论 CONGEST 模型中基于阈值的算法检测环的能力

Pierre Fraigniaud[1],Maël Luce[1],和 Ioan Todinca[2]

[1]基础计算机科学研究所（IRIF）、法国国家科学研究中心（CNRS）与巴黎西岱大学，法国[2]奥尔良基础计算机科学实验室（LIFO）、奥尔良大学，法国

arXiv:2304.02360v1 [cs.DC] 5 Apr 2023

摘要

众所周知，对于每一个 $k \geq 2$，C_{2k}-无环性可由通用蒙特卡洛算法在 CONGEST 模型中于 $n^{1-1/\Theta(k^2)}$ 轮次内判定。对于 $2 \leq k \leq 5$，确实存在更快的蒙特卡洛算法，运行 $O(n^{1-1/k})$ 轮次，其方法是对需转发的消息数量给出上界，并在该数量超过某些阈值时中止搜索子程序。我们研究将这些基于阈值的算法扩展用于检测更大环的可能性。我们首先证明，对于每一个 $k \geq 6$，存在包含 $2k$-环的无穷图族，任何基于阈值的算法都无法检测出该环。因此，特别地，C_{12}-无环性与 C_{14}- 无环性均无法由基于阈值的算法判定。尽管如此，我们证明 $\{C_{12}, C_{14}\}$- 无环性仍可由基于阈值的算法判定，其运行 $O(n^{1-1/7}) = O(n^{0.857\cdots})$ 轮次，快于通用算法所需的 $O(n^{1-1/22}) \cong O\left(n^{0.954\ldots}\right)$ 轮次。此外，我们展示了环族的一个无穷集合，使得基于阈值的算法能够对其中每一个 $\mathcal{F}$ 判定 $\mathcal{F}$-无环性。

1 引言

1.1 目标

排除某个固定图族 $\mathcal{F}$ 的图，无论是作为子图、诱导子图、拓扑子图还是 minor，在理论计算机科学中都发挥着重要作用，尤其是在图论以及算法设计与复杂性领域，从标准复杂性和参数化复杂性，到近似算法与精确算法的设计，无不如此。结构图论中的著名例子包括 瓦格纳定理，该定理指出，一个有限图是平面图，当且仅当它不以 K_5 或 $K_{3,3}$ 为 minor；另一个例子是 禁用子图问题，它旨在寻找任意 n 个顶点的图中，在不以给定图 G 为诱导子图的条件下，最多能有多少条边。在算法与复杂性框架中，已知顶点着色问题在无三角形（即不含 C_3）的图上是 NP 难的，但人们已经确定了许多图族 $\mathcal{F}$，对于这些图族，计算不含 $\mathcal{F}$ 中每个图作为诱导子图的图的色数，可以在多项式时间内完成。例如，已知对于至多有六个顶点的图 H，当且仅当 H 是一棵不与 $K_{1,5}$ 同构的森林时，$\{C_3, H\}$-自由图上的顶点着色问题可以在多项式时间内求解；否则则为 NP 难 [2]。另一个近期例子体现了 $\mathcal{F}$-自由图的重要性：图同构问题可以在时间 $n^{\mathrm{polylog}(k)}$ 内，对所有不含任意一个 k 个节点图作为拓扑子图的 n 个节点图进行测试 [13]。

然而，在网络分布式计算领域，人们对 $\mathcal{F}$-无环图仍知之甚少，即使是最基本的情形——必须排除 $\mathcal{F}$ 中的图作为

普通子图（不一定是诱导子图）。事实上，据我们所知，该领域的大多数研究都集中在标准 CONGEST 模型及其变体上。回顾一下，CONGEST 模型是一种用于网络的分布式计算模型：图中的节点执行相同的算法，并按同步轮次依次运行；在每一轮中，每个节点与其每个邻居交换的消息都不得超过 $O(\log n)$ 位（见 [14]）。还要回顾一下，若对于每个输入图 G，以下条件都成立，则称分布式算法 $\mathcal{A}$ 判定图性质 P： G 满足 P，当且仅当 $\mathcal{A}$ 在 G 的每个节点上都接受。判定 H-无环性是探索设计高效拥塞算法的新技术的理想场景。事实上，这个问题本身是局部的，但链路带宽有限，严重限制了每个节点收集距其超过一跳的节点信息的能力。

一个重要的情况是检查是否不存在给定大小的环作为子图。负面结果方面，对于任意 $k \geq 2$，在 CONGEST 中判定 C_{2k+1}-无环性需要 $\Omega(n)$ 轮次，即使使用随机化算法也是如此 [6]。然而，对于任意 $k \geq 2$，都可以通过执行轮数为次线性 的蒙特卡洛算法解决 C_{2k}-无环性。例如，可以在 $O(\sqrt{n})$ 轮内（确定性地）判定 C_4- 无环性 [6]，；并且对于任意 $k \geq 3$，如果 k 是偶数，则 C_{2k}- 无环性的轮复杂度至多为 $O(n^{1-2/(k^2-2k+4)})$，如果 k 是奇数，则至多为 $O(n^{1-2/(k^2-k+2)})$（参见 [9]）。

判定 C_{2k}-无环性的轮复杂度最近得到了改进（见 [4]）：对于 k的较小取值，有一种优雅的算法，对于每个 $2 \leq k \leq 5$，均可在 $O(n^{1-1/k})$轮内运行。对于 $k = 2$， [4, 9] 中的（随机化）算法与 [6]，中的（确定性）算法具有相同的渐近复杂度，即在 $O(\sqrt{n})$ 轮内运行，并且这一复杂度在相差一个对数乘法因子的意义下无法进一步改进 [6]。然而，对于 $k \in \{3, 4, 5\}$，当前已知的判定 C_{2k}-无环性的最佳轮复杂度上界为 $O(n^{1-1/k})$。有趣的是， [4] 中的算法还可以在 $\tilde{O}(n^{1-2/g})$轮内判定网络的围长是否至多为 g。换言之，对于任意给定的 g，该算法都能判定 $\{C_k, 3 \leq k \leq g\}$-无环性。

简而言之， [4] 中的算法基于轻节点和重节点的概念：度至多为 $n^{1/k}$ 的节点是轻节点，否则为重节点。仅由轻节点组成的长度为 $2k$ 的环，可以通过暴力搜索并使用颜色编码 [1]，在至多 $\sum_{i=0}^{k-1} n^{i/k} = \Theta(n^{1-1/k})$ 轮内找到。为了寻找至少包含一个重节点的环，注意到：均匀随机 s 地选取一个节点时， s 是重节点的邻居的概率至少为 $n^{1/k}/n$。因此，如果存在某个 $2k$-环，通过重复实验 $\Theta(n^{1-1/k})$ 次，以常数概率找到属于该环的重节点的一个邻居。算法在某个时刻选取的节点 s ，会从它所有的重邻居处并行启动暴力搜索，每个搜索都使用颜色编码来寻找包含该邻居的环。算法的关键如下：我们证明，对于每个 $k \in \{2, 3, 4, 5\}$ 和每个 $i \in \{1, \ldots, k-1\}$，都存在一个常数阈值 $T_k(i)$，使得如果一个颜色为 i 或 $2k-i$ 的节点必须转发超过 $T_k(i)$ 个由 s 的重邻居启动的搜索，那么该节点可以安全地中止搜索，而不会妨碍算法最终检测到$2k$-环（如果它存在）。由此可知，由随机源点 s 启动的并行搜索可在$O(1)$轮内完成，因此 [4] 中基于“阈值”的算法总共运行 $O(n^{1-1/k})$ 轮。

本文旨在确定，在何种条件下，以及对于哪些图族 $\mathcal{F}$，可以使用基于阈值的算法来判定 $\mathcal{F}$-无环性。

1.2 我们的结果

我们的第一项贡献是一个否定性结果。对于每个 $k \geq 6$，我们构造了一个无限图族，其中任何基于阈值的算法都无法判定 C_{2k}-无环性。也就是说，我们证明，对于 $k \geq 6$，基于阈值的算法必须在某一步转发非常数量的消息，才能保证由随机源 s 发起的并行搜索检测到$2k$-环。更具体地说，我们证明如下。

定理1. 对于每个 $k \geq 6$，存在一个无限的 $\mathcal{G}$ 图族，其中包含唯一的$2k$-环 $C = (u_0, u_1, \ldots, u_{2k-1})$，使得，对于每个 $T \in o(n^{1/6}/\log n)$，基于阈值的算法在 $\mathcal{G}$ 中至少一个 n-节点图中无法检测到 C，如果阈值设置为 T。

换句话说，定理 1表明，对于每个 $k \geq 6$，不存在能够判定 C_{2k}-无环性的高效基于阈值的算法。特别是，既不能通过基于阈值的算法判定 C_{12}-无环性，也不能判定 C_{14}-无环性。然而，我们的第二项贡献表明，确定一个图是否同时不含 C_{12} 和 C_{14} 并非如此。

定理 2. $\{C_{12}, C_{14}\}$-无环性可以由在 $O(n^{1-\frac{1}{7}})$轮次内运行的基于阈值的算法判定。

注意，用于分别检查图是否包含 C_{12} 和是否包含 C_{14}，从而判定 $\{C_{12}, C_{14}\}$-无环性的 [9] 通用算法需要运行 $O(n^{1-\frac{1}{22}}) = O(n^{0.954\cdots})$ 轮次。相比之下，我们的算法只需运行 $O(n^{1-1/7}) = O(n^{0.857\cdots})$ 轮次。注意，证明基于阈值的算法可以在 $O(n^{1-\frac{1}{6}})$ 轮次内判定 $\{C_{10}, C_{12}\}$-无环性相当容易，因为此类算法可以判定 C_{10}-无环性。关键在于，同样得益于定理 1，基于阈值的算法既无法判定 C_{12}-无环性，也无法判定 C_{14}-无环性。

最后请注意，根据构造，基于阈值的算法能够判定 $\mathcal{F}_k$-无环性，对于每个 $k \geq 2$，其中 $\mathcal{F}_k = \{C_{2\ell} \mid 2 \leq \ell \leq k\}$。这引出了一个问题：识别出无限多个更小的环族 $\mathcal{F}$，使得基于阈值的算法能够成功判定$\mathcal{F}$-无环性。我们确定了两个这样的族。

定理3。 令 $k \geq 2$、$\mathcal{F}'_k = \{C_{4\ell} \mid 1 \leq \ell \leq k\}$ 和 $\mathcal{F}''_k = \{C_{4\ell+2} \mid 1 \leq \ell \leq k\}$。$\mathcal{F}'_k$- 无环性和 $\mathcal{F}''_k$-无环性均可分别由运行 $\tilde{O}(n^{1-1/2k})$ 轮次和 $\tilde{O}(n^{1-1/(2k+1)})$ 轮次的基于阈值的算法判定。

由于篇幅有限，该定理的证明放在附录 F 中。

1.3 相关工作

判定给定图 H 的 H-无环性已在 [7], 中得到研究，该文描述了一种算法，对于 k 个节点的图 H，运行轮数为 $\tilde{O}(n^{2-2/(3k+1)+o(1)})$。这一轮复杂度几乎达到了 [9] 中建立的一般下界 $\tilde{\Omega}(n^{2-\Theta(1/k)})$。对于特定图 H，通常当 H 是一个环时，可以突破这一界限。

对于每个 $k \geq 3$，C_k-无环性都可以在 $O(n)$ 轮次内判定（例如参见 [11]）。然而，判定 C_k-无环性的确切轮复杂度在 k 为偶数还是为奇数时差异很大。[6] 证明了，对于 $k \geq 2$，判定 C_{2k+1}-无环性需要$\Omega(n)$ 轮次。尽管如此，对于偶环，已知存在次线性算法。特别地，在 [6] 中，判定 C_4-无环性的轮复杂度被确定为 $\tilde{\Theta}(n^{1/2})$。对于每个 $k \geq 3$ [11]，下界 $\tilde{\Omega}(n^{1/2})$轮次也已知适用于判定 C_{2k}-无环性。判定 C_{2k}-无环性的最佳通用上界为 $\tilde{O}(n^{1-\Theta(1/k^2)})$轮次 [9]。已知有更快的算法，但仅适用于 k 的特定取值。具体而言，对于每个 $k \in \{3, 4, 5\}$，C_{2k}-无环性都可以在 $O(n^{1-1/k})$ 轮次内判定 [4]。三角形检测这一特殊情形，即判定 C_3-无环性，仍是一个广泛未解决的问题。

此外，值得一提的是，人们也研究了在比 congest 更强的模型——拥塞团模型——中的环检测问题。在该模型中，人们已经设计出了高效的算法。具体而言，已有研究表明，可以在 $O(n^{0.158})$ 轮次内判定 C_3-无环性，可以在 $O(1)$ 轮次内判定 C_4-无环性，并且对于任意 $k \geq 5$，可以在 $O(n^{0.158})$ 轮次内判定 C_k-无环性。

感兴趣的读者可参阅 [3]，以获取关于拥塞或类似模型中的子图检测及相关问题的最新综述。

2 预备知识

在本节中，我们回顾用于判定图是否包含给定长度的环作为子图的主要技术，并总结 [4] 中定义的基于阈值的算法。

2.1 子图检测

回顾一下，如果图 H 是图 G 的子图，那么 $V(H) \subseteq V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$。给定一个图 H，若确定性分布式算法 $\mathcal{A}$ 在 CONGEST 模型中以 $R(\cdot)$ 轮次判定 H-无环性，则对于每个 n 节点图 G，只要 $\mathcal{A}$ 在 G 中运行，每个节点都会在 $R(n)$ 轮次后输出“接受”或“拒绝”，并且

$$G \text{ contains } H \text{ as a subgraph} \iff \text{at least one node of } G \text{ rejects.}$$

如果对于每个 n 节点图 G，随机蒙特卡洛算法都判定 H-无环性，则

$$\begin{cases} G \text{ 包含 } H \implies [\ G\ ] \geq 2/3. \\ G \text{ 作为子图 } H \implies \Pr[\text{ 所有节点接受 }] \geq 2/3. \end{cases}$$

事实上，大多数用于判定 H-无环性的算法都是单侧错误的，即它们总是接受 H-无环图，且可能出现的错误仅限于未能检测出 G 中已有的 H 副本。通过将单侧错误算法的执行重复足够多次，可以使错误概率降至任意小。

在 $H = C_{2k}$的情况下，即本文所采用的框架中，一种称为颜色编码 [1], 的标准技术发挥着关键作用，并被用于在各种场景中检测环的许多算法中（参见，例如，[4, 8, 10]）。

色彩编码。令 $G = (V, E)$，且 $W \subseteq V$。为了判定是否存在一个包含 W中某个节点的 $2k$-环，让 G 中的每个节点从 $\{0, \ldots, 2k-1\}$ 中均匀随机选择一种颜色。然后，每个着色为 0 的节点 $w \in W$ 发起一个称为颜色广度优先搜索(k, w)的搜索，将其标识符发送给所有着色为 1 和 $2k-1$的邻居。每个着色为 1 且从一个着色为 0的节点接收到标识符的节点，将该标识符转发给所有着色为 2 的邻居；同时，每个着色为 $2k-1$ 且从一个着色为 0的节点接收到标识符的节点，将其转发给所有着色为 $2k-2$ 的邻居。更一般地，对于每个 $i = 2, \ldots, k-1$，每个着色为 i且从一个着色为 $i-1$ 的节点接收到标识符的节点，将其转发给所有着色为 $i+1$的邻居；并且，对于每个$i = 2k-2, \ldots, k+1$，每个着色为 i且从一个着色为 $i+1$的节点接收到标识符的节点，将其转发给所有着色为 $i-1$ 的邻居。如果一个着色为 k 的节点从一个着色为 $k-1$的邻居以及一个着色为 $k+1$ 的邻居接收到相同的标识符，则它拒绝。

颜色广度优先搜索(k, W)所需的轮次数最多为 $k\,|W|$。此外，如果图中的节点最大度为 Δ，那么轮次数最多为 $O(\Delta^{k-1})$。综上，我们有

$$\#\text{rounds color-BFS}(k, W) = O(\min\{k\,|W|,\ \Delta^{k-1}\}). \tag{1}$$

如果存在一个经过 W 中某个节点的 $2k$-环，那么该环被恰当着色的概率至少为 $\rho = 1/(2k)^{2k}$，因此找到该环的概率至少为 ρ。将此过程重复与$(2k)^{2k}$ 成正比的常数次后，找到该环的概率至少为 $2/3$。

2.2 基于阈值的算法

我们将 [4]中由 $\mathcal{A}^\star$定义的算法称为.....。该算法总结于算法 1中，大量使用了颜色编码。 G 的节点 u 如果deg(u) $\leq n^{1/k}$，则称为轻 节点，否则称为重节点。仅包含轻节点的 $2k$-环 C 称为轻循环，否则称为重循环。

检测轻循环。通过在由轻节点 U （即只有轻节点参与）诱导的 G 的子图 $G[U]$ 中进行颜色编码，很容易检测是否存在轻 $2k$-环。根据式 (1) 和 $\Delta = n^{1/k}$，检测轻循环需要 $O(n^{1-1/k})$ 轮次。如果图中存在轻 $2k$-环，那么某个轻节点会以常数概率拒绝，我们便完成了。

检测重环。为了检测重环， $\mathcal{A}^\star$ 在图 [1] 中均匀随机地选择一个节点 s 。其思路是，如果图中存在一个重 $2k$-环，例如 $C = (u_0, u_1, ..., u_{2k-1})$，其中 u_0 是重的，那么邻居 s 被选中的概率至少为 $n^{-(1-1/k)}$，因为 deg(u_0) $\geq n^{1/k}$。因此，将选择 s 的过程重复 $\Theta(n^{1-1/k})$ 次，就能以常数概率选中 u_0 的一个邻居。对于每次选择 s，目标是在常数轮次内搜索一个 $2k$-环。

选定的节点 s 启动颜色广度优先搜索(k, s)，以确定是否存在经过 s 的 $2k$-环。根据式 (1) 和 $|W| = 1$，这需要 $O(1)$ 轮次。如果检测到 $2k$-环，则某个节点会拒绝，至此算法结束。

因此，我们从现在起假设 s 不属于 a $2k$-环。源节点 s随后向其所有重邻居 W发送一条消息，并且这些邻居中的每一个 w 都会并行启动 color-BFS(k, w)。此时，不能简单地依靠关于 $|W| \leq$ deg(s) 的式 (1) 来界定 color-BFS(k, W)的轮复杂度，因为 s可能具有非恒定的度。在 [4] 中所采用的核心技巧，是为每个节点提供一个阈值，用于规定该节点在 color-BFS 的某一步中可以转发的消息数量。如果要传输的消息数量超过该阈值，则该节点会中止，即停止参与当前的 color-BFS。研究表明，这种基于阈值的方法可能会阻止节点检测到 $2k$-环，但这种情况不会过于频繁；并且如果存在 $2k$-环，则无论如何都将以常数概率检测到它。下面的引理对此进行了总结。

引理 *1* （[4]） 。设 $C = (u_0, u_1, ..., u_{2k-1})$ 是 G 中的一个 $2k$-环，其 u_0 为重节点，且在 C 的节点中具有最大度。对于每个 $k \in \{2, 3, 4, 5\}$，存在一个常数 $\alpha_k > 0$，以及常数阈值 $T_k(i)$、 $i = 1$、...、$k - 1$，使得即使当颜色为 i 或 $2k - i$ 的节点在第 i 步颜色广度优先搜索 *color-BFS*(k, W) 中，从 $s \in N_G(u_0)$ 的重邻居集合 W 发起的搜索生成大于 $T_k(i)$ 的拥塞时终止该搜索，对于 u_0 的邻居 s 中至少比例为 α_k 的节点，仍然能够找到环 C，除非 s 本身属于某个 $2k$-环。

也就是说， $\mathcal{A}^\star$ 设定阈值（取决于 k）；如果由随机源 s 的所有重邻居 W 并行发起的颜色广度优先搜索 color-BFS(k, W) 所生成的通信量超过这些阈值，则搜索终止。然而， [4] 中证明了，如果存在 $2k$-环，这并不会阻止找到它。

算法 $\mathcal{A}^\star$ 总结见算法 1。每次颜色广度优先搜索都包含 $\sim(2k)^{2k}$ 次颜色编码执行，以确保以至少 $2/3$ 的概率检测到 $2k$-环。由于 $G[U]$ 的最大度为 $n^{1/k}$，指令 1 在 $\Theta(n^{1-1/k})$ 轮次内完成。如果存在轻量级 $2k$-环，它就能以 $2/3$ 的概率找到该环。对于每个常数 $k \leq 5$，指令 4 在 $O(1)$ 轮次内完成；若 s 属于某个 $2k$-环，则它能以 $2/3$ 的概率找到该环。指令 5 也

[1]这可以通过让每个节点在 $\{1, \ldots, n^3\}$ 中均匀随机地选择一个整数值来实现；值最小的节点 s 即为所选节点。高概率下，该节点是唯一的。

算法 1 通过阈值算法 $\mathcal{A}^\star$ 从 [4]判定 C_{2k}-无环性

在 $G[U]$ 中进行颜色广度优先搜索$(k,\ U)$ ▷ $U = \{u \in V(G) \mid \deg(u) \leq n^{1/k}\}$

对于 $i = 1$ **至** $\Theta\left(n^{1-1/k}\right)$ **执行**

  $s \leftarrow$ G中的随机节点 ▷ $W = \{v \in N_G(s) \mid$度$(v) > n^{1/k}\}$

  颜色广度优先搜索(k, s)

  颜色广度优先搜索(k, W)，阈值为 $T_k(i)$ $i \in \{1, \ldots, k-1\}$

结束循环

能在 $O(1)$ 轮次内完成，这同样得益于引理 1 中指定的阈值。如果存在一个重型 $2k$-环，且 s 不属于任何 $2k$-环，那么该重型 $2k$-环就能以 $2/3$ 的概率被找到。总体而言，$\mathcal{A}^\star$ 在 $O(n^{1-1/k})$ 轮次内完成，并以 $2/3$ 的概率成功。

在下一节中，我们将证明，诸如引理 1 中所规定的那些阈值 $T_k(i)$，$i = 1, \ldots, k-1$ 无法为 $k \geq 6$ 设定。

3 基于阈值的算法的局限性

本节完全致力于定理1 的证明，其核心是证明不可能为 $k \geq 6$设置一个常数 $T_k(k-3)$。为此，我们展示了一类图 $\{G_k \mid k \geq 6\}$，使得每个 G_k 都不包含任何轻循环 C_{2k}，并且恰好包含一个重环 C_{2k}。对于 $k \geq 6$ 的 G_k 构造分为两种情况：一种是适用于所有 $k \geq 7$的一般构造，另一种是针对 G_6 的具体构造。我们从一般情形开始证明。

设 $k \geq 7$。图 G_k 由以下节点组成（见图 1），对于 $N \geq 1$ ：

- $2k$ 节点是唯一的 $2k$-环 $C^\star = (u_0, u_1, ..., u_{2k-1})$;
- 集合 $S = \{s^p, p \in \{1, \ldots, N\}\}$ 的 N邻居的 u_0;
- 集合 $W = \{w^q_{k-4}, q \in \{1, \ldots, N\}\}$ 的 N邻居的 u_{k-3};
- 对于 $(p, q) \in \{1, \ldots, N\}^2$，$\{w^{p,q}_j,\ j \in \{0, \ldots, k-5\}\}$ 从节点 s^p 到 w^q_{k-4} 中节点的路径上的节点集合;

  对于 $(p, q) \in \{1, \ldots, N\}^2$，集合 $\{v^{p,q,r}_0,\ r \in \{1, \ldots, N\}\}$ 节点 $w^{p,0}{}^q$ 的私有邻居（添加这些节点是为了确保 $w^{p,0}{}^q$ 很重）；
- 对于（p，q）$\in \{1, \ldots, N\}^2$，集合 $\{v^{p,q,r}_{k-5}:\ r \in \{1, \ldots, N\}\}$ 节点 $w^{p,\ k-5}{}^q$的私有邻居（如上所述，这使节点 $w^{p,\ k-5}{}^q$ 成为重节点）。

G_k 中的节点数为 $n = \Theta\left(N^3\right)$。

以下结果的证明见附录 A。

引理 2. 对于每个 $k \geq 7$，$C^\star$ 都是图 G_k 中唯一的 $2k$-环，并且是一个重环。

根据引理 2，只有当算法在 $N_{G_k}(C^\star)$ 中选择随机源点 s 时，才能检测到 G_k 中的 $2k$-环，也就是说，它必须选择 $s \in S \cup W \cup C^\star$。此外，如果 $s \in S \cup W$，那么 s不属于任何 $2k$-环，因此 s 将从它的每个重邻居处开始搜索 C_{2k}。

引理 3。令 $T \in o(n^{1/3}/\log n)$，并在基于阈值的算法中设置 $T_k(k-3) = T$。如果 $s \in S$（分别地，$s \in W$），则 u_{k-3}（分别地，u_0）在来自重节点的搜索阶段转发至多 T 条消息的概率为$\exp(-\Theta(n^{1/3}))$。

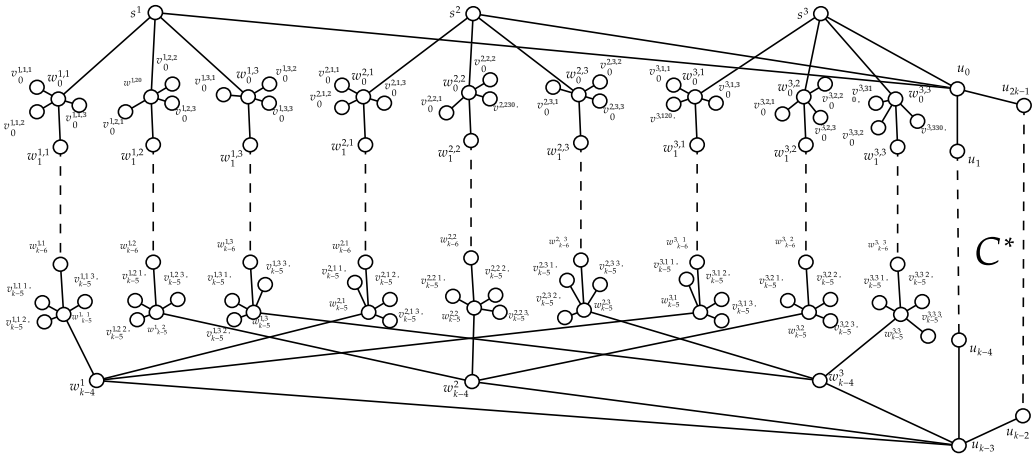

图 1：图 G_k 用于 $k \geq 7$ 和 $N = 3$。

证明。根据 G_k的对称性， $S \cup \{u_0\}$ 和 $W \cup \{u_{k-3}\}$ 的作用是相同的。因此，我们只需对 $s \in S$证明该引理，即对某个 $p \in \{1, \ldots, N\}$证明 $s = s^p$。对于每个 $q \in \{1, \ldots, N\}$，令X_q为以下伯努利随机变量，并假设每个节点从 $\{0, \ldots, 2k-1\}$中均匀随机地选择一种颜色。若对于每个$i \in \{0, \ldots, k-5\}$， $w^{p,}_{i}{}^{q}$被着色为 i，且 w^q_{k-4}被着色为 $k-4$，则称路径 $w^{p,}_{0}{}^{q}, \ldots, w^{p,}_{k-5}{}^{q}, w^q_{k-4}$着色良好。我们定义

$$X_q = \begin{cases} 1 & \text{if the path } (w_0^{p,q}, \ldots, w_{k-5}^{p,q}, w_{k-4}^q) \text{ is well-colored;} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令 $X = \sum_{q=1}^{N} X_q$ 为一个随机变量，表示 u_{k-3} 必须转发的、与 id(u_0)不同的标识符数量，也就是满足$X_q = 1$的所有节点 $w^{p,}_{0}{}^{q}$ 的标识符。 X 服从参数为 N 和 $r = \left(\frac{1}{2k}\right)^{k-3}$的二项分布，因此其期望为$E(X) = Nr$。由于每个节点 $w^{p,}_{0}{}^{q}$ 都有一条长度为 $k-3$ 的唯一路径通往节点 u_{k-3}，我们得到 fong 得到 that

$$\begin{aligned} \Pr[X \leq T] &= \sum_{t=0}^{T} \Pr[X = t] = \sum_{t=0}^{T} \binom{N}{t} r^t (1-r)^{N-t} \\ &\leq \sum_{t=0}^{T} N^t \, r^t e^{(N-t)\ln(1-r)} \leq (T+1)\, N^T \, r^T \, e^{N\ln(1-r)} \\ &= N^T e^{-\Theta(N)}. \end{aligned}$$

因此， u_{k-3}至多需要转发 T条消息的概率为 $O(N^T e^{-\Theta(N)})$。如果$T = o(N/\log N) \simeq o(n^{1/3}/\log n)$，那么该概率渐近等于 $\exp(-\Theta(n^{1/3}))$。

□

为了完成关于 $k \geq 7$ 的定理 1 的证明，请注意，Even 通过将所有阈值固定为$T \in o(n^{1/3}/\log n)$，算法 $\mathcal{A}^\star$ 几乎必然无法检测到唯一的（重）环 $C^\star$。事实上，当在 S 中选取顶点 s （或者对称地，在 W中选取 s ）时，该算法成功的概率为 $\exp(-\Theta(n^{1/3}))$，因为顶点 u_{k-3} 几乎必然中止。检测该环的另一种可能性是算法直接在 $C^\star$上选取 s，而它仅包含 $2k$ 个顶点，因此成功可能性为 $O(1/n)$。因此，尽管该算法进行了 $\tilde{O}(n^{1-1/k})$ 次对 s的独立随机选择，成功的概率仅为 $\tilde{O}(n^{-1/k})$。

该 s 具体情形 $k = 6$ 在附录 B 中处理，从而完成定理 1 的证明 .

4 判定 $\{C_{12}, C_{14}\}$-无环性

本节完全致力于定理 2 的证明。我们主要依赖阈值算法本身，并做如下轻微修改，以简化分析。

备注。 为了展示阈值 $T_{2k}(i)$、 $1 \leq i \leq 2k-1$，方便起见，假设算法不是重复 $O(n^{1-1/k})$ 次随机选择 s，然后针对每个选定的 s，重复$\sim(2k)^{2k}$ 次随机选择颜色（用于颜色广度优先搜索），而是按如下方式执行：外层循环重复 $\sim(2k)^{2k}$ 次随机颜色分配，内层循环重复 $O(n^{1-1/k})$次随机选择 s （针对每个 $\sim(2k)^{2k}$ 颜色分配）。事实上，通过进一步假设随机颜色的取值范围为 $\{-1, 0, \ldots, 2k-1\}$，可以使表述更加简单。额外的颜色 -1 仅由 s使用，并且 s 仅在 s 具有随机颜色 -1的条件下启动颜色广度优先搜索(W)。这些改动都不会影响算法的性能，轮复杂度至多相差一个常数因子。

算法首先检查是否存在轻量12-环或轻量14-环。这在 $O(n^{6/7})$轮次内完成，通过仅在轻节点上运行的并行彩色广度优先搜索（见第2.2节）。为检测重环，算法按照阈值算法进行，重复选择随机节点 s。对于每次选择，所选节点 s 通过执行两系列颜色广度优先搜索(s)来检查其是否属于某个12-圈或某个14-圈，一系列用于检测可能经过 s的12-圈，一系列用于检测可能的14-圈。如果未检测到此类环，则 s 按如下方式继续。

寻找 14-环。节点 s 从其所有重邻居的集合 W 发起颜色广度优先搜索(W)，并采用适当的阈值 $T_7(i)$、 $1 \leq i \leq 6$，这些阈值将在后文说明。这里的关键在于，如果算法通过检查是否存在12-环和14-环来推进。通过检查这两种长度，我们将能够确立一个类似于引理 1 的结果：也就是说，如果图 G G中存在一个 14-环，例如 $C = (u_0, \ldots, u_{13})$，其中 u_0 是重节点，且在 C中的节点里度最大，那么就存在一个常数 $\alpha > 0$，使得即使颜色为 i 或 $14-i$ 的节点在颜色广度优先搜索(W)的第 i步中，从集合 W 发起的搜索过程中，一旦产生的拥塞大于 $T_7(i)$就中止搜索，对于至少占 u_0的邻居 s 的 α 比例，仍能以至少 $2/3$的概率找到环 C 。换言之，如果某个节点在此阶段拒绝，则原因是存在一个 12-环，或存在一个 14-环。另一方面，所有节点都在此阶段接受，只能对不存在 14-环提供（统计意义上的）保证，却无法提供多少关于不存在 12-环的信息。

寻找 12-圈。再次，节点 s 启动颜色广度优先搜索(W)，不过这次是寻找 12-圈，只需使用阈值 $T_6(i) = 1$，适用于所有 $i = 1, \ldots..5$。这里的关键在于，假设该图是 C_{14}-自由的，那么阈值 1 就足够了。在良彩色重 12-圈中，任意一条边上至多只会有一条消息通过。这个事实很容易证明，因此证明的大部分内容都在于证明寻找 14-圈时这些阈值的存在性。

为了设定 $1 \leq i \leq 6$的值 $T_7(i)$，我们定义 $T_7(0) = 1$。于是我们的构造是归纳的，并且对于 $i > 0$，我们将针对适当的常数 $f(i)$设定 $T_7(i) = f(i) \cdot T_7(i-1)$。假设该图包含一个14-圈，记作 $C^\star = (u_0, u_1, \ldots, u_{13})$，其中 u_0 在 $C^\star$中具有最大度，并且对于每一个 $i = 0, \ldots, 13$，节点 u_i 被着以颜色 i。从现在起，我们将只处理节点 $u_0, u_1, \ldots, u_7$。根据对称性，同样的论证也适用于节点$u_0, u_{13}, \ldots, u_7$。在进一步定义该证明的设定之前，请回顾，如前所述，

节点 s 的 $O(n^{1-1/k})$节点绘制是在颜色取自 $\{-1, 0, \ldots, 13\}$的给定图的着色上完成的，并且只有被选中的、着有颜色 -1 的节点 s 才会调用颜色广度优先搜索(W)。

下面的引理是通用的，因为它适用于所有 $k \geq 2$。请注意，路径 $s, w_0, \ldots, w_{i-1}, u_i$从节点 s 到节点 u_i 是着色良好的，当且仅当 s 着色为 -1， u_i 着色为 i，并且对于每个 j =0, …, $i-1$，节点 w_j通过颜色编码着色。

引理4。设 $k \geq 2$ 为整数。对于每个 $i \in \{1, \ldots, k-1\}$，令 ρ 为从 s 到 u_i的点不相交的良着色路径的最大数量。如果 s 从其所有被着色为 0 的重邻居发起颜色广度优先搜索(W)，则 u_i 不会从被着色为 $i-1$ 的节点接收到超过 $\rho \cdot T_k$ 个标识符。

证明。令 S 为从 s 到 u_i 的一组 ρ 条节点不相交的良着色路径。令 $w_0 \in W$ 为 s 的一个着色为0的重邻居，并假设 id(w_0) 已达到 u_i。由此可知，存在一条长度为 i 、从 w_0 到 u_i 的良好着色路径 P。路径 P 必须与 S 中的某条路径$P' = \{w'_0, \ldots, w'_{i-1}\}$ 相交（甚至可能是 $P = P'$）。因此，id(w_0) 包含在节点 w'_{i-1}可能转发给 u_i 的至多 T_k（$i-1$）个标识符之中。因此， u_i 在 color-BFS(W) 期间接收到的标识符数量不超过 $\rho \cdot T_k$（$i-1$）。 □

给定 $f\colon \{1, \ldots, 6\} \to \mathbb{N}$稍后确定，我们定义，对于每个 $i \in \{1, \ldots, 6\}$，节点的集合

$$\mathsf{B}(i) = \{s \in N_G(u_0) \mid (\mathrm{color}(s) = -1) \wedge (s \notin C_{12} \vee C_{14}) \wedge (\rho(s) > f(i))\},$$

其中， ρ（s）表示图中从 s 到节点 u_i 的点不相交的良着色路径的最大数量。根据引理 4，若 u_0 的某个邻居的颜色为 -1，且不属于任何 12-环或 14-圈，并导致 u_i 接收到多于 T_7（i）个标识符，则该邻居位于 B（i）中。因此，这组节点表示 u_0 的坏邻居；只要选中其中任意一个邻居，我们就无法检测到任何环。

本节剩余部分将证明，坏节点仅占 u_0 的邻居的一小部分。因此，只要对 s 进行足够多次选择，选中$good$ u_0 的邻居 s 的概率仍为 $\Omega(n^{-6/7})$；选择该邻居不会导致拥塞，因此可以检测到环。参数 $f(i)$ 将算法使用的参数 $T_7(i)$ 与我们不希望选作源点 s的节点集合联系起来。形式上，我们希望证明以下结果。

命题 1。令 f（1） $= 60$、 f（2） $= f$（3） $= 10$、 f（4） $= f$（5） $= 5$，以及 f（6） $= 6$。在此设定下，我们得到 $\left|\bigcup_{i=1}^{6} \mathsf{B}\ (\ i\ )\ \right| \leq \frac{35}{72}$ 度（ u_0） $+ 3$。

由命题 1 中定义的函数 f 得到的阈值为：

$$\begin{array}{lll} T_7(1) = 60 & T_7(2) = 600 & T_7(3) = 6\,000 \\ T_7(4) = 30\,000 & T_7(5) = 150\,000 & T_7(6) = 900\,000 \end{array}$$

为证明命题 1，我们的策略是分别将每个 |B(i)| 界定为 u_0 的度的一个比例（对于 $i = 1$、 2、 3），或界定为一个常数（对于 $i = 4$、 5、6）。现在让我们依次考察$i = 1$、.....、 6 的取值。

4.1 情形 $i = 1$。

我们的目标是界定 |B(1)|，给定 $f(1) = 60$。为实现这一目标，我们将证明，当选取一个节点 $s \in$B(1) 时，其标识符可以到达 u_1 的、颜色为 0 的节点，相对于 B(1) 本身而言必须足够多。否则，将出现一个涉及 B(1) 中节点的 12-圈，这与坏节点集合的定义相矛盾。

引理 5. 如果 $f(1) \geq 60$ 则 $|\mathsf{B}(1)| \leq \frac{1}{4}\deg(u_0)$.

证明。令 W_0 表示节点集合，其中的节点 $x \neq u_0$ 的颜色为 0，且 x 是 B(1) 中某个节点的重邻居，也是 u_1 的邻居。这意味着，对于任意被选中的 B(1) 节点 $s \in$ ，它接收到的标识符 u_1 是 u_0 以及 W_0 中节点的标识符。接下来考虑由 B(1) 中的节点和 W_0 中的节点构成的二分图 H ，以及 B(1) 与 W_0 之间的边。令 H' 为通过迭代删除度数至多为 11 的所有节点而从 H 得到的子图。若 H' 非空，那么，由于其所有顶点的度数至少为 12，我们可以从 H' 中任意一个顶点出发构造一条长度为 11 的路径。由于 H' 是二分图，这条路径的两个端点要么都在 B(1) 中，要么都在 W_0 中，这意味着它们与 u_0 或 u_1 相连，从而与该路径构成一个 12-圈。这不可能成立，因为这意味着 B(1) 中有些节点处于一个 12-圈中。因此， H' 为空。由此可得，

$$60 \cdot |\mathsf{B}(1)| \leq f(1) \cdot |\mathsf{B}(1)| \leq |E(H)| < 12\,(|\mathsf{B}(1)| + |W_0|),$$

其中，第二个不等式源于 B(1) 中任意节点在 H 中的度都大于 $f(1)$，第三个不等式源于我们反复移除 H 中度至多为 11 的节点后，所有节点都已被移除。由此得到 $|W_0| > 4|\mathsf{B}(1)|$。根据我们的假设， u_0 在 $C^\star$ 中的最大度为 u_0，于是 $\deg(u_0) \geq \deg(u_1) \geq |W_0| \geq 4\,|\mathsf{B}(1)|$。

□

4.2 情形 $i = 2$。

为了证明 $i = 2$ 以及 $i > 2$ 的坏节点数量上界，我们使用以下引理，该引理允许我们假设从 B(i) 中的不同节点到 u_i 存在点不相交的良着色路径。

引理 *6.* 令 $b \geq 1$，且令 U为一组节点。如果 $f(i) \geq (b-1)i + |U|$，那么要么 $|B(i)| < b$，要么，对于任意 $c \in \{0, \ldots, b-1\}$、任意节点 s^1、…、 $s^c \in B(i)$、任意由 $\mathcal{C}$条从 $B(i)$到 u_i且不与 U相交的 c点不相交的良着色路径组成的集合，以及任意 $s \in B(i) \setminus \{s^1, \ldots, s^c\}$，存在一条不与 U 或 $\mathcal{C}$中的任何路径相交的良好着色路径 P。

证明。令 $\mathcal{C} = \{P^j = (s^j, w_0^j, \ldots, w_{i-1}^j) \mid j = 1, \ldots, c\}$。从任意节点$s \in$ B(i)到 u_i 的良好着色路径不会经过 B(i) 中的任何其他节点，因为坏节点的颜色为 -1。不过，这样的路径可能包含 U 中的某些节点，或 $\mathcal{C}$ 中路径上的某些节点。此类节点的总数少于 $ci + |U|$。由于 $f(i) \geq ci + |U|$，任意节点 $s \in$B(i) $\setminus \{s^1, \ldots, s^c\}$ 都有至少 $ci + |U| + 1$ 条点不相交的良着色路径通往 u_i。因此，存在一条从 s 到 u_i 的良好着色路径，它不包含 U 中的任何节点，也不包含 C 中路径上的任何节点，正如所声称的那样。

□

为了求出 B(2) 和 B(3) 大小的上界，我们采用与 $i = 1$ 情况类似的策略。新颖之处在于，分别考虑从 B(i) 中的节点到 u_i 的点不相交路径的每种颜色，并证明这些路径不能在所考虑颜色的节点处汇合，否则 B(i) 中的节点就会出现在 12-环或 14-圈中。

引理 7。 如果 $f(2) \geq 10$ 则 $|\mathsf{B}(2)| \leq \frac{1}{9}\deg(u_0) + 2$。

证明。 我们称从B(i)到 u_i 在颜色 j 处合并的两条良着色路径满足以下条件： (1) 在颜色 j之前它们的节点不相交，并且 (2) 它们使用相同的颜色为 j 的节点。我们首先考虑在颜色 1 处合并的路径。

断言1. 如果 $f(2) \geq 6$, $|\mathsf{B}(2)| \geq 3$，并且存在两个不同的节点 $s^1, s^2 \in \mathsf{B}(2)$，其路径在颜色 *1* 处合并，则其中一条路径经过 u_0。

主张的证明。为了进行逆否命题，假设B(2) 中存在两个不同的节点 s^1, s^2，它们分别有良着色路径 $P^1 = (s^1, w_0^1, x_1)$和 $P_z = (s^2, z_0, x_1)$，通向在颜色 1 处合并的 u_2，其中有 $w_0^1 \neq u_0$ 和 $z_0 \neq u_0$。然后，通过将引理 6应用于 $b = 3$和 $U_1 = \{u_0, z_0\}$，我们得到：如果 $|\mathsf{B}(2)| \geq 3$，那么（1）存在一条良好着色路径 $P^2 = (s^2, w_0^2, w_1^2)$ 通向 u_2，且不与 $U_1 \cup P^1$相交；（2）对于所有 $s^3 \in \mathsf{B}(2) \setminus \{s^1, s^2\}$，存在一条良好着色路径 $P^3 = (s^3, w_0^3, w_1^3)$ 通向 u_2，且不与 $U_1 \cup P^1 \cup P^2$相交。因此，

$$(u_0, s^1, w_0^1, x_1, z_0, s^2, w_0^2, w_1^2, u_2, w_1^3, w_0^3, s^3)$$

是一个12-圈（见图2-右侧），这与 $s^1, s^2, s^3 \in \mathsf{B}(2)$相矛盾。这意味着，除非其中一条路径经过 u_0，否则 B(2) 中的节点不能拥有在颜色 1 处合并的路径。$\diamond$

我们现在考虑在颜色 0 处合并的路径。

断言 2. 令 s^1、$s^2 \in \mathsf{B}(2)$ 满足 $s^1 \neq s^2$，并令 $x_0 \neq u_0$，使得 s^1 具有一条良好着色路径$P^1 = (s^1$、x_0、$w_1^1)$通往 u_2，且 $s^2 \in N(x_0)$。若 $f(2) \geq 8$，则不存在两个不同的节点s^3、$s^4 \in \mathsf{B}(2) \setminus \{s^1, s^2\}$，其路径在一个颜色为 *0* 且不同于 u_0 和 x_0 的节点处合并。

主张的证明。为推出矛盾，假设存在 $s^3, s^4 \in \mathsf{B}(2) \setminus \{s^1, s^2\}$，它们分别有良好着色路径 $P^3 = (s^3, y_0, w_1^3)$ 和 $P_y = \{s^4, y_0, w_1^3\}$ 通向 u_2，并在颜色 0 处与 $y_0 \neq u_0, x_0$合并。将引理 6 应用于 $b = 4$和 $U = \{u_0, x_0, y_0\}$，可得，若$|\mathsf{B}(2)| \geq 4$，则存在一条良好着色路径 $P^4 = (s^4, w_0^4, w_1^4)$ 通向 u_2，且不与$U \cup P^1 \cup P^2 \cup P^3$相交。因此，

$$(u_0, s^1, x_0, s^2, w_0^2, w_1^2, u_2, w_1^4, w_0^4, s^4, y_0, s^3)$$

是一个12-圈（见图2-左），这与 $s^1, s^2, s^3, s^4 \in \mathsf{B}(2)$这一事实相矛盾。这意味着B(2)中的节点 $\setminus \{s^1, s^2\}$ 不能有通向 u_2 并在任何着色为0且不同于 u_0 或 x_0的节点处汇合的良着色路径。$\diamond$

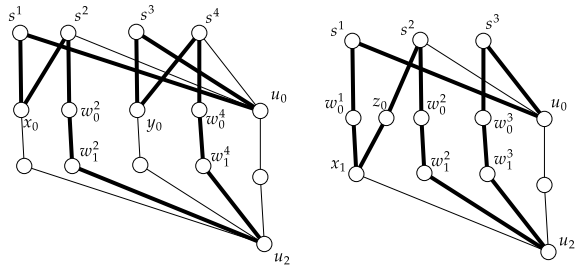

图2：粗体环是每当 B(2) 中的节点合并路径时出现的 12-圈。

最终，通过结合断言1和断言 2 的不可能性结果，可能出现两种情况。第一种情况是，断言 2中定义的节点 s^1 和 s^2 不存在，并且B(2) 中任意两个节点 $s, s' \in$ 无法将其良好着色路径合并到 u_2，除非在 u_0 中。由于B(2)中的每个节点都至少有 $f(2) + 1$ 条点不相交的良着色路径通往 u_2。丢弃（如果存在）经过 u_0的那一条后，我们仍有 $f(2)$条路径不会与从 B(2)到 u_2的任何其他良着色路径合并。因此，$f(2) \cdot |\mathsf{B}(2)| \leq \deg(u_2)$。

另一种情况是，如断言 2 中所述，节点 s^1 和 s^2 确实存在。在这种情况下，任意其他两个节点 $s, s' \in$ B(2)都无法将它们的良好着色路径合并至 u_2，除非经过 u_0 或 x_0。舍弃经过这两个节点的路径后，B(2)中的任意节点 $s \in$ 仍至少有$f(2) - 1$ 条路径，这些路径不会与从 $\mathsf{B}(2) \setminus \{s^1, s^2\}$ 到 u_2的任何其他良好着色路径合并。由此可得

$$(f(2) - 1) \cdot (|\mathsf{B}(2)| - 2) \leq \deg(u_2).$$

因此，在所有情况下，我们都有 $(|B(2)| - 2)(f(2) - 1) \leq \deg(u_2) \leq \deg(u_0)$, 这就证明了引理 7。 □

4.3 情形 $i = 3$。

我们证明，B(3) 中的节点在到达 u_3 之前，其路径不可能合并（见附录 C 中的证明）。

引理 8。 如果 $f(3) \geq 10$ 那么 $|B(3)| \leq \frac{1}{8}\deg(u_0)$。

4.4 情况 $i \in \{4, 5, 6\}$。

对于 $i = 4$、5、6，当 $f(i)$ 的取值满足引理 6 的陈述中的不等式时，$B(i)$ 中仅仅存在一个或两个节点是不可能的，因为这样的节点会出现在一个 12-环或 14-圈中。下文将对此加以说明（见附录 D 中的证明）。

引理 9。 以下结论成立：

- 如果 $f(4) \geq 5$ 那么 $|B(4)| \leq 1$。
- 若 $f(5) \geq 5$ 则 $B(5) = \varnothing$。
- 如果 $f(6) \geq 6$ 那么 $B(6) = \varnothing$.

命题1直接由引理 5 和7-9 得出。由于对于每个 $i \in \{1, \ldots, 6\}$，$T_7(14 - i) = T_7(i)$ 为 $|B(14 - i)|$ 导出的上界与为 $|B(i)|$ 导出的上界相同，我们得到 $\left|\bigcup_{i\in\{1,\ldots,13\}\setminus\{7\}} B(i)\right| \leq \frac{35}{36}\deg(u_0)+6$。由此可得，$\left|N(u_0)\setminus\bigcup_{i\in\{1,\ldots,13\}\setminus\{7\}} B(i)\right| \geq \frac{1}{36}\deg(u_0)$ — — 6. s B i 。因此，u_0（不属于任何()）的 良好邻居数量至少是 $\deg(u_0)$ 的一个常数比例。这意味着，在进行 $\Theta(n^{6/7})$ 次选择 s 的重复操作后，$N(u_0)$中一个 $\setminus\bigcup_{i\in\{1,\ldots,13\}\setminus\{7\}} B(i)$内被 -1 着色的节点将以至少2/3 的概率被选中。根据前述引理，该节点将导致拒绝，从而检测出一个 12-环或 14-圈。

4.5 寻找 a C_{12}。

此时，我们可以假设图中不存在 14-圈，因为如果存在，算法之前就会拒绝。因此，我们假设存在一个着色正确的 12-圈$C^\star = \{u_0, \ldots, u_{11}\}$，其中 u_0 是一个重节点。于是，通过为每个 $i = 1$固定 $T_6(i) =$1，....., 5， u_6 将拒绝。事实上，回想一下，存在 $\Omega(n^{1/6})$ 个邻居u_0 被着色为 -1。因此，通过执行 $O(n^{6/7})$轮迭代，选中一个被着色为 -1 的 $s \in N(u_0)$的概率至少为 $2/3$。每当选中这样一个节点 s 时， u_0 就会发送其标识符。假设 u_i 是 $C^\star$ 中第一个收到 2 个标识符的节点。那么，根据引理 4，这些标识符中有一个来自路径 $w_0, w_1, ..., w_{i-1}$，该路径与 $\{u_0, \ldots, u_{i-1}\}$节点不相交。因此，$(s, w_0, w_1, ..., w_{i-1}, u_i, u_{i+1}, ..., u_{11}, u_0)$ 是一个 14-圈，矛盾，由此完成定理 2 的证明。

注：附录 E 中给出了一个在 $O(n^{1-1/6})$ 轮次内判定 $\{C_{10}, C_{12}\}$-无环性的阈值算法。

5 结论

正如 [4], 中所采用的那样，基于阈值的方法很适合用于设计高效的 CONGEST 算法，以判定任意 $k \geq 2$ 的 C_{2k}-无环性。该方法已成功应用于 $k \in \{2, \ldots, 5\}$，由此得到的算法可在 $O(n^{1-1/k})$ 轮次内判定 C_{2k}-无环性。我们已经证明，直接将基于阈值的方法用于 $k \geq 6$ 是行不通的。

尽管如此，我们也证明了，即使基于阈值的算法无法在相同的轮复杂度内判定 C_{12}-无环性或 C_{14}-无环性，基于阈值的方法仍可用于设计算法，在 $n^{1-\frac{1}{7}}$ 轮内判定 $\{C_{12}, C_{14}\}$-无环性。我们不知道这只是一个特例，还是说存在无穷多个满足 $k > k'$ 的数对 $(k,\ k')$，使得基于阈值的算法能够在 $O(n^{1-1/k})$ 轮内判定 $\{C_{2k'}, C_{2k}\}$-无环性。

迄今为止，已知最好的通用算法，也就是适用于所有 $k \geq 2$ 的算法，能够在 $n^{1-1/\Theta(k^2)}$ 轮内判定C_{2k}-无环性 [9], ；而一般情况下能否做到更好，仍是一个开放问题。实际上，对于所有 $k \geq 2$，判定 C_{2k}-无环性的轮复杂度或许恰好是 $\Theta(n^{1-1/k})$，但这仅仅是猜测。

致谢： 作者感谢 Pedro Montealegre 和 Ivan Rapaport 在 [4] 之前就基于阈值的算法的能力与局限进行了富有成效的初步讨论。

参考文献

[1] Alon, N., Yuster, R., Zwick, U.：颜色编码。《ACM期刊》**42**(4), 844–856 (1995)[2] Broersma, H., Golovach, P.A., Paulusma, D., Song, J.：多项式时间内确定无三角形且无 2P3 的图的色数。《理论计算机科学》**423**, 1–10 (2012)[3] Censor-Hillel, K.：分布式子图查找：进展与挑战。arXiv 预印本 arXiv:2203.06597 (2022)[4] Censor-Hillel, K., Fischer, O., Gonen, T., Gall, F.L., Leitersdorf, D., Oshman, R.：用于围长、环和小型子图的快速分布式算法。载于：第34届分布式计算国际研讨会（DISC）。LIPIcs，第179卷，第33:1–33:17页。Schloss Dagstuhl - Leibniz信息学中心 (2020)[5] Censor-Hillel, K., Kaski, P., Korhonen, J.H., Lenzen, C., Paz, A., Suomela, J.：拥塞团中的代数方法。载于：第34届ACM分布式计算原理研讨会（PODC）。第143–152页 (2015)[6] Drucker, A., Kuhn, F., Oshman, R.：论拥塞团模型的能力。载于：第33届ACM分布式计算原理研讨会（PODC）。第367–376页 (2014)[7] Eden, T., Fiat, N., Fischer, O., Kuhn, F., Oshman, R.：用于检测小型团和偶环的亚线性时间分布式算法。《分布式计算》**35**(3), 207–234 (2022)[8] Even, G., Fischer, O., Fraigniaud, P., Gonen, T., Levi, R., Medina, M., Montealegre, P., Olivetti, D., Oshman, R., Rapaport, I., Todinca, I.：关于分布式性质测试的三篇札记。载于：第31届分布式计算国际研讨会（DISC）。LIPIcs，第91卷，第15:1–15:30页。Schloss Dagstuhl - Leibniz信息学中心 (2017)[9] Fischer, O., Gonen, T., Kuhn, F., Oshman, R.：分布式子图检测的可行性与不可能性。载于：第30届算法与体系结构并行性研讨会（SPAA）。第153–162页 (2018)[10] Fraigniaud, P., Olivetti, D.：环的分布式检测。《ACM并行计算汇刊》**6**(3), 12:1–12:20 (2019)[11] Korhonen, J.H., Rybicki, J.：广播拥塞中的确定性子图检测。arXiv 预印本 arXiv:1705.10195 (2017)[12] Kővári, P., T Sós, V., Turán, P.：关于 Zarankiewicz 问题。载于：Colloquium Mathematicum。第3卷，第50–57页。波兰科学院 (1954)[13] Neuen, D.：排除小型拓扑子图的图的同构测试。载于：第33届ACM离散算法研讨会（SODA）。第1411–1434页 (2022)[14] Peleg, D.：分布式计算：一种局部性敏感方法。SIAM (2000)

附录

引理2的证明

我们可以将 G_k 视为加权图 G_k，其边权如下（见图 3）：

- 对于每个 $p \in \{1, \ldots, N\}$， u_0 与 s^p 之间的边权重为 1；同样，对于每个$q \in \{1, \ldots, N\}$，u_{k-3} 与 w_{k-4}^q 之间的边权重为 1；
- G_k 中包含节点 $w^{p,q}_{j}$ $(p, q) \in \{1, \ldots, N\}^2$ 和 $j \in \{0, \ldots, k-5\}$的所有部分，都替换为完全二分图 $K_{N,N}$ ，其划分为 S 和 W，边权为 $k-3$；
- 路径 $u_0, \ldots, u_{k-3}$ 替换为两条平行边 e_1 和 e_2，其权重分别为 $k-3$ 和 $k+3$；
- w^p的私有邻居 $w^{p,q}_{0}$ 以及 $w^{p,q}_{k-5}$、$(p, q) \in \{1, \ldots, \alpha\}^2$ 均被直接丢弃。

请注意， G_k 中的环与 G_k中的环之间存在一一对应关系。此外，如果 G_k 考虑边权，则这种对应关系也会保持环的长度。

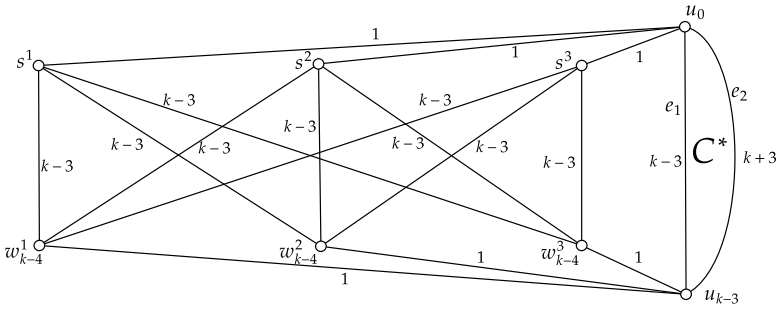

图 3： G_k 的加权图，用于 $k \geq 7$ 和 $N = 3$。

G_k 中的任何环，若不同于 $C^\star = (e_1, e_2)$但使用了 e_2 ，其长度都大于 $2k$。 G_k 中的任何环，若不同于 $C^\star = (e_1, e_2)$但使用了 e_1 ，则必须包含来自完全二分子图$K_{N,N}$的奇数条 $2x+1$ 边。因此，对于某个整数 $x \geq 0$，其长度为 $k-3+1+(2x+1)(k-3)+1$。对于 $x = 0$，该长度为 $2k-4$；而对于 $x \geq 1$，对于每个 $k \geq 6$，该长度至少为$4k - 10 > 2k$ 。出于类似原因，每个经过 u_0 或 u_{k-3}但不同时经过二者的环，其长度也为 $k-3+1+(2x+1)(k-3)+1$ ，其中 $x \geq 0$ 为某个整数，同样的分析也成立。每个经过 u_0 和 u_{k-3} 但既不使用 e_1 也不使用 e_2 的环，都包含来自$K_{N,N}$的偶数条边。因此，其长度具有以下形式：$2(k-3)+4+2x(k-3)$，其中 $x \geq 0$ 为某个整数。对于 $x = 0$，该长度为 $2k-2$；而对于 $x \geq 1$，对于任意 $k \geq 6$，该长度至少为 $4k - 8 > 2k$ 。最后，完全二分图$K_{N,N}$ 中包含的每个环，其长度都具有形式$2(x+2)(k-3)$，其中 $x \geq 0$为某个整数。对于每个 $k \geq 7$，该长度至少为 $4k - 12 > 2k$。 □

B $k = 6$ 的具体构造

引理 2 对于 $k = 6$ 并不成立。事实上，任意四元组 $(s, s', w_2, w_2') \in S^2 \times W^2$ 都会在 G_6 中的完全二分图 $K_{N,N}$ 中诱导出一个 12- 圈。然而，不存在经过 C_{12} 的 G_6

经过 u_0 或 u_3 的环，除了 $C^\star$ 之外。我们对 G_6 稍作修改，将引理 2 扩展到 $k=6$。具体而言，我们将 G_6 中的完全二分图替换为一个不含 4-环的稠密二分图，并采用以下引理。

引理 10 ([12])。存在一个无限的 C_4-无图族 $\{G_d \mid d \text{ 素数}\}$，使得对于每个素数 d，G_d 都是一个 d-正则二分图，其中每个部的大小为 d^2，且 $|E(G_d)| = d^3 + o(d^3)$。

令 $N = d^2$。在 $\widehat{G}_6$ 中，我们将完全二分图$K_{N,N}$ 替换为 G_d。通过此修改，引理 2成立。现在我们重新审视引理 3。X 变为一个服从参数为 $\sqrt{N}$ 和$(1\ 12)^3$ 的二项分布的随机变量。因此，

$$\Pr[X \le T] = O(N^T e^{-\Theta(\sqrt{N})}).$$

因此，u_3 至多需要转发 T条消息的概率为 $O(N^T e^{-\Theta(\sqrt{N})})$。若 $T = o(\sqrt{N}/\log N) \simeq o(n^{1/6}/\log n)$，则该概率渐近等于 $\exp(-\Theta(n^{1/6}))$。于是，对于 $k=6$，我们得到与引理 3 类似的结果，只需将阈值T的取值替换为 $o(\sqrt{N}/\log N) \simeq o(n^{1/6}/\log n)$。定理 1 的证明与 $k \ge 7$的情形相同。

□

C 引理8的证明

我们首先考虑在颜色 2 处合并的路径。

断言 3.如果 $f(3) \ge 8$，并且如果存在两个不同的节点 s^1、$s^2 \in \mathsf{B}(3)$，它们具有在颜色为*2* 且不同于 u_2的节点处汇合的良着色路径，那么其中一条路径经过 u_0或 u_1。

主张的证明。假设存在 $s^1, s^2 \in \mathsf{B}(3)$，它们分别有良好着色路径 $P^1 = (s^1, w_0^1, w_1^1, x_2)$ 和 $P_z = (s^2, z_0, z_1, x_2)$ 通向 u_3，并在颜色 2 处合并，且 $u_0 \notin \{z_0, w_0^1\}$，$u_1 \notin \{z_1, w_1^1\}$ 和 $x_2 \neq u_2$。然后，应用引理 6，并取 $b=2$ 和 $U = \{u_0, u_1, u_2, z_0, z_1\}$，可得：若 $|\mathsf{B}(3)| \ge 2$，则存在一条通向 u_3 的良好着色路径 $P^2 = (s^2, w_0^2, w_1^2, w_2^2)$，且该路径不与 $U \cup P^1$ 相交。因此

$$(u_0, s^1, w_0^1, w_1^1, x_2, z_1, z_0, s^2, w_0^2, w_1^2, w_2^2, u_3, u_2, u_1)$$

是一个 14-圈（见图 4-右），这与 s^1，$s^2 \in \mathsf{B}(3)$ 矛盾。这意味着 B(3) 中的节点不能拥有在任何颜色为 2 的节点处合并的着色良好路径（除非这些路径经过 u_0 或 u_1，或在 u_2 处合并）。◇

现在我们考虑在颜色 1 处合并的路径。

命题 4。如果 $f(3) \ge 7$，并且如果存在两个不同的节点 s^1、$s^2 \in \mathsf{B}(2)$，它们具有在一个不同于 u_1 的颜色为*1* 的节点处汇合的良着色路径，那么其中一条路径经过 u_0，或者它们都经过 u_2。

主张的证明。假设存在 $s^1, s^2 \in \mathsf{B}(3)$，它们具有良着色路径 $P^1 = (s^1, w_0^1, x_1, w_2^1)$ 和 $P_z = (s^2, z_0, x_1)$ 通向 u_3，在颜色 1 处合并，其中 $u_0 \notin \{w_0^1, z_0\}$和 $w_2^1 \neq u_2$。应用引理 6，结合 $b=2$ 和 $U = \{u_0, u_1, u_2, z_0\}$，我们得到：如果 $|\mathsf{B}(3)| \ge 2$，那么存在一条良好着色路径 $P^2 = (s^2, w_0^2, w_1^2, w_2^2)$ 通向 u_3，且不与 $U \cup P^1$ 相交。这意味着

$$(u_0, s^1, w_0^1, x_1, z_0, s^2, w_0^2, w_1^2, w_2^2, u_3, u_2, u_1)$$

是一个 12-圈（见图 4-中），这与 s^1，$s^2 \in \mathsf{B}(3)$ 矛盾。这意味着，B(3) 中的节点不能拥有在除 u_1 之外的任何着色为 1 的节点处与 u_3 合并的良好着色路径，除非该路径经过 u_0 或 u_2。◇

我们最后考虑在颜色 0 处汇合的路径。

主张 5. 如果 $f(3) \geq 8$ 且 $|\mathsf{B}(3)| \geq 3$，则不存在两个不同的节点 $s^1, s^2 \in \mathsf{B}(2)$，其路径在一个不同于 u_0的颜色 *0* 节点处汇合。

主张的证明。假设存在 s^1、$s^2 \in \mathsf{B}(3)$，它们具有良着色路径 $P^1 = (s^1, x_0, w_1^1, w_2^1)$ 和 $P_x = \{s^2, x_0, w_1^1, w_2^1\}$ 到 u_3，并在颜色 0 处汇合，且 $x_0 \neq u_0$。将引理 6 应用于 $b = 3$ 和 $U = \{u_0, x_0\}$，我们得到：若 $|\mathsf{B}(3)| \geq 3$，则 (1) 存在一条到 u_3的良好着色路径 $P^2 = (s^2, w_0^2, w_1^2, w_2^2)$，且该路径不与 $U \cup P^1$ 相交；(2) 对所有 $s^3 \in \mathsf{B}(3) \setminus \{s^1, s^2\}$，存在一条到 u_3的良好着色路径 $P^3 = (s^3, w_0^3, w_1^3, w_2^3)$，且该路径不与 $U \cup P^1 \cup P^2$ 相交。因此，

$$(u_0, s^1, x_0, s^2, w_0^2, w_1^2, w_2^2, u_3, w_2^3, w_1^3, w_0^3, s^3)$$

是一个12-圈（见图 4-左），这与 s^1，s^2，$s^3 \in \mathsf{B}(3)$ 矛盾。这意味着，B(3)中的节点不能拥有在颜色 0 处合并到 u_3 的良着色路径（ u_0 除外）。$\diamond$

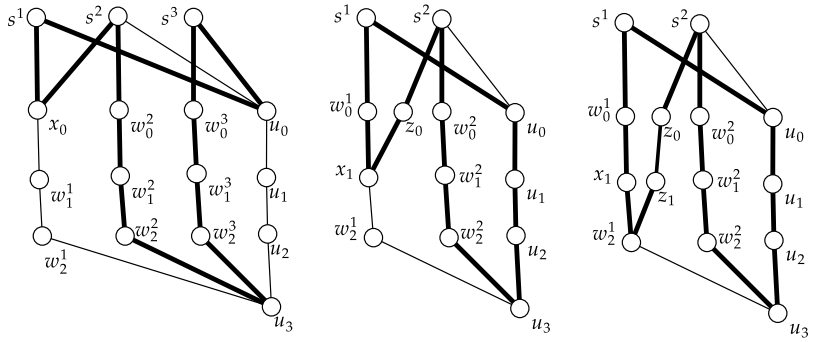

图 4：粗体环是每当 B(3) 中的节点具有合并路径时出现的 12-环和 14-环。

结合主张3、4 和 5 的不可能性结果，可以推知，从 B(3) 到 u_3 的路径只有经过 u_0、u_1 或 u_2时才会合并。我们舍弃经过这些节点的路径。由于B(3)中的每个节点到 u_3至少有 $f(3) + 1$ 条点不相交路径，因此这些路径中至少有 $f(3) - 2$ 条不会与来自 B(3)的任何其他路径相交。因此，$(f(3) - 2) \cdot |\mathsf{B}(3)| \leq \deg(u_3) \leq \deg(u_0)$，这就证明了引理 8。 $\square$

D 引理9的证明

我们依次处理每个 $i = 4, \ldots, 6$。

主张 6. 如果 $f(4) \geq 5$ 那么 $|\mathsf{B}(4)| \leq 1$。

主张的证明。令 $U = \{u_0\}$。根据将引理 6 应用于 $b = 2$，我们有，若$|\mathsf{B}(4)| \geq 2$，则 (1) 对所有 $s^1 \in \mathsf{B}(4)$，存在一条良好着色路径 $P^1 = (s^1, w_0^1, w_1^1, w_2^1, w_3^1)$ 到 u_4，且不与 U 相交；(2) 对所有 $s^2 \in \mathsf{B}(3) \setminus \{s^1\}$，存在一条良好着色路径$P^2 = (s^2, w_0^2, w_1^2, w_2^2, w_3^2)$ 到 u_4，且不与 $U \cup P^1$ 相交。由此可得，

$$(u_0, s^1, w_0^1, w_1^1, w_2^1, w_3^1, u_4, w_3^2, w_2^2, w_1^2, w_0^2, s^2)$$

是一个12-圈（见图 5-左），这与 $s^1, s^2 \in \mathsf{B}(4)$ 矛盾。 $\diamond$

关于 $i = 5$，6 的论证是对 [4]，中观察 2 的重新表述；为求完整起见，我们在此给出。

断言 7。如果 $f(5) \geq 5$ 则 $\mathsf{B}(5) = \emptyset$。

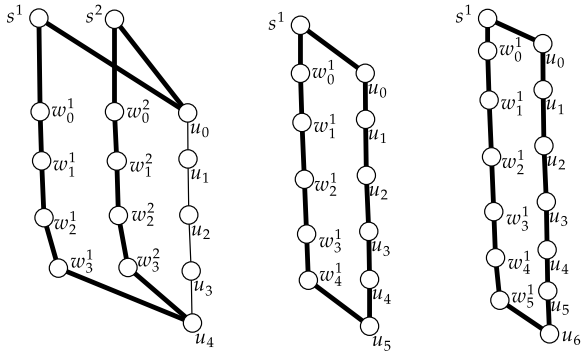

图5：粗体环是每当 B(4) 中有两个节点，或 B(5)、B(6) 中有一个节点时出现的 12-环和 14-环。

主张的证明. 设 $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4\}$。根据应用于 $b = 1$ 的引理 6，如果 B(5) 非空，则对每个 $s^1 \in$ B(5)，存在一条良好着色路径 $P^1 = (s^1, w_0^1, w_1^1, w_2^1, w_3^1, w_4^1)$ 到 u_5，且该路径不与 U 相交。因此，

$$(u_0, s^1, w_0^1, w_1^1, w_2^1, w_3^1, w_4^1, u_5, u_4, u_3, u_2, u_1)$$

是一个 12-圈（见图 5 中），这与 $s^1 \in$B(5) 矛盾。 ◇

断言 8。如果 $f(6) \geq 6$ 那么 $\mathrm{B}(6) = \emptyset$。

主张的证明。令 $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$。应用引理 6 及 $b = 1$，我们得到：如果 B(6) 非空，那么，对于每个 $s^1 \in$ B(6)，存在一条良好着色路径 $P^1 = (s^1, w_0^1, w_1^1, w_2^1, w_3^1, w_4^1, w_5^1)$ 通往 u_6，且不与 U 相交。因此，

$$(u_0, s^1, w_0^1, w_1^1, w_2^1, w_3^1, w_4^1, w_5^1, u_6, u_5, u_4, u_3, u_2, u_1)$$

是一个 14-圈（见图 5-右），这与 $s^1 \in$B(6) 矛盾。 ◇

该引理可直接由断言 6-8 得出。 □

E 判定 $\{C_{10}, C_{12}\}$-无环性

我们首先单独判定 C_{10}-无环性。使用阈值方法即可实现，阈值为 $T_5(i)$，$i = 1, \ldots\ldots, 4$，见 [4]。如果存在重 10-圈 $C = (u_0, \ldots\ldots, u_9)$，那么通过重复 $O(n^{4/5})$ 次选择 s，检测到 C 的概率至少为 9/10。如果在搜索 10-圈的过程中没有节点拒绝，那么我们可以假设该图是 C_{10}-无环的。搜索 12-圈仍由阈值算法执行。注意，我们已经证明，无法通过阈值算法判定 C_{12}-无环性。不过，我们现在是在该图为 C_{10}-无环的假设下进行工作。搜索轻 12-圈可在 $O(n^{5/6})$ 轮次内完成。假设存在一个重 12-圈 $C^\star = \{u_0, \ldots, u_{11}\}$，其中 u_0 在该环中的度最大，并且对于每个 $i = 0, \ldots\ldots, 11$，节点 u_i 都选择了颜色 i。对于 $T_6(i) = T_5(i)$，其中 $i = 1, \ldots\ldots, 4$，我们固定其取值。于是，u_0 的邻居 s 中至少有一个常数比例满足：如果算法选择了 s，那么对于所有 $1 \leq i \leq 4$，u_i 和 u_{12-i} 收到的标识符至多为$T_6(i)$。

最后，令 $T_6(5) = T_6(4)$。这就足够了，因为根据引理 4，如果 u_5 接收到多于 $T_6(4)$个标识符，那么从 s 到 u_5之间存在两条点不相交的良着色路径。这两条路径的组合是一个 12-圈。因此，算法选出的节点 s 要么位于其自身的一个12-圈中，要么不会导致 u_5 接收到多于 $T_6(4)$ 个标识符。

F 定理3的证明

本节专门证明定理 3。从本质上说，判定 $\{C_{4\ell} \mid 1 \leq \ell \leq k\}$-无环性的算法通过依次判定 $C_{4\ell}$-无环性来运行，其中 $\ell = 1, \ldots, k$，使用基于阈值的算法。这一系列算法运行 $O(n^{1-1/2k})$ 轮。对于判定 $\{C_{4\ell+2} \mid 1 \leq \ell \leq k\}$-无环性也是如此，其轮复杂度为 $O(n^{1-1/(2k+1)})$。证明主要在于说明，可以定义阈值，使得如果图包含一个 4ℓ-环（或一个 $(4\ell+2)$-环），那么以常数概率检测到该环。我们从 $\mathcal{F}_k = \{C_{4\ell} \mid 1 \leq \ell \leq k\}$, $k \geq 1$ 开始。

基本情形是 $\ell = 1$，即判定 C_4-无环性。 [4] 已证明，在这种情况下，阈值 $T_2(1) = 1$ 已足够。现在假设我们已经为判定 $\mathcal{F}_{k-1}$-无环性设置了适当的阈值。要判定 $\mathcal{F}_k$-无环性，只需先判定 $\mathcal{F}_{k-1}$-无环性，再判定 C_{4k}-无环性。因此，只要判定 C_{4k}-无环性的算法在图是 $\mathcal{F}_{k-1}$-无环时能够成功即可。所以，从此处开始，我们假设对于所有 $\ell = 1, \ldots, k-1$，图都不含 4ℓ-环。在这一假设下判定 C_{4k}-无环性时，我们将阈值设为 $T_{2k}(0) = 1$，并且，对于 $i \geq 1$,

$$T_{2k}(i) = \begin{cases} T_{2k}(i-1) & \text{if } i \text{ is odd,} \\ (i+1) \cdot T_{2k}(i-1) & \text{if } i \text{ is even.} \end{cases}$$

为了证明这些阈值有效，设 $C = (u_0, \ldots, u_{4k-1})$ 为图中的一个 $4k$-环，其中u_0是 C 中度最大的重节点。我们假设，对于每一个 $i = 0, \ldots, 4k-1$，节点 u_i 被着色为 i。注意，这种情况发生的概率至少为 $1/(4k+1)^{4k}$。设 s 是 u_0 的一个不属于任何 $4k$-环的邻居，并假设 s 被着色为 -1。我们将从 s到节点 u_i的良好着色路径定义为形如 $s, w_0, \ldots, w_{i-1}, u_i$的路径，其中对于每一个$j = 0, \ldots, i-1$，节点$w_j$被着色为 j。

为了证明我们的阈值是足够的，我们现在分别考虑奇数和偶数索引。

奇数下标。 令 i为满足 $1 \leq i \leq 2k-1$的奇数下标，并令 ρ为从 s到 u_i的点不相交的良着色路径的最大数量。我们通过反证法证明 $\rho = 1$（图6（左）展示了 $\rho \geq 2$这一情况）。事实上， $\rho \geq 1$，因为 $\{u_0, \ldots, u_{i-1}\}$是从 s 到 u_i的一条良好着色路径。现在假设存在两条从 s到 u_i的点不相交的良着色路径，分别记为 P和 P'。那么 $\{s\} \cup P \cup \{u_i\} \cup P'$ 是一个（$2i+2$）-环。由于 i是奇数，我们得到 $2i+2$ 是4的倍数。如果 $i \leq 2k-3$，这与我们关于图是 $\mathcal{F}_{k-1}$-无环的假设相矛盾。如果 $i = 2k-1$，那么 s 位于一个 $4k$-环中，而算法在执行颜色广度优先搜索(s)时会找到该环。由于 $\rho = 1$，根据引理 4，节点 u_i 至多接收 $T_{2k}(i-1)$个标识符。

偶数下标。设 i 是一个满足 $1 \leq i \leq 2k-2$ 的偶数下标，且 ρ 是从 s 到 u_i 的点不相交的良着色路径的最大数量。假设 s 满足： u_i 从颜色为 $i-1$ 的节点接收到多于 $(i+1) \cdot T_{2k}(i-1)$ 个标识符。根据引理 4， $\rho \geq i+2$。因此，存在一条从 s 到 u_i 且不经过 u_0 的良好着色路径。将这条路径记为 $P = \{w_0, \ldots, w_{i-1}\}$。设 s' 是算法选取的下一个颜色为 -1 的 u_0 的邻居。将 ρ' 定义为从 s' 到 u_i 的点不相交的良着色路径的最大数量。对于源节点 s'，如果节点 u_i 也从颜色为 $i-1$ 的节点接收到多于 $(i+1) \cdot T_{2k}(i-1)$ 个标识符，那么根据引理 4， $\rho' \geq i+2$。由此可知，存在一条从 s' 到 u_i 且不经过 $i+1$ 个节点 u_0、w_0、.....、w_{i-1}中任何一个的良好着色路径。将这条路径记为 P'。因此， $\{s, u_0, s'\} \cup P' \cup \{u_i\} \cup P$ 是一个 ($2i+4$)-环（见图6（右））。由于 i 是偶数， $2i+4$ 是 4 的倍数。如果 $i \leq 2k-4$，这就与图是 $\mathcal{F}_{k-1}$-自由的假设矛盾。如果 $i = 2k-2$，那么 s 位于一个 $4k$-环中，该环会被检测到。

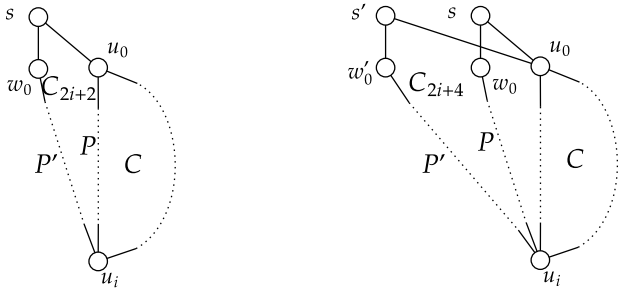

图6：只要 u_0 的邻居存在到 u_i 的点不相交的良着色路径，就会出现 $\mathcal{F}_{k-1}$ 环或 $4k$ 环。左图中，i 为奇数；右图中，i 为偶数。

由 s。因此，如果算法选择了 u_0 的一个邻居 s，该邻居被着色为 -1，并导致 u_i 接收到超过 $T_{2k}(i)$ 个标识符，那么 u_0 的其他邻居 s' 就不可能也导致 u_i 接收到超过 $T_{2k}(i)$ 个标识符，因为这样 s 就会处于一个环中，而该环会被 s 检测到。

总结。根据我们对奇数和偶数索引的分析，最多有 $k-1$ 个 u_0 的邻居 s（颜色为 -1）可能妨碍检测 $4k$ 环（$u_0, \ldots\ldots, u_{4k-1}$），也就是说，对于每个节点 u_{2i}，最多有一个源点 s，其中 $1 \le i \le k-1$。由于颜色为 -1 的 u_0 有 $\Omega(n^{1/2k})$ 个邻居，每当执行 $\Theta(n^{1-1/2k})$ 次随机选择时，该算法都会随机选出至少 k 个不同的 u_0 邻居。至此，$\{C_{4\ell} \mid 1 \le \ell \le k\}$ 的无环性证明完成，$k \ge 1$。

$\{C_{4\ell+2} \mid 1 \le \ell \le k\}$-无环性。$\{C_{4\ell+2} \mid 2 \le \ell \le k\}$-无环性的证明只需对 $\{C_{4\ell} \mid 2 \le \ell \le k\}$-无环性的证明稍作修改：互换 i 的奇数值和 Even 值的角色，以计算 $T_{2k+1}(i)$。

事实上，设 i 是偶数下标。与 $\{C_{4\ell} \mid 2 \le \ell \le k\}$ 无环性中奇数下标的情况类似，如果从选定的 s 到 u_i 存在两条点不相交的良着色路径，那么 s 就位于一个 $(2i+2)$- 环中（见图 6（左））。由于 i 为偶数，该环属于 $\{C_{4\ell+2} \mid 2 \le \ell \le k\}$。

另一方面，设 i 是奇数下标。与偶数下标情况下的 $\{C_{4\ell} \mid 2 \le \ell \le k\}$-无环性类似，如果 u_i 从两个不同的源节点 s 和 s' 接收到多于 $(i+1)T_{2k}(i-1)$ 个标识符，那么 s 就处于一个 $(2i+4)$-环中（见图6（右））。由于 i 为奇数，该环属于 $\{C_{4l+2} | 2 \le l \le k\}$。

因此，该算法通过固定 $T_{2k}(0) = 1$，并对 $i \ge 1$ 执行以下操作：

$$T_{2k}(i) = \begin{cases} (i+1) \cdot T_{2k}(i-1) & \text{if } i \text{ is odd,} \\ T_{2k}(i-1) & \text{if } i \text{ is even.} \end{cases}$$

定理 3 的证明至此完成。 □