arXiv:2304.02357v1 [math.GR] 5 Apr 2023

前有限同构与不动点性质

MARTIN R. BRIDSON

Abstract. 我们描述一种灵活的构造，它产生有限生成的剩余有限群的三元组 $M \hookrightarrow P \hookrightarrow \Gamma$，其中$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$映射诱导有限群完备化的同构 $M \cong P \cong \Gamma$，但 M与 Γ 具有 Serre 的 FA 性质，而 P 则不具有。在此构造中，P 是有限表示的，且 Γ 为 F_∞ 型。更一般地，给定任意正整数 d，可以要求 M 与 Γ 每当以半单等距变换作用于维数至多为 d的完备 CAT(0) 空间时都具有不动点，而 P 在一棵树上的作用没有不动点。

1. Introduction

在探寻离散群的前有限不变量的过程中，不动点性质一直是令人失望的来源。例如，Aka [1] 证明了有限生成的剩余有限群的有限群完备化并不能确定该群是否具有性质 (T)，即该群能否作为希尔伯特空间的仿射等距变换群而无全局不动点地作用。Cheetham-West、Lubotzky、Reid 与 Spitler [13] 对树上的作用证明了类似定理：他们构造了有限表$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$示的剩余有限群对 G_1 与 G_2，使得 $G_1 \cong G_2$，但 G_1 具有$\widehat{\ }$Serre 的 FA 性质，而 G_2 则不具有。（此处，G_i 表示在 G_i上的有限群完备化。）

在本文中，我们将从两个方面改进这一最新结果。首先，我们构造具有这些性质的群，使得 (G_2, G_1) 构成一个$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$Grothendieck 对；也就是说，同构 $G_1 \cong G_2$ 由离散群的一个单射同态诱导 $G_1 \hookrightarrow G_2$ （参见 [13] 问题 4.1）。其次，我们将这一结果从树上的作用（一维情形）推广到对 d维 CAT(0) 空间的作用，其中 $d \geqslant 1$ 任意。

我们称群 G具有 Fix_d 性质，如果它在完备的、维数至多为 d的 CAT(0) 空间上以半单等距变换作用时，G 总有不动点。单纯树上的每个等距变换都是半单的，因此 Fix_1 蕴含 Serre 的 FA 性质（并将其推广到完备 $\mathbb{R}$树上的作用）。

定理 A. 对每个整数 $d \geqslant 1$，都存在满足以下条件的剩余有限群三元组 $M \overset{i}{\hookrightarrow} P \overset{j}{\hookrightarrow} \Gamma$：

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$(1) i 和 j 诱导同构 $M \cong P \cong \Gamma$；(2) M 是有限生成的，P 是有限表示的，且 Γ 属于类型 F_∞；(3) M 和 Γ 具有 Fix_d性质，但是

2010 *Mathematics Subject Classification.* 20F67、20J05、（20E08、20E18）。
Key words and phrases. Grothendieck 对、profinite 性质、CAT(0) 空间、FA 性质。

(4) P 是一个非平凡的 amalgamated free-product，因此作用于一棵单纯树上，且没有全局不动点。

我们的证明有一个意外之处：尽管 M 和 Γ 具有 Fix_d，但它们各自都包含一个有限指数子群，该子群可以在一棵树上作用而不固定任何点。

上述定理所需的不动点性质将通过以下判据加以证明；该判据源自 [6] 和 [5] 所发展的一系列思想。

定理 B. 若 A 是一个具有有限阿贝尔化的有限生成群，且 B 是一个有限群，则 $A \wr B$ 对于 $d = |B| - 1$ 具有 Fix_d。

定理 A 中三元组 $M \hookrightarrow P \hookrightarrow \Gamma$ 的构造首先遵循构造有限表示 Grothendieck 对的范式，该范式起源于 [10]，并在 [7] 第 8 节中得到了明确阐述。我们设计有限表示群 Q，使其具备一系列与我们的目标相关的性质（第 3.1 节）；我们采用适当改造的 Rips 构造（命题 3.1），得到短正合列 $1 \to N \to G \to Q \to 1$，其中 G 是有限表示且剩余有限的，N 是有限生成的，并且 N 和 G 都是完美群；随后，我们取 $G \to Q$ 的若干个副本的纤维积，构造出 $N^d \hookrightarrow P_d \hookrightarrow G^d$，使其为有限表示群。（这里的一个新颖之处在于，我们取的是 $G \to Q$ 的若干个副本的纤维积，而非仅取两个。）我们通过对 N^d、P_d 和 G^d 作有限扩张，得到所需的三元组 $M \overset{i}{\hookrightarrow} P \overset{j}{\hookrightarrow} \Gamma$，其构造方式使我们能够应用定理 B。

这种构造具有很大的灵活性——参见第 7 节。

2. Preliminaries

本节汇集了我们所需的关于群的有限群完备化以及 CAT(0)空间等距变换的基本定义和事实。

2.1. 有限群完备化。若 $M_1 < M_2$ 是群 G 中有限指数的正规子群，则存在一个自然映射 $G/M_1 \to G/M_2$。因此，G 的有限商群构成一个有向系统。G 的有限群完备化就是该系统的逆极限：

$$\widehat{G} := \varprojlim G/M.$$

i 的自然映射 $G \to \widehat{G}$ 是单射，当且仅当 G 是剩余有限的。若 G 是有限生成群，则对每个有限群 Q，与 i 复合定义了一个双射 $\mathrm{Hom}(\widehat{G}, Q) \to \mathrm{Hom}(G, Q)$，且该双射在满同态集合上也限制为双射。特别地，$G$ 和 $\widehat{G}$ 具有相同的有限像集，我们将其记为 $\mathfrak{F}(G)$。因此，$G_1 \cong G_2$ 蕴含 $\mathfrak{F}(G_1) = \mathfrak{F}(G_2)$。不那么显然的是，对于有限生成群，$\mathfrak{F}(G_1) = \mathfrak{F}(G_2)$ 蕴含 $\widehat{G}_1 \cong \widehat{G}_2$ —— 参见 [17, 第 88–89] 页。（注意，$G_1 \cong G_2$ 并不意味着存在任何非平凡同态 $G_1 \to G_2$。）

有限生成的剩余有限群的一个性质 $\mathfrak{P}$ 称为剩余有限不变量，如果 $G_1 \cong G_2$ 蕴含 G_2 具有 $\mathfrak{P}$，只要 G_1 具有 $\mathfrak{P}$。定理 A 表明，Fix_d 不是剩余有限不变量。

一对有限生成的剩余有限群 $G_1 \hookrightarrow G_2$ 称为^ ^Grothendieck 对 [15]，如果诱导映射 $\hat{\iota}: \ G_1 \to G_2$ 是一个同构。对于固定的 G_2，可能存在无穷多个彼此不同构的子群 G_1，使得 $G_1 \hookrightarrow G_2$ 构成一个 Grothendieck 对，即使要求 G_1 和G_2 都是有限表示的 [8]。

2.2. CAT(0) 空间的等距变换。关于 CAT(0) 空间的基本事实，请参阅 [11] 。我们用 Isom(X) 表示 CAT(0) 空间 X 的等距变换群，用 Fix(H) 表示集合 $H \subset$Isom(X)中每个元素在 X 内固定的点的集合。注意，Fix(H) 是闭且凸的。

如果 X 是完备的，则每个闭、有界且非空的子集都包含在唯一的最小球内；参见 [11] 第 178 页。如果有界子集是子群 $H <$Isom(X)的一个轨道，那么该球的中心将被 H固定。这就证明了以下标准命题。

命题 2.1. 如果 X 是完备的 CAT(0) 空间，那么 Isom(X) 的每个有限子群都在 X中固定一个点。

结合前述有界轨道观察，以及 Fix(H) 本身是一个 CAT(0) 空间这一事实，可以证明以下标准结论——例如参见 [6, 推论 2.5], 。

命题 2.2. 设 X 是一个完备的 CAT(0) 空间。若子群H_1、.....、 $H_n <$ Isom (X) 彼此交换，且对 $i = 1$、.....、 n，Fix(H_i) 非空，则 $\bigcap_i$Fix(H_i) 非空。

对于一个等距变换 $\gamma \in$Isom(X),

$$\mathrm{Min}(\gamma) := \{p \in X \mid d(p, \gamma.p) = |\gamma|\},$$

其中 $|\gamma| :=$ inf$\{d(x, \gamma.x) \mid x \in X\}$。根据定义，若 Min$(\gamma)$非空，则 γ 是半单的。完备 $\mathbb{R}$-树的每个等距变换都是半单的。半单等距变换分为双曲型（也称为双曲平移型）和椭圆型；前者满足 $|\gamma| > 0$，后者则是满足 Fix$(\gamma) \neq \varnothing$的等距变换。若 γ 是双曲型的，则存在一些 γ-不变的等距嵌入直线$\mathbb{R} \hookrightarrow X$， γ 在这些直线上以 $|\gamma|$为平移量作平移；每条这样的直线称为 γ的一条轴。这些轴的并集为 Min(γ)。以下摘录自 [11] 第 229–231 页，总结了我们所需的 Min (γ) 的性质。

命题 2.3. 设 X 为一个完备的 CAT(0) 空间，并设 $\gamma \in$Isom(X)为一个双曲等距变换。则，

(1) Min(γ) 等距分裂为 Min$(\gamma) = Y \times \mathbb{R}$，其中 $Y \times \{0\}$ 是 X的一个闭的凸子空间；(2) γ 在 Y 上平凡地作用，并在每条直线 $\{y\} \times \mathbb{R}$ 上以 $|\gamma|$ 作平移；(3) 中心化子 $C(\gamma) <$ Isom(X) 保持 Min(γ) 及其分裂不变，并通过第二因子的平移来作用；(4) 若 $\delta \in C(\gamma)$ 是双曲的，则 Min(γ) 包含 δ的一条轴。

3. A Rips construction and input groups

本节旨在构造引言中所述的短正合列 $1 \to N \to G \to Q \to 1$ 。

3.1. 输入群 Q。我们的构造需要一个具有以下性质的输入群 Q:

- Q 是 F_∞ 型（即拥有一个分类空间 $K(Q,\ 1)$ 其有限骨架均有限）；
- $H_2(Q,\ \mathbb{Z}) = 0$；$\nsim$ $Q = 1$；
- Q 是一个非平凡的合并自由积（因此不具有 FA 性质）。

构造具有这些性质的群 Q 有许多方法。事实上，每个有限表示群都可以嵌入（以明确方式，且几何性质可控）到一个没有非平凡有限商群的有限表示群中 [4]；将这个包络群替换为其万有中心扩张，可以使其第二同调平凡；再取所得群的两个副本的自由积，就得到一个满足上述所有性质的群 Q 。如果起初的群是 F_∞（分别为 F F 型），那么 Q也如此。

文献中也能找到所需形式的具体群。例如，根据 [10] ，可以取

$$Q = \langle a, b, \alpha, \beta \mid ba^{-p}b^{-1}a^{p+1},\ \beta\alpha^{-p}\beta^{-1}\alpha^{p+1},\ [bab^{-1}, a]\beta^{-1},\ [\beta\alpha\beta^{-1}, \alpha]b^{-1}\rangle.$$

3.2. Rips 构造的一个便捷版本。文献中对 Rips 构造有许多改进版本，并对所构造的群施加了各种性质。以下版本符合我们的需要。

命题 3.1. 存在一种算法，给定群 Q 的一个有限表示$\langle X \mid R\rangle$ ，即可构造一个有限渐近无关表示 $\langle X \cup \{a_1, a_2\} \mid R \cup V\rangle$ ，对应一个群 G ，使得:

(1) G 是双曲且剩余有限的；(2) $N := \langle a_1, a_2\rangle$ 是 G 的正规子群；(3) G/N 与 Q 同构；(4) 若 Q 是完美群，则 G 是完美群；(5) 若 $Q = 1$ 且 $H_2(Q, \mathbb{Z}) = 0$，则 N 和 G 都是完美群。

证明. 除第 (5) 项外，证明见 [9] 的命题 2.10。（剩余有限这一关键性质归功于 Wise [19,20]。）

对于条目 (5)，我们考虑从 $1 \to N \to G \to Q \to 1$ 的 LHS 谱序列角部导出的五项正合序列:

$$H_2(Q, \mathbb{Z}) \to H_0(Q,\ H_1(N, \mathbb{Z})) \to H_1(G, \mathbb{Z}) \to H_1(Q, \mathbb{Z}) \to 0.$$

由于所有其他项都为零，$H_0(Q,\ H_1(N, \mathbb{Z})) = 0$。根据定义，$H_0(Q,\ H_1(N, \mathbb{Z}))$ 是群 Q 在 $H_1(N, \mathbb{Z})$上的余不变量群，该作用由 G中的共轭诱导。由于阿贝尔群 $H_1(N, \mathbb{Z})$ 是有限生成的，其自同构群是剩余有限的。由于 Q 没有非平凡的有限商群，它在 $H_1(N, \mathbb{Z})$ 上的作用必定是平凡的。因此 $H_1(N, \mathbb{Z}) = H_0(Q,\ H_1(N, \mathbb{Z})) = 0$。□

4. Fibre products

我们对定理 A 的证明依赖于本节所确立的纤维积的各种性质。这些性质涵盖三个主题：纤维积的有限性性质、它们相对于有限群完备化的行为，以及它们与缠绕积的相互作用。

4.1. 纤维积与有限性性质。对于 $i = 1, \dots, d$，设 $p_i : G_i \to Q$ 是群的一个同态。这族映射的纤维积为

$$P_d = \{(g_1, \dots, g_d) \mid p_i(g_i) = p_j(g_j),\ i, j = 1, \dots, d\} < G_1 \times \cdots \times G_d.$$

本文将特别关注 $p_1 = \cdots = p_d$ 的情形。

P_d 是对角子群的原像

$$Q_d^{\Delta} := \{(q, \dots, q) \mid q \in Q\} < Q \times \cdots \times Q$$

并且存在一个短正合列

$$1 \to N^{(d)} \to P_d \to Q_d^{\Delta} \to 1 \tag{4.1}$$

其中 $N_i =$ 核 p_i 且 $N^{(d)} = N_1 \times \cdots \times N_d$。

我们需要一个判据来确保 P_d 是有限表示的；我们将从以下非对称 1-2-3 定理 [12] 推导出这一点。

定理 4.1（[12]）。对于 $i = 1, 2$，设 $1 \to N_i \to G_i \xrightarrow{p_i} Q \to 1$ 是群的一个短正合列。若 G_1 和 G_2 是有限表示的，Q 属于类型 F_3，且群 N_1、N_2 中至少有一个是有限生成的，则纤维积 $P < G_1 \times G_2$ 是有限表示的。

推论 4.2。设 $d \geqslant 2$，并令 $1 \to N_i \to G_i \xrightarrow{p_i} Q \to 1$ 是群的一个短正合列，其中 $i = 1$，……，d。若群 G_i 全部是有限表示的，群 N_i 是有限生成的，且 Q 属于类型 F_3，则相应的纤维积 $P_d < G_1 \times \cdots \times G_d$ 是有限表示的。

证明。我们对 d 进行归纳法；$d = 2$ 的情形已由定理涵盖。设 $P_d < G_1 \times \cdots \times G_d$ 为 p_1，……，p_d 的纤维积。对于归纳步骤，首先注意到

$$P_d \ < \ P_{d-1} \times G_d \ < \ G_1 \times \cdots \times G_d$$

它是映射 $p_d : G_d \to Q$ 与复合映射 $P_{d-1} \to Q_{d-1}^{\Delta} \to Q$ 的纤维积，其中 $P_{d-1} \to Q_{d-1}^{\Delta}$ 是 (4.1) 中的映射，而 $Q_{d-1}^{\Delta} \to Q$ 是同构 $(q, \dots, q) \mapsto q$。为完成证明，我们应用该定理，并注意到根据归纳法，P_{d-1} 是有限表示的。□

我们还需要以下一个更初等的结果。

引理 4.3。设 $i = 1$，……，d，令 $G_i \twoheadrightarrow Q$ 为群满同态。若群 G_i 是有限生成的，且 Q 是有限表示的，则纤维积 $P_d < G_1 \times \cdots \times G_d$ 是有限生成的。

证明。与前一个证明一样，通过归纳法可归结为情形 $d = 2$。我们固定一个有限表示 $Q = \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$，并为 $i = 1,2$ 选取 $a_{ij} \in G_i$，使得 $p_i(a_{ij}) = a_j$。然后，我们添加一个有限元素集 $B_i \subset \ker p_i$，从而得到 G_i 的有限生成集，并将 ρ_{ik} 记为

将 r_k 中的每个 a_j 替换为 a_{ij}后得到的词。容易验证，纤维积 $P < G_1 \times G_2$ 由以下元素生成
$\{(b_{1s}, 1),\ (1, b_{2s}),\ (a_{1j}, a_{2j}),\ (\rho_{1k}, 1) \mid j = 1, \dots, n;\ k = 1, \dots, m;\ b_{is} \in B_i\}.$
□

4.2. 纤维积与 Grothendieck 对。利用纤维积构造 Grothendieck 对的思想源自 Platonov 和 Tavgen 的工作 [16]，并在 [2], [10] 和 [8]中得到发展。

以下结果即为 [10]中的引理 2.2。

引理 4.4. 设 $1 \to N \to G \to Q \to 1$ 是一个有限$\widehat{}$生成群的正合序列。若 $Q = 1$ 且 $H_2(Q、\ \mathbb{Z}) = 0$，则 $N \hookrightarrow G$ 诱导有限群完备化之间的一个同构。

以下 Platonov-Tavgen 论证的一个变体将会用到；这就是 [8]中的定理 2.2。

命题 4.5. 设 $p_1 :\ G_1 \to Q$ 和 $p_1 :\ G_2 \to Q$ 是满同态，且G_1，其中 G_2 有限生成，Q 有限表示。设 $P < G_1 \times G_2$ 为$\widehat{}$所对应的纤维积。若 $Q = 1$ 且 $H_2(Q、\ \mathbb{Z}) = 0$，则 $P \hookrightarrow G_1 \times G_2$诱导有限群完备化之间的一个同构。

我们需要将结论推广到 $d \geqslant 2$ 因子的情形。

定理 4.6. 对于 $i = 1, \dots, d$，设 $p_i\colon\ G_i \to Q$ 是有限生成群之间的满同态，并设 $P_d < \Gamma := G_1 \times \cdots \times G_d$ 是相应的纤维积。若 Q 是有限表示的，$Q = 1$ 且 $H_2(Q, \mathbb{Z}) = 0$，则$P_d \hookrightarrow \Gamma$ 诱导出有限群完备化之间的同构。

证明. 我们仿照定理 4.1 的证明，对 d进行归纳法。在归纳步骤中，我们利用引理 4.3 来确保 P_{d-1} 是有限生成的。随后可以对 $p_d : G_d \to Q$ 和 $P_{d-1} \to Q_{d-1}^{\Delta} \cong Q$应用命题 4.5，并注意到 P_d 是这些映射的纤维积。□

4.3. 纤维积与缠绕积。给定群 A 与 B，其中B有限，wreath 积 $A \wr B$是半直积 $A^B \rtimes B$，或更精确地说是 $(\oplus_{b \in B} A_b) \rtimes B$，并带有固定同构 $\mu_b :\ A \to A_b$，使得 $b \in B$以 $\mu_{bb'} \circ \mu_{b'}^{-1}$ 的方式作用于 $A_{b'}$。我们将 $A^{\Delta} < A \times \cdots \times A$ 与其在 $(\mu_b)_{b \in B}$下的像等同。下面这个平凡的观察将在后文中起重要作用。

引理 4.7。$\langle A^{\Delta}、\ B \rangle < A \wr B$ 是直积 $A^{\Delta} \times B \cong A \times B$。

给定 B 以及群的短正合列 $1 \to N \to G \to Q \to 1$，我们取该序列的 $|B|$ 个副本的直积，以 B的元素为指标，并令 B 通过其对指标的左作用来置换这些副本。由此得到的半直积给出一个（非正合的）群序列

$$N \wr B \hookrightarrow G \wr B \twoheadrightarrow Q \wr B.$$

B 的作用保持映射$G_b \to Q_b$的纤维积 $P_B < G^B = \oplus_{b \in B} G_b$，从而得到一个半直积

$$P_B \rtimes B = \langle P_B, B \rangle < G \wr B$$

以及一个（非正合）群序列

$$N \wr B \hookrightarrow P_B \rtimes B \twoheadrightarrow \langle Q^{\Delta}, B\rangle < Q \wr B.$$

由引理 4.7 可得:

引理 4.8。在上述记号下，存在一个满射

$$P_B \rtimes B \twoheadrightarrow Q^{\Delta} \cong Q.$$

5. Fixed point criteria

本节给出保证群作用在有限维完备 CAT(0) 空间上存在不动点的判据。这些判据摘自 [5] 和 [6]中阐述的更一般判据。

以下结果是 [6, 推论 3.6]的一个特例。

命题 5.1. 设 d为正整数， X 为维数小于 d的完备 CAT(0)空间。设 $S_1, \ldots,$ $S_d \subset \mathrm{Isom}(X)$ 是子集 $S \subset \mathrm{Isom}(X)$ 的共轭，其中 $[s_i, s_j] = 1$ 对所有 $s_i \in S_i$ 和 $s_j \in S_j$均成立。若 S 中的每个元素（因而 S_i中的每个元素）在 X中都有不动点，那么 S 的每个有限子集（因而 S_i的每个有限子集）也有不动点。

推论 5.2. 设 d 为正整数， X 为维数小于 d的完备 CAT(0)空间，且设 $H_1,$ $\ldots, H_d < \mathrm{Isom}(X)$ 为两两共轭的子群。若每个 H_i 都由有限个椭圆元素生成，则 $D = \langle H_1, \ldots, H_d\rangle$在 X中有不动点。

证明. 设 $S = S_1$ 为生成 H_1的一组有限椭圆元素。我们对 S 取共轭，从而为每个 H_i得到生成集 S_i 。根据该命题，$\mathrm{Fix}(S_i)$ =$\mathrm{Fix}(H_i)$ 非空；因此，根据引理 2.2，$\mathrm{Fix}(D)$ 非空。□

对于 $n \in \mathbb{N}$，度量空间 X 中的 n-平坦是欧几里得空间 $\mathbb{E}^n \hookrightarrow X$的等距嵌入副本。

引理 5.3. 如果 K_0，…， K_d是群，且 $\mathrm{Hom}(K_i, \mathbb{R}) = 0$，而 X是一个不包含任何 $(d+1)$-平坦的完备 CAT(0) 空间，那么不存在作用 ρ:
$K_0 \times \cdots \times K_d \to \mathrm{Isom}(X)$，使得每个 $\rho(K_i)$都包含一个双曲等距变换。

证明。我们将用归纳法证明该引理；当 $d = 0$ 时，结论显然成立。假设该引理对 $d' \leqslant d-1$成立。若能从存在双曲等距变换 $\gamma_i \in \rho(K_i)$ （其中 $i = 0,$ ……， d）这一假设推出矛盾，归纳即可完成。若果真如此，则根据命题 2.3，子空间 $\mathrm{Min}(\gamma_0)$ 可等距分解为 $Y \times \mathbb{R}$ ，而 $\mathrm{Isom}(X)$ 中 γ_0 的中心化子 $C(\gamma_0)$ 将保持 $\mathrm{Min}(\gamma_0)$及其分解，并在 $Y \times \mathbb{R}$的第二个因子上以平移的方式作用。平移群为 $\mathbb{R}$，且 $\mathrm{Hom}(K_i, \mathbb{R}) = 0$，因此 $K_1 \times \cdots \times K_d$必定在第二个因子上平凡作用。于是我们得到 $K_1 \times \cdots \times K_d$在 $Y_0 = Y \times \{0\}$上的作用。命题 2.3 的第 (1) 部分保证 $Y_0 \subset X$ 是闭且凸的，因此是一个 CAT(0) 空间；第 (4) 部分则说明，对于 $i = 1,$ ……， d，$\gamma_i \in K_i$作为双曲等距变换作用于 Y_0。但是 $Y \times \mathbb{R} = \mathrm{Min}(\gamma_0)$等距嵌入 X，因此 Y_0 不含有 d-平坦空间。这与归纳假设矛盾。□

定理 5.4。设 G 是一个群，并假设存在子群 $D = H_0 \times \cdots \times H_d < G$，使得对于 $i = 1$，……，d，H_i 在 G 中与 H_0 共轭。若 H_0 是有限生成的且具有有限阿贝尔化，则只要 G 以半单等距变换的方式作用于维数至多为 d 的完备 CAT(0) 空间，D 就有不动点。

证明。假设 $\dim(X) \leqslant d$ 比要求 X 不含 $(d+1)$-平面更强，因此前述引理告诉我们，H_i 的任何子群中都没有双曲元素。由于 H_0 是有限生成的，推论 5.2 完成证明。□

以下结果在引言中表述为定理 B。

推论 5.5。若 A 是一个具有有限阿贝尔化的有限生成群，且 B 是有限群，则 $A \wr B$ 具有 Fix_d，其中 $d = |B| - 1$。

证明。设 $G = A \wr B = (\oplus_{b\in B} A_b) \rtimes B$ 和 $D = \oplus_{b\in B} A_b$。定理 5.4 告诉我们，只要 $A \wr B$ 在完备 CAT(0) 空间 X 上通过半单等距变换作用，D 就有一个不动点，且 $\dim(X) \leqslant |B| - 1$。由于 $B < A \wr B$ 正规化 D，它使其不动点集 $\mathrm{Fix}(D) \subset X$ 保持不变。$\mathrm{Fix}(D)$ 是闭且凸的，因此是一个完备 CAT(0) 空间。命题 2.1 给出 $\mathrm{Fix}(D)$ 中的一个点，该点由 B 固定，因此也由 $A \wr B = \langle D, B\rangle$ 固定。□

6. Proof of Theorem A

设 Q 是一个满足第 3.1 节所列条件的群。由命题 3.1，存在一个短正合序列

$$1 \to N \to G \to Q \to 1$$

其中 N 有限生成且完美，而 G 有限表示、剩余有限且完美。给定 $d \geqslant 2$，我们固定一个满足 $|B| = d + 1$ 的有限群 B。按照第 4.3 节中的做法，我们取该序列的 $|B|$ 个副本的直积，以 B 的元素为指标，并取映射 $G_b \to Q$ 的纤维积，从而得到

$$N^B \hookrightarrow P_B \hookrightarrow G^B.$$

B 对 G^B 的直积因子的置换作用保持 N^B 和 P_B 不变，因此上述包含关系可扩展为

$$N \wr B \overset{i}{\hookrightarrow} P_B \rtimes B \overset{j}{\hookrightarrow} G \wr B.$$

我们断言，这组三个群具有定理 A 所要求的性质。

为了证明 i 诱导有限群完备化之间的同构，首先注意到引理 4.4 适用于 $N^B \hookrightarrow P_B$，因为 N^B 是 P_B 的正规子群，且商群为 Q。同样，定理 4.6 保证 $P_B \hookrightarrow G^B$（即 j 的限制）诱导有限群完备化之间的同构。B 对 G^B 的因子进行置换的作用 $\frown$ 可扩展至 G^B，并在其中保持稠密子群 P_B 和 N^B。注意到 $\widehat{N} \wr B = \widehat{N \wr B}$ 和 $\widehat{G} \wr B = \widehat{G \wr B}$，我们得出 $\hat{i}$ 和 $\hat{j}$ 是分别扩展 $\widehat{N^B} \to \widehat{P_B}$ 和 $\widehat{P_B} \to \widehat{G^B}$ 的同构。由此得证定理 A(1)。

$N \wr B$ 是有限生成的，因为 N 也是如此。推论 4.2保证P_B 是有限表示的，因此有限扩张 $P_B \rtimes B$ 也是有限表示的。由

构造可知， Q 是 F_∞型的，因此 $Q \wr B$也是如此。（如果需要，我们还可以令其几乎为 F 型。）这就证明了定理 A(2)。

N 和 G 是有限生成且完美的，因此推论 5.5 告诉我们， $N \wr B$ 和 $G \wr B$ 具有 Fix_d，因为 $|B| = d + 1$。相反， $P_B \rtimes B$ 按照引理 4.8 的论述映射到 Q上，因此它是一个非平凡的合并自由积——尤其是，它不具有 FA 性质或 Fix_d。□

7. 灵活性与一个判定问题 M

从第 3.1 节的讨论可以清楚地看出，输入群 Q的选择有很大的灵活性。因此，我们可以自由地对所构造的 Grothendieck 对 $P \rtimes B \hookrightarrow G \wr B$施加各种额外条件。尤其是，我们得到的配对范围足以涵盖 [3] 及其他地方所描述的许多不可判定性现象。例如，遵循 [3, 定理 B]的证明，我们可以得到以下定理。将 FA 性质换成条件 Fix_d，也有类似结果。

定理 7.1. 不存在这样一种算法：给定一个具有 FA 性质的有限生成、剩余有限群 Γ 以及一个有限可表示子群 $u\colon P \hookrightarrow \Gamma$，其中 $u : P \to \Gamma$ 是同构，该算法能够判定 P 是否具有 FA 性质。

证明. 与 [3], 中一样，可以对 [14] 中构造的群进行增强，从而得到一列递归的有限群表示 $\mathcal{Q}^{(m)} \equiv \langle S \mid R^{(m)} \rangle$，对应群 $Q^{(m)}$，其中 S 和 $|R^{(m)}|$固定，使得：(i) 不存在算法能够判定哪些群是平凡群；但 (ii) 若 $Q^{(m)} \neq 1$，则它满足第 3.1 节所列性质。我们将命题 3.1 的算法应用于群表示 $\mathcal{Q}^{(m)}$，得到 $G^{(m)} \twoheadrightarrow Q^{(m)}$，并获得 $G^{(m)}$ 的显式群表示，进而得到 $G^{(m)} \times G^{(m)}$。纤维积 $P^{(m)} \hookrightarrow G^{(m)} \times G^{(m)}$ 由引理 4.3 中描述的有限生成元给出，其中 B_i 是 $G^{(m)}$ 给定的关系式。定理 4.1 保证 $P^{(m)}$ 是有限可表示的。我们从 $P^{(m)} \hookrightarrow G^{(m)} \times G^{(m)}$ 转到 $u_m\colon P^{(m)} \rtimes (\mathbb{Z}/2) \hookrightarrow G^{(m)} \wr (\mathbb{Z}/2)$，然后按照定理 A 的证明进行论证，可知 u_m 诱导有限群完备化之间的同构， $G^{(m)} \wr (\mathbb{Z}/2)$ 具有 FA 性质（实际上是 Fix_1），且 $P^{(m)} \rtimes (\mathbb{Z}/2)$ 映射到 $Q^{(m)}$上。

注意，群 $G^{(m)} \wr (\mathbb{Z}/2)$ 由递归的表示序列给出，而映射 u_m 则由子群 $P^{(m)} \rtimes (\mathbb{Z}/2)$的生成集递归序列给出。

若 $Q^{(m)} \neq 1$，则 $P^{(m)} \rtimes (\mathbb{Z}/2)$ 不具有 FA 性质，因为它映 onto $Q^{(m)}$。但若 $Q^{(m)} = 1$，则 u_m 是同构，因此 $P^{(m)}$ 具有 FA 性质。而且根据构造，不存在算法可以判定这两种情况中哪一种成立。□

References

[1] M. Aka, *Profinite completions and Kazhdan's property*, Groups Geom. Dynam. 6 (2012年), 221–229. [2] H. Bass and A. Lubotzky, *Nonarithmetic superrigid groups: counterexamples to Platonov's conjecture* **151** 2000 1151 1173 , Annals of Math. ( ), – . [3] M. R. Bridson, *Decision problems and profinite completions of groups*, J. Algebra 326 (2011年), 59–73.

[4] M.R. Bridson, *Controlled embeddings into groups that have no nontrivial finite quotients* **1** 1998 99 116 , 《几何与拓扑专著》 ( ), – . [5] M.R. Bridson, *Helly's theorem* (0) *spaces and actions of automorphism groups* , CAT , , 预印本, 牛津. *of free groups* 2007
[6] M.R. Bridson, *On the dimension of CAT*(0) *spaces where mapping class groups act*, 《纯粹与应用数学杂志》, 673 (2012), 55–68. [7] M.R. Bridson, *Cube complexes subgroups of mapping class groups and nilpotent* , , , 载于"几何群论", *genus* 21, IAS/Park City 数学丛书, 美国数学学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2014, 第379–399页. [8] M.R. Bridson, *The strong profinite genus of a finitely presented group can be infinite*, 《欧洲数学会杂志》18 (2016), 第9期, 1909–1918. [9] M.R. Bridson, *The homology of groups, profinite completions, and echoes of Gilbert Baumslag*, 载于《群与群环初等理论及相关主题》, 第11–28页, 德格鲁伊特出版社, 柏林, 2020. [10] M. R. Bridson 和 F.J. Grunewald *Grothendieck's problems concerning profinite completions and representations of groups* 2 **160** 2004 359 373 , Annals of Math. ( ) ( ), – . [11] M.R. Bridson 和 A. Haefliger, 《非正曲率度量空间》 , Grund. Math. Wiss. 319, 施普林格出版社, 海德堡—柏林, 1999. [12] M.R. Bridson, J. Howie, C.F. Miller III 和 H. Short, *On the finite presentation of subdirect products and the nature of residually free groups.* **135** 《美国数学杂志》, (2013), 891–933. [13] T. Cheetham-West, A. Lubotzky, A.W. Reid, R. Spitler, *Property FA is not a profinite property* 2212 , Groups Geom. 08207 Dynam., 即将刊出. arXiv: .[14] D.J. Collins 和 C.F. Miller III, *The word problem in groups of cohomological dimension 2* , 载于"圣安德鲁斯群论会议（巴斯）"（C.M. Campbell, E.F. Robertson, G.C. Smith 编）, 伦敦数学会讲义系列270, 1998, 第211–218页. [15] A. Grothendieck, *Représentations linéaires et compatifications profinie des groupes discrets* **2** 1970 375 396 , 《数学手稿》 ( ), – . [16] V. P. Platonov 和 O. I. Tavgen, *Grothendieck's problem on profinite completions and representations of groups* **4** 1990 89 101 , K 理论 ( ), – . [17] L. Ribes 和 P.A. Zalesskii, *Profinite Groups*, Ergeb. der Math. 40, 施普林格出版社, 柏林, 纽约, 2000. [18] E. Rips, *Subgroups of small cancellation groups*, 《伦敦数学会通报》14 (1982), 45–47. [19] D. T. Wise, *Cubulating small cancellation groups*, 《几何与泛函分析》, 14 (2004), 150–214. [20] D. T. Wise, *A residually finite version of Rips's construction*, 《伦敦数学会通报》35 (2003), 23-29.

Mathematical Institute, Andrew Wiles Building, Woodstock Road, Oxford*Email address*: bridson@maths.ox.ac.uk