arXiv:2304.02359v2 [cs.RO] 3 Jan 2024

# 基于高效优化的缆绳力分配，用于运输载荷的多旋翼团队几何控制

Khaled Wahba 和 Wolfgang H¨onig

**摘要—我们考虑运输一个连接在多个多旋翼飞行器上的重型载荷。当前最先进的控制器要么完全不避免机器人之间的碰撞，从而在被要求携带相对于缆绳长度尺寸较小的载荷时导致坠毁，要么使用计算量大的非线性优化。我们为几何载荷运输控制器提出一种高效的基于优化的缆绳力分配，以有效避免此类碰撞，同时保留几何控制器的稳定性特性。我们的方法引入一系列精心设计的二次规划，可在高度受限的嵌入式飞行控制器上高效求解。**

**我们表明，就可扩展性而言，我们的方法至少比最先进的控制器高出一个数量级，适用于最多 10 个机器人。我们在具有挑战性的场景中展示了该方法：最多三个小型多旋翼飞行器搭载各种载荷并使用不同缆绳长度，其中我们的控制器可直接在机器人上的微控制器上实时运行。**

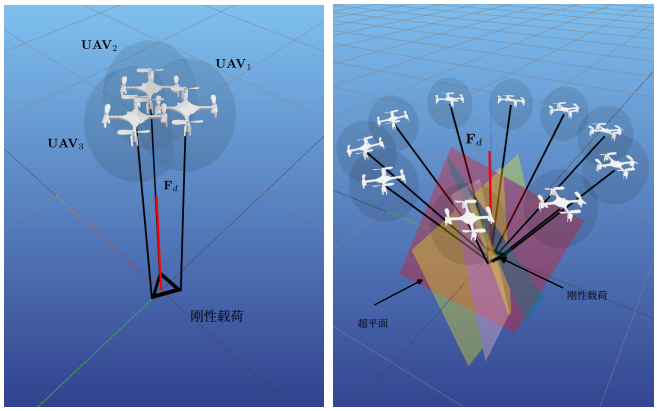


图 1. 我们提出了一种高效且与载荷类型无关的方法，用于计算期望缆绳力并避免碰撞。左：三架多旋翼飞行器使用基线控制器 [3] 携带刚体载荷。按照（5）分配期望缆绳力，导致机器人间碰撞。右：我们的方法通过计算超平面来定义缆绳力的安全凸集，同时考虑载荷的期望运动。

## I. 引言

飞行器能够到达偏远地区，因此适合在建筑工地执行协作任务、在搜救场景中清除废墟，或进行核电站退役工作。使用多无人机进行缆索驱动的载荷运输很有益，因为无需在机上搭载机械臂或夹持器，从而能够运输更重的物体 [1], 尤其是工具或补给品 [2]。

最先进的控制器可用于控制一组多旋翼飞行器运输悬挂载荷，其中包括几何控制器 [3, 4]以及非线性模型预测控制 [5, 6]。这些现有研究要么忽略机器人之间可能发生的碰撞 [3], , 要么使用需要复杂机载计算的非线性优化框架 [5, 7]。对于相较于机器人尺寸和缆绳长度而言体积较小的载荷，机器人之间很容易发生碰撞，从而带来安全风险。

我们提出了一种新的分布式缆绳力分配方法，用于 [3] 的几何控制器，为团队提供了新的能力，见图1。特别是，我们直接考虑机器人之间的安全距离，以及支持用户偏好的编队。我们的方法统一处理质点 [4] 和刚体 [3] 载荷类型。我们采用由三个低维二次规划问题（二次规划问题）组成的级联设计，即使在资源高度受限的微控制器上，也能在毫秒内找到其全局最小值。事实上，这种方法使我们能够在实体机器人上以分布式方式执行控制律。实际上，我们的方法让用户只需控制载荷，即可远程操控一组机器人，而不受载荷尺寸或类型的影响。我们的贡献如下：

1) 在算法方面，我们提供了一种新颖的、与载荷类型无关的基于二次规划的分布式力分配器，可部署在微控制器上。
2) 在实验方面，我们在一支由最多三架小型（34克）多旋翼飞行器组成的团队上展示了我们的分布式控制器，这些飞行器搭载了不同的载荷。与现有最先进的控制器相比，我们还展示了该方法随机器人数量增加而具有更优的可扩展性。

我们注意到，我们首次在计算资源高度受限的飞行控制器上展示了几何控制器。

## II. 相关工作

多无人机缆绳悬吊载荷系统的动力学可以通过载荷、缆绳与无人机之间的相互作用力明确描述 [1]。一般而言，其动力学通过牛顿运动方程 [8–10]，表示，同时纳入无人机的转动动力学 [3]。

稿件收稿日期：2023年8月11日；修订日期：2023年11月11日；录用日期：2023年12月11日。经副编辑和审稿人评审后，编辑 M. Ani Hsieh 推荐本文发表。所有作者均来自德国柏林柏林工业大学电气工程与计算机科学学院 {k.wahba, hoenig}@tu-berlin.de。本研究得到德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）项目 448549715 的资助。视频：https://youtu.be/3OfnUIiu3bs 代码：https://github.com/IMRCLab/col-trans 数字对象标识符（DOI）：见本页顶部。

协同运输载荷的仿真、规划与控制已有一些进展。一种方法是对系统动力学进行仿真 [11] ，并使用离线运动规划器 [12, 13] 生成状态参考，但这会牺牲离线规划过程中的反应能力。

相反，**集中式控制器**已针对整个系统以级联反应式方式设计 [3, 4,14, 15]。这些方法基于力或运动学分析，通常能够确保指数稳定性。然而，实际应用中仍存在一些挑战，例如需要测量含噪的载荷加速度。使用扰动观测器进行的估计 [16] 仅在仿真中进行了测试。此外，这些方法未将机器人间碰撞和缆绳缠绕纳入考虑。

**分布式控制器**可增强鲁棒性和可扩展性 [17, 18]，但仅在仿真中进行过测试，或假设存在可靠的通信。其他方法不依赖通信 [9, 19]。然而，这些方法并未考虑机器人间碰撞。

**基于优化的控制器** 可能使用迭代的基于梯度的求解器，但它们容易陷入局部极小值[20, 21]。另一种方法是将缆绳约束在预定义的凸区域内 [22]。然而，所有这些方法都缺乏对机器人间碰撞的直接考虑。非线性模型预测控制（非线性模型预测控制）可以控制载荷并避免机器人间碰撞 [5, 6]。然而，这些方法要么仅限于仿真，要么对高度受限的微控制器而言计算代价高昂，并且随机器人数量增加的可扩展性仍然较差。

与我们的方法最接近的方案，是采用具有闭式解的零空间方法 [7]或包含机器人间碰撞的非线性优化 [7, 23]，来分配缆绳力。相比之下，我们的方法采用凸优化，并支持新的应用场景，例如在给定期望队形的情况下处理不同的缆绳长度、纳入载荷分布以及机器人间碰撞约束。因此，这两种先前的方法不适合与我们的工作直接比较。我们的方法通过连续求解一系列凸规划来实现，其中的约束通过切除非凸解空间中的部分区域来定义，以换取更快地找到解。因此，我们的方法并不等同于任何现有的非凸形式 [7, 23]。值得注意的是，我们尚未发现凸化导致问题不可行的情况。另一方面，非凸形式可能会因初始猜测不佳而求解失败。

本文以现有控制器 [3, 4] 为基础，通过引入连续的二次规划对其加以改进，从而优化缆绳力分配；这些规划针对不同应用场景考虑了多种约束，同时保持稳定性。此外，我们证明，与当前最先进的控制器 [6]相比，我们的方法在可扩展性和计算成本方面更具优势。值得注意的是， [6] 是唯一提供详细可扩展性分析的工作。

## III. 背景

### A. 单个多旋翼动力学

单个多旋翼飞行器的动力学被建模为具有 $m$ 质量和对角线惯性力矩**J**的六自由度浮动刚体。多旋翼飞行器的状态包括全局位置$\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$、全局速度$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$、姿态旋转矩阵$\mathbf{R} \in SO(3)$以及机体角速度 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$。动力学可通过牛顿-欧拉 [24]运动方程表示如下

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}, \qquad m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}\mathbf{f}_u, \tag{1a}$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\omega}}, \qquad \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau}_u, \tag{1b}$$

其中，$\hat{\cdot}$表示反对称映射 $\mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3)$；$\mathbf{g} = (0, 0, -\mathrm{g})^T$ 为重力向量；$\boldsymbol{f}_u = (0, 0, f)^T$和$\boldsymbol{\tau}_u = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)^T$分别为来自旋翼的总推力和机体力矩。施加在多旋翼飞行器机体质心（CoM）上的总扳手向量定义为 $\boldsymbol{\eta} = (f, \tau_x, \tau_y, \tau_z)^T$。总扳手向量 $\boldsymbol{\eta}$与 $k$个电机 $\boldsymbol{\omega_m} = (w_1^2, \ldots, w_k^2)^T$的电机转速平方（即螺旋桨速度）呈线性关系，即 $\boldsymbol{\eta} = \mathrm{B}_0\boldsymbol{\omega_m}$，其中 $\mathrm{B}_0$ 为执行器矩阵 [24]。

### B. 完整系统动力学

考虑一组通过无质量且不可伸长缆绳与载荷相连的 $n$ 多旋翼飞行器（见图1）。下文中，为清晰起见，我们使用自己的符号总结 [3, 4] 中的结果。在全文中，与载荷相关的变量以下标0表示，而第$i$个多旋翼飞行器的变量以下标 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 表示。载荷被描述为质量为 $m_0$ 且转动惯量矩阵为$\mathbf{J}_0$的刚体。假设缆绳始终处于绷紧状态（即建模为刚性杆），每根缆绳的长度为 $l_i$。状态可由载荷的全局位置$\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^3$ 和速度 $\dot{\mathbf{p}}_0 \in \mathbb{R}^3$、载荷的姿态旋转矩阵$\mathbf{R}_0 \in SO(3)$和机体角速度 $\boldsymbol{w}_0 \in \mathbb{R}^3$、以及每根$i$号缆绳的单位方向向量$\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^3$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}_i \in \mathbb{R}^3$ 描述，其中$\mathbf{q}_i$ 从多旋翼飞行器$i$ 指向载荷。因此，状态空间的维度为 $13 + 6n$。

定义每根缆绳与载荷之间的连接点向量为 ${}^0\mathbf{p}_{a_i}$ ，并在有效载荷参考系中表示。给定完整系统的状态，每架多旋翼飞行器在固定全局坐标系中的位置为

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_0 + \mathbf{R}_0{}^0\mathbf{p}_{a_i} - l_i\mathbf{q}_i. \tag{2}$$

因此，完整系统的运动学可描述为

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{q}_i, \qquad \dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{p}}_0 + \dot{\mathbf{R}}_0{}^0\mathbf{p}_{a_i} - l_i\dot{\mathbf{q}}_i$$

$$\dot{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{R}_0\hat{\boldsymbol{\omega}}_0, \tag{3}$$

完整系统的非线性动力学可使用欧拉-拉格朗日方程表示为 [3, 4]。

### C. 控制设计

*1)* 无载荷的单个多旋翼飞行器：单多旋翼控制器的目标是计算螺旋桨速度，使给定的元组参考轨迹 $\langle \mathbf{p}_r, \dot{\mathbf{p}}_r, \ddot{\mathbf{p}}_r, \psi_r \rangle$能够被多旋翼飞行器的质心跟踪。这里，$\mathbf{p}_r$ 和 $\psi_r$ 分别是多旋翼飞行器的位置和航向。 [25] 中的控制器由双回路 级联设计组成，其中

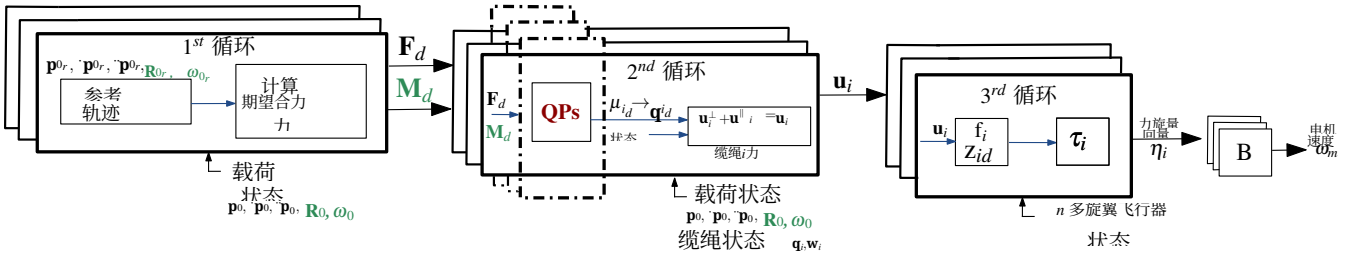


图2。用于载荷运输的先进几何控制器的控制器架构。我们提出了一种基于优化的缆绳力分配（以红色显示）。运输刚体而非质点时才需要绿色状态。

外环计算期望力控制向量，随后由其计算$f$ 和期望的机体第三$z$轴$z_d$。因此，结合微分平坦性和参考航向 $\psi_r$，可计算出期望旋转状态，并使用$\boldsymbol{\tau}_u$ 跟踪这些期望状态 [24, 25]。

*2)* 刚性载荷动力学控制设计：对于多无人机载荷运输系统，需要一种新的控制器设计，因为单一控制设计未包含缆绳的动力学。

[3] 的几何控制器解决多无人机载荷运输问题，其控制问题定义如下。输入为一组参考轨迹$\langle \mathbf{p}^{0_r}, \dot{\mathbf{p}}^{0_r}, \ddot{\mathbf{p}}^{0_r}, \mathbf{R}^{0_r}, \boldsymbol{\omega}_{0_r} \rangle$，其中$\mathbf{p}^{0_r}, \mathbf{R}^{0_r}, \boldsymbol{\omega}_{0_r}$分别表示载荷的位置、旋转矩阵和角速度。输出为一个分布式控制器，用于计算每个机器人的电机信号。

*a)* 期望载荷力和力矩：该控制器由图2所示的3-回路级联设计组成。第一个回路的第一步计算期望载荷合控制力$\mathbf{F}_d$和力矩$\mathbf{M}_d$，以跟踪载荷参考轨迹。然后，第一个回路输出期望的缆绳单位方向向量$\mathbf{q}^{i_d}$，以实现$\mathbf{F}_d$ 和$\mathbf{M}_d$。设$\boldsymbol{\mu}_{i_d}$ 为期望的$i$号缆绳力，$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{6\times 3n}$ 为一个将载荷质心的力和力矩映射为连接点$\mathbf{p}^{a_i}$处期望缆绳力$\boldsymbol{\mu}_{i_d}$的矩阵。因此，$\mathbf{P}$ 是由$\mathbf{p}^{a_i}$构成的常矩阵，详情请参阅 [3]。$\boldsymbol{\mu}_{i_d}$ 与 $\mathbf{F}_d$、$\mathbf{M}_d$ 之间的缆绳力分配关系定义为

$$\mathbf{P}\left((\mathbf{R}_0^T\boldsymbol{\mu}_{1_d})^T \dots (\mathbf{R}_0^T\boldsymbol{\mu}_{n_d})^T\right) = \left((\mathbf{R}_0^T\mathbf{F}_d)^T \quad \mathbf{M}_d^T\right). \tag{4}$$

*b)*缆绳力分配：对于任意 $\mathbf{F}_d$, $\mathbf{M}_d$ 和 $n \geq 3$，存在期望的缆绳力 $\boldsymbol{\mu}_{i_d}$。这些期望的缆绳力可以通过使用$\mathbf{P}$ 的摩尔－彭若斯广义逆来计算，以获得最小二乘解：

$$\boldsymbol{\mu}_{i_d} = \operatorname{diag}(\mathbf{R}_0, \dots, \mathbf{R}_0)\mathbf{P}^T(\mathbf{P}\mathbf{P}^T)^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{R}_0^T\mathbf{F}_d \\ \mathbf{M}_d\end{pmatrix}. \tag{5}$$

*3)*质点动力学控制设计：让我们考虑载荷为质量为 $n \geq 2$ 的质点这一特殊情况，此时控制器架构保持相同的结构，见图2。然而， [4, 14] 通过提供用户指定的团队队形来求解缆绳力的分配$\boldsymbol{\mu}_{i_d}$，随后将其投影到缆绳力的零空间上，以满足以下要求

$$\mathbf{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_{1_d}^T & \dots & \boldsymbol{\mu}_{n_d}^T\end{pmatrix}^T = \mathbf{F}_d. \tag{6}$$

*4)* 无人机控制输入：设第$i$架多旋翼飞行器施加在其缆绳上的控制力为$\mathbf{u}_i = \mathbf{R}_i\mathbf{f}_{u_i}$。记$\mathbf{u}_i^{\parallel} \in \mathbb{R}^3$ 和$\mathbf{u}_i^{\perp} \in \mathbb{R}^3$ 分别为$\mathbf{u}_i$ 沿$\mathbf{q}_i$ 方向的正交投影，以及$\mathbf{u}_i$ 在垂直于$\mathbf{q}_i$的平面上的正交投影，即$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^{\parallel} + \mathbf{u}_i^{\perp}$。我们利用期望缆绳力 $\boldsymbol{\mu}_{i_d}$，根据定义计算$\mathbf{q}^{i_d}$。

$$\mathbf{q}_{i_d} = \frac{\boldsymbol{\mu}_{i_d}}{\|\boldsymbol{\mu}_{i_d}\|}. \tag{7}$$

第二环路计算每个多旋翼飞行器作用于载荷上的控制力 $\mathbf{u}_i$。具体而言，首先将 $\boldsymbol{\mu}_{i_d}$ 投影到当前缆绳力向量 $\boldsymbol{\mu}_i$ 上，以计算 $\mathbf{u}_i^{\parallel}$，并加入使载荷平移动力学线性化的非线性项。换言之，当$\boldsymbol{\mu}_i \to \boldsymbol{\mu}_{i_d}$时，则跟踪 $\mathbf{F}_d$,$\mathbf{M}_d$。为了跟踪期望的缆绳力 $\boldsymbol{\mu}_{i_d}$，使用向量 $\mathbf{u}_i^{\perp}$ 来跟踪缆绳的期望单位方向向量，即 $\mathbf{q}_i \to \mathbf{q}^{i_d}$。当 $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}^{i_d}$ 时，作用于载荷的合力和力矩便与其期望值相同。

在计算$\mathbf{u}_i$后，最后的第三个循环计算推力大小$f$（即$\mathbf{f}_u$）以及所需的第三机体向量$\mathbf{z}_d$。因此，可以使用$\mathbf{f}_u$ 计算姿态控制输入 $\boldsymbol{\tau}_u$，如第三-C节所述。

### *D.* 二次规划与超平面

二次规划（QP）是一种具有二次目标函数以及仿射等式和不等式约束的优化问题。该二次规划的表述为

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{x}} \quad & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \left\{\underline{\boldsymbol{u}} \leq \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \overline{\boldsymbol{u}} \right. ,\end{aligned} \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 是决策变量向量。目标函数由半正定矩阵 $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$定义。线性约束由矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 定义，下界和上界向量分别为 $\underline{\boldsymbol{u}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{u}}$，使得 $u_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 和$u_i \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$对所有 $i \in \{1, \dots, m\}$ 成立。二次规划问题是凸的，因此具有全局最小值。

$\mathcal{H}$ 中的超平面可通过法向量 $\mathbf{n}$ 和偏移量 $a$ 表示为 $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{n}^T\boldsymbol{x} - a = 0\}$。 $\tilde{\mathcal{H}}$ 中的半空间是 $\mathbb{R}^d$ 的子集，由超平面界定，满足 $\tilde{\mathcal{H}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{n}^T\boldsymbol{x} - a \leq 0\}$。多个超平面的交集构成多面体。超平面可用作二次规划形式中的线性约束。

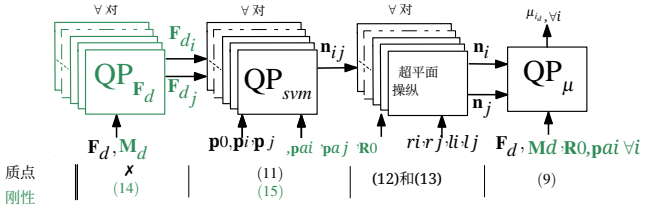


图3. 三个二次规划问题的级联为$n \geq 2$ 个机器人分配期望缆绳力$\boldsymbol{\mu}_{i_d}$。最终的二次规划QP$\boldsymbol{\mu}$通过约束缆绳力以满足分配约束(6)（质点）或(4)（刚体），并将其限制在一个多面体内来计算$\boldsymbol{\mu}_{i_d}$。该体积由一组超平面定义，这些超平面由针对每对机器人求解的另外两个二次规划问题QP$_{svm}$ 和QP$^{\mathbf{F}_d}$构造而成。黑色表示两种载荷类型，绿色仅用于刚性载荷。

## IV. 方法

### A. 概述

我们通过一种自定义的力分配方法扩展了第 III-C 节中描述的现有几何控制器（替换第 III-C.2.b 节中介绍的标准方法），以实现能够避免机器人间碰撞的多旋翼飞行器轨迹。我们的方法采用了一个统一框架，能够处理质点和刚性载荷。因此，我们为公式（5）提供了一个即插即用的替代方案，即使用载荷上的期望力 $\mathbf{F}_d$ 和载荷上的期望力矩 $\mathbf{M}_d$ 作为输入，并计算期望的缆绳力$\boldsymbol{\mu}_{i_d}$，同时将机器人间碰撞规避纳入考虑。非线性优化问题的形式可定义为，

$$\min_{\boldsymbol{\mu}_{i_d}} \ \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\mu}_{i_d}\|^2 \tag{9}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} (4) \text{ or } (6) \\ \|\mathbf{p}_i(\boldsymbol{\mu}_{i_d}, \cdot) - \mathbf{p}_j(\boldsymbol{\mu}_{j_d}, \cdot)\| \geq r_i + r_j, \quad \forall i \neq j, \end{cases}$$

其中$\mathbf{p}_i(\boldsymbol{\mu}_{i_d}, \cdot)$和$\mathbf{p}_j(\boldsymbol{\mu}_{j_d}, \cdot)$为每对机器人的位置（见(2)、(7)），$r_i, r_j$ 为安全半径。假设对期望缆绳方向$\mathbf{q}_{i_d}$ 的跟踪足够快，使得$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_{i_d}$。第一个约束分别对质点或刚体载荷情形施加力分配约束。第二个约束确保每对$i$ 与$j$ 机器人之间的安全距离至少为 $r_i + r_j$。若没有第二个约束，期望缆绳力的最优解与(5)中相同。我们不采用在第二个非凸约束下求解$\boldsymbol{\mu}_{i_d}$ 的非线性优化，而是使用由三个二次规划（二次规划问题）组成的级联设计来隐式关联这些变量，见图3。图3中的前三个模块以去中心化方式在每架多旋翼飞行器上运行，以计算所有机器人对的全部超平面。因此，对于 $n$架多旋翼飞行器，这些模块执行 $n(n-1)/2$ 次。

我们的关键见解是构造能够分隔每一对多旋翼飞行器的超平面。这些超平面还应考虑载荷的期望运动（即$\mathbf{F}_d$，$\mathbf{M}_d$）。对于每一对，我们使用第一个模块 QP$^{\mathbf{F}_d}$，为期望的缆绳力（$\mathbf{F}^{d_i}$ 和$\mathbf{F}^{d_j}$）提供启发式估计，使其近似于实现$\mathbf{F}_d$，$\mathbf{M}_d$的实际解，并据此引导超平面的生成。下一个模块 QP$_{svm}$则构造一个超平面，将对应的两个缆绳分隔开，同时优先采用近似解$\mathbf{F}^{d_i}$和$\mathbf{F}^{d_j}$（即旋转或偏移超平面）。由于每对之间生成的超平面安全裕度较小，我们使用超平面几何操作（第三个模块）构造两个新的超平面，每个多旋翼飞行器各对应一个；这些超平面具有所需的安全距离，并约束期望的缆绳力 $\boldsymbol{\mu}_{i_d}$。请注意，与针对每个超平面求解一个优化问题相比，这种几何操作的计算效率更高。

最后，最后一个二次规划$\boldsymbol{\mu}$ 在每个机器人上运行一次，以为完整的缆绳系统分配期望的缆绳力$\boldsymbol{\mu}_{i_d}$，每个多旋翼飞行器从二次规划$\boldsymbol{\mu}$中提取自身的解。当 $n \geq 2$时，对于相同的问题输入，该二次规划始终得到相同的解，因为它只有一个全局最小值。

### B. 期望缆绳力的二次规划（QP$\boldsymbol{\mu}$）

式（4）或式（6）的最小范数解为$\boldsymbol{\mu}_{i_d}$提供了一个解。我们向该优化问题中加入额外的（硬）约束。由于存在线性约束，所得到的优化问题是一个二次规划，可以高效求解：

$$\min_{\boldsymbol{\mu}_{i_d}} \ \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\mu}_{i_d}\|^2 \tag{10}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} (4) \text{ or } (6) \\ \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1^T & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \mathbf{n}_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_{1_d} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mu}_{n_d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}_{m\times 1} \end{cases},$$

其中$\mathbf{n}_i \in \mathbb{R}^{3\times 1}$且 $a_i \in \mathbb{R}$对于 $i \in 1, \dots, m$定义了半空间，$m$ 是在 $m \geq n$条件下超平面的数量。

### C. 点质量模型

在二次规划$\boldsymbol{\mu}$ 表述中，我们使用超平面构造不等式约束。我们通过求解另一个二次规划来计算这些超平面，然后通过几何操纵为缆绳力构造约束。考虑每一对机器人 $i$ 和 $j$。它们在载荷参考坐标系中的位置分别为 ${}^0\mathbf{p}_i$ 和 ${}^0\mathbf{p}^j$。为便于阅读，我们省略载荷参考坐标系中机器人位置向量的上标，并将其记为$\mathbf{p}_i$ 和$\mathbf{p}^j$。

*1)* 用于超平面的二次规划问题（二次规划$_{svm}$）：对于每一对机器人，我们生成两个超平面$\mathbf{n}_i$ 和$\mathbf{n}^j$，见左侧的图4。为了生成$\mathbf{n}_i$，$\mathbf{n}^j$，我们首先为每一对机器人计算超平面$\mathbf{n}^{ij}$，该超平面将两个机器人分隔开，同时尽可能靠近$\mathbf{F}_d$。因此，$\mathbf{n}^{ij}$ 在对$\mathbf{F}_d$进行正则化的同时，最大化机器人位置之间的安全裕度。该正则化项通过允许缆绳沿$\mathbf{F}_d$的相同方向移动，确保$\boldsymbol{\mu}_{i_d}$ 能够得到良好跟踪。随后，使用$\mathbf{n}^{ij}$ 计算$\mathbf{n}_i$和$\mathbf{n}^j$，以用于二次规划$\boldsymbol{\mu}$。我们采用带有额外$\mathbf{F}_d$ 正则化的多目标硬间隔支持向量机（支持向量机）的一种变体作为二次规划$_{svm}$:

$$\min_{\mathbf{n}_{ij}} \ \|\mathbf{n}_{ij}\|^2 + \lambda_s(\mathbf{n}_{ij}^T\mathbf{F}_d)^2 \tag{11}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{n}_{ij}^T\mathbf{p}_i \leq -1, \quad \mathbf{n}_{ij}^T\mathbf{p}_j \geq 1 \end{cases}.$$

此处，$\lambda_s$ 是软约束的权重因子，用于在安全裕度与超平面之间进行权衡，使 $\mathbf{n}^{ij}$ 尽可能接近 $\mathbf{F}_d$。事实上，较高的 $\lambda_s$ 可能会导致安全裕度接近于零。我们的公式通过不在二次规划$_{svm}$中包含偏移量 $a$，隐式地约束平面通过载荷。如果包含此类偏移量，那么超平面可能会发生偏移，从而导致二次规划$_{\boldsymbol{\mu}}$ 不可行。

*2*）超平面操控：计算出分离超平面 $\mathbf{n}^{ij}$ 后，我们需要计算 $\mathbf{n}_i$ 和 $\mathbf{n}^j$ 超平面的法向量，作为式（10）中二次规划的约束，见图4。值得注意的是，$\mathbf{n}^{ij}$ 向量始终指向 $\mathbf{p}_i$。给定每个机器人的半径 $r_i$ 和 $r_j$ 以及每根缆绳的长度 $l_i$ 和 $l_j$，我们首先利用所得等腰三角形的性质计算角度 $\alpha_i$ 和 $\alpha_j$，具体如下

$$\alpha_i = 2\arcsin\left(\frac{r_i}{2l_i}\right), \quad \alpha_j = 2\arcsin\left(\frac{r_j}{2l_j}\right). \tag{12}$$

令 $\mathbf{e}_3 = (0,\ 0,\ 1)^T$，并通过将轴角表示转换为四元数来定义四元数 $\mathbf{q}_i$ 和 $\mathbf{q}^j$，所用的轴为 $\mathbf{n}_{ij} \times \mathbf{e}_3$，角度为 $\alpha_i$ 和 $-\alpha_j$。最后，我们通过使用计算得到的 $\mathbf{q}_i$ 和 $\mathbf{q}^j$ 倾斜$\mathbf{n}^{ij}$，计算法向量 $\mathbf{n}_i$ 和 $\mathbf{n}^j$。令 $\odot$ 为四元数旋转算子，则$\mathbf{n}_i$ 和 $\mathbf{n}^j$ 为

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{q}_i \odot \mathbf{n}_{ij}, \quad \mathbf{n}_j = -\mathbf{q}_j \odot \mathbf{n}_{ij}. \tag{13}$$

请注意，式 (10) 中的二次规划$_{\boldsymbol{\mu}}$ 要求两个法向量都必须指向内侧（即彼此相向），这解释了为何在式 (13) 中添加负号来计算$\mathbf{n}^j$ 法向量。

### *D.* 刚体模型

与点质量模型类似（见第 IV-C 节），对于刚性载荷，我们的目标是求出超平面$\mathbf{n}_i$ 和$\mathbf{n}^j$（右侧的图4），以设定机器人之间期望的安全距离。然而，对于刚性载荷情形，超平面$\mathbf{n}^{ij}$（用于计算$\mathbf{n}_i$ 和$\mathbf{n}^j$）不仅需要考虑与$\mathbf{F}_d$的接近程度，还需要考虑期望力矩$\mathbf{M}_d$。因此，我们针对刚性载荷情形提出了一种特殊的二次规划，二次规划$_{\mathbf{F}_d}$（见图3）。这里，二次规划$_{\mathbf{F}_d}$ 纳入$\mathbf{M}_d$ 以生成$\mathbf{n}^{ij}$ 超平面。

*1)* 力对的二次规划（*QP*$_{\mathbf{F}_d}$）：我们首先针对每对机器人求解二次规划$_{\mathbf{F}_d}$，计算施加于连接点$\mathbf{p}^{a_i}$和$\mathbf{p}^{a_j}$上的虚拟启发式力$\mathbf{F}^{d_i}$ 和$\mathbf{F}^{d_j}$。回想一下，每根缆绳的连接点在有效载荷参考系中为$\mathbf{p}^{a_i}$,$\mathbf{p}^{a_j}$。这些力的合力必须达到$\mathbf{F}_d$，同时产生接近期望$\mathbf{M}_d$的力矩。定义 $\hat{}\mathbf{p}^{a_i}$ 和 $\hat{}\mathbf{p}^{a_j}$ 作为$\mathbf{p}^{a_i}$ 和$\mathbf{p}^{a_j}$的反对称映射，则$\mathbf{F}^{d_i}$ 和$\mathbf{F}^{d_j}$ 可解为

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{F}_{d_i},\mathbf{F}_{d_j}} \ & \|\mathbf{F}_{d_i}\|^2 + \|\mathbf{F}_{d_j}\|^2 + \\ & \|\mathbf{M}_d - (\hat{\mathbf{p}}_{a_i}\mathbf{R}_0^T\mathbf{F}_{d_i} + \hat{\mathbf{p}}_{a_j}\mathbf{R}_0^T\mathbf{F}_{d_j})\|^2 \\ \text{s.t.} \ & \mathbf{F}_{d_i} + \mathbf{F}_{d_j} = \mathbf{F}_d.\end{aligned} \tag{14}$$

由于二次规划$_{\mathbf{F}_d}$ 的输出是启发式虚拟力$\mathbf{F}^{d_i}$ 和$\mathbf{F}^{d_j}$，我们不需要将$\mathbf{M}_d$ 作为硬约束进行跟踪。在具体而言，$(\mathbf{F}_d, \mathbf{M}_d)$ 与 $(\mathbf{F}^{d_i}, \mathbf{F}^{d_j})$之间的映射可能会因连接点位置 $(\mathbf{p}^{a_i}, \mathbf{p}^{a_j})$ 而不可行。因此，我们优先求解$\mathbf{F}_d$，将其视为硬约束，并添加软约束，以获得尽可能接近$\mathbf{M}_d$的解。

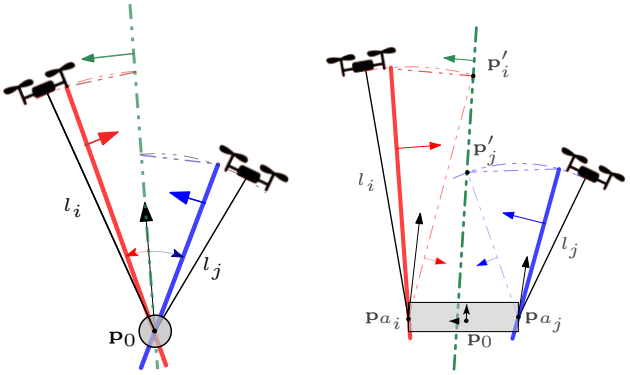


图4. 超平面操控的二维投影，其中二次规划$_{svm}$ 计算得到 $\mathbf{n}^{ij}$。左：质点情形，其中 $\mathbf{n}^{ij}$ 围绕 $\mathbf{p}_0$ 旋转，使其与 $\mathbf{n}^{ij}$ 的距离为 $r_i$ 或 $r_j$。右：刚体情形，构造新的中间超平面 $n'_i$ 和 $n'_j$，然后按照质点情形进行相同的旋转。

*2)* 超平面的二次规划问题（二次规划$_{svm}$）：在求解出$\mathbf{F}^{d_i}$和$\mathbf{F}^{d_j}$之后，我们使用混合软硬间隔支持向量机。具体而言，我们求解超平面$\mathbf{n}^{ij}$ 的法向量以及偏移量 $a$。由于$\mathbf{n}^{ij}$ 超平面与刚性载荷之间没有特定的期望交集点，$a$是一个决策变量。因此，我们提出二次规划$_{svm}$ 作为

$$\min_{\mathbf{n}_{ij},a,s_1,s_2} \ \|\mathbf{n}_{ij}\|^2 + \lambda_s(s_1+s_2) \tag{15}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{n}_{ij}^T\mathbf{p}_i - a \le -1, \quad \mathbf{n}_{ij}^T\mathbf{p}_j - a \ge 1 \\ \mathbf{n}_{ij}^T\mathbf{p}_{a_i} - a \le -1, \quad \mathbf{n}_{ij}^T\mathbf{p}_{a_j} - a \ge 1 \\ \mathbf{n}_{ij}^T(\mathbf{p}_{a_i} + \mathbf{F}_{d_i} - a) \le -1 + s_1 \\ \mathbf{n}_{ij}^T(\mathbf{p}_{a_j} + \mathbf{F}_{d_j} - a) \ge 1 - s_2 \\ s_1 \ge 0, \quad s_2 \ge 0 \end{cases}.$$

此处，前四个约束将缆绳分开，就像在硬间隔支持向量机中一样。接下来的四个约束确保超平面 $\mathbf{n}^{ij}$ 在连接点$\mathbf{p}^{a_i}$, $\mathbf{p}^{a_j}$分别发生平移后，最小化$\mathbf{F}^{d_i}$ 和$\mathbf{F}^{d_j}$ 的投影。我们使用两个松弛变量 $s_1$和 $s_2$，通过放宽施加于$\mathbf{F}^{d_i}$ 和$\mathbf{F}^{d_j}$ 在$\mathbf{n}^{ij}$的超平面上的投影的硬约束来对其进行最小化。这部分类似于软间隔支持向量机。与质点情形类似，$\lambda_s$ 也在安全裕度与接近两个力之间发挥权衡作用。由于 $a$ 是一个决策变量，超平面不必经过$\mathbf{p}_0$。

*3)* 超平面操控：我们采用与质点情形（第IV-C.2节）相同的倾斜方法，并增加额外步骤。我们定义两个点$\mathbf{p}'_i$和$\mathbf{p}'_j$，如右侧图4所示。我们首先计算描述每根缆绳运动的球面与超平面$\mathbf{n}^{ij}$的交集，该交集是$\mathbf{n}^{ij}$上的一个圆。我们将该圆上 $z$坐标最高的点分别作为$\mathbf{p}'_i$和$\mathbf{p}'_j$。随后，利用向量$\mathbf{n}_{ij} \times \mathbf{e}_3$ 以及各自的两个点，将两个新的超平面计算为$\mathbf{n}'_i$ 和$\mathbf{n}'_j$

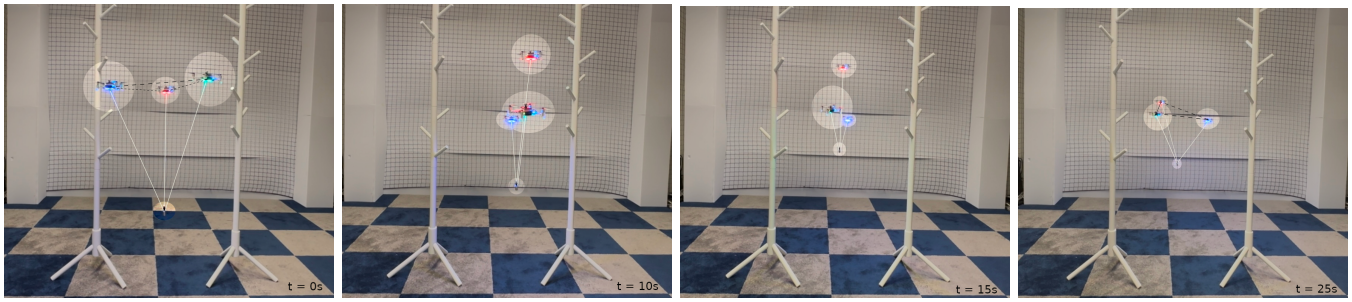


图5。三幅画面（为提高可见性而手动标出），展示了三架多旋翼飞行器在遥操作场景中搭载点质量载荷，同时避免机器人间碰撞。两个障碍物形成了一条狭窄通道。操作员控制载荷位置以及期望队形。此处采用了如 $t = 10s$ 和 $t = 15s$ 所示的直线构型。通过障碍物后，操作员禁用手动队形控制，我们的方法计算出一种更加节能的三角形队形（$t = 25s$）。

平面，它们分别是交点$\mathbf{p}'_i$ 和$\mathbf{p}'_j$ 以及连接点$\mathbf{p}^{a_i}$，$\mathbf{p}^{a_j}$。最后，我们采用质点情形中的相同步骤，根据每个机器人模型的半径 $r_i$ 和 $r_j$ 来倾斜$\mathbf{n}'_i$ 和$\mathbf{n}'_j$，并利用(12)和(13)生成$\mathbf{n}_i$ 和$\mathbf{n}^j$ 。

### *E.* 期望缆绳力

二次规划$\boldsymbol{\mu}$ 公式的主要优势之一，尤其是选择表示不等式约束的方式，是其可扩展性能够支持新的使用场景。在此，我们提供一个用于生成期望缆绳力的示例。支持这一功能有两个动机。第一个动机是引导优化问题产生连续的解，从而避免突然跳变。第二个动机是允许用户指定期望队形配置，例如通过狭窄通道。

将 $\boldsymbol{\mu}_{i_0}$ 定义为偏好的期望缆绳力，可以是上一次优化的解，也可以是用户指定的期望值。对于后一种情况，我们可以对 $\boldsymbol{\mu}_{i_0}$进行缩放，使得 $\sum_i \boldsymbol{\mu}_{i_0} = \mathbf{F}_d$。二次规划$\boldsymbol{\mu}$ (10)中的代价函数可以修改为最小化期望缆绳力与偏好缆绳力之间的差值，并采用权重因子$\lambda$ ，如下所示

$$c = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\mu}_{i_d}\|^2 + \lambda\|\boldsymbol{\mu}_{i_0} - \boldsymbol{\mu}_{i_d}\|^2. \tag{16}$$

## V. 实验

我们概述实验设置，并首先介绍弥合仿真到现实差距的步骤。对于实际平台，我们使用 Bitcraze Crazyflie 2.1 (CF) 型多旋翼飞行器。这些产品体积小巧（旋翼间距为 9 cm）、重量轻（34 g），且可在市场上买到。其物理参数已在先前工作中得到辨识 [26]。我们使用现有的扩展卡尔曼滤波器进行状态估计，并用*C* 实现控制算法，使其直接运行于基于 STM32 的飞行控制器（168 MHz，192kB RAM）上。

我们采用四阶段的**迭代开发方法**来减少仿真到现实迁移方面的挑战。在第一阶段，我们仅使用*Python*在仿真中实施实验。对于我们的控制器，我们使用一种用于凸优化问题的开源 Python 嵌入式建模语言 CVXPY [27] 编写二次规划程序。在第二阶段，我们将控制器从 *Python* 移植到 *C* ，并将其加入多旋翼飞行器的固件中。我们通过生成*Python* 绑定，在仿真器中验证语义等价性（软件在环，SITL）。第三阶段，我们移植自己的控制器，该控制器需要在 STM32 微控制器上求解多个二次规划问题 (10)。主要挑战是将二次规划形式从 CVXPY 移植到 *C*，为此我们依赖 OSQP [28], ，它可以生成针对嵌入式系统优化的代码。与之前一样，我们以软件在环的方式在仿真中验证此实现。第四阶段，我们优化代码，使其能够在物理硬件上实时运行。为此，我们仅使用单精度浮点运算，在控制回路之外异步求解二次规划问题，并使用先前结果对优化进行热启动。

我们通过专门设计的实体飞行实验验证了所提方法的功能。实验表明，若不采用能够考虑机器人间碰撞及小尺寸载荷的所提方法，在跟踪载荷轨迹时就会发生致命碰撞。

我们通过最多使用三架 Crazyflies 的实体飞行测试验证所提方法。每架多旋翼飞行器都有自己的机载控制器，用于求解二次规划问题，并利用计算出的期望缆绳力为自身生成电机控制输入。这种分布式执行要求所有机器人计算出相同的数值。由于我们的二次规划问题具有求解器能够达到的全局最小值，因此只需确保所有多旋翼飞行器使用相同的输入数据。在主机端，我们使用 Crazyswarm2，它基于 Crazyswarm [29]，但使用 ROS 2 [30]控制多架 Crazyflies 并向其发送命令。Crazyswarm2 高度依赖广播通信来进行状态估计并发送控制命令，从而确保所有机器人同时接收到数据。具体而言，我们为每架多旋翼飞行器安装一个反光标记，并使用 OptiTrack 动作捕捉系统以 100Hz 进行位置跟踪。对于载荷，我们为质点载荷使用一个标记，为刚体载荷使用四个标记进行跟踪。多旋翼飞行器和载荷的状态通过广播发送给所有机器人。对于起飞、降落或轨迹执行等命令，我们也依赖广播，以确保各多旋翼飞行器的期望状态一致。

每架多旋翼飞行器的状态均通过扩展卡尔曼滤波器在机载进行估计，而

表I 控制回路运行时间的平均值和标准差（浅灰色），单位为毫秒。

| 机器人 | 3 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 分布式 $t_{\mathbf{total}}$ | 0.1 0.0 | 1.0 0.2 | 2.0 0.3 | 3.6 0.9 |
| 集中式 $t_{\mathbf{c}}$ | 0.1 0.0 | 3.9 0.6 | 10.9 0.6 | 20.8 3.4 |
| 非线性模型预测控制 [6]: $t_{\mathbf{c}}$ | 7.0 | 30.0 | 55.0 | 100.0 |

载荷状态的一阶导数则通过数值微分结合互补滤波器进行估计。对于载荷，我们将校准砝码用作质点，将纸板和 3D打印物体用作刚体，并使用牙线作为缆绳。我们使用磁铁连接缆绳与载荷/多旋翼飞行器，以便于维修。我们的方法无需测量或估计缆绳力，因为控制器会跟踪 $\mathbf{q}^{i_d}$。

通过仿真结果，我们强调，与最先进的控制器相比，我们的方法在可扩展性和计算效率方面具有优势。

### *A.* 实验结果

我们进行了若干真实飞行实验，见表II。对于每种情况，我们报告了优化的运行时间（在机载微控制器上执行）以及载荷位姿误差。据我们所知，现有的基于优化的控制器（例如 [5, 6]）虽然能够应用于类似用例，但尚未在 STM32 飞行控制器这类计算资源高度受限的平台上实现。它们需要更复杂的求解器，因此几乎不可能做到这一点。此外，将控制器置于机载平台之外运行以进行比较会引入显著延迟，使结果失去有效性。因此，目前无法与此类控制器直接比较性能。

我们考虑了两种不同类型的参考运动：多项式8字轨迹（质点情形下达到 0.5m/s，刚体情形下达到 0.4m/s），以及通过位置和速度指令对载荷进行遥操作。在遥操作实验中，我们如图5所示设置了障碍物，使机器人切换为直线构型（见第IV-E节）以避免碰撞。操作员可以通过按下按钮切换到预定义构型。对于其他实验，我们使用了两种类型的刚性载荷，并采用了不同数量的 Crazyflies 和不同的缆绳长度。

总体而言，我们能够在微控制器上以 30 Hz 计算期望的缆绳力，这足以实现载荷的鲁棒位姿跟踪。令人意外的是，设置二次规划问题也占用了相当多的时间（例如，在 3 架无人机组成三角形的情况下需要 13 毫秒）。所获得的位姿误差与先前使用更大型多旋翼飞行器的研究结果一致 [7], ，其位置范围与无人机的旋翼间距相当。在 2 架无人机组成杆形编队的情况下，偏航误差较大，这是因为我们的偏航设定点颇具挑战性：在飞行执行 8 字轨迹的同时，还需要旋转编队。

### *B.* 可扩展性

为评估团队规模可扩展性，我们记录了三个二次规划问题在一台笔记本电脑（i7-1165G7、2.8GHz）上的计算时间图3中最多包含10个机器人。与 [6], 相比，我们报告了在性能相当的笔记本电脑上测得的运行时间。我们的第一个指标是以分布式方式运行的完整控制回路的总时间，即 $t_{\mathbf{total}} = t_{\mathbf{svm}} + t_{\mathbf{F}_d} + t_{\boldsymbol{\mu}} + t_{\mathbf{ctrl}}$，其中$t_{\mathbf{ctrl}}$ 是所有其他计算所需的时间。如表I所示，分布式运行时间大致随机器人数量呈二次增长，而总运行时间至少比 [6]中的结果快1.4个数量级。

此外，由于 [6] 是集中式优化，我们将本方法的集中式版本作为第二项指标。我们计算 $n$ 机器人在二次规划问题上的时间，记为$t_{\mathbf{c}} = nt_{\mathbf{svm}} + nt_{\mathbf{F}_d} + t_{\boldsymbol{\mu}}$。我们仍然显著快于[6] ，运行时间缩短了五倍。

### *C.* 挑战

在仿真中实现图2所示的控制框架是一项重大挑战。关键难点在于确定位于某个局部最优解中的控制增益，该局部最优解必须足够稳健，能够在转移到实际平台时，在控制性能与应对物理不确定性之间取得平衡。此外，在实际飞行中对实体多旋翼飞行器执行完整的控制框架还面临其他挑战。具体而言，几何控制器 [3] 包含若干在实际飞行中数值上不稳定的部分。控制器的第二环路计算$\mathbf{u}_i$，这需要测量或估计载荷的加速度。该数值的估计值噪声很大，会导致多旋翼飞行器坠毁。相反，我们依赖载荷的参考加速度。同样，缆绳单位方向 $\dot{\mathbf{q}}^{i_d}$ 的变化在实践中过于嘈杂，因此我们改用$\mathbf{0}$ 。

我们还发现，即使能够获取所有相关的跟踪误差，级联设计的增益也极难调节。增益非常敏感，且取决于无人机数量和载荷类型。此外，如何从起飞期间发生的扰动中恢复，也是调参面临的另一项挑战。我们注意到，飞行中途从单多旋翼控制器切换到我们的控制器是一种可行的替代方案，但对于缆绳长度不一致的情况并不实用。对于推重比高于我们的平台（我们的推重比约为 1.4，较低）而言，其中一些挑战可能更容易克服，尽管我们的数据表明，在实验中，电机仅在起飞期间偶尔出现饱和。相比之下，我们的方法引入的两个新增益 $\lambda$ 和 $\lambda_s$ 很容易调节。在不同设置下，这两个超参数都是通过我们的仿真到现实迁移迭代开发流程进行调节的。

## VI. CONCLUSION AND FUTURE WORK

我们提出了一种高效的、基于优化的几何控制器缆绳力分配方法，用于缆绳悬挂载荷运输，并能够感知邻近机器人以避免碰撞。不同于依赖非线性优化的以往工作，我们采用由一系列规模较小且可高效求解的二次规划组成的级联序列。由于我们仅在力分配的零空间中运行，几何控制器的稳定性分析仍然成立。我们展示

表II 飞行测试结果。所示为每次单次飞行的时间平均值，括号内为标准差（小号灰字）。

| | 2 无人机, 质点 | 3架无人机，质点 | 2 无人机，杆 | 3 无人机, 三角形 | 3架无人机，质点 |
|---|---|---|---|---|---|
| 载荷 | 质点 | 质点 | rod | 三角形 | 质点 |
| 轨迹 | 8字形轨迹 (13 秒) | 8字形轨迹 (13 s) | 8字形轨迹 (15 秒) | 8字形轨迹（15 秒） | 遥操作 |
| 质量 [g] | 10 | 10 | 8 | 10 | 10 |
| 尺寸 [cm] | - | - | 15 | 8 | - |
| 缆绳 [厘米] | 25, 50 | 25, 50, 75 | 50, 50 | 50, 50, 50 | 50, 50, 50 |
| QP总运行时间 [ms] | 5.7 1.5 | 23.1 5.8 | 13.5 2.1 | 33.1 4.3 | 21.8 6.2 |
| QP Fd运行时间 [毫秒] | 0.0 0.0 | 0.0 0.0 | 2.4 0.7 | 6.9 1.3 | 0.0 0.0 |
| 二次规划 运行时间 支持向量机 [ms] | 2.0 1.2 | 14.7 4.8 | 2.7 1.3 | 8.4 2.9 | 13.0 4.8 |
| 二次规划运行时间 $\mu$ [毫秒] | 1.8 0.8 | 3.9 3.0 | 3.0 1.2 | 4.7 2.7 | 4.4 3.7 |
| 载荷 $x, y, z$ 误差 [cm] | 2.5 1.3, 3.0 2.2, 2.8 1.4 | 3.6 3.0, 6.3 3.4, 4.0 2.3 | 4.3 3.4, 3.1 2.4, 4.2 1.7 | 2.4 1.6, 2.9 1.9, 3.6 1.6 | 3.0 3.0, 6.8 4.5, 5.9 4.1 |
| 载荷 $r, p, y$ 误差 [度] | - | - | 6.3 4.5, 6.9 3.9, 20.0 7.3 | 10.3 4.3,5.9 3.8,3.4 1.3 | - |

我们的方法具有良好的可扩展性，随着机器人数量增加，运行时间相比最先进的控制器降低了一个数量级。我们通过多项不同的物理实验表明，我们的方法可在计算资源受限的多旋翼飞行器上实时执行。

一个令人振奋的未来研究方向是规划时间最优且无碰撞导航所需的运动和缆绳力。另一个有趣的未来研究方向是分析我们的方法相对于非凸公式的解质量。此外，针对系统模型和控制的一个未来研究方向是允许载荷和非张紧缆绳的物理参数未知，而不是采用刚性杆假设。

## 参考


[1] C. Masone、H. H.B¨ulthoff 和 P.Stegagno，“使用四旋翼无人机运输载荷的协作运输：一种可重构缆驱并联机器人”，载于智能机器人与系统国际会议，2016年，第1623–1630页。[2] C. Gabellieri、M. Tognon、L.Pallottino 和 A. Franchi，“飞行集群中基于力的协作研究”，载于群体智能国际会议，2018年，第3–15页。[3] T. Lee，“运输缆绳悬挂刚体的四旋翼无人机几何控制”，*IEEE*《控制系统技术汇刊》，第26卷，第1期，第255–264页，2017年。[4] T.Lee、K.Sreenath 和 V.Kumar，“具有悬挂载荷的多四旋翼无人机协作的几何控制”，载于决策与控制会议，2013年，第5510–5515页。[5] G.Li和G.Loianno，“多四旋翼无人机协作运输和操纵缆绳悬挂载荷的非线性模型预测控制”，载于智能机器人与系统国际会议，2023年，第5034–5041页。[6] S.Sun和A.Franchi，“使用多架无人机对缆绳悬挂载荷进行全位姿操控的非线性模型预测控制”，载于国际无人航空系统会议，2023年，第969–975页。[7] X.Liu、G.Li 和G. Loianno，“具有安全意识的多微型飞行器人机协作运输与操纵”，*CoRR*，第abs/2210.05894卷，2022年。[8] P. O.Pereira 和 D.V.Dimarogonas，“ 使用两架飞行器进行吊挂载荷运输的控制框架”，载于决策与控制会议，2017年，第4254–4259页。[9] M. Tognon 、 C. Gabellieri 、 L.Pallottino 和 A. Franchi，“ 使用缆绳进行空中协同操纵：内力对平衡状态、稳定性和无源性的作用”，《机器人与自动化快报》，第3卷，第3期，第2577–2583页，2018年。[10] E. Tuci、M. H. Alkilabi 和 O. Akanyeti，“多机器人系统中的协作物体运输：最新技术综述”，《机器人与人工智能前沿》，第5卷，第59页，2018年。[11] G.Li、X. Liu和G.Loianno，“RotorTM：用于空中运输和操纵的灵活仿真器”，*IEEE*《机器人学汇刊》，第1–20页，2023年。[12] M. Manubens、D. Devaurs、L. Ros和 J. Cort´es，“使用空中拖缆系统进行六维操控的运动规划”，载于机器人：科学与系统，2013年。

[13] H. G. De Marina 和 E. Smeur，“旋翼飞行器团队的灵活协作运输”，载于国际机器人与自动化会议，2019年，第1074–1080页。[14] K. Sreenath 和 V. Kumar，“多台四旋翼机器人通过缆绳悬挂载荷的协作操纵：动力学、控制与规划”，载于机器人：科学与系统，2013年。[15] D. Six、S. Briot、A. Chriette 和 P. Martinet，“由三架四旋翼无人机组成的飞行并联机器人的运动学、动力学与控制”，《机器人与自动化快报》，第3卷，第1期，第559–566页，2017年。[16] K. Zhao 和 J. Zhang，“多四旋翼运输系统的复合扰动抑制控制策略”，《机器人与自动化快报》，第8卷，第8期，第4697–4704页，2023年。[17] B. E. Jackson、T. A. Howell、K. Shah、M. Schwager 和 Z. Manchester，“利用分布式轨迹优化实现无人机对缆绳悬挂载荷的可扩展协作运输”，《机器人与自动化快报》，第5卷，第2期，第3368–3374页，2020年。[18] A. Sharma 和 N. K. Sinha，“基于智能体群的缆绳悬挂载荷分散式空中运输与操纵”，*CoRR*，第abs/2306.12331卷，2023年。[19] A. Tagliabue、M. Kamel、R. Siegwart 和 J. Nieto，“使用多架微型飞行器实现稳健的协作物体运输”，《国际机器人研究杂志》，第38卷，第9期，第1020–1044页，2019年。[20] A. Jim´enez-Cano、D. Sanalitro、M. Tognon、A. Franchi 和 J. Cort´es，“空中多机器人系统实现精确的缆绳悬挂式抓取与放置：新型基于机器人的建造技术的概念验证”，《智能与机器人系统杂志》，第105卷，第3期，第68页，2022年。[21] A. Petitti、D. Sanalitro、M. Tognon、A. Milella、J. Cort´es 和 A. Franchi，“无人机团队对缆绳悬挂载荷的惯性估计与高能效控制”，载于国际无人航空系统会议，2020年，第158–165页。[22] J. Geng 和 J. W. Langelaan，“采用载荷领航控制的吊挂载荷协作运输”，《制导、控制与动力学杂志》，第43卷，第7期，第1313–1331页，2020年。[23] Z. Li、J. F. Horn 和 J. W. Langelaan，“自主旋翼飞行器团队对吊挂载荷的协同运输”，载于*AIAA*制导、导航与控制会议，2014年。[24] D. Mellinger 和 V. Kumar，“四旋翼无人机的最小加加速度轨迹生成与控制”，载于国际机器人与自动化会议，2011年，第2520–2525页。[25] T. Lee、M. Leok 和 N. H. McClamroch，“SE(3)上的四旋翼无人机几何跟踪控制”，载于决策与控制会议，2010年，第5420–5425页。[26] J. F¨orster，“Crazyflie 2.0纳米四旋翼机的系统辨识”，学士学位论文，苏黎世联邦理工学院，2015年。[27] S. Diamond 和 S. Boyd，“CVXPY：用于凸优化的Python嵌入式建模语言”，《机器学习研究杂志》，第17卷，第83期，第1–5页，2016年。[28] B. Stellato、G. Banjac、P. Goulart、A. Bemporad 和 S. Boyd，“OSQP：用于二次规划的算子分裂求解器”，《数学规划计算》，第12卷，第4期，第637–672页，2020年。[29] J. A. Preiss、W. H¨onig、G. S. Sukhatme 和 N. Ayanian，“Crazyswarm：大型纳米四旋翼机群”，载于国际机器人与自动化会议，2017年，第3299–3304页。[30] S. Macenski、T. Foote、B. Gerkey、C. Lalancette 和 W. Woodall，“机器人操作系统2：设计、架构及其实际应用”，《科学·机器人》，第7卷，第66期，2022年。