arXiv:2304.02367v2 [quant-ph] 3 Aug 2023

玻色子的第三量子化：辛对角化、非厄米哈密顿量与对称性

Steven Kim 与 Fabian Hassler
JARA量子信息研究所，亚琛工业大学，52056 亚琛，德国

电子邮箱：steven.kim@rwth-aachen.de

摘要。 与马尔可夫环境相互作用的开放量子系统可由林德布拉德主方程描述。时间平移的生成元由作用于系统密度矩阵的刘维尔超算符 $\mathcal{L}$ 给出。由于单个玻色模的福克空间已是无穷维的，李维尔算符的对角化必须在产生和湮灭超算符上进行，这一过程称为“第三量子化”。我们提出一种方法，利用单一辛变换求解二次型系统的李维尔算符。我们表明，系统的非厄米有效哈密顿量除了纳入系统的动力学之外，还是分析其对称性的工具。作为示例，我们利用有效哈密顿量表述开放系统的 $\mathcal{PT}$-“对称性”。我们说明，引入源项如何使我们能够得到诸如光子流等可观测量的累积量生成函数。

1. Introduction

第三量子化是一种求解与马尔可夫环境耦合的量子系统的技术。林德布拉德主方程描述了它们的时间演化，并且可以通过刘维尔超算符 $\mathcal{L}$进行紧凑表达。该技术最初在 [1] 被提出，用于求解费米子系统，后来扩展到了玻色子 [2]。它建立在刘维尔空间中更早的代数方法之上，参见例如 [3, 4]。第三量子化已被用于求解晶格上的玻色子 [5]，也通过采用弱对称性 [6]求解非线性系统。该方法直接作用于湮灭超算符和产生超算符。从稳态出发，新的阶梯算符生成具有简单指数时间演化的“激发态”。最近，这种方法与高斯态 [7] 的协方差矩阵方法以及开放系统的Keldysh路径积分表述之间的联系受到了关注 [8, 9]。将本征模与简单的指数时间演化相对应，可以有效地将快自由度与慢自由度分离。这使得能够将具有多个时间尺度的问题化约为长时间下相关模的慢时间动力学，参见 [10]。

本文概述了一种利用辛变换对二次玻色子李维尔算符进行“第三量子化”的方法。该方法的灵感源自玻色子 Keldysh 作用量 [8]鞍点动力学的经典力学。与 [2] 的主要区别在于，我们通过单步操作对李维尔算符进行对角化。这使我们能够轻松地将该方法扩展到计数问题。在这种情况下，由于引入了源项，时间演化不再保持迹。我们首先介绍超算符形式以及保持迹的变换。我们展示了如何导出有效的非厄米哈密顿量，它编码了关于系统动力学的全部信息。我们简要讨论李维尔算符不可对角化时的例外点，并给出此情况下时间演化算符的显式公式。接着，我们对李维尔算符的对称性进行分类。我们给出一个通用方案，将作用于（有效）哈密顿量的封闭系统对称性提升为作用于李维尔算符的开放系统对称性。我们展示了 $\mathcal{PT}$“对称性”如何纳入这一框架。最后，我们通过两个说明性示例展示该方法在开放玻色子系统中的应用。

2. 复对称矩阵的辛对角化

我们将把求解林德布拉德方程的任务映射为利用辛变换对复矩阵进行对角化。在这些应用中，辛形式源于玻色子对易关系。我们通过两个引理来准备主要定理。

The 第一个引理是对复矩阵对角化的重述:

引理1。 给定标准辛形式 *($J^T = J^{-1} = -J$)*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 I_n 是大小为 n 的单位矩阵，若对称矩阵 $L \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$, $L = L^T$ 具有可对角化的 $J^{-1}L$ ，则可化为标准形

$$PLQ = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix}; \tag{2}$$

其中 Λ 是一个对角矩阵，其对角元为 λ_1、.....、λ_n，而 P、Q $\in \mathrm{GL}(2n$、$\mathbb{C})$ 是（可逆的）变换矩阵，满足

$$PJQ = J\,. \tag{3}$$

证明。 矩阵 $A = J^{-1}L$ 可以通过变换矩阵 Q 和满足 $Q^{-1}AQ = D$ 的对角矩阵 D 对角化。注意， $A = -J^{-1}A^TJ$，使得 A 与 $-A^T$相似。因此， A 的本征值成对出现 $\pm\lambda_i$。因此，我们可以选择

$$D = \begin{pmatrix} -\Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}. \tag{4}$$

利用 $P = JQ^{-1}J^{-1}$，我们有 $J^{-1}PLQ = D$，结果由此可得

$$JD = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix} . \tag{5}$$

□

备注 1。 Q 的列向量 $\boldsymbol{q}_i$ 以及本征值 λ_i 可以通过求解广义特征值问题获得

$$L\boldsymbol{q}_i = \lambda_i J\boldsymbol{q}_i . \tag{6}$$

注记 2。 如果 $A = J^{-1}L$ 不可对角化，该定理可以调整为使 Λ包含 Jordan 块，并且

$$D = \begin{pmatrix} -\Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^T \end{pmatrix} . \tag{7}$$

下面给出这种情况的一个例子。

Th以下技术引理将是该定理的核心要素:

引理2。 给定一个可逆的变换矩阵 $T \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$ 以及任意矩阵$A \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$，其中

$$A = T^T A T^{-1} , \tag{8}$$

我们可以找到 $B \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$，使得 $B^2 = T$（B是 T的“平方根”），并且

$$A = B^T A B^{-1} . \tag{9}$$

证明。 由(8)迭代可得

$$A = (T^k)^T A (T^k)^{-1}, \qquad k \in \mathbb{N} \tag{10}$$

并且对任意多项式 $p(x)$也有 $A = p(T)^T A\, p(T)^{-1}$。函数$f(x) = \sqrt{x}$ 在 T上的取值仅取决于其在$\overline{T}$的谱上的值，详见 [11]。由于 T 的谱不含0，我们可以选取 $f(x)$的一个单值分支，并找到一个多项式 $p_f(x)$，使其在T的谱上与 $f(x)$取值相同。矩阵 $B = p_f(T)$满足该引理的要求 $B^2 = T$和(9)。

□

现在，我们已经为主要定理准备好了必要的要素。

定理 1. 在引理*1*的条件下，对称矩阵 L 可以化为标准形

$$S^T L S = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

通过一个辛变换矩阵 S，满足

$$S^T J S = J . \tag{12}$$

证明。 其中 引理1、 L的对称性以及 J的斜对称性可知 t

$$PLQ = Q^T L P^T = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad PJQ = Q^T J P^T = J\,. \tag{13}$$

这意味着

$$L = T^T L T^{-1} \qquad \text{and} \qquad J = T^T J T^{-1}\,, \tag{14}$$

其中 $T = Q(P^{-1})^T = QP^{-T}$。利用引理2，我们得到 B，其中 $B^2 = T$和 B满足（9）的性质。令 $S = B^{-1}Q$，我们得到（X 要么是 L，要么是 J）

$$S^T X S = Q^T B^{-T} X B^{-1} Q \overset{(14)}{=} Q^T (B^{-T})^2 X Q = Q^T T^{-T} X Q = PXQ\,. \tag{15}$$

该结果通过将 $S^T L S = PLQ$ 和 $S^T J S = PJQ$ 与（13）进行比较即可得到。

□

注记 3. 标准形在对 λ_i 进行重排序或将 λ_i 替换为其对应伙伴 $-\lambda_i$的情况下是唯一的。特别地，对于每个 $i \le n$，标准形在交换$\boldsymbol{s}_i \mapsto -\boldsymbol{s}_{i+n}$、 $\boldsymbol{s}_{i+n} \mapsto \boldsymbol{s}_i$ 的 i阶列和 $(i+n)$阶列 S，同时反转 $\lambda_i \mapsto -\lambda_i$的符号时保持不变。在开放系统的应用中， λ_i 的符号将决定系统的稳定性。下面我们将讨论如何确定 Λ 各元素的符号歧义。

注 4。 关于使用由形式$\omega(\boldsymbol{x}、\ \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T J \boldsymbol{y}$诱导的辛几何的另一种证明，参见 [12]。

注 5.注意，所给出的定理不同于更为人所知的威廉姆森定理，后者借助辛变换矩阵对实对称正定矩阵进行对角化，参见例如 [13]。

3. 求解玻色林德布拉德主方程

3.1. 超算符形式与非厄米哈密顿量

开放量子系统与其环境相互作用，例如通过光子的发射或吸收。对于马尔可夫环境，支配动力学的林德布拉德主方程可表示为

$$\dot{\rho} = -i[\mathcal{H}, \rho] + \sum_{\mu} \Big[\mathcal{J}_\mu \rho \mathcal{J}_\mu^\dagger - \tfrac{1}{2}(\mathcal{J}_\mu^\dagger \mathcal{J}_\mu \rho + \rho \mathcal{J}_\mu^\dagger \mathcal{J}_\mu) \Big]\,, \tag{16}$$

其描述了系统密度矩阵 ρ 的时间演化。哈密顿量 $\mathcal{H}$ 描述封闭系统的演化，而林德布拉德跳跃算符$\mathcal{J}_\mu$ 则纳入了与环境的耦合。该方程表明，密度矩阵的时间-演化由李维尔超算符 $\mathcal{L}$ 生成，其中$\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho$。该方程的一般解由时间演化算符$\exp(\mathcal{L}t)$给出。为了理解系统的动力学，我们需要获得李维尔算符 $\mathcal{L}$的本征值 λ 。特别是，了解这些本征值可以

使我们能够识别系统中满足 Re(λ) > 0的不稳定性，此时动力学呈指数发散；或者在 Re(λ) → 0⁻ [14]时识别耗散相变。

为确保精确可解，我们假设哈密顿量关于玻色升降算符 a_i、$i = 1$、.....、m是二次的，并且浴算符是作用于 m 个玻色模的福克空间 $\mathcal{F}$ 上的阶梯算符的线性函数。这意味着

$$\mathcal{H} = \sum_{i,j}\Big[a_i^\dagger h_{ij} a_j + \tfrac{1}{2} a_i \Delta_{ij} a_j + \tfrac{1}{2} a_i^\dagger (\Delta^\dagger)_{ij} a_j^\dagger\Big] + \sum_i \Big(\alpha_i^* a_i + \alpha_i a_i^\dagger\Big), \tag{17}$$

$$\mathcal{J}_\mu = \sum_i \Big(v_{\mu,i} a_i + w_{\mu,i} a_i^\dagger\Big) + \beta_\mu. \tag{18}$$

矩阵 $h \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 是厄米的，并且可以选择使 $\Delta \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 为对称矩阵。向量 $\boldsymbol{v}_\mu$、$\boldsymbol{w}_\mu \in \mathbb{C}^m$ 描述与环境的相互作用。光子发射由 $\boldsymbol{v}_\mu$ 描述，而 $\boldsymbol{w}_\mu$ 与吸收过程有关。相干驱动 $\alpha_i \in \mathbb{C}$ 和参数 $\beta_\mu \in \mathbb{C}$ 与玻色升降算符线性耦合，因此会使真空态发生位移，见下文。

由于林德布拉德方程中的算符作用于密度矩阵的两侧，我们转而采用超算符形式。我们定义一组超算符： $\mathcal{O}_c = (\mathcal{O}_+ + \mathcal{O}_-)/2$ 和 $\mathcal{O}_q = (\mathcal{O}_+ - \mathcal{O}_-)$，其中 $\mathcal{O}_+\rho = \mathcal{O}\rho$ 和 $\mathcal{O}_-\rho = \rho\mathcal{O}$。下标“c”和“q”分别表示经典和量子，其名称源自 Keldysh路径积分描述中使用的术语 [9, 15]。相关的对易关系为$[a_{c,i}, a_{q,j}^\dagger] = [a_{q,i}, a_{c,j}^\dagger] = \delta_{ij}$，其余对易子均为零。这些超算符作用于“加倍”的福克空间 $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}_+ \otimes \mathcal{F}_-$，其中密度矩阵被向量化，使得 $\mathcal{L}$ 作为线性映射作用，见下文。

利用此定义并定义基 $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_c,\ \boldsymbol{b}_q)^T = (\boldsymbol{a}_c,\ \boldsymbol{a}_c^\dagger,\ \boldsymbol{a}_q^\dagger,\ -\boldsymbol{a}_q)^T$，我们可以用复对称矩阵 $L \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ 表示李维尔算符，其中 $n = 2m$。李维尔算符写作 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^T L \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{b}_q + L_0$，其中

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -iH_{\text{eff}}^T Z \\ -iZH_{\text{eff}} & N \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{z}^* \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = -i\boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2}\sum_\mu \left(\beta_\mu^* \boldsymbol{w}_\mu - \beta_\mu \boldsymbol{v}_\mu^*\right) \in \mathbb{C}^m, \tag{20}$$

以及 $L_0 = \frac{1}{2}\text{tr}(V - W)$。我们通过并矢积之和定义“耗散矩阵” V、 W 和 $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$

$$V = V^\dagger = \sum_\mu \boldsymbol{v}_\mu \boldsymbol{v}_\mu^\dagger, \quad W = W^\dagger = \sum_\mu \boldsymbol{w}_\mu \boldsymbol{w}_\mu^\dagger, \quad U = -\sum_\mu \boldsymbol{v}_\mu \boldsymbol{w}_\mu^\dagger. \tag{21}$$

我们注意到 L 具有分块结构。左上角的零矩阵源于林德布拉德方程 [2, 8]的迹保持。该分块本会将‘c’-算符彼此连接。由于这些项不存在，李维尔算符的每一项中至少有一个‘q’-算符，并且迹保持由Tr($\mathcal{O}_q\rho$) = Tr($\mathcal{O}\rho - \rho\mathcal{O}$) = 0得出。正是迹保持使得能够用第三量子化方法实现对角化。在超算符形式中，对福克空间的迹 $\mathcal{F}$是一个特殊的左特征向量 $\langle 0|\cdots \equiv$ Tr($\cdots$)，谱的其余部分可由阶梯算符由此得到，见下文。

由于左上块中的零矩阵，右下块矩阵$N \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}$由

$$N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} U^\dagger + U^* & W + V^* \\ W^* + V & U^T + U \end{pmatrix}, \tag{22}$$

不影响李维尔算符的谱 λ 。事实上，它编码了噪声，见[8]。非对角块编码了系统的动力学。为了与非厄米哈密顿量相关文献建立联系，我们将矩阵分离出来

$$Z = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_m \end{pmatrix} \tag{23}$$

其中编码了玻色对易关系 $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$ [16]。剩余部分是非厄米哈密顿量

$$H_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} h + \frac{i}{2}(W - V^*) & \Delta^* - \frac{i}{2}(U^\dagger - U^*) \\ \Delta + \frac{i}{2}(U^T - U) & h^* - \frac{i}{2}(W^* - V) \end{pmatrix}. \tag{24}$$

它可以分解为 $H_{\text{eff}} = H + \frac{i}{2}\Gamma$，其中 H 和 Γ 是厄米的。第一部分 H 是封闭系统的哈密顿量，由 $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b}'^\dagger H \boldsymbol{b}'$ 给出，其中 $\boldsymbol{b}' = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^\dagger)^T$。第二部分 Γ 编码了由林德布拉德跳跃算符 $\mathcal{J}_\mu$ 导致的耗散动力学。仅编码林德布拉德时间演化的动力学部分的非厄米哈密顿量，最近在非厄米拓扑的背景下受到了广泛关注。

我们接着说明如何对角化李维尔算符 L。由于我们处于相空间中，保持由对易关系给出的玻色子结构十分重要

$$J_{ij} = [\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j] \tag{25}$$

其中 J 是(1)的标准辛形式。因此， L 和 J 具有定理 1的形式，我们可以找到一个辛变换 S ，将 L 化为(11)的标准形，其广义特征值 λ_i 构成对角矩阵 Λ。

3.2. 固定标准形

由于本征值 λ_i 决定系统的动力学和稳定性，我们需要消除符号歧义 $\pm\lambda_i$。 S 的列 $\boldsymbol{s}_i$ 和 $\boldsymbol{s}_{i+n}$中的一列 $i \le n$具有$(\tilde{s}_i, 0\cdots 0)^T$的形式，即以 n 个零结尾，见 [2]。若 $\boldsymbol{s}_{i+n}$ 以这些零结尾，则根据注3，我们交换$\boldsymbol{s}_i \mapsto -\boldsymbol{s}_{i+n}$、 $\boldsymbol{s}_{i+n} \mapsto \boldsymbol{s}_i$ ，同时反转 $\lambda_i \mapsto -\lambda_i$ 的符号。注意，特征向量的归一化由 $\boldsymbol{s}(-\lambda_i)J\boldsymbol{s}(\lambda_j) = \delta_{ij}$给出。这样，我们在将辛矩阵化为分块形式的同时，确定了 λ_i 的符号

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

条件 $S^T J S = J$意味着 $S_3^T = S_1^{-1}$和 $S_2^T S_3 = S_3^T S_2$。下文中，我们将始终假设标准形以这种方式被固定。下文中，我们将（广义）本征值 λ_i 称为李维尔算符 L的（辛）谱。

确保列 $\boldsymbol{s}_i$、 $i \le n$ 以 0 结尾后，广义特征值问题 $L\boldsymbol{s}_i = \lambda_i J \boldsymbol{s}_i$ 等价于

$$H_{\text{eff}} \tilde{\boldsymbol{s}}_i = i\lambda_i Z \tilde{\boldsymbol{s}}_i \,, \tag{27}$$

即特征值 λ_i 除以对应于在复平面内旋转 $\pi/2$ 的因子 i 后，便是非厄米有效哈密顿量 H_{eff} 的本征值。虽然我们通过定理 1 的辛变换来推进对角化，随后再固定标准形，但还有 [2] 的另一种方法。他们先求解式 (27)，然后求解李雅普诺夫方程，以获得完整的特征向量 $\boldsymbol{s}_i$。

变换到标准形引入了新的玻色算符 u_i 和 v_i，定义为

$$\boldsymbol{b} = S \begin{pmatrix} u_1 - \eta'_1/\lambda_1 \\ \vdots \\ u_n - \eta'_n/\lambda_n \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \tag{28}$$

这意味着 $\boldsymbol{b}_c = S_1(\boldsymbol{u} - \Lambda^{-1}\boldsymbol{\eta}') + S_2\boldsymbol{v}$ 以及 $\boldsymbol{b}_q = S_3\boldsymbol{v}$。线性项 $\boldsymbol{\eta}$ 将真空态平移，其参数由变换后的向量 $\boldsymbol{\eta}' = S_3^T\boldsymbol{\eta} = S_1^{-1}\boldsymbol{\eta}$给出。

由于变换具有辛性质，算符满足 $[u_i, v_j] = \delta_{ij}$而所有其他对易子均为零。因此，u_i 是湮灭算符，而 v_i 是产生算符。由于李维尔算符 L 不是厄米算符，我们不具备u_i 是 v_i的伴随算符这一性质。重要的是，新的产生算符 v_i 完全由 $\boldsymbol{a}_q$ 和 $\boldsymbol{a}_q^\dagger$的线性组合给出。正因如此， v_i 既承担产生算符的作用，也承担保持迹的作用，详见上文讨论。

用新的算符 u_i 和 v_i 表示时，李维尔算符呈现为

$$\mathcal{L} = \sum_i \lambda_i v_i u_i \tag{29}$$

其中，附加常数 $\frac{1}{2}\sum_i \lambda_i + L_0$ 根据迹保持性质而消失。‡

3.3. 超算符形式的福克空间

阶梯算符 v_i， u_i 引入了一种类似Fock的结构。特别地，算符$v_i u_i$ 是一个数算符。给定任一本征态 $|n_i\rangle$ ，通过应用 v_i (u_i)，本征值可以增加（减少）1，这归因于阶梯结构 $[v_i u_i, v_i] = v_i([v_i u_i, u_i] = -u_i)$。要根据阶梯性质获得谱，我们需要一个特殊的量子态，通过应用产生算符，可以从该量子态得到其余的量子态。在代数解法的标准讨论中

‡ 注意， $\sum_i \lambda_i = \mathrm{tr}(-iZH_{\text{eff}})$，根据式（24）可得 $\mathrm{tr}(W - V) = -2L_0$.

量子谐振子中的真空态扮演这一角色。在这里，迹 $\langle 0|$ 扮演着特殊角色，因为它是本征值 0 对应的左特征向量，见 [2]。

从具有 $\langle 0|v_i u_i = 0$ 的量子态 $\langle 0|$ 出发，对于 $i \leq n$，在左侧作用 u_i 即可得到其余量子态。请注意，湮灭算符 u_i 在左侧作用时表现为产生算符。由此，我们得到其余量子态 $n_i \in \mathbb{N}_0$，

$$\langle n_1, n_2, \dots | = \langle 0| \prod_{i=1}^{n} \frac{u_i^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} \tag{30}$$

它们是 $v_i u_i$ 对应本征值 n_i 的左特征态。因此，李维尔算符 $\mathcal{L}$ 的谱为

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i n_i \,. \tag{31}$$

对于每个左特征向量 $\langle n_1, n_2, \dots |$，都有一个对应的右特征向量

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \prod_{i=1}^{n} \frac{v_i^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0\rangle \,, \tag{32}$$

它并非其厄米共轭。重要的是，对应于 $\lambda = 0$ 的右特征向量 $|0\rangle$ 对应于稳态密度矩阵 $\rho_s \equiv |0\rangle$，因为 $\mathcal{L}\rho_s = \dot{\rho}_s = 0$。阶梯算符按照 $u_i|n_i\rangle = \sqrt{n_i}|n_i - 1\rangle$ 和 $v_i|n_i\rangle = \sqrt{n_i + 1}|n_i + 1\rangle$ § 的关系作用于本征态 $|n_1, n_2, \dots\rangle = \bigotimes_i |n_i\rangle$。左特征态上的作用由 $\langle n_i|u_i = \langle n_i + 1|\sqrt{n_i + 1}$, $\langle n_i|v_i = \langle n_i - 1|\sqrt{n_i}$ 给出。这些量子态构成一个完备的双正交集，其中 $\langle n_1', n_2', \dots | n_1, n_2, \dots\rangle = \prod_i \delta_{n_i', n_i}$ 以及 $I_{\mathcal{F}^2} = \sum_{n_1, n_2, \dots} |n_1, n_2, \dots\rangle\langle n_1, n_2, \dots|$。

使用 th e 完备性，林德布拉德方程的时间演化算符等于 s

$$\exp(\mathcal{L}t) = \sum_{n_1, n_2, \dots} e^{\lambda t} |n_1, n_2, \dots\rangle\langle n_1, n_2, \dots | \tag{33}$$

其中 $\lambda = \sum_i \lambda_i n_i$。这意味着具有较大 λ（较大 n_i 或 λ_i）的量子态比其他量子态衰减得更快。这一见解使得绝热消去快模成为可能，示例见 [10]。

3.4. 若尔当标准形

通常，可能会出现矩阵 $J^{-1}L$ 不可对角化的情况，这意味着它只能化为若尔当标准形。在下文中，我们将讨论一个包含单个玻色子的系统的最简单情形，其中本征值和特征向量会合并。在这种情况下，李维尔算符等于 $\mathcal{L} = \mu(v_1 u_1 + v_2 u_2) + \nu v_2 u_1$，其中第一部分是对角的，而 $v_2 u_1$ 是幂零的。以下过程可以直接扩展到涉及更大 Jordan 块的更一般情形。

§ 也可以为算符选择不同的“归一化”方式，例如 $u_i|n_i\rangle = |n_i - 1\rangle$和 $v_i|n_i\rangle = (n_i + 1)|n_i + 1\rangle$。按照目前的选择，在福克基中实现 u_i 和 v_i 的矩阵互为伴随算符。

虽然 $\mathcal{L}$ 的代数特征值保持不变，但决定系统动力学的几何谱发生了变化。如果 $\mathcal{L}$ 可对角化且具有简并特征值，那么对于每个本征值 $\lambda = \mu$ （ $n_1 + n_2$ ）， $n + 1$ 将存在简并，其中 $n_1 + n_2 = n$。由于不再可能通过本征态对 $\mathcal{L}$ 进行完整分解，因此需要额外的广义本征态。对福克态作用李维尔算符，我们得到

$$\mathcal{L}|n_1, n_2\rangle = \mu(n_1 + n_2)|n_1, n_2\rangle + \nu\sqrt{n_1(n_2 + 1)}|n_1 - 1, n_2 + 1\rangle \,. \tag{34}$$

我们看到，对于固定的 $n = n_1 + n_2$，只有量子态 $|0, n\rangle$ 满足 $n_1 = 0$ 的是李维尔算符的本征态。其余的 n 量子态 $|n_1, n - n_1\rangle$ 满足 $n_1 = 1, \ldots, n$ 的是广义本征态。时间演化算符为

$$e^{\mathcal{L}t} = \sum_{\substack{n_1, n_2 \geq 0 \\ 0 \leq m \leq n_1}} \sqrt{\binom{n_1}{m}\binom{n_2 + m}{m}}\, (\nu t)^m e^{\mu(n_1+n_2)t} |n_1 - m, n_2 + m\rangle\langle n_1, n_2| \,, \tag{35}$$

其中， m 遍历对应固定 n 的广义本征态集合。请注意，时间演化并非简单的指数项求和。这是因为本征态不再构成完备基，因此需要引入广义本征态；它们会因幂零算符 $v_2 u_1$ 而改变动力学。

3.5. 计数统计

求解林德布拉德方程时，感兴趣的不仅是稳态 ρ_s 以及时间演化 $\exp(\mathcal{L}t)$。人们通常还会关注某些可观测量 $\mathcal{O}$ 的统计性质，例如光子流。通过在刘维尔超算符 [18, 19]中加入源项，我们便可以获取这些统计性质。

$$\mathcal{L}(s) = \mathcal{L} + s\mathcal{O} \tag{36}$$

其中 $s \in \mathbb{C}$。为了保证模型的可解性，可观测量 $\mathcal{O}$ 再次至多应为玻色算符 a_i 和 $a_i^\dagger$ 的二阶形式。

一个可观测量的常见例子是光子流 $\mathcal{I}$。单个光子的发射由 $\gamma a \rho a^\dagger$ 给出，其中 γ 是发射率。相应地，光子流由 $\mathcal{I} = \gamma a_+ a_-^\dagger$ [18, 20, 21]给出。注意，湮灭（产生）算符带有下标 $+$ (–)，这确保在取迹后算符按正常序排列。这是光子计数的传统约定，参见 [22]。

我们可以通过对 $\mathcal{L}(s)$ 进行对角化来获得生成函数，结果为

$$\mathcal{L}(s) = \sum_i \lambda_i(s) v_i(s) u_i(s) + \tfrac{1}{2}\sum_i \lambda_i(s) + L_0. \tag{37}$$

请注意，一般来说，计数场会在式 (19) 的左上角引入一个块 $C(s)$。这是因为源项破坏了时间演化的迹保持。特别是，迹保持只要求 $C(0) = 0$。因此，本征值 $\lambda_i(s)$ 和算符 $v_i(s)$ $u_i(s)$ 的选取方式如下。

它们是 s的解析函数。这一备注很重要，因为在有限的 s迹保持下，再也不能从每一对$\pm\lambda_i$ 中选出正确的本征值。请注意，对于这种情况，有必要使用基于定理 1 的方法，因为 [2] 的替代方法依赖于 $C(s) = 0$。

阶乘累积量生成函数 $\mathcal{G}(s)$在测量时间 τ下定义为

$$e^{\mathcal{G}(s)\tau} = \langle 0|e^{\mathcal{L}(s)\tau}|0\rangle = \mathrm{Tr}(e^{\mathcal{L}(s)\tau}\rho_s) = \left\langle e^{(\mathcal{L}+s\mathcal{O})\tau}\right\rangle , \tag{38}$$

其中，$\langle\cdot\rangle$ 表示稳态中的期望值。关于 s 的导数在 $s = 0$ 处取值后，得到阶乘累积量 [19, 23, 24]

$$\langle\!\langle \mathcal{O}^k \rangle\!\rangle_F = \langle\!\langle \mathcal{O}(\mathcal{O}-1)\cdots(\mathcal{O}-k+1) \rangle\!\rangle = \left.\frac{d^k}{ds^k}\mathcal{G}(s)\right|_{s=0} . \tag{39}$$

请注意，通过替换 $s \mapsto \exp(i\chi) - 1$并对 $i\chi$ [24] 求导，可以得到常规累积量。在 $-\mathrm{Re}(\lambda_i)\tau \gg 1$ 的长测量时间极限下，只有含有 $n_i = 0$ 的项对（33）有贡献。因此，阶乘累积量生成函数为

$$\mathcal{G}(s) = \langle 0|\mathcal{L}(s)|0\rangle = \tfrac{1}{2}\sum_i \lambda_i(s) + L_0 = \tfrac{1}{2}\sum_i [\lambda_i(s) - \lambda_i(0)] . \tag{40}$$

4. 对称性

对称性是获得更深层次洞见的有力工具。对于哈密顿系统，对称性的存在要求哈密顿量 H 与对称算符 Ω 对易。在 [25, 26] 中，已有研究首次尝试将对称性推广到林德布拉德方程。下面，我们将利用超算符形式以及上文介绍的林德布拉德方程结构来处理这一问题。

4.1. 密度矩阵的厄米性

一个可接受的量子态 ρ 是厄米的，具有 $\rho = \rho^\dagger$。特别是，这一性质必须在时间演化下得到保持。注意，厄米性并不是真正的对称性，因为它不可能被破坏。不过，正如我们将在下文看到的，它引入了一种类似于真正对称性的结构。因此，首先讨论厄米性的保持对李维尔算符 $\mathcal{L}$施加的限制是很有启发性的。

在标准正交基 $|n\rangle = |n_1, n_2, \ldots\rangle$ 中，量子态 ρ 表示为

$$\rho = \sum_{m,n} \rho_{mn}|m\rangle\langle n| \tag{41}$$

由于厄米性，$\rho_{mn} = \rho^*_{nm}$。超算符形式对应于密度矩阵的向量化。矢量化密度矩阵为

$$|\rho\rangle = \sum_{m,n} \rho_{mn}|m, n\rangle \tag{42}$$

其中 $|m,\ n\rangle = |m\rangle \otimes |n\rangle$，分别对应于 $\mathcal{F}^2$ 的 $+$ 和 $-$ 扇区的因子。

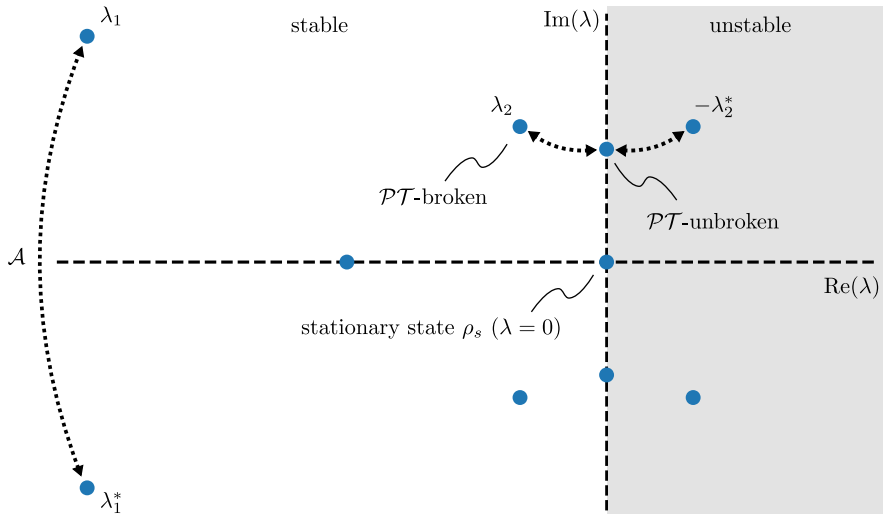

图 1. 李维尔算符谱示意图，展示了其主要特征。本征值 0 对应的本征矢量 $|0\rangle$ 是稳态 ρ_s。本征值满足 Re(λ) < 0 的量子态会呈指数衰减，并弛豫至稳态。本征值满足 Re(λ) > 0 （灰色阴影区域）表明系统不稳定，且时间演化 $e^{\mathcal{L}t}$ 会呈指数发散。由于密度矩阵 $\rho\,(t)$ 的厄米性由满足 $[\mathcal{A}, \mathcal{L}] = 0$ 的伴随算符 $\mathcal{A}$ 所体现，李维尔算符的本征值成对出现，构成复共轭对。因此，谱关于实轴镜像对称。类似地，对于 $\mathcal{PT}$-“对称性”，本征值成对出现，关于虚轴镜像对称。若所有本征值都位于虚轴上（对应幺正动力学），则称 $\mathcal{PT}$-“对称性”为未破缺。相反，若 $\mathcal{PT}$-“对称性”破缺，由于其中一对本征值中的一个具有正实部，系统会不稳定。

我们希望找到一个操作 $\mathcal{A}$，它对应于对密度矩阵 ρ 取通常的伴随$\rho^\dagger$。这个伴随操作 $\mathcal{A}$ 是一个反线性算符，其满足$\mathcal{A}\, z|m,\ n\rangle = z^*|n,\ m\rangle$。在乘积基中，它表示为

$$\mathcal{A} = \sum_{m,n} |n, m\rangle\langle m, n|K \tag{43}$$

其中 K 表示复共轭，而 $\mathcal{A}^2 = I_{\mathcal{F}^2}$。 ρ 的厄米性对应于矢量化密度矩阵上的关系 $\mathcal{A}|\rho\rangle = |\rho\rangle$。厄米性在时间演化下得以保持这一事实要求 $[\mathcal{A}, \mathcal{L}] = 0$。

为了了解厄米性对李维尔算符施加的限制，我们还研究了 $\mathcal{A}$ 对超算符的作用。这意味着（为简化记号，以下省略下标 i ）

$$\mathcal{A}|m, n\rangle = \frac{(\mathcal{A}a_+^\dagger\mathcal{A})^m}{\sqrt{m!}}\frac{(\mathcal{A}a_-\mathcal{A})^n}{\sqrt{n!}}\mathcal{A}|0\rangle \overset{!}{=} \frac{(a_-)^m}{\sqrt{m!}}\frac{(a_+^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle = |n, m\rangle. \tag{44}$$

稳态 $|0\rangle$ 是厄米的。因此，我们有 $\mathcal{A}|0\rangle = |0\rangle$，由此可得 $\mathcal{A}a_+^\dagger\mathcal{A} = a_-$和 $\mathcal{A}a_-\mathcal{A} = a_+^\dagger$。对旋转后的超算符 a_c 和 a_q 的作用由 $\mathcal{A}a_c\mathcal{A} = a_c^\dagger$ 和 $\mathcal{A}a_q\mathcal{A} = -a_q^\dagger$给出。在基中的第一量子化形式

$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}_c,\ \boldsymbol{a}_c^\dagger,\ \boldsymbol{a}_q^\dagger,\ -\boldsymbol{a}_q)^T$，这一操作对应于

$$A = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} K \qquad \text{where} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}. \tag{45}$$

厄米性约束要求 $ALA = L$，因此 $XH_{\text{eff}}^* X = H_{\text{eff}}$ 和$XN^*X = N$。由于(24) 和 (22) 中的 H_{eff} 和 N源自林德布拉德方程，它们按构造满足这一对称性。特别是，辛结构在厄米性下也保持不变，其中 $AJA = J$。

密度矩阵是厄米的这一事实也解释了李维尔算符的谱关于实轴镜像的对称性，见图1。给定李维尔算符 $L\boldsymbol{s}_i = \lambda_i J\boldsymbol{s}_i$的本征值 λ_i 对应的广义本征矢量 $\boldsymbol{s}_i$，向量 $\boldsymbol{s}_i' = A\boldsymbol{s}_i$ 是本征值 λ_i^* 对应的本征矢量。这一事实可以通过直接计算得出

$$L\boldsymbol{s}_i' = LA\boldsymbol{s}_i = AL\boldsymbol{s}_i = \lambda_i^* AJA\boldsymbol{s}_i' = \lambda_i^* J\boldsymbol{s}_i'. \tag{46}$$

因此，本征值 λ_i 要么为实数，要么成复共轭对出现。对应于实本征值的特征向量 $\boldsymbol{s}_i$ 可以选择为满足约束$A\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{s}_i$。

4.2. 林德布拉德主方程的对称性

对于幺正动力学，基 $\boldsymbol{b}' = (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}^\dagger)^T$中的哈密顿量 $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b}'^\dagger H\boldsymbol{b}'$可以包含一种对称性。它由幺正矩阵 Ω ‖ 实现，该矩阵将 $\boldsymbol{b}' \mapsto \Omega\boldsymbol{b}'$变换。为了构成对称性，它必须满足 $\Omega^\dagger H\Omega = H$；此外，还要满足 $\Omega^\dagger iZ\,\Omega = iZ$，以保持玻色子的对易关系，并且满足 $X\Omega^*X = \Omega$，以保持 $b_i^\dagger$ 是 b_i的伴随。

对于封闭系统的任意酉对称性 Ω，我们将完整李维尔算符 L 的对称性定义为

$$\tilde{\Omega}^T L\tilde{\Omega} = L \quad \text{with} \quad \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega^* \end{pmatrix}. \tag{47}$$

完整对称性 $\tilde{\Omega}$是酉的且具有辛结构，并且 $\tilde{\Omega}^T J\,\tilde{\Omega} = J$。它还与$\tilde{}$厄米性 $[\Omega\ A] = 0$ 对易。对于 L 的块，它意味着

$$\Omega^\dagger H_{\text{eff}}\Omega = H_{\text{eff}} \qquad \text{and} \qquad \Omega N\Omega^T = N\,, \tag{48}$$

即，对称性作用于有效哈密顿量 H_{eff}，如同定义中的对称性作用于 H。

The 要求 $\Omega^\dagger iZ\,\Omega = iZ$ 以及 $X\Omega^*X = \Omega$ 要求它具有这种形式 m

$$\Omega = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P^* \end{pmatrix} \tag{49}$$

其中 P 是一个幺正矩阵。因此，当 H_{eff} 和 N 的块满足以下条件时，李维尔算符具有对称性。

$$\begin{aligned} &P^\dagger hP = h, \qquad P^T\Delta P = \Delta, \qquad P\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}, \\ &P^T UP = U, \qquad P^\dagger WP = W, \qquad P^T VP^* = V\,. \end{aligned} \tag{50}$$

我们将在第5.1节讨论酉对称性的一个例子。

‖ 若 Ω 是反幺正的，我们选择 ΩXK 作为酉对称性（由于厄米性）。

4.3. $\mathcal{PT}$-“对称性”

$\mathcal{PT}$-“对称性”已被提出，用以替代传统的幺正量子力学 [27]。在开放系统中，当吸收与发射相互抵消时，便实现了 $\mathcal{PT}$-“对称性”。若对称性未破缺，则所有 λ_i 均为纯虚数。更一般地，本征值成对出现，分别为 λ 和 $-\lambda^*$，参见封闭系统的 [27] 以及图 1。在我们的形式体系中，对于反幺正 Ω，若 Ω ¶ 且 $\Omega^\dagger H_{\rm eff}\Omega = H_{\rm eff}$、$\Omega^\dagger iZ\Omega = -iZ$，以及 $X\Omega^* X = \Omega$，则实现了 $\mathcal{PT}$-“对称性”。反线性映射 $\lambda \mapsto \lambda^*$，而 iZ 的反转则引入一个负号。因此，我们得到成对的本征值 λ，$-\lambda^*$。iZ 的反转对应于产生与湮灭算符的交换。这已表明增益与损耗之间的平衡 $^+$，另见下文。

与上文类似，对于任意反幺正的 Ω，我们定义李维尔算符为 $\mathcal{PT}$-“对称”，如果

$$\tilde{\Omega}^T L \tilde{\Omega} = L \quad \text{with} \quad \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & -\Omega \end{pmatrix}. \tag{51}$$

注意，$\Omega^T J \Omega = -J$（产生算符与湮灭算符的互换）以及 $[\Omega\ A] = 0$。Ω 的块固定为

$$\Omega = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} K \tag{52}$$

其中 $P = P^T$ 为实正交对称矩阵。这与 $\mathcal{PT}$-“对称性”的常规定义相联系，其中时间反演由 K 实现，宇称算符由幺正算符 P实现。对 $H_{\rm eff}$与 N 中各块各个部分的作用由下式给出

$$\begin{aligned} &Ph^*P = h, \qquad P\Delta^*P = \Delta, \qquad P\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{z}^*, \\ &PUP = U^\dagger, \qquad PWP = V\,. \end{aligned} \tag{53}$$

因此，具有 $\mathcal{PT}$-“对称性”的系统可由两个性质识别。第一，系统的哈密顿量本身是 $\mathcal{PT}$-“对称”的。第二，林德布拉德方程的耗散非幺正部分在增益与损耗过程互换下保持不变。注意，我们对 $\mathcal{PT}$-“对称性”的定义（51）是对 [29, 30] 中所提定义的推广。当 $\mathcal{PT}$-“对称性”未破缺˜且 $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$时，本征态可以选取为满足 $\Omega \boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{s}_i$。在˜对称性破缺的情形下，$\Omega$ 的作用将本征值为 λ_i 的本征态映射到其本征值为 $-\lambda_i^*$的配对态；证明过程与（46）等价。 $\mathcal{PT}$-“对称”系统的例子见第 5.2 节。

¶ 与上文类似，给定一个幺正的 Ω，表达式 $\Omega X K$ 是反幺正的，并满足 $\mathcal{PT}$-“对称性”的全部条件。$^+$ [28] 中已经表明，通过对损耗率进行时变调制，无需增益即可实现 $\mathcal{PT}$-对称性。

5. 应用

5.1. 采用约旦分解的失谐参量振荡器

作为我们一般方法的第一个应用，我们给出一个出现 Jordan 块的 1-玻色子系统示例。哈密顿量由下式给出

$$\mathcal{H} = \frac{\Delta}{2} a^\dagger a + \frac{i\epsilon}{4}\left(a^{\dagger 2} - a^2\right). \tag{54}$$

它在旋转框架中具有简并参量振荡器的物理实现，其失谐量为 Δ，驱动强度为 $\epsilon > 0$。与环境的耦合（热玻色-爱因斯坦占据数为 $\bar{n}$）可以通过速率为 γ 的单光子损耗来建模，其跳跃算符为

$$\mathcal{J}_1 = \sqrt{\gamma(\bar{n}+1)}\, a, \qquad \mathcal{J}_2 = \sqrt{\gamma \bar{n}}\, a^\dagger. \tag{55}$$

有效哈密顿量和噪声矩阵如下

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Delta - i\gamma & i\epsilon \\ -i\epsilon & \Delta + i\gamma \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & \gamma(2\bar{n}+1) \\ \gamma(2\bar{n}+1) & 0 \end{pmatrix}, \tag{56}$$

当 $\boldsymbol{z} = 0$。对于 $\epsilon = \Delta$ 李维尔算符矩阵 L 不可对角化，因此需要进行约旦分解 [8]。辛变换矩阵

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -i & \frac{(\epsilon+i\gamma)(2\bar{n}+1)}{\gamma} & \frac{(\epsilon^2+\gamma^2)(2\bar{n}+1)}{\gamma^2} \\ 0 & 1 & \frac{(i\epsilon+\gamma)(2\bar{n}+1)}{\gamma} & \frac{\epsilon(i\epsilon+\gamma)(2\bar{n}+1)}{\gamma^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix}. \tag{57}$$

将李维尔算符化为形式 $\mathcal{L} = -\frac{\gamma}{2}(v_1 u_1 + v_2 u_2) + \frac{\epsilon}{2} v_2 u_1$。注意，转移矩阵 S 满足迹保持条件，即左下块为零。本征态由 $|0, n_2\rangle$ 给出，本征值为 $\lambda = -\frac{\gamma}{2} n_2$。时间演化由 (35) 给出，其中 $\mu = -\frac{\gamma}{2}$和 $\nu = \frac{\epsilon}{2}$。

对于该模型，我们识别出两种对称性。首先，该模型在 $\epsilon = 0$处具有 U(1) 对称性，对应于玻色子数守恒。该对称性由 $P = e^{i\phi}$ 实现，对应于

$$\Omega = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}, \qquad \phi \in \mathbb{R}. \tag{58}$$

对于 $\epsilon > 0$ 的参量驱动，U(1) 对称性破缺为 $\mathbb{Z}_2$ 对称性（$\phi = 0, \pi$），剩余的对称操作为 $\Omega = \pm I_2$。当 $\boldsymbol{z} = 0$ 时，后一种对称性始终存在。它对应于玻色子数宇称的守恒。

5.2. 耦合谐振子中的 $\mathcal{PT}$-“对称性”

我们讨论一个关于两个玻色模（$m = 2$）的李维尔算符 $\mathcal{PT}$-‘对称’系统的示例。哈密顿量为，见 [29, 31],

$$\mathcal{H} = \frac{g}{2}(ab^\dagger + a^\dagger b). \tag{59}$$

它描述了两个通过耦合强度 g 交换激发的耦合振子。耗散通过

$$\mathcal{J}_1 = \sqrt{\gamma_l}\, a, \qquad \mathcal{J}_2 = \sqrt{\gamma_g}\, b^\dagger\,, \tag{60}$$

其中， γ_l 描述了模 a 的损耗率，而 γ_g 描述了模 b的增益率。相关矩阵如下所示

$$H_{\rm eff} = \begin{pmatrix} h_{\rm eff} & 0 \\ 0 & h_{\rm eff}^* \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & n \\ n & 0 \end{pmatrix} \tag{61}$$

with

$$h_{\rm eff} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i\gamma_l & g \\ g & i\gamma_g \end{pmatrix}, \qquad n = \begin{pmatrix} \gamma_l & 0 \\ 0 & \gamma_g \end{pmatrix}. \tag{62}$$

在 $\gamma_l = \gamma_g = \gamma$ 增益与损耗相匹配的点，系统具有带有 $P = X$的 $\mathcal{PT}$-“对称性”。相应的反幺正对称矩阵为

$$\Omega = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} K\,. \tag{63}$$

在 $\mathcal{PT}$-“对称”点，谱为 $\lambda = \pm i\sqrt{g^2 - \gamma^2/2}$。对于 $\gamma < |g|$， $\mathcal{PT}$-“对称性”未破缺。尽管如此，由于 Jordan 块，时间演化随时间线性增长，见 (35)。因此，系统是（多项式）不稳定的 [25]。当耗散更大时 $\gamma > |g|$， $\mathcal{PT}$-“对称性”破缺，时间演化呈指数发散。

6. 结论

总之，我们展示了如何通过辛变换对角化一个复对称矩阵。利用超算符形式，我们将林德布拉德主方程的对角化映射到了这一问题上。我们展示了李维尔算符的迹保持是“第三量子化”方法的关键要素，从而能够为李维尔算符的谱定义一个福克空间。有效非厄米哈密顿量作为李维尔算符的非对角块自然地出现在这一方法中。它们包含系统与环境相互作用的细节以及（辛）本征值。我们还确定了一个额外的噪声矩阵，它只取决于耗散。它不影响谱，而只对特征向量的形式起重要作用，参见 [2, 9]。

我们已经讨论了最简单的 $m = 1$ 玻色子情形下例外点的“对角化”。特别是，我们给出了时间演化算符的明确表达式。我们展示了如何在描述中纳入计数场（源项），从而能够在长时间极限下高效地计算（阶乘）累积量生成函数。此外，我们还讨论了林德布拉德方程的对称性。我们将厄米性要求表述为一种“对称性”。这解释了本征值要么为实数，要么以复共轭的形式出现这一事实

成对。它还对李维尔算符、可观测量以及其他对称性施加了限制。我们展示了如何将封闭系统的对称性提升为完整李维尔算符的对称性。此外，我们研究了 $\mathcal{PT}$-‘对称性’，它们表达了增益与损耗的平衡，因此描述了濒临不稳定的系统。

致谢

我们感谢 Yuli Nazarov 为本项目提供最初的动机，并感谢与LisaArndt 的富有成果的讨论。本工作得到德国科学基金会（DFG）资助，资助编号为 HA7084/8-1。

附录

由于辛对角化并非标准操作，我们提供一个基础的Python3脚本，该脚本给定一个对称矩阵 L，返回辛变换 S 以及本征值 λ。

```
导入 scipy.linalgasla
import numpy as np

# 将 L 变换为辛标准形的算法
#
# 参数 : L :                          偶数维的对称矩阵
# 返回:            (lamb,   S ):  辛特征值 lamb
#                                      以及传递矩阵 S
#                                      满足 S .T @ L @ S  =  [[0 ,lamb ]   ,  [羔羊 ,0]]
#                                      且 S . T @ J @ S  =  J
定义 辛正_规_形式 ( L ):
    n  =L. 形状 [0] // 2            # 块的维数
    # 标准辛形式
    J  =  np . kron ([[0 ,1] ,  [-1 ,0]] ,  np . identity ( n ))
    d ,  Q  =la . eig (L ,   J)     # 求解该          gen .  本征值          问题
    # 与重排. 本征值（置                          将配对放在正确          位置）
    ind  =  np . argsort (np . abs (d)) [np . r_ [:2*n :2 ,  1:2* n :2]]
    d  =d [ind ]                    # 重新排列本征值
    Q  =Q [:: , ind ]               # 重新排列特征向量
    T  =  Q @ J @ Q . T @ J         # 计算 T（定理 1 中的）
    B  =la . sqrtm ( T )            # 计算 B（定理 1 的）
    return   (d [: n ] ,  la . solve (B  ,  Q))
```

请注意，程序仅通过查看 λ_i的绝对值来寻找成对的 $\pm\lambda_i$ ，并不会固定标准形。只要 $|\lambda_i|$中不存在偶然简并，排序就能正常工作。在 $\mathcal{PT}$-‘对称性’的情况下，当这一假设不满足时，算法中的重排序部分必须进行调整。

参考文献

[1] T. Prosen。《第三量子化：求解二次开放费米系统主方程的一般方法》。新物理学杂志，10:043026，2008。[2] T. Prosen 和T. H.Seligman。《玻色子算符空间上的量子化》。J. Phys.A，43:392004，2010。[3] M. Ban。《量子光学中的李代数方法：李维尔空间表述》。《物理评论 A》，47:5093，1993。[4] T. Arimitsu 和H. Umezawa。《非平衡热场动力学的一般表述》。Prog. Theor. Phys.，74:429，1985。[5] C. Guo和 D. Poletti。《玻色子和费米子耗散二次开放系统的解》。《物理评论 A》，95:052107，2017。[6] A.McDonald 和 A. A.Clerk。《通过弱对称性精确求解相互作用耗散系统》。Phys.Rev. Lett.，128:033602，2022。[7] T. Barthel和Y.Zhang。《求解开放费米子和玻色子系统的准自由和二次林德布拉德主方程》。J.Stat. Mech.，2022:113101，2022。[8]F. Thompson和 A. Kamenev。《多体林德布拉德动力学的场论》。arXiv:2301.02953，2023。[9]A. McDonald和A.A. Clerk。《开放量子系统的第三量子化：新的耗散对称性及其与相空间和 Keldysh 场论表述的联系》。arXiv:2302.14047，2023。[10] F.Hassler、S. Kim 和 L.Arndt。《阈值处简并参量振荡器的辐射统计》。SciPost 物理，14:156，2023。[11] F. R. Gantmacher。《矩阵理论》。ChelseaPublishing Company，第 1 卷，第V 章，§1，1959。[12] A. J. Laub 和K. Meyer。《辛矩阵和哈密顿矩阵的标准形》。Celest. Mech.Dyn.Astron.，9:213，1974。特别参见推论 3.1。[13] F. Nicacio。《经典、量子和统计物理中的 Williamson定理》。Am. J. Phys.，89:1139，2021。[14] F. Minganti、A.Biella、N. Bartolo 和 C. Ciuti。《耗散相变的李维尔算符谱理论》。《物理评论 A》，98:042118，2018。[15] A.Kamenev。《非平衡系统的场论》。剑桥大学出版社，2011。[16] J. H. P.Colpa。《二次玻色子哈密顿量的对角化》。Physica A，93:327，1978。[17] E. J. Bergholtz、J.C.Budich 和 F. K. Kunst。《非厄米系统的例外拓扑》。Rev.Mod. Phys.，93:015005，2021。[18] L.Arndt 和F. Hassler。《局部分岔阈值以下光子计数的普适性》。《物理评论 A》，103:023506，2021。[19] F.Brange、P.Menczel 和 C.Flindt。《微波腔的光子计数统计》。《物理评论 B》，99:085418，2019。[20] C. Padurariu、F.Hassler 和 Yu. V. Nazarov。《约瑟夫森参量共振中的辐射统计》。《物理评论 B》，86:054514，2012。[21] L. Arndt 和F.Hassler。《非简并约瑟夫森参量下转换导致的辐射统计》。《物理评论 B》，100:014505，2019。[22] L.Mandel 和 E.Wolf。《光学相干性与量子光学》。剑桥大学出版社，1995。[23]C.W. J. Beenakker。《随机介质的热辐射与放大自发发射》。《物理评论快报》，81:1829，1998。[24]D. Kambly、C.Flindt 和M. B¨uttiker。《阶乘累积量揭示计数统计中的相互作用》。《物理评论 B》，83:075432，2011。[25] V. V.Albert 和 L. Jiang。《林德布拉德主方程中的对称性与守恒量》。《物理评论 A》，89:022118，2014。[26] B.Bu˘ca和T. Prosen。《关于林德布拉德方程的对称性约化的注记：输运 in

受约束的开放自旋链。新物理学杂志，14:073007，2012。[27] C. M. Bender、S. Boettcher 和 P. N. Meisinger。 $\mathcal{PT}$-对称量子力学。数学物理杂志，40:2201，1999。[28] L.Teuber、F. Morawetz 和S. Scheel。无源 $\mathcal{PT}$-对称 Floquet 耦合器。《物理评论*A*》，103:063709，2021。[29] Y. Nakanishi 和 T. Sasamoto。具有林德布拉德动力学的开放量子系统中的 $\mathcal{PT}$ 相变。《物理评论*A*》，105:022219，2022。[30] J. Huber、P. Kirton、S.Rotter和P. Rabl。开放量子系统中 $\mathcal{PT}$-对称性破缺的涌现。*SciPost* 物理，9:052，2020。[31] F.Roccati、S.Lorenzo、G. M. Palma、G. T. Landi、M.Brunelli 和F. Ciccarello。 $\mathcal{PT}$-对称系统中的量子关联。量子科学与技术，6:025005，2021。