关于二维 Sigma 模型的两圈有效作用量

P. V. Akacevich‡ A. V. Ivanov†

俄罗斯科学院斯捷克洛夫数学研究所圣彼得堡分部，俄罗斯圣彼得堡丰坦卡街27号，邮编191023；莱昂哈德·欧拉国际数学研究所，俄罗斯圣彼得堡佩索奇纳亚滨海路10号，邮编197022

‡电子邮箱：pavel.akacevich@yandex.ru

†电子邮箱：regul1@mail.ru

arXiv:2304.02374v1 [hep-th] 5 Apr 2023

摘要

本文研究二维σ模型有效作用量的两圈贡献。我们推导出一个新公式，可适用于一般类型的正则化。作为示例，我们得到了维数正则化下的已知结果，并探讨了新型截断正则化。此外，我们还讨论了非局域贡献以及对正则化的限制。

关键词和短语：σ模型、截断正则化、维数正则化、格林函数、两圈贡献、重整化

目录

1 引言 1 2 σ模型 2 3 两圈发散部分 4

4 应用 6 4.1 维数正则化.6 4.2 截断正则化.7

5 结论 **8**

1 引言

研究量子场论模型的一种方法是针对小参数对路径积分进行微扰展开 [1–3] 。遗憾的是，这类展开通常包含发散积分 [4–6], , 这是对广义函数 [7,8] 及其非线性组合进行积分所导致的。这一事实使得引入适当的正则化成为必要。

实践表明，引入正则化的方法有很多。例如，我们可以想到维数正则化 [9, 10] ，以及近期表述中的截断正则化 [11–14], ；它们在各种计算中都相当常见。当然，还有其他不同的正则化方法，本文不予讨论，可结合我们的结果另行研究。需要指出的是，并非所有正则化方法都能保留理论所需的全部对称性。

本文研究标准二维σ模型 [15, 16] 的有效作用量的两圈贡献。我们推导出一个关于发散部分的新公式，该公式适用于任意正则化。本文推广了 [17], 的结果，并作出了一些重要修正；该文研究了两种特殊的正则化。我们还对模型中的一种正则化作出若干重要补充说明，并讨论非局域贡献和非对数奇异性。

本文结构如下。第 2 节介绍二维σ模型的基本概念，引入修正后的费曼技术规则，并推导两圈有效作用量的图表示。第 3 节研究两圈贡献的红外部分，并推导一个新公式。第 4 节研究几种常用的红外正则化，并使用新公式计算发散部分。此外，我们在“评注”一节中将本文结果与 [17] 中的结果进行比较。最后一节讨论研究结果及后续工作。

2 Sigma模型

设 SU(n) 为 $n \in \mathbb{N}$ 次特殊酉群，参见 [18], ，而 $\mathfrak{su}(n)$ 是其李代数。设 t^a 为代数 $\mathfrak{su}(n)$ 的生成元，其中 $a \in \{1, \dots, \dim \mathfrak{su}(n)\}$，使得下列关系成立

$$[t^a, t^b] = f^{abc} t^c, \quad \operatorname{tr}(t^a t^b) = -\frac{1}{2}\delta^{ab}, \tag{1}$$

其中 f^{abc} 是 $\mathfrak{su}(n)$ 的反对称结构常数，而 'tr' 是基灵形式。我们采用伴随表示。容易验证，这些结构常数具有以下关键性质

$$f^{abc} f^{aef} = f^{abf} f^{aec} - f^{acf} f^{aeb}, \;\; f^{abc} f^{abe} = c_2 \delta^{ce}. \tag{2}$$

我们在二维欧几里得空间 $\mathbb{R}^2$ 中工作，其元素记为 x 和 y。同时，希腊字母 μ、ν 表示相应的坐标分量。此外，我们用下列公式定义 sigma 模型 [16] 的经典作用量与量子作用量

$$S[C] = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \, C^a_\mu(x) C^a_\mu(x) \;\text{ and }\; W = -\ln\left(\int_{\mathcal{H}} \mathcal{D}g \, e^{-S[C]/4\gamma^2} \right), \tag{3}$$

其中 γ 是耦合常数， $C^a_\mu(x) t^a = (\partial_{x^\mu} g(x)) g^{-1}(x) \in \mathfrak{su}(n)$，且对所有 $x \in \mathbb{R}^2$ 有 $g(x) \in \mathrm{SU}(n)$，而 $\mathcal{H}$ 是一个可根据物理理由定义的函数空间。

然后，根据背景场方法 [19–23], 的主要思想，我们在路径积分(3)中作如下变量替换 $g(x) = e^{\gamma\phi(x)} h(x)$。此外，为方便起见，我们再引入一个辅助规范场 $B^a_\mu(x) t^a = (\partial_{x^\mu} h(x)) h^{-1}(x) \in \mathfrak{su}(n)$、其矩阵值表示$B^{ab}_\mu(x) = f^{abc} B^b_\mu(x)$、对应于该规范场的协变导数$D^{ab}_{x^\mu} = \partial_{x^\mu} \delta^{ab} - B^{ab}_\mu(x)$，以及如下拉普拉斯型算子 $A^{ab}(x) = -D^{ab}_{x_\mu} \partial_{x^\mu} / 2$。

利用上述结果，我们可以将变量替换后的经典作用量改写为

$$\frac{S[C]}{4\gamma^2} = \frac{S[B]}{4\gamma^2} + \frac{1}{2\gamma}\Gamma_1[\phi] + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} d^2x \, \phi^a(x) A^{ab}(x) \phi^b(x) - \frac{\gamma}{12}\Gamma_3[\phi] - \frac{\gamma^2}{48}\Gamma_4[\phi] + \mathcal{O}(\gamma^3), \tag{4}$$

其中

$$\Gamma_1[\phi] = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \, B^a_\mu(x) \partial_{x_\mu} \phi^a(x), \;\; \Gamma_3[\phi] = -\int_{\mathbb{R}^2} d^2x \, f^{bea} B^{bc}_\mu(x) \phi^c(x) \phi^e(x) \partial_{x_\mu} \phi^a(x), \tag{5}$$

$$\Gamma_4[\phi] = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \, f^{abe} f^{cde} \phi^a(x) \big(\partial_{x^\mu} \phi^b(x)\big) \phi^c(x) D^{dh}_{x_\mu} \phi^h(x). \tag{6}$$

含 γ^n （针对 $n \geqslant 3$ ）的项在本文中并未使用。它们由 S_n给出，参见 [17], 第2节中的最后一个公式，其中方括号内 $1/2$ 前面的减号应替换为加号。

请注意，现在我们可以为费曼图技术引入规则。鉴于我们只研究两圈贡献，因此只需定义三个元素：分别对应于 Γ_3 和 Γ_4的三条和四条外线顶点，以及对应于格林函数的一条线。这些元素见图 1。为方便起见，顶点经过了少许修改，见 [13, 24], ，因为它们用线的排列顺序表示结构常数中指标的顺序，并用圆点表示背景场的存在。

这种类型的变换非常有用，因为它使我们能够将微扰展开应用于量子作用量。实际上，让我们将分解式 (4) 代入式 (3) 中的路径积分并进行计算。

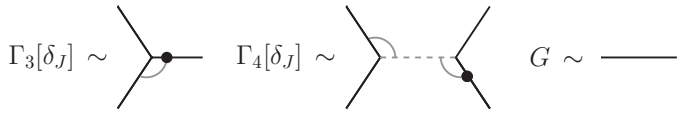

图1：图示技术元素。

标准高斯积分，见 [25]。然后，利用规范场 $B_\mu(x)$ 是背景场、满足量子运动方程并抵消所有眼镜型图的这一事实，我们得到量子作用量或有效作用量的如下展开：

$$W[B] = \frac{S[B]}{4\gamma^2} + \frac{1}{2}\ln\det(A) - \gamma^2\left(\frac{1}{288}\Gamma_3^2[\delta_J] + \frac{1}{48}\Gamma_4[\delta_J]\right)e^{g[J]}\Big|_{J=0}^{\text{1PI part}} + \mathcal{O}(\gamma^4). \tag{7}$$

这里我们引入一个辅助泛函，形式如下

$$g[J] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} d^2x \int_{\mathbb{R}^2} d^2y\, J^a(x)G^{ab}(x,y)J^b(y), \tag{8}$$

使用格林函数

$$A^{ab}(x)G^{bc}(x,y) = \delta^{ac}\delta(x-y). \tag{9}$$

公式（7）中的第二项是单圈修正。其发散部分已广为人知，可写为 $-c_2 S[B]/16\pi\varepsilon$ （采用维数正则化时），或者在采用截断正则化时，用 $L = \ln(\Lambda/\mu)$ 代替 $1/\varepsilon$ 。第三项对应于二维σ模型量子作用量的两圈贡献。让我们在格林函数中引入某种红外正则化（区域 $x \sim y$），并引入两个辅助对象

$$W_a[B] = \Gamma_3^2[\delta_J]e^{g[J]}\Big|_{J=0}^{\substack{\text{IR-reg.}\\ \text{1PI part}}}, \quad W_b[B] = \Gamma_4[\delta_J]e^{g[J]}\Big|_{J=0}^{\substack{\text{IR-reg.}\\ \text{1PI part}}}, \tag{10}$$

它们分别绘于图2和图3中。

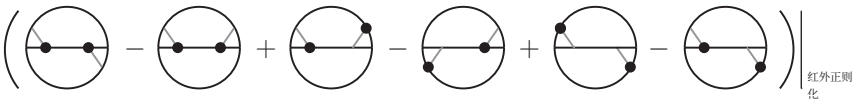

图 2： $W_a[B]$ 的图表示。

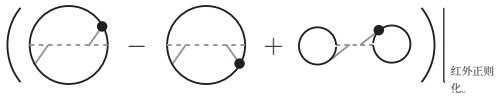

图 3： $W_b[B]$ 的图表示。

有趣的是，泛函 W_a 和 W_b 具有与杨–米尔斯理论相同的图表示。因此，我们可以说，二维σ模型是四维杨–米尔斯理论的简化版本，相关研究见论文 [1,12,13,24]。不过，两圈贡献之间存在差异，因为我们需要研究 W_a 和 W_b 与其他系数构成的线性组合。因此，根据主理论，我们可以通过以下关系定义有效作用量中的正则化两圈贡献W_2^{reg}

$$W_2^{\text{reg}}[B] = -\frac{1}{288}W_a[B] - \frac{1}{48}W_b[B]. \tag{11}$$

3 双圈发散部分

本工作的主要目的是推导两圈贡献发散部分的公式，见式（11）。在 Seeley–DeWitt 系数 [28, 29] 不受正则化破坏的情况下，该公式可用于任意类型的红外正则化。Seeley–DeWitt 系数有时也以 Hadamard、Minakshisundaram [26], 和 Gilkey [27]的名字命名。

为继续讨论，我们需要介绍格林函数在对角线附近展开的一些基本公式 $x \sim y$。此外，为方便起见，我们省略群指标的记号，也就是说，我们使用矩阵进行计算。那么，在二维情形下，有如下展开式 [30, 31]

$$G(x,y) = 2R_0(x-y)a_0(x,y) + 2R_1(x-y)a_1(x,y) + 2PS(x,y) + o(|x-y|^2), \tag{12}$$

其中， $a_n(x,y)$ 是 Seeley–DeWitt 系数，它通过热核方法构造 [32,33] ，其表达式可见于 [27, 34–36]。此外， μ 是一个辅助参数，用于使组合 $|x|\mu$ 无量纲，

$$R_0(x) = -\frac{1}{4\pi}\ln\big(|x|^2\mu^2\big), \;\; R_1(x) = \frac{1}{16\pi}|x|^2\big(\ln\big(|x|^2\mu^2\big) - 1\big), \tag{13}$$

而 $PS(x,y)$ 是光滑部分。很容易验证，后面的函数满足以下关系

$$-\partial_{x_\mu}\partial_{x^\mu}R_0(x) = \delta(x), \;\; -\partial_{x_\mu}\partial_{x^\mu}R_1(x) = R_0(x) - \frac{1}{4\pi}, \;\; \partial_{x_\mu}R_1(x) = -\frac{x^\mu}{2}R_0(x), \tag{14}$$

$$a_1(x,x) = -\frac{1}{4}B_\mu(x)B_\mu(x) + \frac{1}{2}\partial_{x_\mu}B_\mu(x) = -2A(x)a_0(x,y)\big|_{y=x} = 8\pi A(x)PS(x,y)\big|_{y=x}. \tag{15}$$

此外，我们可以断言， $a_0(x,y)$ 等于一个路径序指数，见 [16], ；它满足以下方程

$$(x-y)^\mu(\partial_{x^\mu} - B_\mu(x)/2)a_0(x,y) = 0, \;\; a_0(x,x) = 1. \tag{16}$$

现在我们可以继续推导主要公式。先从贡献项 W_a 开始。根据图 2，它由六个图组成。所有这些图具有相同的结构，因此我们仅说明第一个图的计算。其余各项也可用同样的方法分析。

请注意，为了得到红外奇异性，我们需要找到一个关于 $|x-y|$ 的负次幂密度。只有在以下情况下才可能做到：要么将所有格林函数 $G^{ab}(x,y)$ 都替换为$2\delta^{ab}R_0(x-y)$，要么将其中两个替换为 $2\delta^{ab}R_0(x-y)$，并将第三个替换为$2PS^{ab}(x,y)$，见公式 (12)。因此，按照 [11–13], 的主要思路，对于第一个图我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^d} d^dx \int_{\mathbb{R}^d} d^dy\, f^{abc}f^{deg}\big(\partial_{x_\mu}G^{ag}(x,y)\big)B^{bf}_\mu(x)G^{fh}(x,y)B^{eh}_\nu(y)\partial_{y_\nu}G^{cd}(x,y)\Big|^{\text{IR-reg.}} \overset{\text{IR}}{=} \frac{8}{d}\mathrm{I}_1 S[B] - \frac{8}{d}\mathrm{I}_2 J_1[B],$$

其中，符号 $\overset{\text{IR}}{=}$ 表示奇异部分相等，并且

$$\mathrm{I}_1 \overset{\text{IR}}{=} c_2^2\int_{\mathrm{B}_{1/\mu}} d^dx\,\big(\partial_{x_\mu}R_0(x)\big)\big(\partial_{x^\mu}R_0(x)\big)R_0(x)\Big|^{\text{IR-reg.}}, \tag{17}$$

$$\mathrm{I}_2 \overset{\text{IR}}{=} c_2\int_{\mathrm{B}_{1/\mu}} d^dx\,\big(\partial_{x_\mu}R_0(x)\big)\big(\partial_{x^\mu}R_0(x)\big)\Big|^{\text{IR-reg.}}, \tag{18}$$

$$J_1[B] = \int_{\mathbb{R}^d} d^dx\, B^{ab}_\mu(x)PS^{bc}(x,x)B^{ca}_\mu(x), \tag{19}$$

$$J_2[B] = \frac{1}{c_2}\int_{\mathbb{R}^d} d^dx\, f^{abc}f^{aed}B^{bh}_\mu(x)B^{he}_\mu(x)PS^{cd}(x,x), \tag{20}$$

$$J_3[B] = \int_{\mathbb{R}^d} d^dx\, PS^{aa}(x,x). \tag{21}$$

这里，$\mathrm{B}^{1/\mu}$ 是以原点为中心、半径为 $1/\mu$ 的球。这是双圈计算中的一个已知特征[11–13]：半径可以选为与式（13）中的固定维数参数相等。除此之外，我们还引入了一些用于后续计算的附加对象。此外，我们将维数参数 2 改为 d，以便应用维数正则化。然后，对其余图中的所有图形重复计算，得到以下奇异性表格，其中六列分别对应图 2 中的各个图形。

Terms	1	2	3	4	5	6
$2\mathrm{I}_1 S[B]/d$	4	8	-2	2	4	2
$2\mathrm{I}_2 J_1[B]/d$	-4	-4	-2	-2	-4	-2
$2\mathrm{I}_2 J_2[B]/d$	0	-4	4	0	0	0

因此，将上一张表中的所有部分相加，我们得到有效作用量第一部分两圈部分的结果

$$W_a[B] \overset{\mathrm{IR}}{=} \frac{36}{d}\mathrm{I}_1 S[B] - \frac{36}{d}\mathrm{I}_2 J_1[B]. \tag{22}$$

值得注意的是，非局域项 $J_2[B]$ 不会对发散部分产生贡献。与此同时，第一项非局域部分 $J_1[B]$ 仍然保留。因此，由于该模型的发散项具有局域性，它应当被来自 $W_b[B]$ 的贡献抵消。

为了进一步讨论，我们需要说明对正则化类型的一些额外限制。鉴于我们处理的是对角线上的格林函数，当 $x \sim y$时，必须要求

$$R_0(x)\big|_{x=0}^{\text{IR-reg.}} \text{ and } \partial_{x_\mu}\partial_{x^\mu}\Big(R_1(x)\Big|^{\text{IR-reg.}}\Big)\Big|_{x=0} \text{ are finite} \tag{23}$$

对于正则化参数的所有固定取值（不包括极限点）。这一限制带来以下额外性质

$$x^\mu \partial_{x^\mu}\Big(R_0(x)\Big|^{\text{IR-reg.}}\Big)\Big|_{x=0} = |x|^2 \partial_{x_\mu}\partial_{x^\mu}\Big(R_0(x)\Big|^{\text{IR-reg.}}\Big)\Big|_{x=0} = 0, \tag{24}$$

$$\Big(\partial_{x_\mu}\Big(R_0(x)\Big|^{\text{IR-reg.}}\Big)\Big)\partial_{x^\mu}\Big(R_1(x)\Big|^{\text{IR-reg.}}\Big)\Big|_{x=0} = 0. \tag{25}$$

因此，后续计算中可以省略上述组合。

接着，对第二部分 $W_b[B]$进行上述处理后，我们得到以下三项贡献（列），分别对应图 3 中的相应图示。需要指出的是，为简洁起见，表中省略了参数以及缩写 $\big|_{x=0}^{\text{IR-reg.}}$。此外，我们还引入了额外算子 $N(x) = \partial_{x_\mu}\partial_{x^\mu}$。

Terms	1	2	3
$c_2^2 S[B]$	$-R_0^2/2$	$-R_0^2 - R_0 N R_1 - R_1 N R_0 + R_0/4\pi$	$-R_0^2$
$c_2 J_1[B]$	R_0	0	$2R_0$
$c_2 J_2[B]$	0	$R_0 + N R_1$	0
$4c_2 J_3[B]$	0	$-N R_0$	0

因此，求和后可得第二项 $W_b[B]$ 的结果，形式如下

$$\begin{aligned} W_b[B] - W_b[0] \overset{\mathrm{IR}}{=} c_2^2 S[B]\Big(-5R_0^2/2 - R_0 N R_1 - R_1 N R_0 + R_0/4\pi\Big)(x)\Big|_{x=0}^{\text{IR-reg.}} \\ + 3c_2 J_1[B] R_0(x)\Big|_{x=0}^{\text{IR-reg.}} + c_2 J_2[B]\Big(R_0 + N R_1\Big)(x)\Big|_{x=0}^{\text{IR-reg.}} - 4c_2 J_3[B] N(x) R_0(x)\Big|_{x=0}^{\text{IR-reg.}}. \end{aligned} \tag{26}$$

因此　再次利用公式 (11)、(22) 和 (26)，我们可以表述出以下最终结果　：

$$\begin{aligned} W_2^{\text{reg}}[B] - W_2^{\text{reg}}[0] \overset{\mathrm{IR}}{=} &-\frac{1}{8}S[B]\left(\frac{1}{d}\mathrm{I}_1 - \frac{c_2^2}{6}\Big(5R_0^2/2 + R_0 N R_1 + R_1 N R_0 - R_0/4\pi\Big)(x)\Big|_{x=0}^{\text{IR-reg.}}\right) \\ &+ \frac{1}{8}J_1[B]\left(\frac{1}{d}\mathrm{I}_2 - \frac{c_2}{2}R_0(x)\Big|_{x=0}^{\text{IR-reg.}}\right) - \frac{c_2}{48}J_2[B]\Big(R_0 + N R_1\Big)(x)\Big|_{x=0}^{\text{IR-reg.}} \\ &+ \frac{c_2}{12}J_3[B] N(x) R_0(x)\Big|_{x=0}^{\text{IR-reg.}}. \end{aligned} \tag{27}$$

下面讨论这一构造的一些有趣性质。首先，它具有非对数奇异性，见最后一项。其次，其中同时存在两个非局部部分，见 $J_1[B]$ 和 $J_2[B]$。根据主要思想，第一个部分应与 $W_a[B]$ 中相应的项相消，而第二个部分本身不应产生贡献。关于所有这些问题，我们将在下一节中利用一些具体的正则化及其适当限制进行研究。

4 应用

本节将通过坐标表示中的维数正则化和截断正则化，考察一些示例。首先，我们需要介绍正则化的另外两个限制条件。

$$\mathrm{I}_2 \overset{\mathrm{IR}}{=} c_2 R_0(x)\Big|_{x=0}^{\text{IR-reg.}}, \quad \Big(R_0 + N R_1\Big)(x)\Big|_{x=0}^{\text{IR-reg.}} \overset{\mathrm{IR}}{=} 0. \tag{28}$$

实际上，第一个条件相当自然，因为它建立了对数的变形与其在原点处的积分表示之间的联系。第二个条件使 R_1 具有额外的光滑性。为消去非局域部分，这些限制条件由公式（27）推出。

4.1 维数正则化

我们先从最常用的一类正则化谈起，它在各种多圈计算中频繁出现。按照其基本思想，我们需要借助辅助无量纲参数 ε 对函数（13）进行变形。

$$R_0^\varepsilon(x) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2\mu^{-\varepsilon}}{\varepsilon} + \pi^{\varepsilon/2}\Gamma(-\varepsilon/2)|x|^\varepsilon\right) + \frac{\mu^{-\varepsilon}}{4\pi}(\gamma_0 + \ln\pi), \tag{29}$$

$$R_1^\varepsilon(x) = \frac{|x|^2}{16\pi}\left(\frac{-2\mu^{-\varepsilon}}{\varepsilon} + \pi^{\varepsilon/2}\Gamma(-1-\varepsilon/2)|x|^\varepsilon\right) - \frac{|x|^2\mu^{-\varepsilon}}{8\pi d}(\gamma_0 + \ln\pi), \tag{30}$$

其中，γ_0 是欧拉–马歇罗尼常数，$\varepsilon > 0$ 很小，且 $d = 2 - \varepsilon$。不难验证，当 $\varepsilon \to +0$ 时，函数 $R_i^\varepsilon(x)$ 趋于 $R_i(x)$，其中 $i = 0$、1。此外，我们还可以写出以下等式。

$$-\partial_{x_\mu}\partial_{x^\mu} R_0^\varepsilon(x) = \delta(x), \quad -\partial_{x_\mu}\partial_{x^\mu} R_1^\varepsilon(x) = R_0^\varepsilon(x) - \frac{\mu^{-\varepsilon}}{4\pi}, \tag{31}$$

它们与（14）中的形式相同。由此我们立即得到

$$\mathrm{I}_1 \overset{\mathrm{IR}}{=} \frac{c_2^2}{2}\int d^d x \Big(-\partial_{x_\mu}\partial_{x^\mu} R_0^\varepsilon(x)\Big) R_0^\varepsilon(x) R_0^\varepsilon(x) \overset{\mathrm{IR}}{=} \frac{c_2^2}{2}\Big(R_0^\varepsilon(0)\Big)^2, \tag{32}$$

$$\mathrm{I}_2 \overset{\mathrm{IR}}{=} c_2 \int d^d x \Big(-\partial_{x_\mu}\partial_{x^\mu} R_0^\varepsilon(x)\Big) R_0^\varepsilon(x) \overset{\mathrm{IR}}{=} c_2 R_0^\varepsilon(0), \tag{33}$$

这里我们多次使用了分部积分。因此，我们得到以下结果

$$\text{Pole of } \big(W_2^{\mathrm{reg}}[B] - W_2^{\mathrm{reg}}[0]\big) \overset{\mathrm{IR}}{=} -\frac{\varepsilon c_2^2}{64} S[B]\Big(R_0^\varepsilon(0)\Big)^2 \overset{\mathrm{IR}}{=} -\frac{1}{\varepsilon}\frac{c_2^2\mu^{-2\varepsilon}}{256\pi^2} S[B]. \tag{34}$$

这个公式与已知结果一致。请注意，我们写了“极点”一词，以省略对 $J_3 B$ 的讨论；它与 $\delta(0)$ 一同出现。众所周知，在维数正则化中，这类项可以通过适当的平移予以消去。

备注：尽管我们的答案与 [17]，中的一个一致，但我们需要强调，计算过程中存在两处差异。第一处是有效作用量定义中的一个负号。第二处是积分 I_1 和 I_2，的结果，而这实际上导致了第二个负号。请比较式（32）、（33）与 [17] 中的公式（П.5а）。

4.2 截断正则化

这种正则化方式更加自然，因为它保留了空间的维数（$d = 2$），尽管与此同时它会破坏内部对称性。请注意，所有计算均在坐标表示下进行。我们希望检验两种最常用的截断正则化，它们适用于存在局部热核（Seeley–DeWitt）系数的情形。

截断-1。这种类型出现在许多近期工作中，参见 [11–14,31], ，与已知计算相比显示出非常好的结果。这在一定程度上是由于正则化中存在可在适当时机使用的自由参数。

根据 主要思想，我们需要引入基本变形 $R^{\Lambda,\,1\,0}$，用于（13），并借助 ge 一个辅助 参数

$$R_0^{\Lambda,1}(x) = \frac{\mathbf{f}\big(|x|^2\Lambda^2\big)}{4\pi} + \frac{1}{4\pi}\begin{cases} -\ln(|x|^2\mu^2), & |x| > 1/\Lambda; \\ 2L, & |x| \leqslant 1/\Lambda, \end{cases} \tag{35}$$

其中 $\mathrm{supp}(\mathbf{f}) \subset [0,1]$, $L = \ln(\Lambda/\mu)$，且极限 $\Lambda \to +\infty$ 消除了正则化。当然，我们需要对函数 $\mathbf{f}$ 要求一些额外性质，因为我们希望其具有适当的光滑性，不含非对数部分，并且组合 $N(x)\mathbf{f}\big(|x-y|^2\Lambda^2\big)$ 在广义函数意义下，当 $\Lambda \to +\infty$ 时应趋于零。因此，我们可以写出以下条件组：

$$\mathbf{f}(\cdot) \in C^2\big([0,+\infty)\big), \;\; \mathbf{f}'(0) = 0. \tag{36}$$

需要指出的是，等式 $\mathbf{f}(1) = \mathbf{f}'(1) = 0$ 是由上述性质推出的，因为该函数的支集位于 $[0,1]$。

然后，为保持一般性，我们不引入 $R^{\Lambda,\,1\,1}$ 变形的显式形式，但 (28) 中的第二个性质除外，它可以表示为 $R^{\Lambda,\,1\,0}(0) + NR^{\Lambda,\,1\,1}(0) \to \alpha/4\pi \in \mathbb{R}$，其中 $\Lambda \to +\infty$。接下来，利用上述公式，我们得到以下结果

$$\mathrm{I}_1 \overset{\mathrm{IR}}{=} \frac{c_2^2}{8\pi^2}\left(L^2 + L\int_0^1 ds\, s\Big(\mathbf{f}'(s)\Big)^2\right), \;\; \mathrm{I}_2 \overset{\mathrm{IR}}{=} \frac{c_2 L}{2\pi}, \;\; NR_0^{\Lambda,1}(0) = 0, \tag{37}$$

最后，我们得到如下形式的两圈发散部分

$$\big(W_2^{\mathrm{reg}}[B] - W_2^{\mathrm{reg}}[0]\big) \overset{\mathrm{IR}}{=} -\frac{c_2^2 L S[B]}{64\pi^2}\hat{\alpha}, \tag{38}$$

其中

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{1-\alpha-3\mathbf{f}(0)}{6} + \frac{1}{2}\int_0^1 ds\, s\Big(\mathbf{f}'(s)\Big)^2\right). \tag{39}$$

最后一个公式包含几个参数，可以通过一些额外的要求来确定。遗憾的是，两圈部分提供的限制条件不足，因此我们关注三圈计算，它可能包含一些额外的关系。例如，我们可以在坐标表示中采用显式截断 [14], ，这会导出 $\mathbf{f}(\cdot) = 0$、$\alpha = 1$ 和 $\hat{}\alpha = 0$。

截断-2。最后一个例子描述了另一种变形 $|\cdot|^2 \to |\cdot|^2 + 1/\Lambda^2$，它出现在四维杨–米尔斯理论 [13,37] 的背景下。在这种情况下，我们有

$$R_0^{\Lambda,2}(x) = -\frac{1}{4\pi}\ln\big(|x|^2\mu^2 + \mu^2/\Lambda^2\big), \;\; R_1^{\Lambda,2}(x) = \frac{|x|^2 + 1/\Lambda^2}{16\pi}\big(\ln\big(|x|^2\mu^2 + \mu^2/\Lambda^2\big) - 1\big). \tag{40}$$

然后，经过一系列简单的计算，我们得到以下结果

$$NR_0^{\Lambda,2}(0) = -\frac{\Lambda^2}{\pi}, \;\; NR_1^{\Lambda,2}(0) = -R_0^{\Lambda,2}(0) = -\frac{L}{2\pi}, \tag{41}$$

$$\mathrm{I}_1 \overset{\mathrm{IR}}{=} -\frac{c_2^2}{16\pi^2}\int_{1/\Lambda^2}^{1/\mu^2} ds\,\frac{\ln\left(s\mu^2\right)}{s}\left(1-1/s\Lambda^2\right) \overset{\mathrm{IR}}{=} \frac{c_2^2}{8\pi^2}\left(L^2-L\right),\ \ \mathrm{I}_2 \overset{\mathrm{IR}}{=} c_2 R_0^{\Lambda,2}(0) = \frac{c_2 L}{2\pi}, \tag{42}$$

$$\left(W_2^{\mathrm{reg}}[B] - W_2^{\mathrm{reg}}[0]\right) \overset{\mathrm{IR}}{=} \frac{c_2^2 L S[B]}{128\pi^2} - \frac{c_2\Lambda^2}{12\pi} J_3[B]. \tag{43}$$

我们看到 th 最终结果中包含非对数发散。这是 t 的一个负面特征 he
提到 所提到的正则化，并限制其使用。

本节最后，我们要总结三种正则化的结果。我们重点讨论了四个方面：主极点的值、对数非局域部分的有无、非对数部分以及自由参数。

特征	维数正则化	截断-1	截断-2
极点 $=-c_2^2 S[B]/64\pi^2\times$	$\mu^{-2\varepsilon}/4\varepsilon$	$L\hat{\alpha}$	$-L/2$
不存在对数非局域部分	yes	yes	yes
不存在非对数部分	no	yes	no
存在自由参数	no	yes	no

因此，不同的正则化可能会得到不同的结果。此外，通过使用手动引入正则化过程的自由辅助参数，我们实际上可以得到主极点的各种取值。

5 结论

在本文中，我们研究了二维σ模型的两圈有效作用量的奇异部分。我们得到了新的公式（27），该公式可用于任意类型的红外（对角线附近）正则化。在本文的最后部分，我们讨论了一些常用的正则化方法，即维数正则化和截断正则化。我们描述了它们的相似之处和差异，并将所得结果与已知结果进行了比较。此外，我们还指出了对正则化的一些有用限制，见（23）和（28）；在这个简单模型中，这些限制的出现是相当自然的。

接下来，我们想评论一个有趣的事实。我们看到，公式（29）和（30）中包含欧拉–马歇罗尼常数，而发散部分的最终结果中却没有。实际上，这是因为两圈发散部分在格林函数的某种特殊平移下保持不变。确实，很容易验证，如果我们利用局域特殊零模 [31] 作如下平移，

$$G(x,y) \to G(x,y) + \rho\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n|x-y|^{2n}}{4^n\Gamma(n+1)}a_n(x,y), \tag{44}$$

其中 ρ 是一个辅助的固定常数，发散部分将具有相同的值。最近在四维杨–米尔斯理论 [38]中也发现了这一性质。实际上，这一特征源于两圈发散部分与对数 $\ln(\Lambda/\mu)$ 成正比。同时，额外的零模会导致（12）和（13）中的 $\mu\to\mu_1$ 发生偏移。因此，利用对数 $\ln(\Lambda/\mu_1) = \ln(\Lambda/\mu) + \ln(\mu/\mu_1)$ 的性质，我们得到相同的奇性。

致谢。两位作者均获得俄罗斯联邦科学与高等教育部资助，资助项目编号为 075-15-2022-289。此外，A.V.Ivanov 还获得理论物理与数学发展基金会“BASIS”的部分资助，资助项目为“Young Russian Mathematics”。作者感谢 Natalia V. Kharuk 对稿件的细致审阅、提出的意见，以及在相关课题上的合作。

参考文献

[1] L. D. Faddeev, A. A. Slavnov, 《规范场：量子理论导论》, Frontiers in Physics 83, Addison-Wesley, 第1–236页（1991年）

[2] C. Itzykson, J. B. Zuber, 《量子场论》, Mcgraw-hill, 纽约, 第1–705页（1980年）[3] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, 《量子场论导论》, Addison-Wesley, 第1–868页（1995年）[4] J. C. Collins, 《重整化：重整化、重整化群与算符乘积展开导论》, 剑桥大学出版社, 第1–392页（1984年）[5] O. I. Zavialov, 《重整化量子场论》, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, 波士顿, 第1–524页（1990年）[6] D. I. Kazakov, 《辐射修正、发散、正则化、重整化、重整化群及其他：量子场论实例》, arXiv:0901.2208 [hep-ph] （2009年）[7] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, 《广义函数》, 第1卷: 性质与运算, AMS Chelsea Publishing 377, 第1–423页（1964年）[8] V. S. Vladimirov, 《广义函数理论方法》, 伦敦, CRC 出版社, 第1–328页（2002年）[9] G. 't Hooft, M. Veltman, 规范场的正则化与重整化, 《核物理 B》, 44, 189–213（1972年）[10] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi, 《维数重整化：作为正则化参数的维数》, Nuovo Cim. B, 12, 20–26（1972年）[11] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, 规范场论与统计物理问题。第26部分： ϕ^3 模型的量子运动方程与两圈截断重整化, 《Zap. Nauchn. Sem. POMI》, 487, 151–166（2019年）, 《数学科学》257, 526–536（2021年）10.1007/s10958-021-05500-5[arXiv:2203.04562[12] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, 四维杨–米尔斯有效作用量的两圈截断重整化, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 48, 015002（2020年）10.1088/1361-6471/abb939 [arXiv:2004.05999[13] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, 四维杨–米尔斯有效作用量两圈发散部分公式, 《Eur. Phys. J. C》82, 997（2022年）10.1140/epjc/s10052-022-10921-w [arXiv:2203.07131[14] A. V. Ivanov, 坐标表示中的显式截断正则化, J. Phys. A: Math. Theor.（2022年）10.1088/1751-8121/aca8dc [arXiv:2209.01783[15] D. Friedan, $2+\varepsilon$ 维非线性模型, 《物理年鉴》163, 318–419（1985年）[16] A. M. Polyakov, 《规范场与弦》, 伦敦, Taylor and Francis Group, 第1–312页（1987年）[17] A. A. Bagaev, 背景场形式中的矩阵 σ-模型有效作用量的两圈计算, 《理论与数学物理》154:2, 303–310（2008年）[18] M. Nakahara, 《几何、拓扑与物理》, 第二版, CRC 出版社, 第1–573页（2003年）[19] B. S. DeWitt, 《量子引力理论。2. 显式协变理论》, Phys. Rev. 162, 1195–1239（1967年）[20] B. S. DeWitt, 《量子引力理论。3. 协变理论的应用》, Phys. Rev. 162, 1239–1256（1967年）[21] G. 't Hooft, 规范场论中的背景场方法, （卡尔帕奇, 1975年）, 会议论文集, 《弗罗茨瓦夫大学学报》, 1, 弗罗茨瓦夫, 345–369（1976年）[22] L. F. Abbott, 背景场方法导论, 《Acta Phys. Polon. B》, 13:1–2, 33–50（1982年）[23] I. Ya. Aref'eva, A. A. Slavnov, L. D. Faddeev, 规范不变理论中S矩阵的生成泛函, 《TMF》21:3, 311–321（1974年）

[24] J. P. Bornsen, A. E. M. van de Ven, 《通过协变背景场方法计算三圈杨–米尔斯 β 函数》, 《核物理 B》657, 257–303（2003年）[25] A. N. Vasiliev, 《量子场论与统计物理中的泛函方法》, CRC 出版社, 1–320（1998）[26] G. W. Gibbons, 《弯曲时空中的量子场论》, 载于《广义相对论：爱因斯坦百年纪念综述》, 639–679（1979）[27] P. B. Gilkey, 《黎曼流形的谱几何》, 《微分几何杂志》10, 601–618（1975年）[28] B. S. DeWitt, 《群与场的动力学理论》, Gordon and Breach 出版社, 纽约, 1–248（1965）[29] R. T. Seeley, 《椭圆算子的复幂》, 载于《奇异积分》, 纯数学专题讨论会论文集第10卷, 美国数学学会, 288–307（1967年）[30] M. L¨uscher, 《大背景场下的维数正规化》, 《物理年鉴》142, 359–392（1982年）[31] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, 《热核展开的特殊函数》, 《欧洲物理杂志 Plus》137, 1060（2022年）10.1140/epjp/s13360-022-03176-7 [arXiv:2106.00294v2] [32] D. V. Vassilevich, 《热核展开：使用手册》, 《物理报告》388, 279–360（2003年）[33] D. Fursaev, D. Vassilevich, 《算子、几何与量子：量子场论中的谱几何方法》, 施普林格, 1–304（2011）[34] A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky, 《规范理论与量子引力中的广义 Schwinger–Dewitt 技术》, 《物理报告》119, 1–74（1985年）[35]A. V. Ivanov, 《协变拉普拉斯算子热核的图示技术》, TMF, 198:1, 113–132（2019）; 《理论与数学物理》198:1, 100–117（2019）10.1134/S0040577919010070 [arXiv:1905.05455[36] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, 《热核：固有时方法、Fock–Schwinger 规范、路径积分与威尔逊线》, TMF, 205:2, 242–261（2020）; 《理论与数学物理》205:2, 1456–1472（2020）10.1134/S0040577920110057 [arXiv:1906.04019[37] S. L. Shatashvili, 《背景场形式中的两圈近似》, TMF, 58:2, 219–228; 《理论与数学物理》58:2, 144–150（1984年）[38] N. V. Kharuk, 《杨–米尔斯理论两圈计算中的拉普拉斯算子零模》, 《量子场论与统计物理问题》第28部分, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 509, 圣彼得堡数学研究所, 圣彼得堡, 216–226（2021年）