具有强位移的二维分步量子行走的特征值与阈值共振

Toru Fuda*, Daiju Funakawa†, SatoshiSasayama‡, Akito Suzuki§

arXiv:2304.02342v2 [math-ph] 6 Apr 2023

摘要

本文推导了具有强位移的二维分步量子游走局域化的充分条件。为此，我们分析了 Fuda 等人引入的函数 f 的零点（Quantum Inf Process 16(8) 203, 2017），并明确给出了这些零点。这些零点为演化算子的特征值和特征向量提供了具体表述，尤其阐明了局域化发生的位置。此外，在特殊情形下，本文得到的特征值渐近趋近于阈值共振。我们还描述了阈值共振和广义特征函数的表现。

1 引言

近年来，量子游走受到广泛研究，并被引入量子信息 [16,26], 量子模拟 [22,25], 和拓扑相 [10,11]。Kitagawa 等人 [11] 为分析拓扑相而提出的分步量子游走（分步量子行走），已在多个领域得到研究，包括局域现象 [4,5,7], 弱收敛极限 [6],指标理论 [18, 19, 27] 等 [17, 21]。量子游走产生局域化的充要条件是其时间演化算子具有特征值 [23]。特别是，特征向量的非零分量所在的位置，就是量子游走发生局域化的位置。

在离散 Schr¨odinger 方程的背景下，一个称为共振的值是已知的 [1, 8]。如果一个哈密顿量满足特征方程，但其特征函数不是平方可积的，则其特征值称为共振，而其特征函数称为对应于这些共振的广义特征函数。在考虑由量子游走所描述的时间演化算子的特征方程时，同样的情况也可能发生。如上所述，量子游走引起局域化与量子游走的时间演化算子具有特征值是等价的，但与这些特征值相对应的特征函数可能不是平方可积的。因此，该量子游走的时间演化算子具有共振是自然的。关于量子游走共振和广义特征函数的先前工作可见于 [14, 15, 20]。

*日本东京世田谷区国士馆大学理学与工程学院，邮编154-8515，电子邮箱：fudat@kokushikan.ac.jp

†日本札幌市北海学园大学电子与信息工程系，邮编062-8605。电子邮箱：funakawa@hgu.jp

‡日本北海道江别市西野幌59-2号北海道信息大学信息媒体系，邮编069-8585，电子邮箱：sasayama@do-johodai.ac.jp§日本长野县若里信州大学工学部数学与物理学部，邮编380-8553，电子邮箱：akito@shinshu-u.ac.jp

量子行走的共振 U 也适用于平稳测度。如果 $\|(U^t\Psi_0)(x)\|^2$ 相对于时间 $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$独立，则测度 $\mu(x) := \|(U^t\Psi_0)(x)\|^2$ 称为平稳测度 [3, 9, 12, 13], 其中 Ψ_0 为初始态。如果初始态 Ψ_0 是 U的广义特征函数，则 $\|(U^t\Psi_0)(x)\|^2$ 与时间无关。因此，共振的研究与平稳态相关联。

事实上，广义特征函数已被用于推导量子行走的平稳测度 [3, 9, 12, 13]。 [9], 介绍了具有有限缺陷的一维空间非齐次量子行走的广义特征函数所对应的平稳测度。具有环路的多维空间齐次量子行走的平稳测度可见 [12]。量子行走的特征值可分为本质上不同的两部分 [24]。也就是说，一部分源自 birth，另一部分继承自判别算子 T。具有环路的多维量子行走拥有无穷多个有限支撑的特征向量，它们对应于 birth 特征子空间。 [12],通过叠加 birth 特征子空间中的无穷多个特征向量构造了平稳测度。另一方面，本文推导二维分步量子行走的广义特征函数时，并非从 birth 特征子空间出发，而是从继承特征子空间出发。因此，本文中的特征函数在来源上不同于 [12] 中的特征函数。

在 [4] 中已经证明，对于 d维分步量子行走，如果位移效应足够弱，即跃迁概率 $|q_j|^2$ 足够小，时间演化算子在继承的特征空间中具有特征值。我们关注的是，当 $|q_j|^2$ 足够大时，时间演化算子是否具有特征值。因此，本文在位移效应极强的条件下，即 $q_1 = q_2 = 1$ 时，对二维分步量子行走进行了详细分析。在我们的模型中，可以明确展示特征值和特征向量。此外，我们还在一个特殊情形下推导出共振及其对应的广义特征函数。

本文其余部分安排如下。第节 2 首先介绍了具有一个缺陷的二维分步量子行走（SSQW）的一般形式，并介绍了此前关于局域化的研究 [4]。此前的研究仅讨论了平移效应较弱的情况，而本研究讨论的是平移效应较强的模型。为此，我们给出了相应条件。主要结果见第 3 节。在第 3 节，我们给出了使分步量子行走产生局域化的充分条件。若满足该充分条件，我们还证明时间演化算子至少有四个特征值。我们也指出了局域化的确切发生位置。此外，$|\phi_{2,2}| < |\omega_{2,2}|$ 是局域化发生的充分条件，但 U 在$|\phi_{2,2}| = |\omega_{2,2}|$时存在共振。特别地，这些共振是 U 本质谱的边界值，称为阈值共振。

2 模型定义及相关结果

在本节中，我们首先定义一般的二维分步量子游走（分步量子行走，SSQWs），并简要介绍相关结果。详细背景和讨论请参见 [4]。接着，我们定义一种更具体的分步量子行走模型，可将其解释为“极强位移效应”。本文旨在通过分析这一特定模型，揭示分步量子行走的一个新方面。请注意，尽管 [4]为可解释为“极弱位移效应”的分步量子行走的局域化提供了充分条件，但本文提出的模型与之有显著差异。

2.1 二维分步量子行走的定义

接下来，我们用 $\mathcal{H}$ 表示 $\ell^2(\mathbb{Z}^2;\mathbb{C}^4)$。设 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=(p_1,p_2,q_1,q_2)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^2$ 满足 $p_j^2+|q_j|^2=1$ ($j=1,2$)，并用 $\{\boldsymbol{e}_j\}_{j=1}^2$ 表示 $\mathbb{Z}^2$ 的标准基。我们在 $\ell^2(\mathbb{Z}^2;\mathbb{C}^2)$ 上定义算子 $S_j(j=1,2)$： $S_j:=\begin{pmatrix} p_j & q_jL_j \\ q_jL_j & ()^* \quad -p_j \end{pmatrix}$，其中 L_j 是定义在 $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 上的 $\boldsymbol{e}_j$-移位，定义为 $(L_jf)(\boldsymbol{x})=f($

$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_j)$ 对所有 $f\in\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 均成立，即，

$$(S_j\psi)(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} p_j\psi_1(\boldsymbol{x})+q_j\psi_2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_j) \\ q_j^*\psi_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_j)-p_j\psi_2(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}\quad \text{for all } \boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2,\ \psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\in\ell^2(\mathbb{Z}^2;\mathbb{C}^2).$$

将 $\mathcal{H}$ 与 $\ell^2(\mathbb{Z}^2;\mathbb{C}^2)\oplus\ell^2(\mathbb{Z}^2;\mathbb{C}^2)$ 等同，我们将移位算子 S 定义在 $\mathcal{H}$ 上为 $S=S_1\oplus S_2$，即，

$$(S\Psi)(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}(S_1\Psi_1)(\boldsymbol{x})\\ (S_2\Psi_2)(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}\quad \text{for all } \boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2,\ \Psi=\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}\in\mathcal{H},\ \Psi_j\in\ell^2(\mathbb{Z}^2;\mathbb{C}^2)\ (j=1,2).$$

那么， S 在 $\mathcal{H}$ 上是自伴且酉的，并满足 $S^2=1$。接下来，我们定义硬币算子。令 $\Omega={}^t(\omega_{1,\,1},\ \omega_{1,\,2},\ \omega_{2,\,1},\ \omega_{2,\,2})$ 和 $\Phi={}^t(\phi_{1,\,1},\ \phi_{1,\,2},\ \phi_{2,\,1},\ \phi_{2,\,2})$ 是 $\mathbb{C}^4$. 上的归一化向量。我们将 $\mathcal{H}$ 上的硬币算子 C 定义为乘法算子，其乘子为 $C(\boldsymbol{x})$，即，

$$(C\Psi)(\boldsymbol{x})=C(\boldsymbol{x})\Psi(\boldsymbol{x})\quad \text{for all } \boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2,\ \Psi\in\mathcal{H}.$$

在我们的单缺陷模型中， $C(\boldsymbol{x})$ 定义为

$$\begin{aligned} &C(\boldsymbol{x})=2|\chi(\boldsymbol{x})\rangle\langle\chi(\boldsymbol{x})|-1,\\ &\chi(\boldsymbol{x})={}^t(\chi_{1,1}(\boldsymbol{x}),\chi_{1,2}(\boldsymbol{x}),\chi_{2,1}(\boldsymbol{x}),\chi_{2,2}(\boldsymbol{x}))=\begin{cases}\Phi, & \boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2\setminus\{\boldsymbol{0}\},\\ \Omega, & \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.\end{cases}\end{aligned}$$

那么， C 在 $\mathcal{H}$上是自伴且酉的。我们将 U 定义为 $\mathcal{H}$ 上的时间演化算子，定义为$U=SC$。由于 S 和 C 在 $\mathcal{H}$上均为自伴且酉的，因此可以将量子游走 [24] 的谱映射定理（SMT）应用于 U。

2.2 局域化的相关结果

为介绍 SMT 结果，我们给出一些定义。关于 U 的判别算子 T on$\ell^2(\mathbb{Z}^2)$定义为 $T=dSd^*$，其中 $d:\ \mathcal{H}\to\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 是一个边界算子，即，

$$(d\Psi)(\boldsymbol{x})=\langle\chi(\boldsymbol{x}),\Psi(\boldsymbol{x})\rangle_{\mathbb{C}^4}\quad \text{for all } \boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2,\Psi\in\mathcal{H}.$$

此外，对于边界算子 d，有以下结论：

$$\begin{aligned} &(d^*f)(\boldsymbol{x})=\chi(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})\quad \text{for all } \boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2, f\in\ell^2(\mathbb{Z}^2),\\ &d^*d=\bigoplus_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2}|\chi(\boldsymbol{x})\rangle\langle\chi(\boldsymbol{x})|,\quad dd^*=I_{\ell^2(\mathbb{Z}^2)},\\ &C=2d^*d-1.\end{aligned}$$

定义 2.1（局域化）。设 $\Psi_0 \in \mathcal{H}$ 是一个满足 $\|\Psi_0\| = 1$的初始态。若存在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^2$ 使得 $\limsup_{t\to\infty} \|(U^t\Psi_0)(\boldsymbol{x})\|^2 > 0$成立，则称一对$(U, \Psi_0)$导致局域化。

下文将介绍局域化的充分条件。根据 [23, 命题 2.4]，当且仅当时间演化算子 U 具有特征值 μ，且Ψ_0 与特征空间 $\ker(U-\mu)$有非零重叠时，U, Ψ_0会导致局域化。因此，要发生局域化，U 必须具有特征值。我们简要介绍关于 U 具有特征值的充分条件的已知结果。在 SMT 得出的结果中，以下结果尤其值得本文关注：

$$\{e^{\pm i\arccos\lambda} \mid \lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)\} \subset \sigma_{\mathrm{p}}(U), \quad \{e^{\pm i\arccos\lambda} \mid \lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T)\} = \sigma_{\mathrm{ess}}(U). \tag{2.1}$$

SMT

根据这一结果，可以通过分析 T的特征值来获得局域化的充分条件。下面为分析 T的特征值作准备。我们定义 $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$上的有界算子 T_0 如下：

$$T_0 = a_\Phi(\boldsymbol{p}) + \sum_{j=1}^{2} \left(q_j\phi_{j,1}^*\phi_{j,2}L_j + q_j^*\phi_{j,1}\phi_{j,2}^*L_j^*\right), \tag{2.2}$$

eq:t

$$a_\Phi(\boldsymbol{p}) = \sum_{j=1}^{2} p_j\left(|\phi_{j,1}|^2 - |\phi_{j,2}|^2\right), \quad a_\Omega(\boldsymbol{p}) = \sum_{j=1}^{2} p_j\left(|\omega_{j,1}|^2 - |\omega_{j,2}|^2\right).$$

根据 [4, 引理 3.3]，可得

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(T) = \sigma(T_0) = \left[-2\sum_{j=1}^{2}|q_j\phi_{j,1}\phi_{j,2}| + a_\Phi(\boldsymbol{p}), 2\sum_{j=1}^{2}|q_j\phi_{j,1}\phi_{j,2}| + a_\Phi(\boldsymbol{p})\right]. \tag{2.3}$$

eq:es

令 $\mathbf{1}_A$ 为集合 A的特征函数。假设 $[-1,1]\setminus\sigma(T_0) \neq \emptyset$，我们可以在 $[-1,1]\setminus\sigma(T_0)$上定义函数 f 如下：

$$f(\lambda) = \lambda + \langle\varphi_{\boldsymbol{q}}, \psi_\lambda\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z}^2)},$$

其中

$$\varphi_{\boldsymbol{q}} = \sum_{j=1}^{2}\left(q_j\omega_{j,2}\phi_{j,1}^*\mathbf{1}_{\{-\boldsymbol{e}_j\}} + q_j^*\omega_{j,1}\phi_{j,2}^*\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{e}_j\}}\right), \quad \psi_\lambda = (T_0-\lambda)^{-1}\varphi_{\boldsymbol{q}}. \tag{2.4}$$

eq:ph

根据文献 [4], 的方法，我们得到关于 f及 T的特征值 U的以下事实：

$$f(\lambda) = 0 \implies \lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T) \implies e^{\pm i\arccos\lambda} \in \sigma_{\mathrm{p}}(U). \tag{2.5}$$

eigen

注意，U的特征值 $e^{\pm i\arccos\lambda}$是离散的。下一个定理给出了 U 具有特征值的一个充分条件。

FFS17main

定理 2.2（ [4], $d=2$）。假设满足以下条件：

$$\forall j \in \{1,2\},\ \phi_{j,1}\omega_{j,2} + \phi_{j,2}\omega_{j,1} = 0, \tag{2.6}$$

FFS17

$$\exists l \in \{1,2\},\ \phi_{l,1}\omega_{l,2} \neq 0, \tag{2.7}$$

$$\exists \boldsymbol{p}_0 \in \{-1,1\}^2,\ a_\Phi(\boldsymbol{p}_0) \neq a_\Omega(\boldsymbol{p}_0). \tag{2.8}$$

那么存在 $\delta > 0$，使得如果（$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$）满足 $p_l q_l \neq 0$，且 $\|(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) - (\boldsymbol{p}_0, \mathbf{0})\|_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^2} < \delta$，那么 f 有一个零点，即 U存在特征值。

注意，定理FFS17main2.2仅在位移足够弱时适用（即 $\boldsymbol{q}$ 足够接近0）。在下一小节中，我们定义具有强位移的分步量子行走（即$\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$）。

2.3 具有强位移的分步量子行走

我们考虑分步量子行走，其中位移如此之强，以至于定理FFS17main2.2无法应用。因此，我们引入以下条件。

(C.1) $\omega_{1,2} = \phi_{1,2} = 0$ 和 $\omega_{2,1}\phi_{2,2} + \omega_{2,2}\phi_{2,1} = 0$, c1 (C.2) $\omega_{i,j}$, $\phi_{i,j} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 对于 $(i,j) \in \{(1,1),(2,1),(2,2)\}$, c2 (C.3) $p_1 = p_2 = 0$ 和 $q_1 = q_2 = 1$. c3

备注 2.3. 条件 (c1C.1) 是定理 FFS2 6 17_1. 中条件 (FFS17main2.2) 的特例。条件 (c2C.2) 并非必要；即使参数不是实数，本文其余论证也可类似地展开。注意，条件 (c3C.3) 是一种“强位移”条件，并且在施加此条件的模型中，FFS17main定理 2.2 的假设不成立。

下文中，除非另有说明，均假设条件（c1C.1）–（c3C.3）成立。根据条件（c1C.1）–（c3C.3），$a_\Phi(\boldsymbol{p}) = a_\Omega(\boldsymbol{p}) = 0$ 成立，且先前定义的 T_0 和 $\varphi_{\boldsymbol{q}}$ 可改写为

$$T_0 = \phi_{2,1}\phi_{2,2}(L_2 + L_2^*), \quad \varphi_{\boldsymbol{q}} = \phi_{2,1}\omega_{2,2}\mathbf{1}_{\{-\boldsymbol{e}_2\}} + \phi_{2,2}\omega_{2,1}\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{e}_2\}}.$$

定义 $\Lambda := 2|\phi_{2,\ 1}\phi_{2,\ 2}|$, $[-1,1] \setminus \sigma(T_0) \neq \emptyset$ 成立，因为 $\sigma(T_0) = [-\Lambda, \Lambda]$ 且

$$\Lambda = 2|\phi_{2,1}\phi_{2,2}| \leq |\phi_{2,1}|^2 + |\phi_{2,2}|^2 < 1.$$

我们设 $\mathbb{T}_- := [-1, -\Lambda)$和 $\mathbb{T}_+ := (\Lambda, 1]$，则 f 的定义域为 $\mathbb{T}_- \cup \mathbb{T}_+$。

3 主要结果

sec_3

本节讨论主要结果，内容分为两部分：一部分讨论局域化，另一部分讨论共振。本节研究的模型是上一节定义的具有强位移的分步量子行走。

3.1 强位移局域化的充分条件

在下一个定理中，我们给出 f 存在零点的充要条件。

main1 定理 3.1. 在条件（c1C.1）–（c3C.3）下，以下条件 (1) 和 (2) 等价。

(1) f 在 $\mathbb{T}_- \cup \mathbb{T}_+$上有零点。

(2) $|\phi_{2,2}| < |\omega_{2,2}|$.

特别地，当上述条件之一（即两者）成立时，f 的零点由 λ_0^+和λ_0^- 给出：

$$\lambda_0^\pm = \pm\frac{2\omega_{2,1}\omega_{2,2}}{\sqrt{2\omega_{2,2}^2/\phi_{2,2}^2 - 1}}.$$

注意，$\lambda_0^+ \neq \lambda_0^-$满足条件（c2C.2）。此外，特征值对应关系（特征值¯对应 2.5）表明，U至少有四个特征值 $e^{i\arccos\lambda_0^\pm}$ 和 $e^{-i\arccos\lambda_0^\pm}$。

证明。首先，我们计算 $f(\lambda)$。通过从 $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 到 $L^2([0,2\pi)^2, d\boldsymbol{k}/(2\pi)^2)$ 的傅里叶变换以及条件（c1C.1），对于 $\boldsymbol{k}=(k_1,k_2)\in[0,2\pi)^2$，我们得到 $\hat{}\varphi_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{k})=2i\phi_{2,1}\omega_2,2\sin\ k_2$ 和 $\hat{}\ T_0(\boldsymbol{k})=2\phi_{2,1}\phi_2,2\cos\ k_2$。对于 $\lambda\in\mathbb{T}_-\cup\mathbb{T}_+$，我们设 $a:=\lambda/2\phi_{2,1}\phi_2,2$。注意 $|a|>1$。于是得到以下方程:

$$\begin{aligned}\frac{f(\lambda)}{2\phi_{2,1}\phi_{2,2}} &= a+\frac{1}{2\phi_{2,1}\phi_{2,2}}1<\hat{\varphi},(\hat{T}_0(\cdot)-\lambda)^{-1}\hat{\varphi}> \\ &= a+\frac{1}{4\phi_{2,1}^2\phi_{2,2}^2}\int_{[0,2\pi)^2}\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2}\frac{4\phi_{2,1}^2\omega_{2,2}^2\sin^2 k_2}{\cos k_2-a} \\ &= a+\frac{\omega_{2,2}^2}{\phi_{2,2}^2}\int_{[0,2\pi)}\frac{dk_2}{(2\pi)}\frac{\sin^2 k_2}{\cos k_2-a} \\ &= a+\frac{\omega_{2,2}^2}{\phi_{2,2}^2}(-a+\mathrm{sgn}(a)\sqrt{a^2-1}).\end{aligned}$$

因此，如果存在 f 的零点 $\lambda_0\in\mathbb{T}_-\cup\mathbb{T}_+$，即 $f(\lambda_0)=0$，那么

$$\Lambda=2|\phi_{2,1}\phi_{2,2}|<|\lambda_0|\le 1, \tag{3.1}$$ sol_1

$$\left(\frac{\omega_{2,2}^2}{\phi_{2,2}^2}-1\right)|a|=\frac{\omega_{2,2}^2}{\phi_{2,2}^2}\sqrt{a^2-1}\ (>0). \tag{3.2}$$ sol_2

注意，条件sol3 1 -1 .)和(sol3 2 -2 .)分别导出条件

$$|\phi_{2,2}|\neq|\omega_{2,2}|,\quad 2|\omega_{2,1}\omega_{2,2}|\le\sqrt{2\omega_{2,2}^2/\phi_{2,2}^2-1} \tag{3.3}$$ sol_1

$$\text{and}\quad |\phi_{2,2}|<|\omega_{2,2}|, \tag{3.4}$$ sol_2

分别，但(sol_1 3.3)完全包含于(sol_2 ’ 3.4)。根据上述讨论，我们得到以下结论:

$$\exists\lambda_0\in\mathbb{T}_-\cup\mathbb{T}_+,\ f(\lambda_0)=0\implies|\phi_{2,2}|<|\omega_{2,2}|. \tag{3.5}$$ sol_t

（sol to_con3.5）的逆向结论很容易看出。当上述条件 (1) 或（和）(2) 成立时，求解方程（sol3 2 -2 .）可得

$$\lambda_0=\pm\frac{2\omega_{2,1}\omega_{2,2}}{\sqrt{2\omega_{2,2}^2/\phi_{2,2}^2-1}}.$$

□

main2 定理 3.2。假设在条件（c1C.1）–（c3C.3）下，定理 main13 1 中的（2）成立。设 μ_0 是与 f 的零点 λ_0 对应的 U 的一个特征值，即 $\mu_0\in\{e^{\pm i\arccos\lambda_0}\}$，$f(\lambda_0)=0$。则与特征值 μ_0 对应的 U 的特征向量 Ψ_{μ_0} 对所有 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2)\in\mathbb{Z}^2$ 均满足,

$$\Psi_{\mu_0}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\chi_{1,1}(\boldsymbol{x})\left(\psi_{\lambda_0}(\boldsymbol{x})-\mathbf{1}_{\{0\}}(\boldsymbol{x})\right)\\ -\mu_0\chi_{1,1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_1)\left(\psi_{\lambda_0}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_1)-\mathbf{1}_{\{0\}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_1)\right)\\ \chi_{2,1}(\boldsymbol{x})\left(\psi_{\lambda_0}(\boldsymbol{x})-\mathbf{1}_{\{0\}}(\boldsymbol{x})\right)-\mu_0\chi_{2,2}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_2)\left(\psi_{\lambda_0}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_2)-\mathbf{1}_{\{0\}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_2)\right)\\ \chi_{2,2}(\boldsymbol{x})\left(\psi_{\lambda_0}(\boldsymbol{x})-\mathbf{1}_{\{0\}}(\boldsymbol{x})\right)-\mu_0\chi_{2,1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_2)\left(\psi_{\lambda_0}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_2)-\mathbf{1}_{\{0\}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_2)\right)\end{pmatrix}, \tag{3.6}$$ eq:ma

其中

$$\psi_{\lambda_0}(\boldsymbol{x}) = [(T_0-\lambda_0)^{-1}\varphi_{\boldsymbol{q}}](\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}_{\{x_1=0\}}(\boldsymbol{x})\int_{[0,2\pi)} \frac{2i\omega_{2,2}\phi_{2,1}\sin k_2}{2\phi_{2,1}\phi_{2,2}\cos k_2-\lambda_0} e^{ik_2x_2}\frac{dk_2}{2\pi}. \tag{3.7}$$ psila

证明。令 $P:=I-|\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}\rangle\langle\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}|$ 和 $\psi_{\lambda_0}:=(T_0-\lambda_0)\varphi_{\boldsymbol{q}}$。由条件 (c1C.1) 和 (c2C.2)，$\psi_{\lambda_0}\in \mathrm{Ran}P\backslash\{0\}$ 成立。回顾使用 Feshbach 映射 $F(\lambda)$ 的讨论 [4]。由于 λ_0 是 f 的零点，λ_0 也是 T 的特征值，并且 $F(\lambda_0)\psi_{\lambda_0}=0$ 成立。此外，根据论文 [2, Theorem II.1]，中关于 Feshbach 映射的定理，对应于特征值 λ_0 的 T 特征向量可写为:

$$[P-(P^\perp(T-\lambda_0)P^\perp)^{-1}P^\perp TP]\psi_{\lambda_0}. \tag{3.8}$$ proto

由 [4, 引理 4.1 和命题 4.3]，，我们有 $(P^\perp(T-\lambda_0)P^\perp)^{-1}=-\lambda_0^{-1}P^\perp$ 和 $P^\perp TP=|\mathbf{1}_{\{0\}}\rangle\langle\varphi_{\boldsymbol{q}}|$。。因此

$$[P-(P^\perp(T-\lambda_0)P^\perp)^{-1}P^\perp TP]\psi_{\lambda_0}=\psi_{\lambda_0}+\frac{\langle\varphi_{\boldsymbol{q}},\psi_{\lambda_0}\rangle}{\lambda_0}\mathbf{1}_{\{0\}}.$$

由于 λ_0是 f的零点，因此 $f(\lambda_0)=\lambda_0+\langle\varphi_{\boldsymbol{q}},\psi_{\lambda_0}\rangle=0$成立。由此可得 $[P-(P^\perp(T-\lambda)P^\perp)^{-1}P^\perp TP]\psi_{\lambda_0}=\psi_{\lambda_0}-\mathbf{1}_{\{0\}}$.接下来，根据 [24],，以下向量是 U对应于特征值 $\mu_0\in\{e^{\pm i\,\text{反余弦}\,\lambda_0}\}$的特征向量:

$$\Psi_{\mu_0}=(1-\mu_0 S)d^*(\psi_{\lambda_0}-\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}).$$

直接计算可得（eq:main213 6.）和（psilambda3.7）。注意,（psilambda3.7）是通过傅里叶变换和傅里叶逆变换得到的。 □

备注 3.3. 定理 main13 1. 表明，具有强位移的分步量子行走会如 [4]所示发生局域化。此外，我们看到，局域化位置 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$ 总是满足 $x_1=0$ 或 $x_1=1$，由定理 main23 2. 可知。其原因是（c1C.1）中的条件 $\omega_{1,2}=\phi_{1,2}=0$。如果去掉这一条件，则预期即使对于 $x_1\neq 0$ 和 $x_1\neq 1$也会发生局域化。

3.2 阈值共振与广义特征函数

在本小节中，我们考虑$|\phi_{2,2}|=|\omega_{2,2}|$的情形。当$|\phi_{2,2}|=|\omega_{2,2}|$ 成立时，我们得到一个称为 U 的阈值共振的量，它对应于定理 main23 2.. 中情形$|\phi_{2,2}|<|\omega_{2,2}|$ 下得到的 U 的特征值 μ_0。首先，我们定义共振和阈值共振。

定义 3.4（阈值共振）。我们可以自然地将 U 扩展为作用于 $\mathcal{H}_\infty$ 上的 $U_\infty:=\ell^\infty(\mathbb{Z}^2;\mathbb{C}^4)$。设 $\Psi\in\mathcal{H}_\infty$ 是 $U_\infty\Psi=m\Psi$ 的一个解，其中 m 是一个复数。若$\Psi\in\mathcal{H}_\infty\backslash\mathcal{H}$，则称 m 是 U 的共振，且 Ψ 是对应于 m 的U 的广义特征函数。若 m 是 U 的共振，且 $m\in\partial\sigma_{\mathrm{ess}}(U)$ 成立，则称 m 为阈值共振。

rem:norm 备注 3.5。注意，对于任意 $\Psi\in\ell^2(\mathbb{Z}^2;\mathbb{C}^4)$，$\ell^2(\mathbb{Z}^2;\mathbb{C}^4)\subsetneq\ell^\infty(\mathbb{Z}^2;\mathbb{C}^4)$ 和 $\|\Psi\|_\infty\le\|\Psi\|_2$。

我们设 $m_\pm:=e^{i\arccos(\pm\Lambda)}$。在条件 (c1C.1)–(c3C.3) 下，由 (eq:ess2.3) 可得 $\sigma_{\mathrm{ess}}(T)=[-\Lambda,\Lambda]$ 成立。因此，由 (SMT2.1) 可得 $m_\pm^\#\in\partial\sigma_{\mathrm{ess}}(U)$，其中 $m_\pm^\#$是 $m_\pm$或 $m_\pm^*$.。我们使用 (eq:main213 6.) 构造一个候选函数，作为对应于 $m_\pm^\#$ 的 U 的广义特征函数。首先，对于每个 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2$，我们设 $\psi_{\pm\Lambda}(\boldsymbol{x}):=\lim_{\lambda\to\pm\Lambda\pm 0}\psi_\lambda(\boldsymbol{x})$，并且

$$\Sigma_\pm:=\{e^{i\arccos\lambda}\mid\lambda\in\mathbb{T}_\pm\},\quad \Sigma_\pm^*:=\{e^{-i\arccos\lambda}\mid\lambda\in\mathbb{T}_\pm\}.$$

则$\bigcup_{\star=\pm}(\Sigma_\star\cup\Sigma_\star^*)=\mathbb{S}^1\backslash\sigma_{\rm ess}(U)$成立，其中$\mathbb{S}^1$是$\mathbb{C}$上的单位圆。此外，我们定义一个向量

$$\Psi_\mu:=(1-\mu S)d^*(\psi_\lambda-\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}})\in\mathcal{H}=\ell^2(\mathbb{Z}^2;\mathbb{C}^4) \tag{3.9}$$ eq:Ps

对于 $\mu\in\mathbb{S}^1\backslash\sigma_{\rm ess}(U)$ 和 $\lambda=\mathrm{Re}\ \mu\in\mathbb{T}_-\cup\mathbb{T}_+$.，与定理 main2 3 2. 的证明中相同，满足以下方程:

$$\psi_\lambda(\boldsymbol{x})=\mathbf{1}_{\{x_1=0\}}(\boldsymbol{x})\int_{[0,2\pi)}\frac{2i\omega_{2,2}\phi_{2,1}\sin k_2}{2\phi_{2,1}\phi_{2,2}\cos k_2-\lambda}e^{ik_2x_2}\frac{dk_2}{2\pi}, \tag{3.10}$$ eq:re

$$\Psi_\mu(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\chi_{1,1}(\boldsymbol{x})\left(\psi_\lambda(\boldsymbol{x})-\mathbf{1}_{\{0\}}(\boldsymbol{x})\right)\\ -\mu\chi_{1,1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_1)\left(\psi_\lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_1)-\mathbf{1}_{\{0\}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_1)\right)\\ \chi_{2,1}(\boldsymbol{x})\left(\psi_\lambda(\boldsymbol{x})-\mathbf{1}_{\{0\}}(\boldsymbol{x})\right)-\mu\chi_{2,2}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_2)\left(\psi_\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_2)-\mathbf{1}_{\{0\}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_2)\right)\\ \chi_{2,2}(\boldsymbol{x})\left(\psi_\lambda(\boldsymbol{x})-\mathbf{1}_{\{0\}}(\boldsymbol{x})\right)-\mu\chi_{2,1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_2)\left(\psi_\lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_2)-\mathbf{1}_{\{0\}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_2)\right)\end{pmatrix}, \tag{3.11}$$ eq:re

其中 $\mu\in\mathbb{S}^1\backslash\sigma_{\rm ess}(U)$ 和 $\lambda=\mathrm{Re}\ \mu\in\mathbb{T}_-\cup\mathbb{T}_+$.

此外，我们定义

$$\Psi_{m_\pm^\#}(\boldsymbol{x}):=\lim_{\substack{\mu\to m_\pm^\#\\ \mu\in\Sigma_\pm^\#}}\Psi_\mu(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2.$$

以下是本小节的主要结果。

main3 定理 3.6。在条件 (c1C.1)–(c3C.3) 下，假设$|\phi_{2,\ 2}|=|\omega_{2,\ 2}|$。那么，$m_\pm^\#$ 是 U 的阈值共振，即

$$\Psi_{m_\pm^\#}\in\mathcal{H}_\infty\backslash\mathcal{H},\ U_\infty\Psi_{m_\pm^\#}=m_\pm^\#\Psi_{m_\pm^\#}.$$

reso3 命题 3.7。在条件 (c1C.1)–(c3C.3) 下，假设$|\phi_{2,\ 2}|=|\omega_{2,\ 2}|$。那么，对于每个 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2$，以下方程成立:

$$\psi_{\pm\Lambda}(\boldsymbol{x})=(\pm\mathrm{sgn}(\phi_{2,1}\phi_{2,2}))^{x_2}\mathrm{sgn}(x_2)\frac{\omega_{2,2}}{\phi_{2,2}}\mathbf{1}_{\{x_1=0\}\cup\{x_2\neq0\}}(\boldsymbol{x}). \tag{3.12}$$ eq:re

特别地，上述方程 (eq:reso3 3 12.) 表明 $\Psi_{m_\pm^\#}\in\mathcal{H}_\infty\backslash\mathcal{H}$ 成立。

证明。对于 $\lambda\in\mathbb{T}_-\cup\mathbb{T}_+$ 和 $x\in\mathbb{Z}$，我们设

$$\begin{aligned}I_\pm(x)&:=\lim_{\lambda\to\pm\Lambda\pm0}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-i\sin k}{2\phi_{2,1}\phi_{2,2}\cos k-\lambda}e^{ikx}\frac{dk}{2\pi}\\ &=2\lim_{\lambda\to\pm\Lambda\pm0}\int_0^{\pi}\frac{\sin k\sin xk}{2\phi_{2,1}\phi_{2,2}\cos k-\lambda}\frac{dk}{2\pi}.\end{aligned}$$

则 $\psi_{\pm\Lambda}(\boldsymbol{x})=\lim_{\lambda\to\pm\Lambda\pm0}\psi_\lambda(\boldsymbol{x})=-2\omega_{2,2}\phi_{2,1}\mathbf{1}_{\{x_1=0\}}(\boldsymbol{x})I_\pm(x_2)$ 由 (eq:res opsi 3.10)。

首先，我们考虑 $\phi_{2,1}\phi_{2,2}>0$ 成立的情形。在这种情况下，由于 $\Lambda=2\phi_{2,1}\phi_{2,2}<\lambda$，我们得到

$$\left|\frac{\sin k\sin xk}{2\phi_{2,1}\phi_{2,2}\cos k-\lambda}\right|\le\frac{1}{\Lambda}\frac{|\sin k\sin xk|}{1-\cos k},\quad k\in[0,\pi],\ x\in\mathbb{Z}. \tag{3.13}$$ upper

(上界估值3.13)右侧关于 k 在 $(0,\pi]$ 上有界，这可由连续性和以下计算得出：

$$\lim_{k\to 0+0}\frac{|\sin k\sin xk|}{1-\cos k}=\lim_{k\to 0+0}\frac{\sin xk}{\sin k}\frac{k}{xk}(1+\cos k)x=2x,\quad x\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

因此，对所有 $x\in\mathbb{Z}$，以下不等式成立：

$$\int_0^\pi\frac{1}{\Lambda}\frac{|\sin k\sin xk|}{1-\cos k}\frac{dk}{\pi}<\infty.$$

因此，由控制收敛定理可得

$$I_+(x)=-\frac{1}{\Lambda\pi}\int_0^\pi\frac{\sin k\sin xk}{1-\cos k}dk$$

在 $\phi_{2,\ 1}\phi_{2,\ 2}>0$ 的情况下。我们设

$$J_\pm(x):=\int_0^\pi\frac{\sin k\sin xk}{1\pm\cos k}dk,\quad x\in\mathbb{Z},$$

那么，对于 $x\in\mathbb{Z}$，在 $\phi_{2,\ 1}\phi_{2,\ 2}>0$ 的情况下，$I_+(x)=-(1/\Lambda\pi)J_-(x)$。

在其他情况下，同理可得关于 $I_\pm$ 的下表。

	$\phi_{2,1}\phi_{2,2}>0$	$\phi_{2,\ 1}\phi_{2,\ 2}<0$
$I_{+}\ (x)$	$-\frac{1}{\Lambda\pi}J_{-}\ (x)$	$-\frac{1}{\Lambda\pi}J_{+}\ (x)$
$I_{-}\ (x)$	$\frac{1}{\Lambda\pi}J_{+}\ (x)$	$\frac{1}{\Lambda\pi}J_{-}(x)$

对于 $x\geq 4$，有

$$\begin{aligned}
J_\pm(x)&=\int_0^\pi\frac{\sin k\left(\sin k\cos(x-1)k+\cos k\sin(x-1)k\right)}{1\pm\cos k}dk\\
&=\int_0^\pi(1\mp\cos k)\cos(x-1)k\ dk\\
&\quad+\int_0^\pi\frac{\sin k\cos k}{1\pm\cos k}\left(\sin k\cos(x-2)k+\cos k\sin(x-2)k\right)dk\\
&=\int_0^\pi\frac{\left(\sin k-\sin^3 k\right)\sin(x-2)k}{1\pm\cos k}dk\\
&=J_\pm(x-2)\\
&=\begin{cases}J_\pm(2), & x:\text{even},\\ J_\pm(3), & x:\text{odd}.\end{cases}
\end{aligned}$$

注意，对于所有 $x\in\mathbb{Z}$，$J_\pm(-x)=-J_\pm(x)$。利用这些关系方程直接计算 $J_\pm(x)$，可得到以下方程：

$$J_\pm(x)=\begin{cases}\mathrm{sgn}(x)(\mp 1)^{x+1}\pi, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

因此，由（eq:resopsi3.10），我们得到（eq:reso3 12.）。特别地，因为 $|\psi_{\pm\Lambda}(\boldsymbol{x})|=\mathbf{1}_{\{x_1=0\}\cup\{x_2\neq 0\}}(\boldsymbol{x})$ 且（eq:resoPsi3.11），我们得到 $\Psi_{m_\pm^\#}\in\mathcal{H}_\infty\backslash\mathcal{H}$. □

我们对所有 $\lambda \in \mathbb{T}_- \cup \mathbb{T}_+$. 设定 $\varepsilon(\lambda) := -\langle \varphi_{\boldsymbol{q}}, \psi_\lambda \rangle / \lambda$

em:epsilon

引理 3.8. 假设 (c1C.1)–(c3C.3) 且 $|\phi_{2,\ 2}| = |\omega_{2,\ 2}|$。则 $\lim_{\lambda \to \pm\Lambda \pm 0} \varepsilon(\lambda) = 1$ 成立。

证明. 根据假设 $|\phi_{2,\ 2}| = |\omega_{2,\ 2}|$ 以及定理 main13.1 的证明，我们得到以下等式：

$$\frac{f(\lambda)}{2\phi_{2,1}\phi_{2,2}} = \operatorname{sgn}(a)\sqrt{a^2 - 1}, \quad \text{for } \lambda \in \mathbb{T}_- \cup \mathbb{T}_+,$$

其中 $a = \lambda / 2\phi_{2,\ 1}\phi_{2,\ 2}$。这意味着 $\lim_{\lambda \to \pm\Lambda \pm 0} f(\lambda) = 0$。由于 $\varepsilon(\lambda) = -f(\lambda)/\lambda + 1$ 且 $\pm\Lambda \neq 0$，我们有 $\lim_{\lambda \to \pm\Lambda \pm 0} \varepsilon(\lambda) = 1$. □

reso1

命题 3.9. 在条件 (c1C.1)–(c3C.3) 下，假设 $|\phi_{2,\ 2}| = |\omega_{2,\ 2}|$。对于所有 $\mu \in \mathbb{S}^1 \backslash \sigma_{\mathrm{ess}}(U)$，令 $\lambda := \mathrm{Re}\ \mu \in \mathbb{T}_- \cup \mathbb{T}_+$。则有以下等式成立：

$$(U - \mu)\Psi_\mu = (\varepsilon(\lambda) - 1)\{2\mu S d^* \varphi_{\boldsymbol{q}} + (U - \mu)(1 - \mu S) d^* \mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}\}.$$

特别是，

$$\lim_{\substack{\mu \to m_\pm^\# \\ \mu \in \Sigma_\pm^\#}} \|(U - \mu)\Psi_\mu\|_2 = 0.$$

在证明命题 reso13.9 之前，我们先准备一些相关引理。按照方程（proto-h 3.8），我们定义 h_λ 如下：

$$h_\lambda := [P - (P^\perp (T - \lambda) P^\perp)^{-1} P^\perp T P]\psi_\lambda.$$

lem1:reso1

引理 3.10。 $h_\lambda = \psi_\lambda - \varepsilon(\lambda)\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}$。

证明。 按照定理 main23.2 的证明中的相同论证，我们有 $(P^\perp (T-\lambda) P^\perp)^{-1} = -\lambda^{-1} P^\perp$ 和 $P^\perp T P = |\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}\rangle\langle \varphi_{\boldsymbol{q}}|$. 此外，$\psi_\lambda \in \mathrm{Ran} P$ 成立。因此我们得到

$$h_\lambda = P\psi_\lambda - \lambda^{-1} P^\perp T P \psi_\lambda = \psi_\lambda - \varepsilon(\lambda)\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}.$$

□

lem2:reso1

引理 3.11. $(T - \lambda)h_\lambda = (1 - \varepsilon(\lambda))\varphi_{\boldsymbol{q}}$.

Pro 由此可知。根据 [4, 引理 3.2], 判别算子 T 可写为：

$$T = \chi_{2,1} L_2 \chi_{2,2} + \chi_{2,2} L_2^* \chi_{2,1}, \tag{3.14}$$

disc

其中 $\chi_{2,1}$ 和 $\chi_{2,2}$ 分别是由 $\chi_{2,1}(\boldsymbol{x})$ 和 $\chi_{2,2}(\boldsymbol{x})$ 定义的乘法算子。利用公式（eq:t2.2）和（disc-ffs3.14），可得

$$\begin{aligned}
(T_0 h_\lambda)(\boldsymbol{x}) &= \phi_{2,1}\phi_{2,2}((L_2 h_\lambda)(\boldsymbol{x}) + (L_2^* h_\lambda)(\boldsymbol{x})), \\
(T h_\lambda)(\boldsymbol{x}) &= \chi_{2,1}(\boldsymbol{x})\chi_{2,2}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_2)(L_2 h_\lambda)(\boldsymbol{x}) + \chi_{2,2}(\boldsymbol{x})\chi_{2,1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_2)(L_2^* h_\lambda)(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

我们定义算子 W 和函数 β 为 $W := T - T_0$ 以及 $\beta(\boldsymbol{x}) := \chi_{2,\ 1\ \ 2}(\boldsymbol{x})\chi_{2,\ 1}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_2)$，，。这里，注意到 $\phi_{2,1}\phi_{2,2} \in$ Ran，我们有 $(\ )$。根据这一事实和引理 lem:reso3.10，我们得到 $P\psi_\lambda\ _0 = 0$

$$\begin{aligned}
(W h_\lambda)(\boldsymbol{x}) &= \big(\beta(\mathbf{0})\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}(\boldsymbol{x}) + \beta(-\boldsymbol{e}_2)\mathbf{1}_{\{-\boldsymbol{e}_2\}}(\boldsymbol{x})\big)(L_2 h_\lambda)(\boldsymbol{x}) \\
&\quad + \big(\beta(-\boldsymbol{e}_2)\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}(\boldsymbol{x}) + \beta(\mathbf{0})\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{e}_2\}}(\boldsymbol{x})\big)(L_2^* h_\lambda)(\boldsymbol{x}) \\
&= \beta(\mathbf{0})\psi_\lambda(\boldsymbol{e}_2)\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}(\boldsymbol{x}) - \varepsilon(\lambda)\beta(-\boldsymbol{e}_2)\mathbf{1}_{\{-\boldsymbol{e}_2\}}(\boldsymbol{x}) \\
&\quad + \beta(-\boldsymbol{e}_2)\psi_\lambda(-\boldsymbol{e}_2)\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}(\boldsymbol{x}) - \varepsilon(\lambda)\beta(\mathbf{0})\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{e}_2\}}(\boldsymbol{x}).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

wh_la

另一方面，由（eq:phipsi2.4）和引理 lem11310:reso，我们得到以下方程:

$$(T_0-\lambda)h_\lambda=\varphi_{\boldsymbol{q}}-\varepsilon(\lambda)\phi_{2,1}\phi_{2,2}\left(\mathbf{1}_{\{-\boldsymbol{e}_2\}}+\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{e}_2\}}\right)+\lambda\varepsilon(\lambda)\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}. \tag{3.16}$$

T0h_l

结合（wh_ am a3.15）和（_d am a3.16），我们得到

$$\begin{aligned}(T-\lambda)h_\lambda&=(T_0-\lambda)h_\lambda+Wh_\lambda\\&=\varphi_{\boldsymbol{q}}+A_1\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}-\varepsilon(\lambda)A_2\mathbf{1}_{\{-\boldsymbol{e}_2\}}-\varepsilon(\lambda)A_3\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{e}_2\}},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}A_1&:=\beta(\mathbf{0})\psi_\lambda(\boldsymbol{e}_2)+\beta(-\boldsymbol{e}_2)\psi_\lambda(-\boldsymbol{e}_2)+\lambda\varepsilon(\lambda),\\A_2&:=\beta(-\boldsymbol{e}_2)+\phi_{2,1}\phi_{2,2},\\A_3&:=\beta(\mathbf{0})+\phi_{2,1}\phi_{2,2}.\end{aligned}$$

根据 (eq:phips i

2.4），

$$\begin{aligned}-\lambda\varepsilon(\lambda)&=\langle\omega_{2,1}\phi_{2,2}\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{e}_2\}}+\omega_{2,2}\phi_{2,1}\mathbf{1}_{\{-\boldsymbol{e}_2\}},\psi_\lambda\rangle\\&=\omega_{2,1}\phi_{2,2}\psi_\lambda(\boldsymbol{e}_2)+\omega_{2,2}\phi_{2,1}\psi_\lambda(-\boldsymbol{e}_2)\\&=\beta(\mathbf{0})\psi_\lambda(\boldsymbol{e}_2)+\beta(-\boldsymbol{e}_2)\psi_\lambda(-\boldsymbol{e}_2)+\phi_{2,1}\phi_{2,2}\left(\psi_\lambda(\boldsymbol{e}_2)+\psi_\lambda(-\boldsymbol{e}_2)\right).\end{aligned}$$

由于 $2\cos k\cdot(-2i\omega_{2,1}\phi_{2,2}\sin\ k)/(2\phi_{2,1}\phi_{2,2}\cos\ k-\lambda)$ 是奇函数，我们得到

$$\psi_\lambda(\boldsymbol{e}_2)+\psi_\lambda(-\boldsymbol{e}_2)=\int_{-\pi}^{\pi}2\cos k_2\cdot\frac{-2i\omega_{2,1}\phi_{2,2}\sin k_2}{2\phi_{2,1}\phi_{2,2}\cos k_2-\lambda}\frac{dk_2}{2\pi}=0$$

由 (eq:resopsi3.10) 得到。因此我们有 $A_1=\langle\varphi_{\boldsymbol{q}},\psi_\lambda\rangle+\lambda\varepsilon(\lambda)=0$。另一方面，由 $\beta.$ 的定义可得 $A_2=\omega_{2,2}\phi_{2,1}$, $A_3=\omega_{2,1}\phi_{2,2}$。因此，我们有

$$(T-\lambda)h_\lambda=(1-\varepsilon(\lambda))\varphi_{\boldsymbol{q}}.$$

□

命题 reso13 9. . 引理 lem113 10 :reso 的证明以及 (eq:Psimu3.9) 得出以下方程:

$$\Psi_\mu=(1-\mu S)d^*h_\lambda+(\varepsilon(\lambda)-1)(1-\mu S)d^*\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}(U-\mu)\Psi_\mu&=(SC-\mu)(1-\mu S)d^*h_\lambda+(\varepsilon(\lambda)-1)(U-\mu)(1-\mu S)d^*\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}\\&=SCd^*h_\lambda-\mu d^*h_\lambda-\mu SCSd^*h_\lambda+\mu^2Sd^*h_\lambda+(\varepsilon(\lambda)-1)(U-\mu)(1-\mu S)d^*\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}\\&=(1-2\mu\lambda+\mu^2)Sd^*h_\lambda+2\mu(\varepsilon(\lambda)-1)Sd^*\varphi_{\boldsymbol{q}}+(\varepsilon(\lambda)-1)(U-\mu)(1-\mu S)d^*\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}.\end{aligned}$$

上式中的最后一个等号是由于 $SCd^*h_\lambda=Sd^*h_\lambda$ $SCSd^*=$、 $S\ 2d^*d-1\ Sd^*=2Sd^*T-d^*$ 3 11 $1-2\mu\lambda+\mu^2=0$ () 以及引理 lem:reso。。此外，由于 $\lambda=\mathrm{Re}\ \mu$ 且 $|\mu|=1.$，该方程成立。因此

$$(U-\mu)\Psi_\mu=(\varepsilon(\lambda)-1)\{2\mu Sd^*\varphi_{\boldsymbol{q}}+(U-\mu)(1-\mu S)d^*\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}\}.$$

因此，由 $|\mu|=1$、引理 em:eps 3.8 以及 U 和 S的幺正性，我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\mu\to m_\pm^\#\\ \mu\in\Sigma_\pm^\#}}\|(U-\mu)\Psi_\mu\|_2&=\lim_{\lambda\to\pm\Lambda\pm0}|\varepsilon(\lambda)-1|\|2\mu Sd^*\varphi_{\boldsymbol{q}}+(U-\mu)(1-\mu S)d^*\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}\|_2\\&\le\lim_{\lambda\to\pm\Lambda\pm0}2|\varepsilon(\lambda)-1|\left(\|Sd^*\varphi_{\boldsymbol{q}}\|_2+2\|d^*\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}\|_2\right)=0.\end{aligned}$$

□

现在我们可以证明本小节关于阈值共振的主要结果，即定理main336。

main3定理 3.6的证明。接下来，我们证明 m_+ 是 U 的阈值共振。由三角不等式，对于 $\mu \in \Sigma_+$ 和 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^2$，可得

$$\begin{aligned} \|(U_\infty \Psi_{m_+})(\boldsymbol{x}) - m_+ \Psi_{m_+}(\boldsymbol{x})\|_{\mathbb{C}^4} \leq{}& \|(U_\infty \Psi_{m_+})(\boldsymbol{x}) - (U_\infty \Psi_\mu)(\boldsymbol{x})\|_{\mathbb{C}^4} && (3.17) \\ &+ \|(U_\infty \Psi_\mu)(\boldsymbol{x}) - \mu \Psi_\mu(\boldsymbol{x})\|_{\mathbb{C}^4} && (3.18) \\ &+ \|\mu \Psi_\mu(\boldsymbol{x}) - m_+ \Psi_{m_+}(\boldsymbol{x})\|_{\mathbb{C}^4}. && (3.19) \end{aligned}$$

eq:re eq:re eq:re

根据 Ψ_{m_+} 的定义，项 (eq:reso.main.3 3.19.) 当 $\mu \to m_+$ 时收敛于 0。注意到备注 . , 项 reso.norm 3.5 th (eq:reso.main.2 3.18.) 可由上式计算如下:

$$\|(U_\infty \Psi_\mu)(\boldsymbol{x}) - \mu \Psi_\mu(\boldsymbol{x})\|_{\mathbb{C}^4} \leq \|U_\infty \Psi_\mu - \mu \Psi_\mu\|_\infty \leq \|U \Psi_\mu - \mu \Psi_\mu\|_2. \tag{3.20}$$

U_inf

根据命题 reso1 3.9, (U_inf 3.20) 右端当 $\mu \to m_+$. 时收敛于 0。于是，项 (eq:reso.main.2 3.18.) 当 $\mu \to m_+$. 时收敛于 0。最后，我们证明项 (eq:reso.main.1 3.17.) 当$\mu \to m_+$. 时收敛于 0。令 $\Phi_\mu := \Psi_\mu - \Psi_{m_+}$ 和 C_∞ 为作用于 $\mathcal{H}_\infty$ 上的 C 的自然延拓。我们有

$$(U_\infty \Phi_\mu)(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} (C_\infty \Phi_\mu)_2(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_1) \\ (C_\infty \Phi_\mu)_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_1) \\ (C_\infty \Phi_\mu)_4(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_2) \\ (C_\infty \Phi_\mu)_3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix},$$

这里，对于每个 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^2$, $i = 1,2,3,4$, $(C_\infty \Phi_\mu)_i(\boldsymbol{x})$ 是 $(C_\infty \Phi_\mu)(\boldsymbol{x})$ 的第 i 个分量。由于 C_∞ 是单缺陷的，存在常数 $c > 0$，使得 $|(C_\infty \Phi_\mu)_i(\boldsymbol{x})| \leq c|(\Phi_\mu)_i(\boldsymbol{x})|$ 对于 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^2$, $i = 1,2,3,4$ 成立。因此我们得到

$$\begin{aligned} \|(U_\infty \Phi_\mu)(\boldsymbol{x})\|_{\mathbb{C}^4}^2 &\leq c\{|(\Phi_\mu)_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_1)|^2 + |(\Phi_\mu)_2(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_1)|^2 + |(\Phi_\mu)_3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_2)|^2 + |(\Phi_\mu)_4(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_2)|^2\} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

当 $\mu \to m_+$. 这意味着，当 $\mu \to m_+$. 时，项 (eq:reso.main.1 3.17.) 收敛到 0。因此 $\|(U_\infty \Psi_{m_+})(\boldsymbol{x}) - m_+ \Psi_{m_+}(\boldsymbol{x})\|_{\mathbb{C}^4} = 0$ 对所有 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^2$ 均成立，即，

$$U_\infty \Psi_{m_+} = m_+ \Psi_{m_+}.$$

除了上述结果外，根据命题 reso3 3.7., m_+ 是 U 的一个阈值共振。对于其他阈值共振，可以用与上述相同的方法证明该定理。 □

致谢 本研究得到 JSPS KAKENHI Grant number 19K14596 (T.F.) 的资助。

参考文献

[1] Sergio Albeverio、Saidakhmat N Lakaev、Konstantin A Makarov 和 Zahriddin I Muminov。《格点上双粒子哈密顿量的阈值效应》。《数学物理通讯》，262(1):91–115，2006。

[2] Volker Bach、J¨urg Fr¨ohlich与Israel Michael Sigal。量子场论中谱问题的重整化群分析。《数学进展》，137(2):205–298，1998。[3] Takako Endo、Takashi Komatsu、Norio Konno与Tomoyuki Terada。三态量子游走的平稳测度。《量子信息与计算》，19(11&12):901–912，2019。[4] Toru Fuda、Daiju Funakawa与Akito Suzuki。具有一个缺陷的多维量子游走的局域化。《量子信息处理》，16(8):203，2017。[5] Toru Fuda、Daiju Funakawa与Akito Suzuki。具有对扰动稳健的束缚态的一维分裂步量子游走的局域化。《数学物理杂志》，59(8):082201，2018。[6] Toru Fuda、Daiju Funakawa与Akito Suzuki。一维分裂步量子游走的弱极限定理。《罗马尼亚纯粹与应用数学评论》，64:157–165，2019。[7] Toru Fuda、Akihiro Narimatsu、Kei Saito与Akito Suzuki。具有缺陷的多维分裂步量子游走的谱分析。《量子研究：数学与基础》，9(1):93–112，2022。[8] Fumio Hiroshima与J´ozsef L″orinczi。具有 δ-势的非局部离散schr¨odinger算子的谱。《太平洋工业数学杂志》，6(1):1–6，2014。[9] Hikari Kawai、Takashi Komatsu与Norio Konno。一维二态空间非均匀量子游走的平稳测度。《横滨数学杂志》，64:111–130，2018。[10] Takuya Kitagawa、Matthew A Broome、Alessandro Fedrizzi、Mark S Rudner、Erez Berg、Ivan Kassal、Al´an Aspuru-Guzik、Eugene Demler与Andrew G White。光子量子游走中拓扑保护束缚态的观测。《自然通讯》，3(1):1–7，2012。[11] Takuya Kitagawa、Mark S Rudner、Erez Berg与Eugene Demler。用量子游走探索拓扑相。《物理评论A》，82(3):033429，2010。[12] Takashi Komatsu与Norio Konno。高维整数格上量子游走的平稳振幅。《量子信息处理》，16(12):1–16，2017。[13] Takashi Komatsu与Norio Konno。一维阿达马游走特征值问题所诱导的平稳测度。《统计物理杂志》，187(1):1–24，2022。[14] Takashi Komatsu、Norio Konno、Hisashi Morioka与Etsuo Segawa。基于路径计数方法的量子游走广义特征函数。《数学物理评论》，33(06):2150019，2021。[15] Takashi Komatsu、Norio Konno、Hisashi Morioka与Etsuo Segawa。多维量子游走广义特征函数的渐近性质。《亨利·Poincar´e年鉴》，23(5):1693–1724，2022。[16] Tania Loke、Judy W Tang、Jeremy Rodriguez、Michael Small与Jingbo B Wang。经典与量子网页排名的比较。《量子信息处理》，16(1):1–22，2017。

[17] Arindam Mallick 和 CM Chandrashekar. 由分步量子游走构造的狄拉克元胞自动机. Scientific Reports, 6(1):1–13, 2016.[18] Yasumichi Matsuzawa. 分步量子游走的指标定理. Quantum Information Processing, 19(8):1–8, 2020.[19] Yasumichi Matsuzawa 、Motoki Seki 和 Yohei Tanaka. 一维整数格点上分步量子游走的体边对应. arXiv 预印本 arXiv:2105.06147, 2021.[20]Hisashi Morioka. 位置依赖量子游走的广义特征函数与散射矩阵. Reviews in Mathematical Physics, 31(07):1950019, 2019.[21] Akihiro Narimatsu、Hiromichi Ohno 和 Kazuyuki Wada. 分步量子游走的酉等价类. Quantum Information Processing, 20(11):1–23, 2021.[22] Andreas Schreiber、Aur´el G´abris、Peter P Rohde、Kaisa Laiho、Martin ˇStefaˇn´ak、V´aclav Potoˇcek、Craig Hamilton、Igor Jex 和 Christine Silberhorn. 用于模拟双粒子动力学的二维量子游走. Science, 336(6077):55–58, 2012.[23] Etsuo Segawa 和 Akito Suzuki. 抽象量子游走的生成元. Quantum Studies: Mathematics and Foundations, 3(1):11–30, 2016.[24] Etsuo Segawa 和 Akito Suzuki. 抽象量子游走的谱映射定理. Quantum Information Processing, 18(11):1–24, 2019.[25] Yutaka Shikano. 从离散时间量子游走到连续时间量子游走的极限分布. Journal of Computational and Theoretical Nanoscience, 10(7):1558–1570, 2013.[26] Mario Szegedy. 马尔可夫链算法的量子加速. 收录于第 45 届 IEEE 计算机科学基础研讨会论文集，第 32–41 页. IEEE, 2004.[27]Yohei Tanaka. 一维严格局域算子的拓扑不变量的构造性方法. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 500(1):125072, 2021.