrak{u}_-} \otimes b_{\mathfrak{u}_-}, && \Delta(\mathfrak{v}_-) = \sum a_{\mathfrak{v}_-} \otimes b_{\mathfrak{v}_-}, \end{aligned}$$

与 $x_u, x_v, a_u, a_v \in \Sigma$, $b_u, b_v \in \langle\Sigma\rangle$ 以及 $a_{\mathfrak{u}_-}, b_{\mathfrak{u}_-}, a_{\mathfrak{v}_-}, b_{\mathfrak{v}_-} \in \langle\Gamma\rangle$。我们有

$$\Delta(x_{u,\alpha}) = 1 \otimes x_{u,\alpha} + \sum a_{u,\alpha} \otimes b_u,$$
$$\Delta(x_{v,\beta}) = 1 \otimes x_{v,\beta} + \sum a_{v,\beta} \otimes b_v,$$

其中 $a_{u,\ \alpha} = \varphi_\alpha(a_u)$, $a_{v,\ \beta} = \varphi_\beta(a_v)$。注意,

$$\Delta(x_{u,\alpha}\mathfrak{u}_-) = 1 \otimes x_{u,\alpha}\mathfrak{u}_- + \sum a_{u,\alpha}a_{\mathfrak{u}_-} \otimes (b_u \mathbin{\text{⧢}} b_{\mathfrak{u}_-}),$$
$$\Delta(x_{v,\beta}\mathfrak{v}_-) = 1 \otimes x_{v,\beta}\mathfrak{v}_- + \sum a_{v,\beta}a_{\mathfrak{v}_-} \otimes (b_v \mathbin{\text{⧢}} b_{\mathfrak{v}_-}).$$

因此，我们有

(6.1)

$$\begin{aligned}
&\Delta(\mathfrak{u}) \mathbin{\text{⧢}} \Delta(\mathfrak{v}) = \Delta(x_{u,\alpha}\mathfrak{u}_-) \mathbin{\text{⧢}} \Delta(x_{v,\beta}\mathfrak{v}_-)\\
=&\Big(1 \otimes x_{u,\alpha}\mathfrak{u}_- + \sum a_{u,\alpha}a_{\mathfrak{u}_-} \otimes (b_u \mathbin{\text{⧢}} b_{\mathfrak{u}_-})\Big) \mathbin{\text{⧢}} \Big(1 \otimes x_{v,\beta}\mathfrak{v}_- + \sum a_{v,\beta}a_{\mathfrak{v}_-} \otimes (b_v \mathbin{\text{⧢}} b_{\mathfrak{v}_-})\Big)\\
=&1 \otimes (x_{u,\alpha}\mathfrak{u}_- \mathbin{\text{⧢}} x_{v,\beta}\mathfrak{v}_-) + \sum a_{v,\beta}a_{\mathfrak{v}_-} \otimes (x_{u,\alpha}\mathfrak{u}_- \mathbin{\text{⧢}} b_v \mathbin{\text{⧢}} b_{\mathfrak{v}_-})\\
&+ \sum a_{u,\alpha}a_{\mathfrak{u}_-} \otimes (x_{v,\beta}\mathfrak{v}_- \mathbin{\text{⧢}} b_u \mathbin{\text{⧢}} b_{\mathfrak{u}_-}) + \sum (a_{u,\alpha}a_{\mathfrak{u}_-} \mathbin{\text{⧢}} a_{v,\beta}a_{\mathfrak{v}_-}) \otimes (b_u \mathbin{\text{⧢}} b_v \mathbin{\text{⧢}} b_{\mathfrak{u}_-} \mathbin{\text{⧢}} b_{\mathfrak{v}_-}).
\end{aligned}$$

另一方面，根据引理 5.4 和引理 5.7

$$\mathfrak{u} \mathbin{\text{⧢}} \mathfrak{v} = \mathfrak{u} \triangleright \mathfrak{v} + \mathfrak{v} \triangleright \mathfrak{u} + \varphi_{\alpha\beta}(x_u\mathfrak{u}_- \diamond x_v\mathfrak{v}_-),$$

因此我们有

$$\Delta(\mathfrak{u} \mathbin{\text{⧢}} \mathfrak{v}) = S_1 + S_2 + S_3 \tag{6.2}$$

其中

$$\begin{aligned}
S_1 &= \Delta(\mathfrak{u} \triangleright \mathfrak{v}) = \Delta(x_{u,\alpha}(\mathfrak{u}_- \mathbin{\text{⧢}} \mathfrak{v})),\\
S_2 &= \Delta(\mathfrak{v} \triangleright \mathfrak{u}) = \Delta(x_{v,\beta}(\mathfrak{v}_- \mathbin{\text{⧢}} \mathfrak{u})),\\
S_3 &= \Delta(\varphi_{\alpha\beta}(x_u\mathfrak{u}_- \diamond x_v\mathfrak{v}_-))\\
&= (\varphi_{\alpha\beta} \otimes \mathrm{Id})\Delta(x_u\mathfrak{u}_- \diamond x_v\mathfrak{v}_-) + (\mathrm{Id} \otimes \varphi_{\alpha\beta} - \varphi_{\alpha\beta} \otimes \mathrm{Id})(1 \otimes (x_u\mathfrak{u}_- \diamond x_v\mathfrak{v}_-)).
\end{aligned}$$

我们计算 S_1 和 S_2。由于深度($\mathfrak{u}_-$) +深度($\mathfrak{v}$) < 深度($\mathfrak{u}$) + 深度($\mathfrak{v}$)，归纳假设给出

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathfrak{u}_- \mathbin{\text{⧢}} \mathfrak{v}) &= \Delta(\mathfrak{u}_-) \mathbin{\text{⧢}} \Delta(x_{v,\beta}\mathfrak{v}_-)\\
&= \Big(\sum a_{\mathfrak{u}_-} \otimes b_{\mathfrak{u}_-}\Big) \mathbin{\text{⧢}} \Big(1 \otimes x_{v,\beta}\mathfrak{v}_- + \sum a_{v,\beta}a_{\mathfrak{v}_-} \otimes (b_v \mathbin{\text{⧢}} b_{\mathfrak{v}_-})\Big)\\
&= \sum a_{\mathfrak{u}_-} \otimes (b_{\mathfrak{u}_-} \mathbin{\text{⧢}} x_{v,\beta}\mathfrak{v}_-) + \sum (a_{\mathfrak{u}_-} \mathbin{\text{⧢}} a_{v,\beta}a_{\mathfrak{v}_-}) \otimes (b_v \mathbin{\text{⧢}} b_{\mathfrak{u}_-} \mathbin{\text{⧢}} b_{\mathfrak{v}_-}),
\end{aligned}$$

so

$$\begin{aligned}
S_1 = 1 \otimes (x_{u,\alpha}(\mathfrak{u}_- \mathbin{\text{⧢}} \mathfrak{v})) &+ \sum a_{u,\alpha}a_{\mathfrak{u}_-} \otimes (b_u \mathbin{\text{⧢}} b_{\mathfrak{u}_-} \mathbin{\text{⧢}} x_{v,\beta}\mathfrak{v}_-)\\
&+ \sum a_{u,\alpha}(a_{\mathfrak{u}_-} \mathbin{\text{⧢}} a_{v,\beta}a_{\mathfrak{v}_-}) \otimes (b_u \mathbin{\text{⧢}} b_v \mathbin{\text{⧢}} b_{\mathfrak{u}_-} \mathbin{\text{⧢}} b_{\mathfrak{v}_-}).
\end{aligned}$$

类似的计算得出

$$\begin{aligned}
S_2 = 1 \otimes (x_{v,\beta}(\mathfrak{u} \mathbin{\text{⧢}} \mathfrak{v}_-)) &+ \sum a_{v,\beta}a_{\mathfrak{v}_-} \otimes (b_v \mathbin{\text{⧢}} b_{\mathfrak{v}_-} \mathbin{\text{⧢}} x_{u,\alpha}\mathfrak{u}_-)\\
&+ \sum a_{v,\beta}(a_{\mathfrak{v}_-} \mathbin{\text{⧢}} a_{u,\alpha}a_{\mathfrak{u}_-}) \otimes (b_u \mathbin{\text{⧢}} b_v \mathbin{\text{⧢}} b_{\mathfrak{u}_-} \mathbin{\text{⧢}} b_{\mathfrak{v}_-}).
\end{aligned}$$

我们想要证明的是两个方程 (6.1) 和 (6.2) 重合，即$X := \Delta(\mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}) - \Delta(\mathfrak{u}) \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \Delta(\mathfrak{v}) = 0$.

首先，我们收集形如 $1\otimes\square$ 的项。X 中这类项的右张量因子的方程为

$$\begin{aligned}
&x_{u,\alpha}(\mathfrak{u}_- \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{v}) + x_{v,\beta}(\mathfrak{u} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{v}_-) + \varphi_{\alpha\beta}(x_u\mathfrak{u}_- \diamond x_v\mathfrak{v}_-) - (x_u\mathfrak{u}_- \diamond x_v\mathfrak{v}_-) - \mathfrak{u} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{v} \\
&= x_{u,\alpha}(\mathfrak{u}_- \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{v}) + x_{v,\beta}(\mathfrak{u} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{v}_-) + \varphi_{\alpha\beta}(x_u\mathfrak{u}_- \diamond x_v\mathfrak{v}_-) - (x_u\mathfrak{u}_- \diamond x_v\mathfrak{v}_-) \\
&\quad - \mathfrak{u} \triangleright \mathfrak{v} - \mathfrak{v} \triangleright \mathfrak{u} - \mathfrak{u} \diamond \mathfrak{v} \\
&= -(x_u\mathfrak{u}_- \diamond x_v\mathfrak{v}_-)
\end{aligned}$$

根据引理 5.4，也就是说，形如 $1 \otimes \square$ 的项在 X 中收集为

$$-1 \otimes (x_u\mathfrak{u}_- \diamond x_v\mathfrak{v}_-).$$

接下来，我们收集形如 $\sum \square \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{u}_-} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{v}_-})$ 的项。对于固定的指标，X 中这类项的左张量因子的方程为

$$\begin{aligned}
&a_{u,\alpha}(a_{\mathfrak{u}_-} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} a_{v,\beta}a_{\mathfrak{v}_-}) + a_{v,\beta}(a_{\mathfrak{v}_-} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} a_{u,\alpha}a_{\mathfrak{u}_-}) - (a_{u,\alpha}a_{\mathfrak{u}_-} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} a_{v,\beta}a_{\mathfrak{v}_-}) \\
&= -\varphi_{\alpha\beta}(a_ua_{\mathfrak{u}_-} \diamond a_va_{\mathfrak{v}_-}),
\end{aligned}$$

将第三项展开为洗牌积并化简即可得到。也就是说，X 中这类项收集为

$$-(\varphi_{\alpha\beta} \otimes \mathrm{Id}) \sum (a_ua_{\mathfrak{u}_-} \diamond a_va_{\mathfrak{v}_-}) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{u}_-} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{v}_-}).$$

其余的一些项彼此抵消。可以验证

$$\begin{aligned}
X =&(\varphi_{\alpha\beta} \otimes \mathrm{Id})\Delta(x_u\mathfrak{u}_- \diamond x_v\mathfrak{v}_-) - 1 \otimes (x_u\mathfrak{u}_- \diamond x_v\mathfrak{v}_-) \\
&- (\varphi_{\alpha\beta} \otimes \mathrm{Id}) \sum (a_ua_{\mathfrak{u}_-} \diamond a_va_{\mathfrak{v}_-}) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{u}_-} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{v}_-}),
\end{aligned}$$

当.....为零时

(6.3)

$$\Delta(x_u\mathfrak{u}_- \diamond x_v\mathfrak{v}_-) = 1 \otimes (x_u\mathfrak{u}_- \diamond x_v\mathfrak{v}_-) + \sum (a_ua_{\mathfrak{u}_-} \diamond a_va_{\mathfrak{v}_-}) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{u}_-} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{v}_-}).$$

回想引理的假设，$\Delta(x_u\mathfrak{u}_- \sqcap x_v\mathfrak{v}_-) = \Delta(x_u\mathfrak{u}_-) \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \Delta(x_v\mathfrak{v}_-)$。利用$\sqcap$、$\diamond$的定义进行展开并计算后，即可得出所需的等式（6.3）。因此引理得证。□

命题6.7. 设 $x_u\mathfrak{u}$、$x_v\mathfrak{v}$ 是 $\langle\Gamma\rangle$中的两个字，其首字母具有平凡特征 $1 \in \mathbb{F}_{q^\circ}^*$ 若对于所有满足深度$(\mathfrak{a})$ + 深度$(\mathfrak{b})$ < 深度$(x_u\mathfrak{u})$ + 深度$(x_v\mathfrak{v})$的字 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b} \in \langle\Gamma\rangle$，$\Delta$ 和$\sqcap$ 均相容，则

$$\Delta(x_u\mathfrak{u} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} x_v\mathfrak{v}) = \Delta(x_u\mathfrak{u}) \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \Delta(x_v\mathfrak{v}).$$

证明的思路与 [32, 命题7.4], 的证明十分相似，唯一的区别在于，此处的归纳步骤是基于深度而非权归纳法。为清楚起见，我们给出完整证明。

注意该证明对 $\mathfrak{u} = 1$ 或 $\mathfrak{v} = 1$ 情况有效。在那些情况下，某些求和表示是空的，即如果 $\mathfrak{u} = 1$，则指标集 $\{(a_\mathfrak{u}, b_\mathfrak{u})\}$ 在 $\Delta(\mathfrak{u}) = 1 \otimes \mathfrak{u} + \sum a_\mathfrak{u} \otimes b_\mathfrak{u}$ 的求和表示中为空集。

命题的证明 *6.7*。根据 $\sqcap$ 的定义和引理 5.7，我们有

(6.4)

$$x_u\mathfrak{u} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} x_v\mathfrak{v}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x_u\mathfrak{u}) \triangleright (x_v\mathfrak{v}) + (x_v\mathfrak{v}) \triangleright (x_u\mathfrak{u}) + (x_u\mathfrak{u}) \diamond (x_v\mathfrak{v}) \\
&= x_v(x_u\mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}) + x_u(\mathfrak{u} \sqcap (x_v\mathfrak{v})) + (x_u \diamond x_v) \triangleright (\mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}) \\
&= x_v(x_u\mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}) + x_u(\mathfrak{u} \sqcap (x_v\mathfrak{v})) + x_{u+v}(\mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}) + \sum_{i+j=u+v} \Delta^j_{u,v} x_i(x_j \sqcap \mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}).
\end{aligned}
$$

因此，我们得到

$$
\begin{aligned}
(6.5) \qquad & \Delta(x_u\mathfrak{u} \sqcap x_v\mathfrak{v}) - \Delta(x_u\mathfrak{u}) \sqcap \Delta(x_v\mathfrak{v}) \\
=& \Delta(x_v(x_u\mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v})) + \Delta(x_u(\mathfrak{u} \sqcap x_v\mathfrak{v})) + \Delta(x_{u+v}(\mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v})) \\
&+ \sum_{i+j=u+v} \Delta^j_{u,v} \Delta(x_i(x_j \sqcap \mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v})) - \Delta(x_u\mathfrak{u}) \sqcap \Delta(x_v\mathfrak{v}).
\end{aligned}
$$

我们计算右侧的每一项，从而得出该式为零。我们设定

$$\Delta(\mathfrak{u}) = 1 \otimes \mathfrak{u} + \sum a_\mathfrak{u} \otimes b_\mathfrak{u}, \text{ and } \Delta(\mathfrak{v}) = 1 \otimes \mathfrak{v} + \sum a_\mathfrak{v} \otimes b_\mathfrak{v}.$$

此外，对于所有 $j \in \mathbb{N}$，我们设定

$$\Delta(x_j) = 1 \otimes x_j + \sum a_j \otimes b_j.$$

特别是，

$$\Delta(x_u) = 1 \otimes x_u + \sum a_u \otimes b_u, \text{ and } \Delta(x_v) = 1 \otimes x_v + \sum a_v \otimes b_v.$$

第一项 $\Delta(x_v(x_u\mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}))$.

由 Δ 的定义，

$$(6.6) \qquad \Delta(x_u\mathfrak{u}) = 1 \otimes x_u\mathfrak{u} + \sum a_u \otimes (b_u \sqcap \mathfrak{u}) + \sum (a_u \triangleright a_\mathfrak{u}) \otimes (b_u \sqcap b_\mathfrak{u}).$$

由于深度$(x_u\mathfrak{u})$ + 深度$(\mathfrak{v})$ < 深度$(x_u\mathfrak{u})$ + 深度$(x_v\mathfrak{v})$，根据归纳假设，我们得到

$$
\begin{aligned}
\Delta(x_u\mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}) =& \Delta(x_u\mathfrak{u}) \sqcap \Delta(\mathfrak{v}) \\
=& 1 \otimes ((x_u\mathfrak{u}) \sqcap \mathfrak{v}) + \sum a_u \otimes (b_u \sqcap \mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}) + \sum a_\mathfrak{v} \otimes ((x_u\mathfrak{u}) \sqcap b_\mathfrak{v}) \\
&+ \sum (a_u \triangleright a_\mathfrak{u}) \otimes (b_u \sqcap b_\mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}) + \sum (a_u \sqcap a_\mathfrak{v}) \otimes (b_u \sqcap \mathfrak{u} \sqcap b_\mathfrak{v}) \\
&+ \sum ((a_u \triangleright a_\mathfrak{u}) \sqcap a_\mathfrak{v}) \otimes (b_u \sqcap b_\mathfrak{u} \sqcap b_\mathfrak{v}).
\end{aligned}
$$

Thus

$$
\begin{aligned}
(6.7) \qquad \Delta(x_v(x_u\mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v})) =& 1 \otimes x_v(x_u\mathfrak{u} \sqcap x_v) + \sum a_v \otimes (b_v \sqcap (x_u\mathfrak{u}) \sqcap \mathfrak{v}) \\
&+ \sum (a_v \triangleright a_u) \otimes (b_u \sqcap b_v \sqcap \mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}) \\
&+ \sum (a_v \triangleright (a_u \triangleright a_\mathfrak{u})) \otimes (b_u \sqcap b_v \sqcap b_\mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}) \\
&+ \sum (a_v \triangleright a_\mathfrak{v}) \otimes (b_v \sqcap (x_u\mathfrak{u}) \sqcap b_\mathfrak{v}) \\
&+ \sum (a_v \triangleright (a_u \sqcap a_\mathfrak{v})) \otimes (b_u \sqcap b_v \sqcap \mathfrak{u} \sqcap b_\mathfrak{v}) \\
&+ \sum (a_v \triangleright ((a_u \triangleright a_\mathfrak{u}) \sqcap a_\mathfrak{v})) \otimes (b_u \sqcap b_v \sqcap b_\mathfrak{u} \sqcap b_\mathfrak{v}).
\end{aligned}
$$

第二项 $\Delta(x_u(\mathfrak{u} \sqcap (x_v\mathfrak{v}))$.

同样地，我们得到

$$\begin{aligned}(6.8)\qquad \Delta(x_u(\mathfrak{u} \sqcup (x_v\mathfrak{v})) =& 1 \otimes x_u(\mathfrak{u} \sqcup x_v\mathfrak{v}) + \sum a_u \otimes (b_u \sqcup \mathfrak{u} \sqcup (x_v\mathfrak{v})) \\ &+ \sum((a_u \triangleright a_v) \otimes (b_u \sqcup b_v \sqcup \mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v}) \\ &+ \sum(a_u \triangleright (a_v \triangleright a_\mathfrak{v})) \otimes (b_u \sqcup b_v \sqcup \mathfrak{u} \sqcup b_\mathfrak{v}) \\ &+ \sum(a_u \triangleright a_\mathfrak{u}) \otimes (b_u \sqcup b_\mathfrak{u} \sqcup (x_v\mathfrak{v})) \\ &+ \sum(a_u \triangleright (a_\mathfrak{u} \sqcup a_v)) \otimes (b_u \sqcup b_\mathfrak{u} \sqcup b_v \sqcup \mathfrak{v}) \\ &+ \sum(a_u \triangleright (a_\mathfrak{u} \sqcup (a_v \triangleright a_\mathfrak{v})) \otimes (b_u \sqcup b_v \sqcup b_\mathfrak{u} \sqcup b_\mathfrak{v}).\end{aligned}$$

第三项 $\Delta(x_{u+v}(\mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v}))$。

我们定义了

$$\Delta(\mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v}) = 1 \otimes (\mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v}) + \sum a_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}} \otimes b_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}.$$

由于深度$(\mathfrak{u})$+深度$(\mathfrak{v})$ $<$ 深度$(x_u\mathfrak{u})$+深度$(x_v\mathfrak{v})$，归纳假设表明

$$\Delta(\mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v}) = \Delta(\mathfrak{u}) \sqcup \Delta(\mathfrak{v}) = \left(1 \otimes \mathfrak{u} + \sum a_\mathfrak{u} \otimes b_\mathfrak{u}\right) \sqcup \left(1 \otimes \mathfrak{v} + \sum a_\mathfrak{v} \otimes b_\mathfrak{v}\right).$$

Thus

$$\begin{aligned}1 \otimes (\mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v}) + \sum a_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}} \otimes b_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}} =& \left(1 \otimes \mathfrak{u} + \sum a_\mathfrak{u} \otimes b_\mathfrak{u}\right) \sqcup \left(1 \otimes \mathfrak{v} + \sum a_\mathfrak{v} \otimes b_\mathfrak{v}\right) \\ =& 1 \otimes (\mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v}) + \sum a_\mathfrak{u} \otimes (b_\mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v}) \\ &+ \sum a_\mathfrak{v} \otimes (\mathfrak{u} \sqcup b_\mathfrak{v}) + \sum(a_\mathfrak{u} \sqcup a_\mathfrak{v}) \otimes (b_\mathfrak{u} \sqcup b_\mathfrak{v}),\end{aligned}$$

这意味着

$$(6.9)\quad \sum a_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}} \otimes b_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}} = \sum a_\mathfrak{u} \otimes (b_\mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v}) + \sum a_\mathfrak{v} \otimes (\mathfrak{u} \sqcup b_\mathfrak{v}) + \sum(a_\mathfrak{u} \sqcup a_\mathfrak{v}) \otimes (b_\mathfrak{u} \sqcup b_\mathfrak{v}).$$

因此我们有

$$\begin{aligned}(6.10)\qquad \Delta(x_{u+v}(\mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v})) =& 1 \otimes (x_{u+v}(\mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v})) + \sum a_{u+v} \otimes (b_{u+v} \sqcup \mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v}) \\ &+ \sum(a_{u+v} \triangleright a_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}) \otimes (b_{u+v} \sqcup b_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}).\end{aligned}$$

对于所有满足 $0 \le i, j \le u+v$和 $i+j = u+v$ 的情况，第四项为 $\Delta(x_i(x_j \sqcup \mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v}))$。

由于 depth($\mathfrak{u}$ + x_j < $x_u\mathfrak{u}$ + $x_v\mathfrak{v}$ Δ $x_j \sqcup \mathfrak{u}$ =) $=\Delta\,\mathfrak{u}$ depth( ) depth( ) depth( )，根据归纳假设，我们有 ( ) ($\mathfrak{u} \sqcup x_j$) ( ) $\sqcup\Delta(x_j)$。此外，根据引理 . ，[64] $x_j \sqcup \mathfrak{u}$可以表示为深度小于或等于 depth$(x_j\mathfrak{u})$ 的字之和。因此，根据归纳假设再次可得 $\Delta(x_j \sqcup \mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v})$ $= \Delta(x_j \sqcup \mathfrak{u})\sqcup\Delta(\mathfrak{v}) = \Delta(x_j)\sqcup\Delta(\mathfrak{u})\sqcup\Delta(\mathfrak{v}) = \Delta(x_j)\sqcup\Delta(\mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v})$。

因此，

$$\begin{aligned}\Delta(x_j \sqcup \mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v}) =& \Delta(x_j) \sqcup \Delta(\mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v}) \\ =& \left(1 \otimes x_j + \sum a_j \otimes b_j\right) \sqcup \left(1 \otimes (\mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v}) + \sum a_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}} \otimes b_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}\right) \\ =& 1 \otimes (x_j \sqcup \mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v}) + \sum a_j \otimes (b_j \sqcup \mathfrak{u} \sqcup \mathfrak{v}) \\ &+ \sum a_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}} \otimes (x_j \sqcup b_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}) + \sum(a_j \sqcup a_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}) \otimes (b_j \sqcup b_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}).\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}(6.11)\qquad \Delta(x_i(x_j \sqcap \mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v})) =& 1 \otimes (x_i(x_j \sqcap \mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v})) + \sum a_i \otimes (b_i \sqcap x_j \sqcap \mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}) \\ &+ \sum (a_i \triangleright a_j) \otimes (b_i \sqcap b_j \sqcap \mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}) \\ &+ \sum (a_i \triangleright a_{\mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}}) \otimes (b_i \sqcap x_j \sqcap b_{\mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}}) \\ &+ \sum (a_i \triangleright (a_j \sqcap a_{\mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}})) \otimes (b_i \sqcap b_j \sqcap b_{\mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}}).\end{aligned}$$

最后一项 $\Delta(x_u\mathfrak{u}) \sqcap \Delta(x_v\mathfrak{v})$。

注意到 $\Delta(x_u\mathfrak{u})$ 由式 (6.6) 给出。类似的计算可得

$$\Delta(x_v\mathfrak{v}) = 1 \otimes x_v\mathfrak{v} + \sum a_v \otimes (b_v \sqcap \mathfrak{v}) + \sum (a_v \triangleright a_\mathfrak{v}) \otimes (b_v \sqcap b_\mathfrak{v}).$$

Thus

(6.12)

$$\begin{aligned}&\Delta(x_u\mathfrak{u}) \sqcap \Delta(x_v\mathfrak{v}) \\ =& \Big(1 \otimes x_u\mathfrak{u} + \sum a_u \otimes (b_u \sqcap \mathfrak{u}) + \sum (a_u \triangleright a_\mathfrak{u}) \otimes (b_u \sqcap b_\mathfrak{u})\Big) \\ &\sqcap \Big(1 \otimes x_v\mathfrak{v} + \sum a_v \otimes (b_v \sqcap \mathfrak{v}) + \sum (a_v \triangleright a_\mathfrak{v}) \otimes (b_v \sqcap b_\mathfrak{v})\Big) \\ =& 1 \otimes (x_u\mathfrak{u} \sqcap x_v\mathfrak{v}) \\ &+ \sum a_v \otimes ((x_u\mathfrak{u}) \sqcap b_v \sqcap \mathfrak{v}) + \sum (a_v \triangleright a_\mathfrak{v}) \otimes ((x_u\mathfrak{u}) \sqcap b_v \sqcap b_\mathfrak{v}) \\ &+ \sum a_u \otimes (b_u \sqcap \mathfrak{u} \sqcap (x_v\mathfrak{v})) + \sum (a_u \sqcap a_v) \otimes (b_u \sqcap b_v \sqcap \mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}) \\ &+ \sum (a_u \sqcap (a_v \triangleright a_\mathfrak{v})) \otimes (b_u \sqcap \mathfrak{u} \sqcap b_v \sqcap b_\mathfrak{v}) \\ &+ \sum (a_u \triangleright a_\mathfrak{u}) \otimes (b_u \sqcap b_\mathfrak{u} \sqcap (x_v\mathfrak{v})) + \sum ((a_u \triangleright a_\mathfrak{u}) \sqcap a_v) \otimes (b_u \sqcap b_\mathfrak{u} \sqcap b_v \sqcap \mathfrak{v}) \\ &+ \sum ((a_u \triangleright a_\mathfrak{u}) \sqcap (a_v \triangleright a_\mathfrak{v})) \otimes (b_u \sqcap b_\mathfrak{u} \sqcap b_v \sqcap b_\mathfrak{v}).\end{aligned}$$

将方程 (6.7)、(6.8)、(6.10)、(6.11)、(6.12) 代入 (6.5) 可得

$$\Delta(x_u\mathfrak{u} \sqcap x_v\mathfrak{v}) - \Delta(x_u\mathfrak{u}) \sqcap \Delta(x_v\mathfrak{v}) = S_0 - S_1 - S_2 - S_\mathfrak{u} - S_\mathfrak{v} + S_3 + S_4.$$

这里的和 S_0、S_1、S_2、S_3、S_4、$S_\mathfrak{u}$ 和 $S_\mathfrak{v}$ 如下所示:

$$\begin{aligned}S_0 =& 1 \otimes x_v(x_u\mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}) + 1 \otimes x_u(\mathfrak{u} \sqcap (x_v\mathfrak{v})) + 1 \otimes x_{u+v}(\mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}) \\ &+ \sum_{i+j=u+v} \Delta^j_{u,v} 1 \otimes x_i(x_j \sqcap \mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}) - 1 \otimes ((x_u\mathfrak{u}) \sqcap (x_v\mathfrak{v})).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_1 =& \sum (a_u \sqcap a_v) \otimes (b_u \sqcap b_v \sqcap \mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}) - \sum (a_u \triangleright a_v) \otimes (b_u \sqcap b_v \sqcap \mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}) \\ &- \sum (a_v \triangleright a_u) \otimes (b_u \sqcap b_v \sqcap \mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_2 =& \sum ((a_u \triangleright a_\mathfrak{u}) \sqcap (a_v \triangleright a_\mathfrak{v})) \otimes (b_u \sqcap b_\mathfrak{u} \sqcap b_v \sqcap b_\mathfrak{v}) \\ &- \sum (a_u \triangleright (a_\mathfrak{u} \sqcap (a_v \triangleright a_\mathfrak{v}))) \otimes (b_u \sqcap b_\mathfrak{u} \sqcap b_v \sqcap b_\mathfrak{v}) \\ &- \sum (a_v \triangleright ((a_u \triangleright a_\mathfrak{u}) \sqcap a_\mathfrak{v}) \otimes (b_u \sqcap b_\mathfrak{u} \sqcap b_v \sqcap b_\mathfrak{v}).\end{aligned}$$

$$S_3 = \sum a_{u+v} \otimes (b_{u+v} \sqcap \mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v}) + \sum_{i+j=u+v} \Delta^j_{u,v} \sum a_i \otimes (b_i \sqcap x_j \sqcap \mathfrak{u} \sqcap \mathfrak{v})$$

$$+\sum_{i+j=u+v}\Delta^{j}_{u,v}\sum(a_i\triangleright a_j)\otimes(b_i\sqcup b_j\sqcup \mathfrak{u}\sqcup \mathfrak{v}).$$

$$S_4=\sum(a_{u+v}\triangleright a_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}})\otimes(b_{u+v}\sqcup b_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}})+\sum_{i+j=u+v}\Delta^{j}_{u,v}\sum(a_i\triangleright a_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}})\otimes(b_i\sqcup x_j\sqcup b_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}})$$
$$+\sum_{i+j=u+v}\Delta^{j}_{u,v}\sum(a_i\triangleright(a_j\sqcup a_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}))\otimes(b_i\sqcup b_j\sqcup b_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}),$$

and

$$S_{\mathfrak{u}}=\sum(a_u\sqcup(a_v\triangleright a_{\mathfrak{v}}))\otimes(b_u\sqcup b_v\sqcup\mathfrak{u}\sqcup b_{\mathfrak{v}})-\sum(a_u\triangleright(a_v\triangleright a_{\mathfrak{v}}))\otimes(b_u\sqcup b_v\sqcup\mathfrak{u}\sqcup b_{\mathfrak{v}})$$
$$-\sum(a_v\triangleright(a_u\sqcup a_{\mathfrak{v}}))\otimes(b_u\sqcup b_v\sqcup\mathfrak{u}\sqcup b_{\mathfrak{v}}),$$
$$S_{\mathfrak{v}}=\sum((a_u\triangleright a_{\mathfrak{u}})\sqcup a_v)\otimes(b_u\sqcup b_v\sqcup b_{\mathfrak{u}}\sqcup\mathfrak{v})-\sum(a_u\triangleright(a_{\mathfrak{u}}\sqcup a_v))\otimes(b_u\sqcup b_v\sqcup b_{\mathfrak{u}}\sqcup\mathfrak{v})$$
$$-\sum(a_v\triangleright(a_u\triangleright a_{\mathfrak{u}}))\otimes(b_u\sqcup b_v\sqcup b_{\mathfrak{u}}\sqcup\mathfrak{v}).$$

我们声称

(1) $S_0=0$。(2) $S_1-S_3=0$。

(3) $S_2+S_{\mathfrak{u}}+S_{\mathfrak{v}}-S_4=0$。

如果这些断言成立，该命题也成立。

我们证明下面的三个断言。断言（1）， $S_0=0$，由6.4可直接得到。

我们证明断言（2）。我们将证明

$$S_1=S_3=\sum(a_u\diamond a_v)\otimes(b_u\sqcup b_v\sqcup\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}).$$

由引理 5.7，我们有

$$\begin{aligned}S_1&=\sum(a_u\sqcup a_v)\otimes(b_u\sqcup b_v\sqcup\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v})-\sum(a_u\triangleright a_v)\otimes(b_u\sqcup b_v\sqcup\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v})\\&\quad-\sum(a_v\triangleright a_u)\otimes(b_u\sqcup b_v\sqcup\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v})\\&=\sum(a_u\sqcup a_v-a_u\triangleright a_v-a_v\triangleright a_u)\otimes(b_u\sqcup b_v\sqcup\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v})\\&=\sum(a_u\diamond a_v)\otimes(b_u\sqcup b_v\sqcup\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}).\end{aligned}$$

现在我们计算 S_3。回顾$x_u\diamond x_v=x_{u+v}+\sum_{i+j=u+v}\Delta^{j}_{u,\ v}x_ix_j$。引理3.4给出

$$\Delta(x_u\diamond x_v)=1\otimes(x_u\diamond x_v)+\sum(a_u\diamond a_v)\otimes(b_u\sqcup b_v),$$

so

$$\begin{aligned}&1\otimes x_{u+v}+\sum a_{u+v}\otimes b_{u+v}\\&+\sum_{i+j=u+v}\Delta^{j}_{u,v}\Big(1\otimes x_ix_j+\sum a_i\otimes(b_i\sqcup x_j)+\sum(a_i\triangleright a_j)\otimes(b_i\sqcup b_j)\Big)\\=&1\otimes(x_u\diamond x_v)+\sum(a_u\diamond a_v)\otimes(b_u\sqcup b_v),\end{aligned}$$

因此

(6.13)

$$\sum a_{u+v}\otimes b_{u+v}+\sum_{i+j=u+v}\Delta^{j}_{u,v}\sum a_i\otimes(b_i\sqcup x_j)+\sum_{i+j=u+v}\Delta^{j}_{u,v}\sum(a_i\triangleright a_j)\otimes(b_i\sqcup b_j)$$

$$= \sum (a_u \diamond a_v) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v).$$

我们得出结论，

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum a_{u+v} \otimes (b_{u+v} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{u} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{v}) \\ &\quad + \sum_{i+j=u+v} \Delta^j_{u,v} \sum a_i \otimes (b_i \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} x_j \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{u} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{v}) + \sum_{i+j=u+v} \Delta^j_{u,v} \sum (a_i \triangleright a_j) \otimes (b_i \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_j \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{u} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{v}) \\ &= \sum (a_u \diamond a_v) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{u} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{v}) \end{aligned}$$

因此 $S_1 = S_3$，如所愿。

现在证明断言（3）。更确切地说，我们证明

$$S_2 + S_{\mathfrak{u}} + S_{\mathfrak{v}} = S_4 = \sum ((a_u \diamond a_v) \triangleright a_{\mathfrak{u} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{v}}) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{u} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{v}}).$$

我们有

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum ((a_u \triangleright a_{\mathfrak{u}}) \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} (a_v \triangleright a_{\mathfrak{v}})) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{u}} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{v}}) \\ &\quad - \sum (a_u \triangleright (a_{\mathfrak{u}} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} (a_v \triangleright a_{\mathfrak{v}}))) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{u}} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{v}}) \\ &\quad - \sum (a_v \triangleright ((a_u \triangleright a_{\mathfrak{u}}) \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} a_{\mathfrak{v}}) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{u}} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{v}}) \\ &= \sum ((a_u \triangleright a_{\mathfrak{u}}) \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} (a_v \triangleright a_{\mathfrak{v}}) - a_u \triangleright (a_{\mathfrak{u}} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} (a_v \triangleright a_{\mathfrak{v}})) - a_v \triangleright ((a_u \triangleright a_{\mathfrak{u}}) \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} a_{\mathfrak{v}})) \\ &\qquad \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{u}} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{v}}) \\ &= \sum ((a_u \triangleright a_{\mathfrak{u}}) \diamond (a_v \triangleright a_{\mathfrak{v}})) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{u}} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{v}}). \end{aligned}$$

这里最后一个等式由引理 5.7 和命题5.10 得出

$$\begin{aligned} &(a_u \triangleright a_{\mathfrak{u}}) \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} (a_v \triangleright a_{\mathfrak{v}}) \\ &= (a_u \triangleright a_{\mathfrak{u}}) \triangleright (a_v \triangleright a_{\mathfrak{v}}) + (a_v \triangleright a_{\mathfrak{v}}) \triangleright (a_u \triangleright a_{\mathfrak{u}}) + (a_u \triangleright a_{\mathfrak{u}}) \diamond (a_v \triangleright a_{\mathfrak{v}}) \\ &= a_u \triangleright (a_{\mathfrak{u}} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} (a_v \triangleright a_{\mathfrak{v}})) + a_v \triangleright ((a_u \triangleright a_{\mathfrak{u}}) \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} a_{\mathfrak{v}})) + (a_u \triangleright a_{\mathfrak{u}}) \diamond (a_v \triangleright a_{\mathfrak{v}}). \end{aligned}$$

根据引理 5.7 和命题5.10 再次，

$$\begin{aligned} S_{\mathfrak{u}} &= \sum (a_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} (a_v \triangleright a_{\mathfrak{v}})) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{u} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{v}}) - \sum (a_u \triangleright (a_v \triangleright a_{\mathfrak{v}})) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{u} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{v}}) \\ &\quad - \sum (a_v \triangleright (a_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} a_{\mathfrak{v}})) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{u} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{v}}) \\ &= \sum (a_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} (a_v \triangleright a_{\mathfrak{v}}) - a_u \triangleright (a_v \triangleright a_{\mathfrak{v}}) - a_v \triangleright (a_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} a_{\mathfrak{v}})) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{u} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{v}}) \\ &= \sum (a_u \diamond (a_v \triangleright a_{\mathfrak{v}})) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{u} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{v}}), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} S_{\mathfrak{v}} &= \sum ((a_u \triangleright a_{\mathfrak{u}}) \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} a_v) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{u}} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{v}) - \sum (a_u \triangleright (a_{\mathfrak{u}} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} a_v)) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{u}} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{v}) \\ &\quad - \sum (a_v \triangleright (a_u \triangleright a_{\mathfrak{u}})) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{u}} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{v}) \\ &= \sum ((a_u \triangleright a_{\mathfrak{u}}) \diamond a_v) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{u}} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{v}). \end{aligned}$$

根据 S_2、 $S_{\mathfrak{u}}$、 $S_{\mathfrak{v}}$ 和（6.9），我们再次可以应用引理 5.7 和命题5.10 得到

$$S_2 + S_{\mathfrak{u}} + S_{\mathfrak{v}} = \sum ((a_u \diamond a_v) \triangleright a_{\mathfrak{u} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{v}}) \otimes (b_u \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_v \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} b_{\mathfrak{u} \mathbin{\sqcap\!\!\sqcap} \mathfrak{v}}).$$

现在我们考虑项 S_4。我们有

$$\begin{aligned}S_4 &= \sum (a_{u+v} \triangleright a_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}) \otimes (b_{u+v} \mathbin{\sqcup\!\!\sqcup} b_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}) + \sum_{i+j=u+v} \Delta^j_{u,v} \sum (a_i \triangleright a_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}) \otimes (b_i \mathbin{\sqcup\!\!\sqcup} x_j \mathbin{\sqcup\!\!\sqcup} b_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}) \\ &\quad + \sum_{i+j=u+v} \Delta^j_{u,v} \sum (a_i \triangleright (a_j \mathbin{\sqcup\!\!\sqcup} a_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}})) \otimes (b_i \mathbin{\sqcup\!\!\sqcup} b_j \mathbin{\sqcup\!\!\sqcup} b_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}) \\ &= \sum (a_{u+v} \triangleright a_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}) \otimes (b_{u+v} \mathbin{\sqcup\!\!\sqcup} b_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}) + \sum_{i+j=u+v} \Delta^j_{u,v} \sum (a_i \triangleright a_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}) \otimes (b_i \mathbin{\sqcup\!\!\sqcup} x_j \mathbin{\sqcup\!\!\sqcup} b_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}) \\ &\quad + \sum_{i+j=u+v} \Delta^j_{u,v} \sum ((a_i \triangleright a_j) \triangleright a_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}) \otimes (b_i \mathbin{\sqcup\!\!\sqcup} b_j \mathbin{\sqcup\!\!\sqcup} b_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}) \\ &= \sum ((a_u \diamond a_v) \triangleright a_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}) \otimes (b_u \mathbin{\sqcup\!\!\sqcup} b_v \mathbin{\sqcup\!\!\sqcup} b_{\mathfrak{u}\sqcup\mathfrak{v}}).\end{aligned}$$

这里，第二个等式由命题5.10得出。第三个等式直接由（6.13）推出。这就证明了 $S_2 + S_{\mathfrak{u}} + S_{\mathfrak{v}} = S_4$ 如所述。

现在，命题6.7 已通过断言（1）、（2）和（3）得证，如下：

$$\begin{aligned}\Delta(x_u\mathfrak{u} \mathbin{\sqcup\!\!\sqcup} x_v\mathfrak{v}) - \Delta(x_u\mathfrak{u}) \mathbin{\sqcup\!\!\sqcup} \Delta(x_v\mathfrak{v}) &= S_0 - S_1 - S_2 - S_{\mathfrak{u}} - S_{\mathfrak{v}} + S_3 + S_4 \\ &= S_0 - (S_1 - S_3) - (S_2 + S_{\mathfrak{u}} + S_{\mathfrak{v}} - S_4) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

定理6.5的证明。结合引理6.6和命题6.7可知，若对所有深度为+depth($\mathfrak{b}$) $< n$ 的字（$\mathfrak{a},\mathfrak{b}$） $\in \langle\Gamma\rangle \times \langle\Gamma\rangle$，定理6.5都成立，其中 $n \in \mathbb{N}$ 为某个值，则该定理对所有满足depth($x_u\mathfrak{u}$) +depth($x_v\mathfrak{v}$) $= n$的字（$x_u\mathfrak{u}, x_v\mathfrak{v}$）都成立，进而对所有满足depth($x_{u,\alpha}\mathfrak{u}$) +depth($x_{v,\beta}\mathfrak{v}$) $= n$的（$x_{u,\alpha}\mathfrak{u}, x_{v,\beta}\mathfrak{v}$）也成立，对所有 $u, v \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_q^*$均如此。由于对任意深度的所有 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \langle\Gamma\rangle$，定理在初始情形（$1, \mathfrak{b}$）和（$\mathfrak{a}, 1$）下成立，因此该定理对所有 $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \langle\Gamma\rangle$都成立。□

6.3. 余结合性。

接下来我们要证明：

定理6.8. 设 $\mathfrak{u} \in \langle\Gamma\rangle$。那么我们有

$$(\mathrm{Id} \otimes \Delta)\Delta(\mathfrak{u}) = (\Delta \otimes \mathrm{Id})\Delta(\mathfrak{u}).$$

证明。证明分为以下两部分：

- 部分（1）：如果余结合性对 $\mathfrak{u} = x_u\mathfrak{v}$成立，那么对于 $\mathfrak{v} \in \langle\Gamma\rangle$，当深度($\mathfrak{v}$) ≥ 0时，余结合性对 $\mathfrak{u} = x_{u,\varepsilon}\mathfrak{v}$成立，并且
- 部分（2）：如果余结合性对所有满足深度($\mathfrak{u}$) $\leq n$的 $\mathfrak{u}$ 均成立，那么对于 $u \in \mathbb{N}$ 且深度为 $\mathfrak{v} = n$的 $\mathfrak{u} = x_u\mathfrak{v}$，余结合性也成立。

注意，初始情形（即当 $\mathfrak{u} = x_{u,\varepsilon}$ 时）由 $\mathfrak{C}$ 中的余结合性和第 (1) 部分得证。

对于第(1)部分，我们假设Id $\otimes\Delta\Delta(x_u\mathfrak{v})$ $= (\Delta \otimes \mathrm{Id})\Delta(x_u\mathfrak{v})$。令

$$\Delta(x_u) = 1 \otimes x_u + \sum a_u \otimes b_u, \qquad \Delta(\mathfrak{v}) = \sum a_{\mathfrak{v}} \otimes b_{\mathfrak{v}}.$$

这里有 $a_u \in \Sigma$、$b_u \in \langle\Sigma\rangle$，以及 $a_{\mathfrak{v}}$、$b_{\mathfrak{v}} \in \langle\Gamma\rangle$。因此

$$\Delta(x_u\mathfrak{v}) = 1 \otimes x_u\mathfrak{v} + \sum a_u a_{\mathfrak{v}} \otimes (b_u \mathbin{\sqcup\!\!\sqcup} b_{\mathfrak{v}}),$$

and

$$(\mathrm{Id}\otimes\Delta)\Delta(x_u\mathfrak{v}) = 1\otimes 1\otimes x_u\mathfrak{v} + \sum 1\otimes a_u a_\mathfrak{v}\otimes (b_u \mathbin{\text{⧢}} b_\mathfrak{v}) + \sum a_u a_\mathfrak{v}\otimes \Delta(b_u \mathbin{\text{⧢}} b_\mathfrak{v}),$$
$$(\Delta\otimes\mathrm{Id})\Delta(x_u\mathfrak{v}) = 1\otimes 1\otimes x_u\mathfrak{v} + \sum \Delta(a_u a_\mathfrak{v})\otimes (b_u \mathbin{\text{⧢}} b_\mathfrak{v}).$$

那么，关于 $x_u\mathfrak{v}$ 的归纳假设，即余结合性，等价于 (6.14)

$$\sum 1\otimes a_u a_\mathfrak{v}\otimes (b_u \mathbin{\text{⧢}} b_\mathfrak{v}) + \sum a_u a_\mathfrak{v}\otimes \Delta(b_u \mathbin{\text{⧢}} b_\mathfrak{v}) = \sum \Delta(a_u a_\mathfrak{v})\otimes (b_u \mathbin{\text{⧢}} b_\mathfrak{v}).$$

现在设 $\mathfrak{u} = x_{u,\varepsilon}\mathfrak{v}$。我们有

$$\Delta(x_{u,\varepsilon}) = 1\otimes x_{u,\varepsilon} + \sum a_{u,\varepsilon}\otimes b_u$$

其中 $a_{u,\varepsilon} = \varphi_\varepsilon(a_u)$。根据定义，我们有

$$\Delta(\mathfrak{u}) = 1\otimes\mathfrak{u} + \sum a_{u,\varepsilon}a_\mathfrak{v}\otimes (b_u \mathbin{\text{⧢}} b_\mathfrak{v}).$$

可以计算

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}\otimes\Delta)\Delta(\mathfrak{u}) =& 1\otimes\Delta(\mathfrak{u}) + \sum a_{u,\varepsilon}a_\mathfrak{v}\otimes\Delta(b_u \mathbin{\text{⧢}} b_\mathfrak{v})\\ =& 1\otimes 1\otimes\mathfrak{u} + \sum 1\otimes a_{u,\varepsilon}a_\mathfrak{v}\otimes (b_u \mathbin{\text{⧢}} b_\mathfrak{v}) + \sum a_{u,\varepsilon}a_\mathfrak{v}\otimes\Delta(b_u \mathbin{\text{⧢}} b_\mathfrak{v}),\\ (\Delta\otimes\mathrm{Id})\Delta(\mathfrak{u}) =& 1\otimes 1\otimes\mathfrak{u} + \sum \Delta(a_{u,\varepsilon}a_\mathfrak{v})\otimes (b_u \mathbin{\text{⧢}} b_\mathfrak{v})\\ =& 1\otimes 1\otimes\mathfrak{u} + \sum (\varphi_\varepsilon\otimes\mathrm{Id})\Delta(a_u a_\mathfrak{v})\otimes (b_u \mathbin{\text{⧢}} b_\mathfrak{v})\\ &+ \sum 1\otimes a_{u,\varepsilon}a_\mathfrak{v}\otimes (b_u \mathbin{\text{⧢}} b_\mathfrak{v}) - \sum 1\otimes a_u a_\mathfrak{v}\otimes (b_u \mathbin{\text{⧢}} b_\mathfrak{v}).\end{aligned}$$

因此余结合性对 $x_{u,\varepsilon}\mathfrak{v}$ 成立，如果

$$\sum (\varphi_\varepsilon\otimes\mathrm{Id})\Delta(a_u a_\mathfrak{v})\otimes (b_u \mathbin{\text{⧢}} b_\mathfrak{v}) = \sum a_{u,\varepsilon}a_\mathfrak{v}\otimes\Delta(b_u \mathbin{\text{⧢}} b_\mathfrak{v}) + \sum 1\otimes a_u a_\mathfrak{v}\otimes (b_u \mathbin{\text{⧢}} b_\mathfrak{v}),$$

这是通过应用 $\varphi_\varepsilon\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}$ 于方程 (6.14)。这证明了 $x_u\mathfrak{v}$ 的余结合性蕴含 $x_{u,\varepsilon}\mathfrak{v}$ 的余结合性。

现在证明第 (2) 部分。令 $n\geq 1$。我们假设对于所有深度为 $\leq n$ 的字，余结合性都成立。令 $\mathfrak{u} = x_{t,\ \varepsilon}\mathfrak{t}$，其深度为 $\leq n$。我们写道

$$\Delta(x_{t,\varepsilon}) = 1\otimes x_{t,\varepsilon} + \sum a_{t,\varepsilon}\otimes b_t,\ \text{and}\ \Delta(\mathfrak{t}) = \sum a_\mathfrak{t}\otimes b_\mathfrak{t}.$$

其中$a_{t,\ \varepsilon}\in\Gamma$ 和 $b_{t,\ \varepsilon}, a_\mathfrak{t}, b_\mathfrak{t}\in\langle\Gamma\rangle$。然后

$$\Delta(x_{t,\varepsilon}\mathfrak{t}) = 1\otimes x_{t,\varepsilon} + \sum a_{t,\varepsilon}a_\mathfrak{t}\otimes (b_t \mathbin{\text{⧢}} b_\mathfrak{t}),$$

以及$x_{t,\ \varepsilon}\mathfrak{t}$ 的余结合性被归约为

$$\sum (\Delta(a_{t,\varepsilon}a_\mathfrak{t}) - 1\otimes a_{t,\varepsilon}a_\mathfrak{t})\otimes (b_t \mathbin{\text{⧢}} b_\mathfrak{t}) = \sum a_{t,\varepsilon}a_\mathfrak{t}\otimes (\Delta(b_t) \mathbin{\text{⧢}} \Delta(b_\mathfrak{t})). \tag{6.15}$$

作为一个特殊情形，令 $\mathfrak{t} = 1$。则 $\Delta(\mathfrak{t}) = 1\otimes 1$，并且

$$\sum (\Delta(a_{t,\varepsilon}) - 1\otimes a_{t,\varepsilon})\otimes b_t = \sum a_{t,\varepsilon}\otimes\Delta(b_t).$$

现在假设$\mathfrak{u} = x_u x_{v,\beta}\mathfrak{v}$ 的深度为 $n+1$。称

$$\Delta(x_u) = 1\otimes x_u + \sum a_u\otimes b_u,$$
$$\Delta(x_v) = 1\otimes x_v + \sum a_v\otimes b_v,\quad \text{so}\ \Delta(x_{v,\beta}) = 1\otimes x_{v,\beta} + \sum a_{u,\beta}\otimes b_v,$$
$$\Delta(\mathfrak{v}) = \sum a_\mathfrak{v}\otimes b_\mathfrak{v},$$

其中 a_u、 $a_v \in \Sigma$、 b_u、 $b_v \in \langle\Sigma\rangle$、 $a_\mathfrak{v}$、 $b_\mathfrak{v} \in \langle\Gamma\rangle$ 和 $a_{u,\ \beta} = \varphi_\beta(a_u)$。然后，

$$\Delta(x_{v,\beta}\mathfrak{v}) = 1 \otimes x_{v,\beta}\mathfrak{v} + \sum a_{v,\beta}a_\mathfrak{v} \otimes (b_v \sqcup\!\sqcup b_\mathfrak{v}).$$

由此可得

$$\Delta(x_u x_{v,\beta}\mathfrak{v}) = 1 \otimes x_u x_{v,\beta}\mathfrak{v} + \sum a_u \otimes (b_u \sqcup\!\sqcup x_{v,\beta}\mathfrak{v}) + \sum a_u a_{v,\beta}a_\mathfrak{v} \otimes (b_u \sqcup\!\sqcup b_v \sqcup\!\sqcup b_\mathfrak{v}),$$

因此

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Id}\otimes\Delta)\Delta(x_u x_{v,\beta}\mathfrak{v})\\
=&1\otimes 1\otimes x_u x_{v,\beta}\mathfrak{v} + \sum 1\otimes a_u \otimes (b_u \sqcup\!\sqcup x_{v,\beta}\mathfrak{v}) + \sum 1\otimes a_u a_{v,\beta}a_\mathfrak{v} \otimes (b_u \sqcup\!\sqcup b_v \sqcup\!\sqcup b_\mathfrak{v})\\
&+ \sum a_u \otimes \Delta(b_u \sqcup\!\sqcup x_{v,\beta}\mathfrak{v}) + \sum a_u a_{v,\beta}a_\mathfrak{v} \otimes \Delta(b_u \sqcup\!\sqcup b_v \sqcup\!\sqcup b_\mathfrak{v}),\\
&(\Delta\otimes \mathrm{Id})\Delta(x_u x_{v,\beta}\mathfrak{v})\\
=&1\otimes 1\otimes x_u x_{v,\beta}\mathfrak{v} + \sum \Delta(a_u) \otimes (b_u \sqcup\!\sqcup x_{v,\beta}\mathfrak{v}) + \sum \Delta(a_u a_{v,\beta}a_\mathfrak{v}) \otimes (b_u \sqcup\!\sqcup b_v \sqcup\!\sqcup b_\mathfrak{v}),
\end{aligned}$$

所以我们要证明的是

$$\begin{aligned}
&\sum 1\otimes a_u \otimes (b_u \sqcup\!\sqcup x_{v,\beta}\mathfrak{v}) + \sum 1\otimes a_u a_{v,\beta}a_\mathfrak{v} \otimes (b_u \sqcup\!\sqcup b_v \sqcup\!\sqcup b_\mathfrak{v})\\
&+ \sum a_u \otimes \Delta(b_u \sqcup\!\sqcup x_{v,\beta}\mathfrak{v}) + \sum a_u a_{v,\beta}a_\mathfrak{v} \otimes \Delta(b_u \sqcup\!\sqcup b_v \sqcup\!\sqcup b_\mathfrak{v}),\\
=&\sum \Delta(a_u) \otimes (b_u \sqcup\!\sqcup x_{v,\beta}\mathfrak{v}) + \sum \Delta(a_u a_{v,\beta}a_\mathfrak{v}) \otimes (b_u \sqcup\!\sqcup b_v \sqcup\!\sqcup b_\mathfrak{v}).
\end{aligned} \tag{6.16}$$

注意，由方程（6.15）可得

$$\begin{aligned}
&\sum 1\otimes a_u \otimes (b_u \sqcup\!\sqcup x_{v,\beta}\mathfrak{v}) + \sum a_u \otimes \Delta(b_u \sqcup\!\sqcup x_{v,\beta}\mathfrak{v}) - \sum \Delta(a_u) \otimes (b_u \sqcup\!\sqcup x_{v,\beta}\mathfrak{v})\\
=&\sum a_u \otimes \Delta(b_u \sqcup\!\sqcup x_{v,\beta}\mathfrak{v}) - \Big(\sum(\Delta(a_u) - 1\otimes a_u)\otimes b_u\Big) \sqcup\!\sqcup (1\otimes 1\otimes x_{v,\beta}\mathfrak{v})\\
=&\sum a_u \otimes \Delta(b_u \sqcup\!\sqcup x_{v,\beta}\mathfrak{v}) - \Big(\sum a_u \otimes \Delta(b_u)\Big) \sqcup\!\sqcup (1\otimes 1\otimes x_{v,\beta}\mathfrak{v})\\
=&\sum a_u \otimes (\Delta(b_u) \sqcup\!\sqcup \Delta(x_{v,\beta}\mathfrak{v})) - \sum a_u \otimes (\Delta(b_u) \sqcup\!\sqcup (1\otimes x_{v,\beta}\mathfrak{v}))\\
=&\sum a_u \otimes (\Delta(b_u) \sqcup\!\sqcup (\Delta(x_{v,\beta}\mathfrak{v}) - 1\otimes x_{v,\beta}\mathfrak{v}))\\
=&\sum a_u \otimes (\Delta(b_u) \sqcup\!\sqcup (a_{v,\beta}a_\mathfrak{v} \otimes (b_v \sqcup\!\sqcup b_\mathfrak{v})))
\end{aligned}$$

因此，方程（6.16）等价于

$$\begin{aligned}
&\sum \Delta(a_u a_{v,\beta}a_\mathfrak{v}) \otimes (b_u \sqcup\!\sqcup b_v \sqcup\!\sqcup b_\mathfrak{v})\\
&= \sum 1\otimes a_u a_{v,\beta}a_\mathfrak{v} \otimes (b_u \sqcup\!\sqcup b_v \sqcup\!\sqcup b_\mathfrak{v}) + \sum a_u a_{v,\beta}a_\mathfrak{v} \otimes \Delta(b_u \sqcup\!\sqcup b_v \sqcup\!\sqcup b_\mathfrak{v})\\
&\quad + \sum a_u \otimes (\Delta(b_u) \sqcup\!\sqcup (a_{v,\beta}a_\mathfrak{v} \otimes (b_v \sqcup\!\sqcup b_\mathfrak{v}))).
\end{aligned} \tag{6.17}$$

从现在起，追踪指标很重要。必要时，我们使用记号$\sum_u$，它表示对成对的（a_u，b_u）求和，类似地还有$\sum_{(v,\ \beta)}$、$\sum_\mathfrak{v}$等。

现在固定 a_u，b_u。式（6.17）的最后两项变为

$$\begin{aligned}
&\sum a_u a_{v,\beta}a_\mathfrak{v} \otimes (\Delta(b_u) \sqcup\!\sqcup \Delta(b_v) \sqcup\!\sqcup \Delta(b_\mathfrak{v})) + \sum a_u \otimes (\Delta(b_u) \sqcup\!\sqcup (a_{v,\beta}a_\mathfrak{v} \otimes (b_v \sqcup\!\sqcup b_\mathfrak{v})))\\
&= (1\otimes\Delta(b_u)) \sqcup\!\sqcup \Big(\sum a_u a_{v,\beta}a_\mathfrak{v} \otimes (\Delta(b_v) \sqcup\!\sqcup \Delta(b_\mathfrak{v})) + \sum a_u \otimes a_{v,\beta}a_\mathfrak{v} \otimes (b_v \sqcup\!\sqcup b_\mathfrak{v})\Big)\\
&= (a_u\otimes 1\otimes 1)\cdot\Big((1\otimes\Delta(b_u)) \sqcup\!\sqcup \Big(\sum a_{v,\beta}a_\mathfrak{v} \otimes (\Delta(b_v) \sqcup\!\sqcup \Delta(b_\mathfrak{v})) + \sum 1\otimes a_{v,\beta}a_\mathfrak{v} \otimes (b_v \sqcup\!\sqcup b_\mathfrak{v})\Big)\Big)
\end{aligned}$$

$= (a_u \otimes 1 \otimes 1) \cdot \left((1 \otimes \Delta(b_u)) \sqcap \left(\sum \Delta(a_{v,\beta} a_{\mathfrak{v}}) \otimes (b_v \sqcap b_{\mathfrak{v}})\right)\right).$

回忆一下，$\cdot$ 是连接。最后一个等式来自归纳假设，即公式（6.15）。公式（6.17）变为

(6.18)

$$\sum \Delta(a_u a_{v,\beta} a_{\mathfrak{v}}) \otimes (b_u \sqcap b_v \sqcap b_{\mathfrak{v}})$$
$$= \sum 1 \otimes a_u a_{v,\beta} a_{\mathfrak{v}} \otimes (b_u \sqcap b_v \sqcap b_{\mathfrak{v}}) + \sum (a_u \otimes 1 \otimes 1) \cdot \left((1 \otimes \Delta(b_u)) \sqcap \left(\sum \Delta(a_{v,\beta} a_{\mathfrak{v}}) \otimes (b_v \sqcap b_{\mathfrak{v}})\right)\right).$$

接下来，我们固定 $a_u, a_{v,\beta}, a_{\mathfrak{v}}$。因此，相应的 b 也固定了。令

$$\Delta(a_u) = 1 \otimes a_u + \sum_{(1)} c_{(1)} \otimes d_{(1)}, \quad \Delta(a_{v,\beta} a_{\mathfrak{v}}) = \sum_{(2)} c_{(2)} \otimes d_{(2)}.$$

于是，我们有

$$\Delta(a_u a_{v,\beta} a_{\mathfrak{v}}) = 1 \otimes a_u a_{v,\beta} a_{\mathfrak{v}} + \sum_{(1),(2)} c_{(1)} c_{(2)} \otimes (d_{(1)} \sqcap d_{(2)}).$$

对于固定的 $a_u, a_{v,\beta}, a_{\mathfrak{v}}$，$\sum \Delta(a_u a_{v,\beta} a_{\mathfrak{v}}) \otimes (b_u \sqcap b_v \sqcap b_{\mathfrak{v}})$ 的被加项为

$$\left(1 \otimes a_u a_{v,\beta} a_{\mathfrak{v}} + \left(\sum_{(1),(2)} c_{(1)} c_{(2)} \otimes (d_{(1)} \sqcap d_{(2)})\right)\right) \otimes (b_u \sqcap b_v \sqcap b_{\mathfrak{v}}).$$

将这一结果以及 $\Delta(a_{v,\beta} a_{\mathfrak{v}})$ 的求和表示代入方程（6.18），得到

$$\sum_{u,(v,\beta),\mathfrak{v}} \left(\sum_{(1),(2)} c_{(1)} c_{(2)} \otimes (d_{(1)} \sqcap d_{(2)})\right) \otimes (b_u \sqcap b_v \sqcap b_{\mathfrak{v}})$$
$$- \sum a_u c_{(2)} \otimes (\Delta(b_u) \sqcap (d_{(2)} \otimes b_v \sqcap b_{\mathfrak{v}})).$$

最后，我们固定 $a_u, a_{v,\beta}, a_{\mathfrak{v}}, c_{(2)}$。相应的被加项为

$$\sum_{(1)} c_{(1)} c_{(2)} \otimes (d_{(1)} \sqcap d_{(2)}) \otimes (b_u \sqcap b_v \sqcap b_{\mathfrak{v}}) - a_u c_{(2)} \otimes (\Delta(b_u) \sqcap (d_{(2)} \otimes b_v \sqcap b_{\mathfrak{v}})).$$

通过直接计算，我们得到

$$\sum_{(1)} c_{(1)} c_{(2)} \otimes (d_{(1)} \sqcap d_{(2)}) \otimes (b_u \sqcap b_v \sqcap b_{\mathfrak{v}}) - a_u c_{(2)} \otimes (\Delta(b_u) \sqcap (d_{(2)} \otimes b_v \sqcap b_{\mathfrak{v}}))$$
$$= \left(\left(\sum_{(1)} c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes b_u - a_u \otimes \Delta(b_u)\right) \sqcap (1 \otimes d_{(2)} \otimes b_v \sqcap b_{\mathfrak{v}})\right) \cdot (c_{(2)} \otimes 1 \otimes 1),$$

其内部求和可化简为

$$\sum_{(1)} c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes b_u - a_u \otimes 1 \otimes \Delta(b_u) = (\Delta(a_u) - 1 \otimes a_u) \otimes b_u - a_u \otimes 1 \otimes \Delta(b_u).$$

现在我们可以应用公式（6.15）对 a_u 中的被加项求和，得到

$$\sum_u (\Delta(a_u) \otimes b_u - 1 \otimes a_u \otimes b_u - a_u \otimes 1 \otimes \Delta(b_u)) = 0,$$

也就是说，等式（6.18）成立。因此，归纳步骤得证。

由 $\mathfrak{C}$的余结合性，我们有 $\mathfrak{u} \in \Sigma$的余结合性，然后针对$\mathfrak{u} \in \Gamma$ 根据第 (1)部分。通过反复应用第(2) 部分和第(1)部分，我们可以涵盖 $\mathfrak{u} \in \langle\Gamma\rangle$ 的任意深度。因此证明完成。 □

6.4. $\mathfrak{D}$ 上的霍普夫代数结构。

令余单位 ϵ 定义为： $\mathfrak{D} \to \mathbb{F}_q$ 在 $\epsilon(1) = 1$；否则 $\epsilon(\mathfrak{u}) = 0$ 。

我们已经验证，$(\mathfrak{D}, \sqcap, u, \Delta, \epsilon)$ 根据定理 5.9、定理 6.5和定理 6.8构成一个双代数。容易通过归纳法验证，$\sqcap$和 Δ 保持权不变，而权为零的子集同构于 $\mathbb{F}_q$。因此，$(\mathfrak{D}, \sqcap, u, \Delta, \epsilon)$ 是一个连通分次双代数。根据定理 2.6，可得以下定理。

定理 6.9. $(\mathfrak{D}, \sqcap, u, \Delta, \epsilon)$ 是一个在 $\mathbb{F}_q$ 上的有限型连通分次霍普夫代数。

References

[1] G. Anderson. t-动机。 *Duke Math. J.*，53(2):457–502，1986。[2] G. Anderson、W. D. Brownawell 和 M. Papanikolas。正特征下特殊 Γ值之间代数关系的确定。 *Ann. of Math. (2)*，160(1):237–313，2004。[3] G. Anderson 和 D. Thakur。Carlitz 模的张量幂与ζ值。 *Ann. of*，( ): – 。 *Math. (2)* 132 1 159 191, 1990

[4] G. Anderson 和 D. Thakur。 $\mathbb{F}_q[t]$的多重ζ值、其周期解释及彼此之间的关系。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(11):2038–2055，2009。[5] T. Arakawa 和 M. Kaneko。多重zeta值、多重伯努利数及相关ζ函数。 *Nagoya Math. J.*，153:189–209，1999。[6] T. Arakawa 和 M. Kaneko。关于多重 L值。 *J. Math. Soc. Japan*，56(4):967–991，2004。[7] D. J. Broadhurst。关于不可约k重欧拉和的枚举及其在结理论和场论中的作用。 *available at https://arxiv.org/abs/hep-th/9604128*，1996

[8] D. J. Broadhurst。基于结和费曼图的不可约多重ζ值枚举猜想。 *available at https://arxiv.org/abs/hep-th/9612012*，1996

[9] F. Brown。关于 $\mathbb{Z}$ *Ann. of Math. (2)* 175 949 976, 2012 上的混合Tate动机。。，：–。[10] D. Brownawell 和 M. Papanikolas。Drinfeld模、 t模和t动机的快速入门。载于 G. B¨ockle、D. Goss、U. Hartl 和 M. Papanikolas 编， *t-motives: Hodgestructures, transcendence and other motivic aspects”*， *EMS Series of Congress Reports*，第3–30页。欧洲数学会，2020。[11] J. Burgos Gil 和 J. Fresan。 *Multiple zeta values: from numbers to motives*。即将出版，Clay Mathematics Proceedings。[12] L. Carlitz。关于与伽罗瓦域中多项式相关的某些函数。 *Duke Math. J.*，1 2 137( ): –168，1935。[13] S. Charlton。关于动机多重t值、Saha基猜想及交错多重ζ值的生成元。 *arXiv:2112.14613v1*，2021。[14] H.-J. Chen。关于 $\mathbb{F}_q[t]$上的双重ζ值的洗牌。 *J. Number Theory*，148:153–163，2015。[15] P. Deligne。 $G_m - \mu_N$的动机幺幂基本群，针对 $N = 2$、3、4或8。 *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*，112:101–141，2010。[16] P. Deligne。致 Dinesh Thakur 的信，2017年5月27日。[17] P. Deligne 和 A. Goncharov。混合Tate动机的基本群。 *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*，38(1):1–56，2005。[18] V. Drinfeld。关于拟三角拟霍普夫代数及与 Gal(Q/Q) 密切相关的群。 *Algebra i Analiz*，2(4):149–181，1990。[19] R. Ehrenborg。关于偏序集与霍普夫代数。 *Adv. Math.*，119(1):1–25，1996。[20] L. 欧拉。关于一种特殊级数的思考。 *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 140 186, 1776 ，–。[21] O. Gezmis 和 F. Pellarin。Tate代数中的平凡多重ζ值。 *International Mathematics Research Notices to appear* 104, 2021 ，，r nab。[22]A. Goncharov。多重多对数与混合Tate动机。*arXiv:math/0103059v4*，2001。

[23] A. Goncharov。基本群胚的伽罗瓦对称性与非交换几何。*Duke Math. J.*，128(2):209–284，2005。[24] D. Goss。 *Basic Structures of function field arithmetic* 35 *Ergebnisse der Mathe-* ，卷 *matik und ihrer Grenzgebiete (3)* 1996 号为。施普林格出版社，柏林，。[25] R. Harada。正特征下的交错多重ζ值。 *Math. Z.*，298(3-4):1263–1291，2021。[26] U. Hartl 和 A. K. Juschka。Pink关于函数域上霍奇结构与霍奇猜想的理论。载于 G. B¨ockle、D. Goss、U. Hartl 和 M. Papanikolas 编， *t-motives: Hodgestructures, transcendence and other motivic aspects"*， *EMS Series of Congress Reports*，第31–182页。欧洲数学会，2020。[27] M. Hoffman。多重调和级数代数。 *J. Algebra*，194:477–495，1997。[28] M. Hoffman。拟洗牌积。 *J. Algebraic Combin.*，11(1):49–68，2000。[29] M. Hoffman。多重zeta值的一种奇数变体。 *Commun. Number Theory Phys.*，13 3 529( ): –567，2019。[30] K. Ihara、M. Kaneko 和 D. Zagier。多重zeta值的导子与双重洗牌关系。 *Compos. Math.*，142(2):307–338，2006。[31] B.-H. Im、H. Kim、K. N. Le、T. Ngo Dac 和 L. H. Pham。正特征下的Zagier-Hoffman猜想。 *available at https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03667755*，2022。[32] B.-H. Im、H. Kim、K. N. Le、T. Ngo Dac 和 L. H. Pham。正特征下的霍普夫代数与多重zeta值。 *available at https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03937702*，2023。[33] K. Iwasawa。数域与函数域之间的类比。载于 *Some Recent Advances in the Basic Sciences* *Vol. 2 (Proc. Annual Sci. Conf., Belfer Grad. School Sci., Yeshiva Univ.,* ，第– *New York, 1965-1966)* 203 208 页。叶史瓦大学贝尔弗科学研究生院，纽约，1969。[34] M. Kaneko、K. Tasaka。双重ζ值、双重艾森斯坦级数与级为的模形式。 *Math. Ann.*，357(3):1091–1118，2013。[35] M. Kontsevich。变形量子化中的歌剧集与动机。第48卷，第35–72页。1999年。Mosh´e Flato（1937–1998）。[36] J. A. Lara Rodriguez 和 D. Thakur。 $\mathbb{F}_q[t]$ *Indian J. Pure* 的类 *Appl. Math.* 45 5 787 801, 2014 ζ多重ζ值。，( ): –。[37] J. A. Lara Rodriguez 和 D. Thakur。高亏格曲线的类ζ多重ζ值。 *J.* ，( ): *Théor. Nombres Bordeaux* 33 2 553 –581，2021。[38] T. T. Q. Le 和 J. Murakami。考夫曼多项式的 Kontsevich 积分。 *Nagoya Math. J.* 142 39 ，：– 65，1996。[39] B. Mazur 和 A. Wiles。函数域与数域之间的类比。 *Amer. J. Math.*，105 2 507( ): –521，1983。[40] T. Ngo Dac。关于正特征下的Zagier-Hoffman猜想。 *Ann. of Math. (2)*，194 1 361( ): –392，2021。[41] F. Pellarin。正特征下某些 L级数的值。 *Ann. of Math. (2)*，176 3 2055( ): –2093，2012。[42] G. Racinet。单位根处多重多对数的双重混合。 *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*，(95):185–231，2002。[43] S. Shi。 *Multiple zeta values over* $\mathbb{F}_q[t]$。博士论文，罗切斯特大学（可通过 http://hdl.handle.net/1802/33859 获取），2018年11月。[44] T. Terasoma。混合Tate动机与多重zeta值。 *Invent. Math.*，149 369，2002 2 339( ): –。[45] D. Thakur。 *Function field arithmetic*。世界科学出版社，里弗埃奇，新泽西州，2004。[46] D. Thakur。关于 $\mathbb{F}_q[t]$的幂和及其在多重ζ值和ζ零点分布中的应用。*Finite Fields Appl.*，15(4):534–552，2009。[47] D. Thakur。 $\mathbb{F}_q[t]$ 12 2318 2346, 的多 2009 重ζ值之间的关系。 *Int. Math. Res. Not.*，( ): –。[48] D. Thakur。函数域多重ζ值的洗牌关系。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(11):1973–1980，2010。[49] D. Thakur。函数域多重ζ值综述。 *J. Théor. Nombres Bordeaux*，29 3 997 1023，2017 ( ): –。

[50] D. Thakur。函数域算术中的多重ζ值。载于 G. B¨ockle、D. Goss、U. Hartl 和 M. Papanikolas 编，*t-motives: Hodge structures transcendence and other motivic aspects" EMS Series of Congress Reports* 441 452 第 – 页。欧洲数学会，2020 年。[51] G. Todd。对多重ζ值之间的 $\mathbb{F}_q(t)$-线性关系的一种猜想性刻画。*J. Number Theory*，187：264–28，2018 年。[52] A. Weil。数域代数´与函数域代数´之间的类比。*Revue Scient.*，77：104–106，1939 年。[53] J. Yu。特征 p 下的超越性与特殊ζ值。*Ann. of Math. (2)*，134(1)：1– 23，1991 年。[54] D. Zagier。ζ函数值及其应用。载于 *First European Congress of Mathematics Vol. II Paris 1992)* 120 *Progr. Math.* 497 512 ¨ ，，，

Series on Number Theory and its Applications 第 12 卷，[55] ，第 – 页。巴塞尔 Birkhauser，1994 年。 *Multiple zeta functions*J. Zhao。 *multiple polylogarithms and their special values*，*Series on Number Theory and its Applications* 第 12 卷。世界科学出版社有限公司，新泽西州哈肯萨克，2016 年。

Dept. of Mathematical Sciences, KAIST, 291 Daehak-ro, Yuseong-gu, Daejeon 34141, South Korea
Email address: bhim@kaist.ac.kr

Dept. of Mathematical Sciences, KAIST, 291 Daehak-ro, Yuseong-gu, Daejeon 34141, South Korea
Email address: hojinkim@kaist.ac.kr

Normandie Université, Université de Caen Normandie - CNRS, Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme (LMNO), UMR 6139, 14000 Caen, France.
Email address: khac-nhuan.le@unicaen.fr

Normandie Université, Université de Caen Normandie - CNRS, Laboratoire de Mathématique s Nicolas Oresme (LMNO), UMR 6139, 14000 Caen, France.
Email address: tuan.ngodac@unicaen.fr

Institute of Mathematics, Vietnam Academy of Science and Technology, 18 HoangQuoc Viet, 10307 Hanoi, Viet Nam*Email address*: plhuong@math.ac.vn