arXiv:2304.02345v1 [math.CA] 5 Apr 2023

圆上具有局部化支撑函数的尖锐傅里叶延拓

LARS BECKER

Abstract. 一个广为人知的猜想指出，在圆上的 $L^2 \to L^6$ Tomas-Stein 延拓不等式中，常值函数是极值函数。我们证明，支撑在 S^1 上一对对跖点的 $\sqrt{6}/80$邻域内的函数满足该猜想所预言的尖锐不等式。在此过程中，我们推进了 [CFO$^+$17] 中提出的一项计划，旨在证明所有函数都满足尖锐不等式。

1. Introduction

我们关注这样一个猜想：在圆上的 Tomas-Stein 傅里叶延拓不等式中，常值函数是极值函数

$$\|\widehat{f\sigma}\|_{L^6(\mathbb{R}^2)} \le C\|f\|_{L^2(\sigma)}. \tag{1}$$

这里，σ 是单位圆 $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ 上的弧长测度，而 $\hat{\mu}(\xi) = \int e^{-ix\xi}\mathrm{d}\mu(\xi)$ 是傅里叶变换。关于 S^2 的相应猜想已由 Foschi [Fos15], 证明；在 [CFO$^+$17] 中，Foschi 的论证被改编用于 S^1，而我们关注的猜想可归结为以下问题。

猜想 1. 二次型

$$Q(f) := \int_{(S^1)^6} (|\omega_1+\omega_2+\omega_3|^2 - 1)(f(\omega_1,\omega_2,\omega_3)^2 - f(\omega_1,\omega_2,\omega_3)f(\omega_4,\omega_5,\omega_6))\,\mathrm{d}\Sigma(\omega)$$

在由 $L^2((S^1)^3,\mathbb{R})$ 中所有对跖函数构成的子空间 V 上是半正定的。这里记 $\mathrm{d}\Sigma(\omega) = \delta(\sum_{j=1}^6 \omega_k)\prod_{j=1}^6 \mathrm{d}\sigma(\omega_j)$，若函数 f 满足 $f(\pm\omega_1,\pm\omega_2,\pm\omega_3)$ 不随符号的选择而改变，则称其为对跖函数。

通过对由此类函数构成的有限维空间上 Q 的特征值进行数值计算，[OTZ22] 和 [BTZ20]，已验证猜想 1 对所有傅里叶模态次数不超过 120 的函数均成立。此外，[CG22] 采用不同方法，证明了猜想中的不等式 (1) 的尖锐形式对 $L^2(\sigma)$ 中若干具有受约束的傅里叶支撑的无限维子空间成立。我们的主要结果证明了猜想 1 对具有局部化空间支撑的函数成立。

令 C 为半径 ε、以直线 $\mathbb{R}(1,1,1)$ 为中心的圆柱，并定义

$$V_\varepsilon := \left\{ f \in V : \operatorname{supp} f(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2},e^{i\theta_3}) \subset \bigcup_{k\in\pi\mathbb{Z}^3} k + C \right\}.$$

定理 2. 设 $\varepsilon = 1/20$。则对所有 $f \in V_\varepsilon$，都有 $Q(f) \ge 0$。

注意到，由于常值函数属于 Q 的核，因此对于 $V_\varepsilon \oplus \langle \mathbf{1}\rangle$，同样的结论也成立，其中 $\mathbf{1}$ 是常值函数 1。

Date: 2023年4月6日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 42B10。*Key words and phrases.* 圆，傅里叶限制，尖锐不等式。

作为推论，支集充分接近一对对跖点的函数满足 (1)，且常数是猜想中的最佳常数。定义 $\Phi(g) := \|\widehat{g\sigma}\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}/\|g\|_{L^2(\sigma)}$。

推论 3. 设 $\varepsilon' = \sqrt{3/8}\varepsilon$。假设 $g \in L^2(\sigma)$ 满足： $g(e^{i\theta})$ 的支集包含于$(-\varepsilon', \varepsilon') + \pi\mathbb{Z}$。则 $\Phi(g) \leq \Phi(\mathbf{1})$，其中**1** 是 S^1 上的常值 1 函数。

注意，由旋转对称性，当 $g(e^{i\theta})$支持在 $I + \pi\mathbb{Z}$ 中，且 I 是长度为 $2\varepsilon'$ 的任意区间时，同样成立。

定理 2 和推论 3 中的常数 ε 和 ε' 并非最优。数值计算表明，使用我们的方法， ε 可提高到约 0.104，而 ε' 可提高到约 0.063，见第 7 节。

[BTZ20] 中的数值结果表明，在傅里叶模态次数不超过 N 且对应较小特征值的函数子空间上， Q的特征函数会在空间中集中。定理 2 表明， Q 对所有这类充分集中的函数均为正，因此这应当是证明 Q 在对跖函数全空间上半正定的一个有用的部分结果。波恩的一名研究生贾西·郑提出了一个更精确的观察：最小特征值的量级为 $\sim N^{-2}\log(N)$，参见[NOT22]的第 2 节。引理 7 中关于乘子m 的渐近公式（其在 0 附近形如 $c|\log|x|||x|^2$ ）也解释了为何存在这样的特征值。不幸的是，我们无法证明这就是最小特征值。

更一般地，尖锐傅里叶延拓不等式这一课题近年来引起了广泛关注。下面我们考虑一般维数 $d \geq 2$。于是 Tomas-Stein 延拓不等式表明，对每个 $q \geq q_d := 2(d+1)/(d-1)$，存在 $C(d,q) > 0$ 使得对所有 $f \in L^2(S^{d-1}, \sigma^{d-1})$

$$\|\widehat{f\sigma}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C(d,q)\|f\|_{L^2(\sigma)}\,. \tag{2}$$

这里 σ^{d-1} 表示 S^{d-1} 上的 $d-1$ 维豪斯多夫测度。

已知当 $q > q_d$ 时，对所有 d，(2) 的极值函数均存在，参见 [FVV11]。在端点 $q = q_d$ 处，极值函数的存在性与光滑性已针对 $d = 3$ 在 [CS12a], [CS12b] 中得到证明，并针对 d =2 在 [Sha16b], [Sha16a]中得到证明。对于高维球面 $d \geq 4$， $q = q_d$ 的极值函数的存在性已知取决于如下猜想：高斯函数使抛物面对应的延拓不等式达到最大，参见 [FLS16]。

对于（d, q）的某些特定取值，式（2）的极值函数已有完整刻画。许多此类结果源自 Foschi 的工作 [Fos15], ：他证明，当（d, q） =(2,4) 时，常值函数使式（2）取最大值，并完整刻画了所有复值极大化子。他的方法可以推广到高维球面上的一些非端点延拓不等式，参见 [CO14]。采用不同方法，文献 [OQ21] 刻画了（d, q）的某些取值且 $q > 4$ 为偶数时，式（2）的极大化子。在其他一些情形中，已知常值函数是局部极大化子。文献 [CFO$^+$17]证明，当（d, q） =(2,6) 时，常值函数是局部极大化子；文献 [GN22] 则证明，当（d, q_d）且 $3 \leq d \leq 60$时也是如此。关于尖锐傅里叶延拓不等式的更多背景与参考文献，请参见 [FO17] 和 [NOT22]。

致谢。 我感谢 Christoph Thiele 向我介绍这一问题，并与我进行了许多有益的讨论；也感谢 Jan Holstermann 指出引理15的简短证明。作者得到由德国研究基金会（DFG，German Research Foundation）资助的协同研究中心1060以及豪斯多夫数学中心的支持，后者由 DFG 在德国卓越战略下资助——GZ 2047/1，项目编号 390685813。

2. Proof of Corollary 3

推论 3 是定理 2 以及 [CFO$^+$17] 中所阐述方案的直接推论。我们在此简要概述这一蕴含关系；关于该方案及证明的细节，请读者参阅 [CFO$^+$17]。

推论 3 的证明。 设 $g \in L^2(\sigma)$，使得 $g(e^{i\theta})$ 的支集包含于 $(-\varepsilon', \varepsilon') + \pi\mathbb{Z}$。定义 $\tilde{g}(x) = g(-x)$，并且

$$g_\# = \sqrt{\frac{|g|^2 + |\tilde{g}|^2}{2}}\,.$$

如 [CFO$^+$17] 的步骤 1 和 2 所示，有 $\Phi(g) \le \Phi(g_\#)$，且 $g_\#$ 是对径的，$g_\#(e^{i\theta})$ 的支集包含于 $(-\varepsilon_2, \varepsilon_2) + \pi\mathbb{Z}$。定义 $f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) := g_\#(\omega_1) g_\#(\omega_2) g_\#(\omega_3)$。于是 $f \in V_{\sqrt{8/3}\varepsilon'} = V_\varepsilon$，因此由定理 2 可得 $Q(f) \ge 0$。这验证了 [CFO$^+$17] 中关于 $g_\#$ 的猜想 1.4。利用 [CFO$^+$17] 中的步骤 3、4 和 5，我们得出 $\Phi(g) \le \Phi(1)$。□

按目前的写法，这个证明依赖于 [CFO$^+$17] 中的定理 1.2。该定理是那篇论文的主要结果，并验证了步骤 5。不过，若假设这些函数的支撑集很小（正如我们所做的），这一步可以用更简短的证明完成。这一步需要证明以下不等式

$$\begin{aligned}\int h(\omega_1)h(\omega_2)h(\omega_3)(|\omega_1+\omega_2+\omega_3|^2-1)\,\sigma*\sigma*\sigma(\omega_1+\omega_2+\omega_3)\,\mathrm{d}\sigma(\omega_1)\,\mathrm{d}\sigma(\omega_2)\,\mathrm{d}\sigma(\omega_3)\\ \le \frac{\|h\|^3_{L^1(\sigma)}}{\|\mathbf{1}\|^3_{L^1(\sigma)}}\int(|\omega_1+\omega_2+\omega_3|^2-1)\,\sigma*\sigma*\sigma(\omega_1+\omega_2+\omega_3)\,\mathrm{d}\sigma(\omega_1)\,\mathrm{d}\sigma(\omega_2)\,\mathrm{d}\sigma(\omega_3)\,, \quad (3)\end{aligned}$$

对所有对跖的 $h \in L^1(\sigma)$ 均成立，随后将其应用于 $h = g^2$。在推论 3 的假设下，g 因而 h 的支撑集也包含于 $(-\varepsilon', \varepsilon') + \pi\mathbb{Z}$。于是，(3) 可由以下估计得出

$$\begin{aligned}\max_{[-\varepsilon',\varepsilon']^3}\frac{1}{8}\sum_{\gamma\in\{-1,1\}^3}(|\gamma_1 e^{i\theta_1}+\gamma_2 e^{i\theta_2}+\gamma_3 e^{i\theta_3}|^2-1)\,\sigma*\sigma*\sigma(\gamma_1 e^{i\theta_1}+\gamma_2 e^{i\theta_2}+\gamma_3 e^{i\theta_3})\\ \le \frac{1}{\|\mathbf{1}\|^3_{L^1(\sigma)}}\int(|\omega_1+\omega_2+\omega_3|^2-1)\,\sigma*\sigma*\sigma(\omega_1+\omega_2+\omega_3)\,\mathrm{d}\sigma(\omega_1)\,\mathrm{d}\sigma(\omega_2)\,\mathrm{d}\sigma(\omega_3)\,,\end{aligned}$$

利用引理 9 即可验证这一点。

3. Proof of Theorem 2

3.1. 正交分解。 我们考虑如下半双线性形式

$$B(f,g) = \int_{(S^1)^6}(|\omega_1+\omega_2+\omega_3|^2-1)(f(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\overline{g(\omega_1,\omega_2,\omega_3)} - f(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\overline{g(\omega_4,\omega_5,\omega_6)})\,\mathrm{d}\Sigma(\omega)\,.$$

通过变量替换，可得 $B(f, g) = B(Rf, Rg)$，其中 $Rf(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = f(e^i\omega_1, e^i\omega_2, e^i\omega_3)$。定义 $Z_d = \{(k_1, k_2, k_3) \in (2\mathbb{Z})^3 : k_1 + k_2 + k_3 = d\}$ 并

$$X_d = \{\sum_{k\in Z_d} a_k \omega_1^{k_1}\omega_2^{k_2}\omega_3^{k_3} \;:\; a_k \in \ell^2(Z_d)\} \subset L^2((S^1)^3)\,.$$

对于 $d \neq d'$，空间 X_d 和 $X_{d'}$ 是 R 的对应不同特征值的特征子空间，因此关于 B彼此正交。注意，投影到 X_d 上的正交投影 π_d 可以表示为

$$\pi_d(f)(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \int_0^1 e^{-2\pi i d t} f(e^{2\pi i t}\omega_1, e^{2\pi i t}\omega_2, e^{2\pi i t}\omega_3)\,\mathrm{d}t\,,$$

这意味着 $\pi_d(V_\varepsilon) \subset V_\varepsilon$。因此，我们有：

$$V_\varepsilon = \overline{\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \pi_d(V_\varepsilon)} = \overline{\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} (V_\varepsilon \cap X_d)}\,.$$

因此，只需证明 B 在每个空间 $X_{d,\varepsilon} := V_\varepsilon \cap X_d$ 上半正定。

3.2. 降维。 现在，我们对所有 ω_i 同时进行相同角度的同时旋转积分。从现在起，我们采用以下约定：

$$\omega_i = (\cos(\theta_i), \sin(\theta_i))\,, \tag{4}$$

并滥用记号，将 $f(\omega(\theta))$ 记作 $= f(\theta)$。我们还定义

$$a(\theta_1,\theta_2,\theta_3) := (\cos(\theta_1)+\cos(\theta_2)+\cos(\theta_3))^2 + (\sin(\theta_1)+\sin(\theta_2)+\sin(\theta_3))^2 = |\omega_1+\omega_2+\omega_3|^2\,,$$

因此，双线性形式 B 中的权函数由 $a-1$ 给出，并记录下这个有用的恒等式

$$a(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = 3 + 2\cos(\theta_1-\theta_2) + 2\cos(\theta_2-\theta_3) + 2\cos(\theta_3-\theta_1)\,. \tag{5}$$

引理 4. 设 C 为以下四个点的凸包

$$(\pi,-\pi,0)\,,\quad (-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})\,,\quad (-\pi,\pi,0)\,,\quad (\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},-\frac{2\pi}{3})\,.$$

那么，高为 $2\pi\sqrt{3}$ 、以 C 为底的棱柱 $\bar{}P$ 是 $\mathbb{R}^3/(2\pi\mathbb{Z})^3$ 的一个基本域。

证明。 对于 $\mathbb{R}^3/(2\pi\mathbb{Z})^3$, 中的每一点，存在唯一代表元 $(\theta_1,\theta_2,\theta_3) \in \mathbb{R}^3$ ，使得 $0 \le \theta_1+\theta_2+\theta_3 < 2\pi$，并且 $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ 到超平面 $\{(x_1,x_2,x_3) : x_1+x_2+x_3 = 0\}$ 的正交投影包含于由 $(2\pi,-2\pi,0)$ 与 $(-2\pi,0,2\pi)$ 生成的格的某个固定基本域 C_1 中，例如

$$C_1 := \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 2\pi \\ -2\pi \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2\pi \\ 0 \\ 2\pi \end{pmatrix} \;:\; \lambda_1,\lambda_2 \in [0,1) \right\}. \tag{6}$$

因此， $C_1 + \{(t,t,t) :\ t \in [0,\frac{-2\pi}{3})\}$ 是 $\mathbb{R}^3/(2\pi\mathbb{Z})^3$的一个基本域。将该基本域分解为有限多块并重新排列后，容易看出 $C + \{(t,t,t) :\ t \in [0,2\pi)\}$ 也是一个基本域。□

引理5。 对于所有 $d \in \mathbb{Z}$，存在一个函数 $\lambda_d :\ C\times C \to S^1$，使得对于所有 $f \in X_d$

$$B(f,f) = 12\pi \int_{C^2} \delta(a(\theta)-a(\theta'))(a(\theta)-1)(|f(\theta)|^2 - \lambda_d(\theta',\theta) f(\theta)\overline{f(\theta')})\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta')\,.$$

这里， $\mathcal{H}^2_C$ 表示 C上的2维豪斯多夫测度。

证明。 由引理 4，得

$$B(f,f) = \int_{P\times P} \delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3-\omega_4-\omega_5-\omega_6)(|\omega_1+\omega_2+\omega_3|^2-1)$$
$$\times (|f(\omega_1,\omega_2,\omega_3)|^2 - f(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\overline{f(\omega_4,\omega_5,\omega_6)}) \prod_{j=1}^{6} \mathrm{d}\theta_j$$

$$= 2\pi\sqrt{3}\int_{C\times P}\delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3-\omega_4-\omega_5-\omega_6)(|\omega_1+\omega_2+\omega_3|^2-1)$$
$$\times\,(|f(\omega_1,\omega_2,\omega_3)|^2-f(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\overline{f(\omega_4,\omega_5,\omega_6)})\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta_1,\theta_2,\theta_3)\prod_{j=4}^{6}\mathrm{d}\theta_j\,.$$

这里我们利用了 $f\in X_d$，以便对全部 6 个点 ω_j 按相同角度进行同时旋转并积分。对于 $x,\ y\in\mathbb{R}^2$，有

$$\delta(x-y)=2\delta(|x|^2-|y|^2)\delta(\arg(x)-\arg(y))\,.$$

因此，我们可以将最后一个表达式改写为

$$= 4\pi\sqrt{3}\int_{C\times P}\delta(|\omega_1+\omega_2+\omega_3|^2-|\omega_4+\omega_5+\omega_6|^2)\delta(\arg(\omega_1+\omega_2+\omega_3)-\arg(\omega_4+\omega_5+\omega_6))$$
$$\times\,(|\omega_1+\omega_2+\omega_3|^2-1)(|f(\omega_1,\omega_2,\omega_3)|^2-f(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\overline{\omega_4,\omega_5,\omega_6)})\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta_1,\theta_2,\theta_3)\prod_{j=4}^{6}\mathrm{d}\theta_j$$

$$= 12\pi\int_{C\times C}\int_0^{2\pi}\delta(a(\theta_1,\theta_2,\theta_3)-a(\theta_4,\theta_5,\theta_6))\delta(\arg(\omega_1+\omega_2+\omega_3)-\arg(\omega_4+\omega_5+\omega_6)-t)$$
$$\times\,(a(\theta_1,\theta_2,\theta_3)-1)(|f(\omega_1,\omega_2,\omega_3)|^2-f(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\overline{f(e^{it}\omega_4,e^{it}\omega_5,e^{it}\omega_6)})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mathcal{H}^4_{C\times C}(\theta)\,.$$

由于 $f\in X_d$，我们有 $f(e^{it}\omega_4,e^{it}\omega_5,e^{it}\omega_6)=e^{itd}f(\omega_4,\omega_5,\omega_6)$。因此，我们可以对 t 积分并得到所要证明的恒等式。□

3.3. 完成证明。 由引理5，对所有 d 及所有 $f\in X_d$，我们有：

$$\begin{aligned}B(f,f)&\geq 12\pi\int_C|f(\theta)|^2(a(\theta)-1)\int_C\delta(a(\theta)-a(\theta'))\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta')\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta)\\&\quad-12\pi\int_{C^2}\delta(a(\theta)-a(\theta'))|a(\theta)-1||f(\theta)||f(\theta')|\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta')\\&=:12\pi(I-II)\,.\end{aligned}\tag{7}$$

若 $f\in X_{d,\varepsilon}$，则 f 在超平面 $H:=\{(\theta_1,\theta_2,\theta_3):\ \theta_1+\theta_2+\theta_3=0\}$ 上的限制支撑于 $\Lambda+B_\varepsilon(0)$ 中，其中 $\Lambda=\mathbb{Z}v_1\oplus\mathbb{Z}v_2$ 且

$$v_1:=(\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}),\qquad v_2:=(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3})\,.$$

此外，函数 $|f|$ 关于 Λ 是周期性的，因为它关于 $\pi\mathbb{Z}^3$ 是周期性的，且在沿方向 (1,1,1) 的所有平移下保持不变。因此，只需证明：

引理 6。 假设 $\varepsilon\leq 1/20$。那么对于所有满足Λ 周期性且支撑于 $\Lambda+B_\varepsilon(0)$ 的函数 $f:\ H\to[0,\infty)$，均有 $I\geq II$。

证明。 注意， C 是格 2Λ的一个基本域。项 I和 II 的积分中的表达式均为 2Λ 周期函数，因此我们可以用任意其他基本域 C'替换 C。由于 f 的支集包含于$\Lambda+B(0,\varepsilon)$中，故存在一个基本域 C'，使得 $f|_{C'}$的支集包含于

$$B_\varepsilon(0,0,0)\cup B_\varepsilon(\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3})\cup B_\varepsilon(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3})\cup B_\varepsilon(-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})=:B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4\,.$$

我们将其分解为

$$I = \sum_{i=1}^{4} \int_{B_i} |f(\theta)|^2 (a(\theta) - 1) \int_C \delta(a(\theta) - a(\theta')) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta') \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta) =: \sum_{i=1}^{4} I_i \,, \tag{8}$$

$$II = \sum_{1 \le i,j \le 4} \int_{B_i \times B_j} \delta(a(\theta) - a(\theta')) |a(\theta) - 1||f(\theta)||f(\theta')| \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta') =: \sum_{1 \le i,j \le 4} II_{ij} \,. \tag{9}$$

注意到 $|\theta| < \pi/6$ 由 (5) 可推出 $a(\theta) \ge 3 + 6$ 余弦$(\pi/3) = 6$，并且 $|\theta - (2\pi/3, -\pi/3, -\pi/3)| < \pi/6$同样可推出 $a(\theta) \le 3$。因此，对于 $j = 2,3,4$，测度 $\delta(a(\theta) - a(\theta'))$ 在 $B_1 \times B_j$ 上为零，故 $I_{1j} = I_{j1} = 0$。接下来，我们记录 $II_{11} \le I_1$；根据柯西-施瓦茨不等式，且由于 $a(\theta) \ge 6$ 在 B_1 上：

$$\begin{aligned} II_{11} &= \int_{B_1^2} \delta(a(\theta) - a(\theta'))|a(\theta) - 1||f(\theta)||f(\theta')| \mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta') \\ &\le \frac{1}{2} \int_{B_1^2} \delta(\tilde{a}(\theta) - \tilde{a}(\theta'))(\tilde{a}(\theta) - 1)(|f(\theta)|^2 + |f(\theta')|^2) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta') \\ &\le \int_{B_1} |f(\theta)|^2 (\tilde{a}(\theta) - 1) \int_C \delta(\tilde{a}(\theta) - \tilde{a}(\theta')) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta') = I_1 \,. \end{aligned}$$

其余各项将在接下来的两节中进行估计。根据引理 7 和引理 8，我们有

$$I_2 + I_3 + I_4 \ge 30 \int_{B_1} |\theta|^2 |f(\theta)|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2_H(\theta) > 9 \frac{101}{100} \pi \int_{B_1} |\theta|^2 |f(\theta)|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2_H(\theta) \ge \sum_{2 \le i,j \le 4} II_{ij} \,,$$

这就完成了证明。 □

4. Estimating term I

引理 7. 有

$$I_2 + I_3 + I_4 = \int_{B_1} m(\theta) |f(\theta)|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2_H(\theta) \,, \tag{10}$$

其中 I_j 在(8)中定义，且 $m(\theta) \ge 30|\theta|^2$。

证明。根据 I_j 的定义，等式 (10) 成立，其中

$$m(\theta) = \sum_{j=2}^{4} (a(\theta + c_j) - 1) \int_C \delta(a(\theta + c_j) - a(\theta')) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta') \,,$$

其中 c_j 是球 B_j的中心。反向运用引理5证明中的论证可得，对于$x \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \int_C \delta(|x|^2 - a(\theta')) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta') &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_P \delta(|x|^2 - |\omega_1 + \omega_2 + \omega_3|^2) \delta(\arg(x) - \arg(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)) \prod_{j=1}^{3} \mathrm{d}\theta'_j \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{(S^1)^3} \delta(x - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)) \prod_{j=1}^{3} \mathrm{d}\sigma(\omega_j) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sigma * \sigma * \sigma(x) \,. \end{aligned}$$

卷积 $\sigma * \sigma * \sigma$ 是径向的。我们令 $\sigma * \sigma * \sigma(x) = \rho(|x|)$，得到

$$m(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sum_{j=2}^{4} (a(\theta + c_j) - 1) \rho(\sqrt{a(\theta + c_j)}) \,. \tag{11}$$

在极坐标中

$$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix} = s\cos(\alpha)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix} + s\sin(\alpha)\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix} \tag{12}$$

我们在引理 14 中计算渐近展开式

$$\begin{aligned}(a(\theta+c_4)-1)\rho(\sqrt{a(\theta+c_4)}) &= -12s^2(3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha))\log(s) && (13)\\ &\quad - 6s^2(3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha))\log|3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha)| && (14)\\ &\quad + 18\log 2\, s^2(3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha)) && (15)\\ &\quad + E\,,\end{aligned}$$

其满足 $|E| \le -180s^4\log s + 71s^4$ when $s \le 1/20$。由于函数 a 对其各自变量的排列保持不变，且沿方向 (1,1,1) 为常数，因此它在绕直线 $\mathbb{R}$(1,1,1) 旋转 $T$by $2\pi/3$ 后仍保持不变。由于

$$c_2+\theta(\alpha,s) = T(c_4+\theta(\alpha+4\pi/3,s))\,, \qquad c_3+\theta(\alpha,s) = T^2(c_4+\theta(\alpha+2\pi/3,s))\,,$$

我们得到 $a(\theta+c_j)\rho(\sqrt{a(\theta+c_j)})$ 的相同渐近展开式，$j=\overline{2,3,}$ 但将 α 替换为 $\alpha+\frac{4\pi}{3}$ 和 $\alpha+\frac{2\pi}{3}$。 —

—

现在我们考虑 (11)。(13) 项对 m 的贡献为 $-6\sqrt{3}s^2\log(s)$，而 (15) 项的贡献为$9\sqrt{3}\log(2)s^2$，因为对所有 α

$$\sum_{j=1}^{3}(3\sin^2(\alpha+\frac{2\pi j}{3})-\cos^2(\alpha+\frac{2\pi j}{3})) = 3\,.$$

对于 (14) 项，我们使用如下锐估计

$$\sum_{j=1}^{3}(3\sin^2(\alpha+\frac{2\pi j}{3})-\cos^2(\alpha+\frac{2\pi j}{3}))\log|3\sin^2(\alpha+\frac{2\pi j}{3})-\cos^2(\alpha+\frac{2\pi j}{3})| \le 3\log(3)\,,$$

我们将在引理15中证明这一点。因此，对于 $s \le 1/20$,

$$\begin{aligned}m(\theta) &\ge -6\sqrt{3}s^2\log(s) + (9\sqrt{3}\log(2)-3\sqrt{3}\log(3))s^2 + 90\sqrt{3}s^4\log s - 62s^4\\ &\ge (6\sqrt{3}\log(20)+9\sqrt{3}\log(2)-3\sqrt{3}\log(3)-90\sqrt{3}/400\log(20)-62/400)s^2 \approx 34.906\ s^2\,,\end{aligned}$$

如前所述。 □

5. Estimating term II

引理 8. 对于所有 $2 \le i$、$j \le 4$ 以及所有 f，均有

$$II_{ij} \le \frac{101}{100}\pi\int_{B_1}|\theta|^2|f(\theta)|^2\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_H(\theta)\,.$$

证明。我们首先处理项 II_{44}，随后说明其他项的变化。我们有 :

$$\begin{aligned}II_{44} &= \int_{B_4\times B_4}\delta(1-\frac{1-a(\theta')}{1-a(\theta)})|f(\theta)||f(\theta')|\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_H(\theta)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_H(\theta')\\ &= \int_{B_1\times B_1}\delta(1-\frac{1-a(c_4+\theta')}{1-a(c_4+\theta)})|f(\theta)||f(\theta')|\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_H(\theta)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_H(\theta')\end{aligned}$$

按照 (12) 引入极坐标 $\theta = \theta(s,\ \alpha)$，并记 $\theta' = \theta(t,\ \beta)$。根据定义$h(s,\ t,\ \alpha,\ \beta) :=(1-a(c_4+\theta'))/(1-a(c_4+\theta))$ 和 $g(s,\ \alpha) := |\theta|^2|f(\theta)|$，通过变量替换可得

$$\mathit{II}_{44} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \delta(1-h(s,t,\alpha,\beta))g(s,\alpha)g(t,\beta)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,. \tag{16}$$

在 0 处对 $1-a(c_4+\theta)$ 进行泰勒展开（见引理13）可得

$$h(s,t,\alpha,\beta) = \frac{t^2}{s^2}\frac{3\sin^2(\beta)-\cos^2(\beta)}{3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha)}\frac{1+\psi(t,\beta)}{1+\psi(s,\alpha)}\,, \tag{17}$$

其中，ψ是关于 s，α的光滑函数，而 $\psi(s,\ \alpha) = O(s^2)$。如果（17）中的最后一个因子等于 1，那么（16）中的两个内层积分就会简化为

$$\int_0^{\infty} g(s,\alpha)g(c(\alpha,\beta)s,\beta)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}\,,$$

对于某个常数 $c(\alpha,\ \beta)$，利用柯西-施瓦茨不等式很容易对其进行估计。下面给出这一论证的一个扰动版本。

固定 α、β，并记 $h(s,\ t) = h(s,\ t,\ \alpha,\ \beta)$。令 $s(t)$ 由 $h(s(t)\ t) = 1$ 隐式定义（注意，s 也依赖于 α 和 β）。于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \delta(1-h(s,t))g(s,\alpha)g(t,\beta)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} &= \int_0^{\varepsilon} g(t,\beta)g(s(t),\alpha)\frac{1}{|\partial_s h(s(t),t)|}\,\frac{1}{s(t)t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\varepsilon} g(t,\beta)g(s(t),\alpha)\frac{1}{2+s(t)\frac{\psi'(s(t),\alpha)}{1+\psi(s(t),\alpha)}}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned} \tag{18}$$

这里我们用到了

$$\partial_s h(s,t) = -h(s,t)(\frac{2}{s}+\frac{\psi'(s,\alpha)}{1+\psi(s,\alpha)})$$

因此

$$-\partial_s h(s(t),t) = \frac{2}{s(t)}+\frac{\psi'(s(t),\alpha)}{1+\psi(s(t),\alpha)}\,.$$

应用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$(18) \le \left(\int_0^{\varepsilon} g(t,\beta)^2\frac{1}{2+s(t)\frac{\psi'(s(t),\alpha)}{1+\psi(s(t),\alpha)}}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^{\varepsilon} g(s(t),\alpha)^2\frac{1}{2+s(t)\frac{\psi'(s(t),\alpha)}{1+\psi(s(t),\alpha)}}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}. \tag{19}$$

将 $s = s(t)$代入第二个积分后，其被积函数与第一个积分中的相同，只是 (s,α)和 (t,β) 的角色互换了。根据引理13，对于 $s \le 1/20$，有

$$|\psi(s,\alpha)| < 1/100 \quad \text{and} \quad |\psi'(s,\alpha)| \le 1/10\,,$$

给出

$$|s\frac{\psi'(s,\alpha)}{1+\psi(s,\alpha)}| \le \frac{1}{198}\,.$$

因此，th 积分 (19) 中的因子以 $198/395 < 101/200$ 为上界。由此可得 t

$$\begin{aligned}\mathit{II}_{44} &\le \frac{101}{200}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\varepsilon} g(t,\beta)^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/2}\left(\int_0^{\varepsilon} g(s,\alpha)^2\frac{\mathrm{d}s}{s}\right)^{1/2}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\\ &\le \frac{101}{100}\pi\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon}|g(s,\alpha)|^2\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{101}{100}\pi\int_{B_1}|\theta|^2|f(\theta)|^2\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_H(\theta)\,.\end{aligned}$$

对于其余八个积分，同样的估计也成立：根据引理 7 证明中的论证，将 c_4 改为其他某个 c_j，只会使 (17) 中的展开式在 α 和 β 中发生平移。之后的论证便与处理 II_{44} 时完全相同。□

6. Technical estimates

这里我们证明主要论证中所用的计算引理。我们有如下关于 ρ 的显式公式（见 [CFO+17]，引理 8）：

$$\rho(r) = \frac{4}{r}\int_{A(r)}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{\frac{(1-r)^2}{2r}+1-u}\sqrt{\frac{(3+r)(1-r)}{2r}+1+u}} \tag{20}$$

其中 $A(r) = -1+\max\{0,(3+r)(r-1)/(2r)\}$。由此我们得到如下渐近公式：

引理 9. 设 ρ 由 $\rho(|x|) = \sigma*\sigma*\sigma(x)$定义。则对所有满足 $|r-1| \le 1/10$的 r，我们有

$$|\rho(r) + 6\log|1-r| - 12\log 2| \le -22|r-1|\log|r-1| + 23|r-1|\,.$$

我们并未试图优化此估计中的误差。下面我们给出一个初等且自包含的证明。对于另一种证明，可以使用恒等式（见 [Pea06] 或 [BSW+12]）

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{16}{\sqrt{(x+1)^3(3-x)}} K\left(\sqrt{\frac{16x}{(x+1)^3(3-x)}}\right) & \text{if } 0 \le x < 1 \\ \frac{4}{\sqrt{x}} K\left(\sqrt{\frac{(x+1)^3(3-x)}{16x}}\right) & \text{if } 1 < x \le 3 \\ 0 & \text{if } x > 3 \end{cases}$$

其中

$$K(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}\,\mathrm{d}x$$

是第一类完全椭圆积分，连同当 $k \nearrow 1$ 时 $K(k)$的已知渐近性质。由于我们未能在文献中找到（6）的证明，且其证明确实并不简短，因此我们决定改为给出这一初等论证。

我们首先证明一些辅助引理。

引理 10。 对于所有 $\delta > 0$，均成立

$$0 \le \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{u+\delta}}\,\mathrm{d}u - \log(\frac{4}{\delta}) \le \frac{1}{2}\delta\,.$$

证明。 我们有

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{u+\delta}}\,\mathrm{d}u = -\log(\delta) + 2\log(1+\sqrt{1+\delta})\,.$$

此外，根据中值定理，存在 $0 < \delta' < \delta$ 使得

$$\log(1+\sqrt{1+\delta}) = \log(2) + \delta g(\delta')$$

其中

$$0 < g(\delta) = \frac{1}{2(1+\sqrt{1+\delta})\sqrt{1+\delta}} \le \frac{1}{4}$$

是 $\log(1+\sqrt{1+\delta})$ 的导数。 □

引理11。 对于所有 $0<a$、 $b<1$，我们有：

$$\left|\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{a+1-x}\sqrt{b+1+x}}\,\mathrm{d}x-\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{a+1-x}\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{b}{2}(\log(\frac{4}{a})+\frac{a}{2})\,.$$

证明。根据中值定理，对于所有 $x\ge 0$

$$|(b+1+x)^{-1/2}-(1+x)^{-1/2}|\le\frac{1}{2}b\,.$$

因此，所述不等式的左侧可估计为

$$\frac{b}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{a+1-x}}\,\mathrm{d}x\le\frac{b}{2}(\log(\frac{4}{a})+\frac{a}{2})\,,$$

其中我们应用了引理 10。 □

引理12。 对于所有 $1>a>0$，我们有

$$\left|\int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}\sqrt{a+1-x}}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\log(\frac{8}{a})\right|\le\frac{1}{2}a\log(1+\frac{1}{a})\,.$$

证明。 我们有 $v=1-x$

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}\sqrt{a+1-x}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{(2-v)\sqrt{v}\sqrt{a+v}}\,\mathrm{d}v$$

可展开为等于

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v}\sqrt{a+v}}\,\mathrm{d}v+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{2-v}\,\mathrm{d}v-\frac{a}{2}\int_0^1 \frac{1}{(2-v)\sqrt{a+v}(\sqrt{v}+\sqrt{a+v})}\,\mathrm{d}v\,.$$

计算第二个积分，并对第一个积分应用引理 10，得到主项 $\log(8/a)/2$。对于误差估计，我们将引理 10 与如下界相结合

$$\int_0^1 \frac{1}{(2-v)\sqrt{a+v}(\sqrt{v}+\sqrt{a+v})}\,\mathrm{d}v\le\int_0^1 \frac{1}{v+a}\,\mathrm{d}v=\log(1+\frac{1}{a})\,,$$

并注意到这些误差的符号相反。 □

引理 *9* 的证明。 我们从情形 $r=1-\varepsilon<1$ 开始。由 (20)，我们有

$$\frac{1-\varepsilon}{4}\rho(1-\varepsilon)=\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2-2\varepsilon}+1-u}\sqrt{\frac{(4-\varepsilon)\varepsilon}{2-2\varepsilon}+1+u}}\,\mathrm{d}u\,.$$

将引理11和引理12与 $a=\varepsilon^2/(2-2\varepsilon)$ 及 $b=(4-\varepsilon)\varepsilon/(2-2\varepsilon)$ 相结合，我们得到该积分：

$$=\frac{1}{2}(\log(\frac{8}{a})+\log(\frac{8}{b}))+E=3\log(2)-\frac{3}{2}\log(\varepsilon)-\log(2-2\varepsilon)+\frac{1}{2}\log(4-\varepsilon)+E$$

with

$$|E|\le\frac{1}{2}(b\log(\frac{4}{a})+a\log(\frac{4}{b})+ab+a\log(1+\frac{1}{a})+b\log(1+\frac{1}{b}))\,.\tag{21}$$

容易看出

$$|\frac{1}{2}\log(4-\varepsilon)-\log(2-2\varepsilon)|\le\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

此外，可以验证，当 $0<\varepsilon\le 1/10$ 时，。

$$a\le\frac{1}{18}\varepsilon\,,\ b\le\frac{19}{9}\varepsilon\,,\ \log(\frac{4}{a})\le 3\log(2)-2\log(\varepsilon)\,,\ \log(\frac{4}{b})\le\log(2)-\log(\varepsilon)$$

and

$$\log(1+\frac{1}{a}) \le \log(2) - 2\log(\varepsilon)\,,\ \log(1+\frac{1}{b}) \le -\log(\varepsilon)\,.$$

利用这一点，可以验证的是

$$E \le \frac{13}{4}\varepsilon\log(\frac{1}{\varepsilon}) + \frac{5}{2}\varepsilon\,.$$

总而言之，我们已经证明

$$\left|\frac{1-\varepsilon}{4}\rho(1-\varepsilon) - 3\log(2) + \frac{3}{2}\log(\varepsilon)\right| \le \frac{13}{4}\varepsilon\log(\frac{1}{\varepsilon}) + 3\varepsilon\,.$$

我们乘以 $4/(1-\varepsilon)$，并利用 $|4/(1-\varepsilon) - 4| \le 40/9\varepsilon$，得到

$$|\rho(1-\varepsilon) - 12\log(2) + 6\log(\varepsilon)| \le 22\varepsilon\log(\frac{1}{\varepsilon}) + 23\varepsilon\,.$$

现在我们转向 $r = 1+\varepsilon > 1$ 的情形。在那里，我们有

$$\rho(1+\varepsilon) = \frac{4}{1+\varepsilon}\int_{-1+\frac{(4+\varepsilon)\epsilon}{2+2\varepsilon}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2+2\varepsilon}+1-u}\sqrt{-\frac{(4+\varepsilon)\varepsilon}{2+2\varepsilon}+1+u}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{16}{4-\varepsilon^2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{\frac{2\varepsilon^2}{4-\varepsilon^2}+1-v}\sqrt{\frac{8\varepsilon}{4-\varepsilon^2}+1+v}}\,\mathrm{d}v\,.$$

我们先对积分进行近似。我们可以像处理 $r < 1$ 的情形那样论证，此时取 $a = 2\varepsilon^2/(4-\varepsilon^2)$ 和 $b = 8\varepsilon/(4-\varepsilon^2)$。容易看出，主项与 $r < 1$ 的情形相同，而误差有如下界：

$$-\log(1-\frac{\varepsilon^2}{4}) + E \le \frac{\varepsilon}{40} + E\,,$$

其中 E 满足 (21)。现在我们有

$$a \le \frac{1}{15}\varepsilon\,,\ b \le \frac{800}{399}\varepsilon\,,\ \log(\frac{4}{a}) \le 3\log(2) - 2\log(\varepsilon)\,,\ \log(\frac{4}{b}) \le \log(2) - \log(\varepsilon)$$

and

$$\log(1+\frac{1}{a}) \le \log(\frac{201}{100}) - 2\log(\varepsilon)\,,\ \log(1+\frac{1}{b}) \le -\log(\varepsilon)\,.$$

利用这一点，我们得到

$$|E| + \frac{\varepsilon}{40} \le \frac{13}{4}\varepsilon\log(\frac{1}{\varepsilon}) + \frac{9}{4}\varepsilon\,.$$

换言之，成立的是

$$\left|\frac{4-\varepsilon^2}{16}\rho(1+\varepsilon) - 3\log(2) + \frac{3}{2}\log(\varepsilon)\right| \le \frac{13}{4}\varepsilon\log(\frac{1}{\varepsilon}) + \frac{9}{4}\varepsilon\,.$$

我们乘以 $16/(4-\varepsilon^2)$，并利用 $|16/(4-\varepsilon^2) - 4| \le 40/399\varepsilon$，从而得到

$$|\rho(1+\varepsilon) - 12\log(2) + 6\log(\varepsilon)| \le 14\varepsilon\log(\frac{1}{\varepsilon}) + 9\varepsilon\,.$$

至此证明完毕。 □

引理13。 设 θ 由(12)给出。则有：

$$a(c_4+\theta) - 1 = s^2(3\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha))(1+\psi(s,\alpha))\,,$$

其中 $\psi(s,\alpha)$ 是一个满足以下估计的光滑函数：

$$|\psi(s,\alpha)| \le \frac{7}{24}s^2 + \frac{17}{720}s^4 + s^6 e^{\sqrt{2}s}$$
$$|\psi'(s,\alpha)| \le \frac{14}{24}s + \frac{17}{180}s^3 + 2s^5 e^{\sqrt{2}s}\,.$$

证明。 根据 h 的定义、三角恒等式以及余弦的泰勒展开，我们有

$$\begin{aligned} a(c_4+\theta)-1 &= a((0,0,\pi)+\theta)-1 \\ &= (\cos(\theta_1)+\cos(\theta_2)-\cos(\theta_3))^2 + (\sin(\theta_1)+\sin(\theta_2)-\sin(\theta_3))^2 - 1 \\ &= 2+2\cos(\theta_1-\theta_2)-2\cos(\theta_1-\theta_3)-2\cos(\theta_2-\theta_3) \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}((\theta_1-\theta_2)^{2k}-(\theta_1-\theta_3)^{2k}-(\theta_2-\theta_3)^{2k}) \qquad (22) \\ &=: \sum_{k=1}^{\infty} s^{2k}\frac{(-1)^k}{(2k)!}P_{2k}(\sin(\alpha),\cos(\alpha))\,. \end{aligned}$$

由 (22) 可知，每个 P_{2k} 在 $\theta_1=\theta_3$ 和 $\theta_2=\theta_3$ 时都为零，这等价于 $\alpha=\pm\pi/6$，也等价于余弦$(\alpha)=\pm\sqrt{3}$正弦(α)。因此，齐次多项式 $P_{2k}(X,Y)$ 在直线 $\sqrt{3}X+Y=0$ 和 $\sqrt{3}X-Y=0$ 上为零。由此可得，对所有 k，因子 $3X^2-Y^2$ 整除 $P_{2k}(X,Y)$。定义 Q_{2k} 为

$$Q_{2k}(X,Y)(3X^2-Y^2) = (-1)^k P_{2k}(X,Y)\,.$$

于是，利用 $Q_2=1$，我们得到：

$$a(c_4+\theta)-1 = s^2(3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha))(1+\psi(s,\alpha))$$

其中 ψ 定义为

$$\psi(s,\alpha) = \sum_{k=2}^{\infty} s^{2k-2}\frac{1}{(2k)!}Q_{2k}(\cos(\alpha),\sin(\alpha))\,.$$

现在固定 k 并估计 $p(\alpha):=P_{2k}$(正弦(α), 余弦(α)) 和 $q(\alpha):=Q_{2k}$(正弦(α),余弦(α))。由 (12) 可知，

$$\begin{aligned} \theta_1-\theta_2 &= \sqrt{2}\cos(\alpha) \\ \theta_3-\theta_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin(\alpha) = \sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3}) \\ \theta_2-\theta_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\alpha)+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin(\alpha) = \sqrt{2}\cos(\alpha-\frac{2\pi}{3})\,. \end{aligned}$$

因此，由（22）可得，

$$p(\alpha) = 2^{k+1}(-1)^k(\cos(\alpha)^{2k}-\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3})^{2k}-\cos(\alpha-\frac{2\pi}{3})^{2k})\,,$$

对两边求导，并注意到方括号内的各项均不超过 1，我们得到：

$$|p(\alpha)| \le 6\cdot 2^k\,, \qquad |p'(\alpha)| \le 12k2^k\,, \qquad |p''(\alpha)| \le 24k^2 2^k\,.$$

记作

$$q(\alpha) := \frac{p(\alpha)}{3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha)} = \frac{p(\alpha)}{(\sqrt{3}\sin(\alpha)-\cos(\alpha))(\sqrt{3}\sin(\alpha)+\cos(\alpha))}\,.$$

如果两个因子 $|\sqrt{3}$sin$(\alpha) \pm$ 余弦$(\alpha)|$ 都至少为 $1/2$，则有

$$q(\alpha) \le 24\cdot 2^k\,.$$

k	$P_{2k}(X,Y)$	$Q_{2k}(X,Y)$
1	$-3X^2+Y^2$	1
2	$-9X^4-18X^2Y^2+7Y^4$	$-3X^2-7Y^2$
3	$-\frac{1}{2}(27X^6+135X^4Y^2+45X^2Y^4-31Y^6)$	$-\frac{1}{2}(9X^4+48X^2Y^2+31Y^4)$

TABLE 1. 对于较小的 k 值，多项式 P_{2k}, Q_{2k}。

否则， $|\alpha-\pi/6|<1/5$ 或 $|\alpha+\pi/6|<1/5$。不失一般性，设我们处于第一种情形。于是，根据泰勒公式:

$$\left|\frac{p(\alpha)}{\alpha-\pi/6}-p'(\pi/6)\right|\le\frac{1}{2}|\alpha-\pi/6|\sup|p''|\le\frac{1}{10}24k^2 2^k\,,$$

因此

$$\left|\frac{p(\alpha)}{\alpha-\pi/6}\right|\le 15k^2 2^k\,.$$

此外，由于 $|\alpha-\pi/6|\le 1/5$,

$$\left|\frac{\alpha-\pi/6}{(\sqrt{3}\sin(\alpha)-\cos(\alpha))(\sqrt{3}\sin(\alpha)+\cos(\alpha))}\right|\le 2\left|\frac{\alpha-\pi/6}{\sqrt{3}\sin(\alpha)-\cos(\alpha)}\right|\le\frac{1/5}{\sin(1/5)}<2\,.$$

将最后两个估计相乘，我们得出 $|q|\le 30k^2 2^k$。我们还直接计算了较小的 k:

$$|Q_4(\sin(\alpha),\cos(\alpha))|=|-7\cos^2(\alpha)-3\sin^2(\alpha)|\le 7$$

and

$$|Q_6(\sin(\alpha),\cos(\alpha))|=\frac{1}{2}|9\sin^4(\alpha)+48\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)+31\cos^2(\alpha)|\le\frac{5125}{312}<17\,.$$

代入这些估计，我们得到

$$|\psi(s,\alpha)|\le\frac{7}{24}s^2+\frac{17}{720}s^4+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{60k^2}{(2k)!}(\sqrt{2}s)^{2k-2}\le\frac{7}{24}s^2+\frac{17}{720}s^4+s^6e^{\sqrt{2}s}$$

and

$$|\psi'(s,\alpha)|\le\frac{14}{24}s+\frac{17}{180}s^3+\sqrt{2}\sum_{k=4}^{\infty}\frac{60k^2}{(2k-1)!}(\sqrt{2}s)^{2k-3}\le\frac{14}{24}s+\frac{17}{180}s^3+2s^5e^{\sqrt{2}s}\,,$$

正如所述。 □

引理14。 设 θ 由 (12) 给出。那么对于所有 $0\le s\le 1/20$, 我们有

$$\begin{aligned}(a(c_4+\theta)-1)\rho(\sqrt{a(c_4+\theta)}) &= -12s^2(3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha))\log(s)\\ &\quad -6s^2(3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha))\log|3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha)|\\ &\quad +18\log 2\,s^2(3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha))+E\,,\end{aligned}$$

with

$$|E|\le -180s^4\log s+71s^4\,.$$

证明。 根据引理 9，有

$$\begin{aligned}(x^2-1)\rho(x) &= -6(x^2-1)\log|x-1|+12\log(2)(x^2-1)+(x^2-1)E_1\\ &= -6(x^2-1)\log|x^2-1|+18\log(2)(x^2-1)+(x^2-1)E_1+6(x^2-1)\log(1+\frac{1}{2}(x-1))\,,\end{aligned}\quad(23)$$

其中

$$|E_1|\le -22|x-1|\log|x-1|+23|x-1|\,.$$

另将式（23）中的最后一项记为 E_2。令 $x=\sqrt{a(c_4+\theta)}$。引理13表明 $|x-1|\le|x^2-1|\le 2s^2$。利用这一点以及 $r\log r$ 的单调性，我们得到

$$|(x^2-1)E_1|\le|x^2-1|(-22|x-1|\log|x-1|+23|x-1|)\le -176s^4\log(s)+32s^4 \tag{24}$$

and

$$|E_2|\le 6|x^2-1||\log(1+\frac{1}{2}(x-1))|\le 24s^4\,. \tag{25}$$

根据引理13，有

$$\begin{aligned}
&-6(x^2-1)\log|x^2-1|\\
&=-6s^2(3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha))(1+\psi(s,\alpha))(2\log(s)+\log(3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha))+\log(1+\psi(s,\alpha)))\\
&=-12s^2\log(s)(3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha))-6s^2(3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha))\log|3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha)| &(26)\\
&\quad-6s^2(3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha))\log(1+\psi(s,\alpha))) &(27)\\
&\quad-6s^2\psi(s,\alpha)(3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha))(2\log(s)+\log|3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha)|+\log(1+\psi(s,\alpha)))\,. &(28)
\end{aligned}$$

项 (27) 由 $18s^2|\psi(s,\alpha)|\le 6s^4$ 界定。项 (28) 由

$$-18s^2\log(s)|\psi(s,\alpha)|+4s^2|\psi(s,\alpha)|+18s^2\psi(s,\alpha)^2\le -6s^4\log(s)+2s^4\,.$$

对于（23）中的第二项，我们有

$$18\log(2)(x^2-1)=18\log(2)s^2(3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha))+18\log(2)s^2(3\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha))\psi(s,\alpha)\,, \tag{29}$$

其中第二项可由$27\log(2)s^2|\psi(s,\alpha)|\le 9\log(2)s^4$ 控制。将主项 (26)和 (29)与误差项(24)、(25)、(27)、(28) 以及 (29) 中的估计结合起来，即可得到该引理。□

引理15. 对于所有 α，均有

$$\sum_{j=1}^{3}(3\sin^2(\alpha+\frac{2\pi j}{3})-\cos^2(\alpha+\frac{2\pi j}{3}))\log|3\sin^2(\alpha+\frac{2\pi j}{3})-\cos^2(\alpha+\frac{2\pi j}{3})|\le 3\log(3)\,.$$

证明。设

$$a_j=\sin^2(\alpha+\frac{2\pi j}{3})-\frac{1}{3}\cos^2(\alpha+\frac{2\pi j}{3})=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cos(2\alpha+\frac{4\pi j}{3})\,.$$

容易验证的是

$$a_1+a_2+a_3=1\,,\qquad a_1^2+a_2^2+a_3^2=1\,. \tag{30}$$

定义 $b_j=(a_j+a_{j-1})/2$ （注意 $a_{j+3}=a_j$），可得

$$b_1+b_2+b_3=1\,,\qquad b_1^2+b_2^2+b_3^2=1/2\,,$$

因此 $b_1,b_2,b_3\ge 0$。利用Jensen不等式，我们推出

$$\sum_{j=1}^{3}a_j\log(|a_j|)=\sum_{j=1}^{3}b_j\log(\frac{|a_j||a_{j-1}|}{|a_{j-2}|})\le\log(\sum_{j=1}^{3}b_j\frac{|a_j||a_{j-1}|}{|a_{j-2}|})\,.$$

由 (30) 可得，

$$2a_ja_{j-1}=(a_j+a_{j-1})^2-(a_j^2+a_{j-1}^2)=(1-a_{j-2})^2-(1-a_{j-2}^2)=2a_{j-2}(a_{j-2}-1)\,.$$

因此，再次使用 (30)

$$\sum_{j=1}^{3}b_j\frac{|a_j||a_{j-1}|}{|a_{j-2}|}=\sum_{j=1}^{3}b_j(1-a_{j-2})=1\,.$$

我们得出结论：

$$\sum_{j=1}^{3} 3a_j \log(|3a_j|) = 3\log(3) + 3\sum_{j=1}^{3} a_j \log|a_j| \le 3\log 3\,.$$

□

7. Discussion

7.1. 的最优值 ε。检查上述论证可知，只要满足以下条件，对于所有 $f \in V_\varepsilon$，都有 $Q(f) \ge 0$

$$\inf_{\theta\in H,|\theta|\le\varepsilon} \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{4}(a(\theta+c_j)-1)\rho(\sqrt{a(\theta+c_j)}) \ge 18\pi \sup_{s\le\varepsilon,\alpha\in[0,2\pi]} \frac{1}{2+s\frac{\psi'(s,\alpha)}{1+\psi(s,\alpha)}}\,. \tag{31}$$

（非严格的）数值计算表明，这个不等式在 $\varepsilon = 0.104$ 之前都成立。因此，推论 3 中的常数 ε' 可以提高到 0.063。

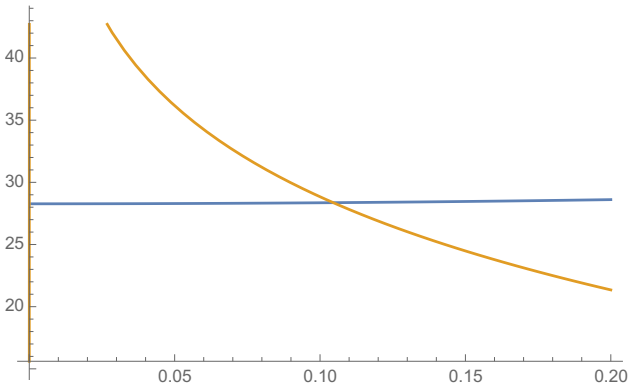


Figure 1. 式（31）的左侧（黄色）和右侧（蓝色）。

7.2. 的傅里叶系数 Q。In [BTZ20], 关于傅里叶系数的一些数值观察

$$\hat{B}(k,l) := B(\omega_1^{k_1}\omega_2^{k_2}\omega_3^{k_3}, \omega_4^{l_1}\omega_5^{l_2}\omega_6^{l_3})$$

B 讨论了 $k_1+k_2+k_3 = l_1+l_2+l_3 = 0$ 条件下 B 的情形。也就是说，只有当 k 非常接近 l 且满足 $k_1^2+k_2^2+k_3^2 \approx l_1^2+l_2^2+l_3^2$ 时，它们才会非常大。我们可以用引理5解释如下。

根据引理5，并且由于 $\lambda_0 = 1$，对于所有 $f \in X_0$

$$B(f,f) = \int_C m(\theta)|f(\theta)|^2\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta) + \int_{C^2} n(\theta)\delta(a(\theta)-a(\theta'))f(\theta)\overline{f(\theta')}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_C(\theta')$$

对于某些函数 m， n。

第一项是一个乘子，因此它在傅里叶侧的作用是与一个固定的隆起函数进行卷积。这个隆起函数的衰减至少像 $|k-l|^{-3}$，因为 m 的三阶导数仍然可积。这解释了当 k 接近 l 时系数为何会很大。

第二项的傅里叶系数是支撑在三维流形上的测度 $\mu := n(\theta)\delta(a(\theta) - a(\theta'))$ 的傅里叶系数

$$M := \{(x,y) \in C^2 \,:\, a(x) = a(y)\} \subset \mathbb{R}^6\,.$$

测度 μ 相对于该流形上的豪斯多夫测度具有光滑且有界的密度，但在 a 的临界点处除外。测度在具有光滑

有界密度的部分所对应的傅里叶变换可用驻相法进行估计，其阶低于临界点的贡献。为说明临界点处（其中 $\det D^2 a \neq 0$）的情形，我们为 C^2 选取坐标 x_1, x_2, y_1, y_2，使 a 的临界点位于 0 处。对 a 进行缩放并作线性变量替换后，要么

$$a(x) = x_1^2 + x_2^2 + O(|x|^3) \quad \text{or} \quad a(x) = x_1^2 - x_2^2 + O(|x|^3)\,. \tag{32}$$

因此，忽略高阶项，

$$\delta(a(x) - a(y)) \approx \delta(|x|^2 - |y|^2) \quad \text{or} \quad \delta(a(x) - a(y)) \approx \delta(x_1^2 - x_2^2 - y_1^2 - y_2^2)\,.$$

这些测度的傅里叶变换可以显式计算；事实上，它们的傅里叶变换就是它们自身。现在，a 有一个局部极大值和两个局部极小值，结合上述讨论，便可解释为什么 $\hat{B}(k,\ l)$ 在圆锥 $|k|^2 = |l|^2$ 上非常大。所有其他临界点的贡献阶数较小，因为权函数 n 在这些点处为零。

这一讨论可以转化为一个严谨的证明，说明 μ 的傅里叶系数集中在圆锥 $|k|^2 = |l|^2$ 附近。然而，我们只能证明它们集中在例如

$$\{(k,l) : ||k| - |l|| \leq C|k|^{1/2}\}\,,$$

and 不在圆锥的 $O(1)$ 邻域内，因为式（32）中存在高阶项。

References

[BSW+12] J. M. Borwein、A. Straub、J. Wan 和 W. Zudilin。《短均匀随机游走的密度》。加拿大数学杂志，64(5):961–990，2012 年。 DOI：10.4153/CJM-2011-079-2。附有 Don Zagier 撰写的附录（见第 9 页）。[BTZ20] J. Barker、C. Thiele 和 P. Zorin-Kranich。《圆上的傅里叶延拓不等式的带限极大化子，II》，2020 年。 DOI：10.48550/ARXIV.2002.05118（见第 1、2、15 页）。[CFO+17] E. Carneiro、D. Foschi、D. Oliveira e Silva 和 C. Thiele。《与圆上的傅里叶限制有关的尖锐三线性不等式》。伊比利亚美洲数学杂志，33(4):1463–1486，2017 年。 DOI：10.4171/ RMI/978（见第 1–3、9 页）。[CG22] V. Ciccone 和 F. Gon،calves。《算术约束下圆上的尖锐傅里叶延拓》，2022 年。 DOI：10.48550/ARXIV.2208.09441（见第 1 页）。[CO14] E. Carneiro 和 D. Oliveira e Silva。《球面上的若干尖锐限制不等式》。国际数学研究通知，2015(17):8233–8267，2014 年 10 月。 DOI：10.1093/imrn/rnu194（见第 2 页）。[CS12a] M. Christ 和 S. Shao。《傅里叶限制不等式极值函数的存在性》。《分析与偏微分方程》，5(2):261–312，2012 年。 DOI：10.2140/apde.2012.5.261（见第 2 页）。[CS12b] M. Christ 和 S. Shao。《关于伴随傅里叶限制不等式的极值函数》。数学进展，230(3):957–977，2012 年。 DOI：10.1016/j.aim.2012.03.020（见第 2 页）。[FLS16] R. L. Frank、E. H. Lieb 和 J. Sabin。《Stein-Tomas 不等式的极大化子》。几何与泛函分析，26(4):1095–1134，2016 年。 DOI：10.1007/s00039-016-0380-9（见第 2 页）。[FO17] D. Foschi 和 D. Oliveira e Silva。《尖锐傅里叶限制理论的若干近期进展》。数学分析，43(2):241–265，2017 年。 DOI：10.1007/s10476-017-0306-2（见第 2 页）。[Fos15] D. Foschi。《球面伴随傅里叶限制不等式的全局极大化子》。《泛函分析杂志》，268(3):690–702，2015 年。 DOI：10.1016/j.jfa.2014.10.015（见第 1、2 页）。

[FVV11] L. Fanelli、L. Vega 和 N. Visciglia。《一类限制定理的极大化子存在性》。伦敦数学学会会刊，43(4):811–817，2011 年。 DOI：10.1112/blms/bdr014（见第 2 页）。[GN22] F. Gon˛calves 和 G. Negro。《圆锥、抛物面与球面伴随傅里叶限制估计的局部极大化子》。《分析与偏微分方程》，15(4):1097–1130，2022 年。 DOI：10.2140/apde.2022.15. 1097（见第 2 页）。[NOT22] G. Negro、D. Oliveira e Silva 和 C. Thiele。《何时有函数能使圆锥曲线上的傅里叶延拓达到极大值？》，2022 年。 DOI：10.48550/ARXIV.2209.03916（见第 2 页）。[OQ21] D. Oliveira e Silva 和 R. Quilodr´an。《低维球面上伴随傅里叶限制不等式的全局极大化子》。《泛函分析杂志》，280(7):论文编号 108825，共 73 页，2021 年。 DOI：10.1016/j.jfa.2020.108825（见第 2 页）。[OTZ22] D. Oliveira e Silva、C. Thiele 和 P. Zorin-Kranich。《圆上的傅里叶延拓不等式的带限极大化子》。《实验数学》，31(1):192–198，2022 年。 DOI：10.1080/10586458. 2019.1596847（见第 1 页）。[Pea06] K. Pearson。随机迁移的数学理论。伦敦：Dulau and co，1906 年（见第 9 页）。[Sha16a] S. Shao。《 S^1球面上的 Tomas-Stein 不等式极值函数的存在性》。《泛函分析杂志》，270(10):3996–4038，2016 年。 DOI：10.1016/j.jfa.2016.02.019（见第 2 页）。[Sha16b] S. Shao。《 S^1球面上的 Tomas-Stein 不等式极值函数的光滑性》，2016 年。 DOI：10. 48550/ARXIV.1601.07119（见第 2 页）。

Mathematical Institute, University of Bonn, Endenicher Allee 60, 53115, Bonn, Germany
Email address: becker@math.uni-bonn.de