arXiv:2304.02375v1 [math.DG] 5 Apr 2023

带紧致边界的黎曼流形到黎曼流形的调和映射刘维尔定理

Jun Sun[a, b], Xiaobao Zhu[c]

[a]School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China
[b]Hubei Key Laboratory of Computational Science, Wuhan University, Wuhan, 430072, China[c]School of Mathematics, Renmin University of China, Beijing 100872, China

摘要

本文将给出从带紧致边界的完备非紧黎曼流形（我们称之为"Kasue流形"）到非正截面曲率的单连通完备黎曼流形的调和映射的梯度估计。由此可得一个刘维尔定理。我们还将证明，Kasue流形上某些线性椭圆方程不存在正解。

关键词：刘维尔定理，梯度估计，调和映射 2020年数学主题分类：53C20，53C40

1. 引言

梯度估计是几何分析中一项非常重要的技术，自 Yau 的开创性论文（[10]）以来一直备受关注。Yau 证明了以下关于正调和函数的梯度估计：

定理1.1.（*[10]*）设（M, g）为一个 n维完备黎曼流形（无边界）。对于 $K \geq 0$, 假设 $Ric_M \geq -(n-1)K$。对于 $x_0 \in M$，令 $u:\ B_R(x_0) \to (0, \infty)$为一个正调和函数。则有

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_n \left(\frac{1}{R} + \sqrt{K} \right),$$

在 $B_{\frac{R}{2}}(x_0)$ 上，其中 C_n 是仅取决于 n 的正常数。

*本文得到国家自然科学基金项目12071352、国家自然科学基金项目11721101、国家重点研发计划项目2020YFA0713100及2022CFB240的资助。*Email addresses:* sunjun@whu.edu.cn (JunSun), zhuxiaobao@ruc.edu.cn (Xiaobao Zhu)

梯度估计的一个推论是著名的刘维尔定理，该定理指出，完备且具有非负里奇曲率的黎曼流形上的任意正调和函数都是常数。

随后，Cheng 将 Yau梯度估计推广到了调和映射情形（[1]）。更准确地说，他证明了：

定理 1.2。（*[1]*）设 M 是一个 Ricci 曲率有下界 $Ric_M \geq -(n-1)K$ 的完备黎曼流形。设 N 是一个非正截面曲率的单连通完备黎曼流形。设 u 是从 M 到 N 的调和映射。假设 $y_0 \notin u(B_R(0))$。设 $\rho(y)$ 表示 N 中 y 与 y_0 之间的距离。那么，若 $b > 2\sup\{\rho(u(x)) \mid x \in B_R(0)\}$，则有

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}(0)} \frac{|\nabla u|(x)}{b^2 - \rho^2(u(x))} \leq \frac{C(1+KR^2)}{R^2 b},$$

其中 $C > 0$ 仅取决于 M 和 N。

由 Cheng 的梯度估计可推出调和映射的刘维尔定理：

推论 1.3。设 M 是一个非负里奇曲率的完备黎曼流形。设 N 是一个非正截面曲率的单连通完备黎曼流形。设 u 是从 M 到 N 的调和映射。若 u 在 N 中的像是一个有界集，则该映射为常值映射。

最近，Kunikawa 和 Sakurai（[6]）在黎曼流形 M 完备、非紧且具有紧致边界的情形下，为满足狄利克雷边界条件（即在边界上为常数）的调和函数推导出了 Yau梯度估计。他们证明了

定理 1.4.（*[6]*）设（M, g）是一个具有紧致边界的 n 维完备黎曼流形。对于 $K \geq 0$，我们假设 $Ric_M \geq -(n-1)K$且 $H_{\partial M} \geq -(n-1)\sqrt{K}$。设 u：$B_R(\partial M) \to (0,\infty)$ 是满足狄利克雷边界条件的正调和函数。假设其沿外指单位法向量 ν 方向的导数 u_ν在 ∂M 上非负。那么有

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_n \left(\frac{1}{R} + \sqrt{K}\right),$$

在 $B_{\frac{R}{2}}(\partial M)$ 上，其中 C_n是仅依赖于 n的正常数，且 $B_R(\partial M) := \{x \in M \mid d(x, \partial M) < R\}$。

特别地，他们可以得到以下刘维尔定理：

推论 1.5. 设 M 是一个具有紧边界的完备黎曼流形。我们假设 $Ric_M \geq 0$ 且 $H_{\partial M} \geq 0$。令 u： $M \to (0,\infty)$ 是一个满足狄利克雷边界条件的正调和函数。我们假设 $u_\nu \geq 0$ 在 ∂M 上成立。那么 u 是常数。

实际上，满足推论 M 的假设的黎曼流形1.5由 Kasue（[5]）进行了分类：

定理 1.6. ([5]) 设 M 是一个具有紧致边界的连通完备非紧黎曼流形。若 $Ric_M \geq 0$且 $H_{\partial M} \geq 0$，则 ∂M 是连通的，并且 M与 $[0,\infty$等距) $\times \partial M$。

定义 1.1. 我们称 M 为Kasue流形，如果它满足定理 *1.6*中的假设。

本文首先证明一个调和映射的刘维尔定理：从 Kasue 流形到具有非正截面曲率的单连通黎曼流形的调和映射满足该定理。

定理 A：设 M 是一个 Kasue流形， N 是一个具有非正截面曲率的单连通完备黎曼流形，并设 u 是从 M 到 N 的调和映射，且满足狄利克雷边界条件（即 u 在边界上为常数）。若 u 在 N 中的像是一个有界集，则它是常数映射。

刘维尔定理将由一般梯度估计推出（见定理 2.4）。梯度估计的证明思路源自 Cheng（[1]），他将极大值原理应用于适当选取的试验函数。主要区别在于，我们需要处理试验函数的最大值在 M 的边界上取得的情形。因此，我们的梯度估计仅在特别选取 y_0 时成立，而 Cheng梯度估计 对任意选取的 y_0 都成立。不过，这足以保证刘维尔定理成立。

本文的另一个目标是证明 Kasue流形上某些椭圆方程不存在正解。具体而言，

定理 B：设 (M, g) 为一个 Kasue流形，并假设 $h \in C^2(M)$ 满足

$$\Delta h \geq 0, \quad 0 \leq h \not\equiv 0 \quad and \quad h_\nu|_{\partial M} \leq 0.$$

则方程

$$\begin{cases} \Delta u + hu = 0 & in \quad M, \\ u_\nu|_{\partial M} \geq 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

不存在正解。

最后，为结束引言，我们简要谈谈本研究结果的动机。阅读 Kunikawa 和 Sakurai [6], 的文章时，我们注意到，拉普拉斯比较定理对到边界的距离函数同样成立。结合我们对梯度估计的了解，我们意识到可以由此导出椭圆方程和调和映射的一些刘维尔性质。于是便有了本文的结果。我们的证明方法是标准的。我们相信，这种方法也可用于研究 Kasue 流形上的其他椭圆方程和抛物型方程。关于 Kasue 流形上非线性抛物方程的梯度估计，请读者参阅 [3] 。

2. 定理 A 的证明

本节将证明定理 A。我们将采用经典方法证明梯度估计（定理 2.4）。为此，我们首先回顾黎曼流形 M 上从紧致超曲面出发的距离函数所满足的拉普拉斯比较定理。

设 (M, g) 是一个带紧致边界 ∂M 的 n 维完备非紧黎曼流形。由边界 $r_{\partial M}$ 到 $M \to \mathbb{R}$ 的距离函数定义为

$$r_{\partial M} := d(\cdot, \partial M),$$

它在边界的割迹 Cut∂M ([9]) 之外光滑。

对于 $K, \Lambda \in \mathbb{R}$，我们用 $s_{K,\Lambda}(t)$ 表示满足初始条件 $\varphi(0) = 1$ 和 $\varphi'(0) = -\Lambda$ 的 Jacobi 方程 $\varphi''(t) + K\varphi(t) = 0$ 的唯一解。我们有以下拉普拉斯比较定理:

定理 2.1. ([4]) 对于 $K, \Lambda \in \mathbb{R}$，我们假设 $Ric_M \geq (n-1)K$ 和 $H_{\partial M} \geq (n-1)\Lambda$。那么有

$$\Delta r_{\partial M} \leq (n-1)\frac{s'_{K,\Lambda}(r_{\partial M})}{s_{K,\Lambda}(r_{\partial M})}$$

在 Cut∂M 之外。

推导梯度估计时将使用以下 Bochner 公式:

引理 2.2. ([2]) 设 (M^n, g) 和 (N^m, h) 是两个黎曼流形，且$u : M \to N$ 是一个调和映射，则 u 的能量密度满足以下公式:

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 = |\nabla du|^2 + \langle Ric^M \nabla u, \nabla u\rangle - \langle Rm^N(u_\alpha, u_\beta)u_\alpha, u_\beta\rangle,$$

其中， Ric^M 和 Rm^N 分别是 (M, g) 的里奇曲率和 (N, h) 的黎曼曲率。

我们还需要以下 Reilly 型公式。该公式最初由 Reilly ([8]) 针对函数证明。对于映射情形，参见 [7]。

引理 2.3. ([7]) 设 (M^n, g) 是一个具有紧致边界 ∂M 的 n 维黎曼流形，(N^m, h) 是一个黎曼流形。设 ν 是 M 中 ∂M 的单位外法向量。那么，对于任意光滑映射 $u : (M, g) \to (N, h)$，有

$$\begin{aligned}\left(|\nabla u|^2\right)_\nu =& 2\langle du(\nu), \tau^{\partial M}(u) - \tau(u)\rangle - 2H|du(\nu)|^2 + 2\langle \nabla(du(\nu)), du\rangle_{\partial M} \\ & - 2\langle du \circ A, du\rangle_{\partial M},\end{aligned}$$

其中 $Av := \nabla^M_v \nu$ 是 $v \in T\partial M$ 的魏因加滕算子， H 是 ∂M 在 M 中相对于 ν 的平均曲率，而 $\tau^{\partial M}(u)$ 和 $\tau(u)$ 分别是 $u_{\partial M} : \partial M \to N$ 和 $u : M \to N$ 的张力场。

现在我们可以证明梯度估计。

定理 2.4. 设 (M,g) 是一个具有紧致边界的 n 维完备黎曼流形，且 N 是一个非正截面曲率的单连通完备黎曼流形。对于 $K \geq 0$，我们假设 $Ric_M \geq -(n-1)K$ 且 $H_{\partial M} \geq -(n-1)\sqrt{K}$。设 $u\colon M \to N$ 是一个满足狄利克雷边界条件的调和映射。假设 u 的像是 N 中的一个有界集。那么我们可以选取 $y_0 \notin u(M)$，使得若令 $\rho(y)$ 表示 y 与 y_0 在 N 中的距离，则对于任意 $R>0$，有

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}(\partial M)} \frac{|\nabla u|(x)}{b^2-\rho^2(u(x))} \leq \frac{C(1+\sqrt{K}R)}{bR},$$

对某个常数 $b > 2\sup\{\rho(u(x))|x \in M\}$成立，其中 $C>0$ 仅依赖于 M和 N。

证明。设 (M^n,g) 是一个具有紧致边界 ∂M 的 n 维完备非紧黎曼流形，(N^m,h) 是一个非正截面曲率的单连通黎曼流形。设 $u\colon M \to N$ 是满足狄利克雷边界条件的光滑调和映射。我们假设 u 的像记为 $u(M)$，在 N 中有界，并且 $y_1 := u(\partial M) \in u(M)$。在下文中，常数 C 表示仅依赖于 n 的常数，其值可能在不同处有所变化。

现在我们固定一点 $y_0 \notin u(M)$，稍后将具体指定。令 $\rho(y)$ 表示 y与 y_0在 N中的距离。固定 $b > 2\sup\{\rho(u(x))|x \in M\}$。如 [1], 中所定义

$$\phi(x) = \frac{|\nabla u(x)|^2}{(b^2-\rho^2(u(x)))^2}.$$

于是我们有

$$\nabla\phi(x) = \frac{\nabla(|\nabla u(x)|^2)}{(b^2-\rho^2(u(x)))^2} + 2\frac{|\nabla u(x)|^2\nabla(\rho^2(u(x)))}{(b^2-\rho^2(u(x)))^3}, \tag{2.1}$$

and

$$\begin{aligned}\Delta\phi(x) =& \frac{\Delta(|\nabla u(x)|^2)}{(b^2-\rho^2(u(x)))^2} + 4\frac{\nabla(|\nabla u(x)|^2)\cdot\nabla(\rho^2(u(x)))}{(b^2-\rho^2(u(x)))^3} \\ &+ 2\frac{|\nabla u(x)|^2\Delta(\rho^2(u(x)))}{(b^2-\rho^2(u(x)))^3} + 6\frac{|\nabla u(x)|^2|\nabla(\rho^2(u(x)))|^2}{(b^2-\rho^2(u(x)))^4}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

调和映射的 Bochner 公式结合我们对曲率的假设可推出

$$\Delta|\nabla u|^2 \geq 2|\nabla du|^2 - 2(n-1)K|\nabla u|^2.$$

通过运用柯西–施瓦茨不等式和 Hessian 比较定理的标准论证，我们可以得到以下不等式:

$$\Delta\phi(x) \geq \frac{4|\nabla u(x)|^4}{(b^2-\rho^2(u(x)))^3} - \frac{2(n-1)K|\nabla u(x)|^2}{(b^2-\rho^2(u(x)))^2} + \frac{2\nabla\phi\cdot\nabla\rho^2}{b^2-\rho^2(u(x))}. \tag{2.3}$$

现在，对于任意 $R>0$，我们定义函数 $F:\ B_R(\partial M)\to\mathbb{R}$，其定义如下

$$F(x) := (R^2 - r_{\partial M}^2(x))^2\phi(x).$$

我们假设 F 在某点 $x_0\in B_R(\partial M)$ 处取得最大值。

情形 1: $x_0\in B_R(\partial M)\backslash\partial M$。在这种情况下，利用卡拉比技巧，我们可以假设 x_0 不属于 Cut∂M。因此，在 x_0 处，有

$$\nabla F(x_0) = 0$$

and

$$\Delta F(x_0) \leq 0.$$

因此，在 x_0 处有

$$\frac{\nabla\phi}{\phi} = \frac{4r_{\partial M}\nabla r_{\partial M}}{R^2-r_{\partial M}^2}$$

and

$$\frac{\Delta\phi}{\phi} - \frac{8r_{\partial M}\nabla r_{\partial M}\cdot\nabla\phi}{(R^2-r_{\partial M}^2)\phi} - \frac{2\Delta r_{\partial M}^2}{R^2-r_{\partial M}^2} + \frac{8r_{\partial M}^2}{(R^2-r_{\partial M}^2)^2} \leq 0.$$

由此可得

$$\frac{\Delta\phi}{\phi} - \frac{24r_{\partial M}^2}{(R^2-r_{\partial M}^2)^2} - \frac{2\Delta r_{\partial M}^2}{R^2-r_{\partial M}^2} \leq 0.$$

注意到$s_{-K,\ -\sqrt{K}}(t) = e^{\sqrt{K}t}$。拉普拉斯比较定理（定理2.1）以及我们的假设意味着

$$\Delta r_{\partial M}^2 = 2r_{\partial M}\Delta r_{\partial M} + 2 \leq 2(n-1)\sqrt{K}r_{\partial M} + 2 \leq C(1+\sqrt{K}r_{\partial M}).$$

结合式（2.3），我们得到

$$\begin{aligned}
0 \geq & \frac{\Delta\phi}{\phi} - \frac{24r_{\partial M}^2}{(R^2-r_{\partial M}^2)^2} - \frac{2\Delta r_{\partial M}^2}{R^2-r_{\partial M}^2} \\
\geq & 4(b^2-\rho^2)\phi - 2(n-1)K + \frac{8r_{\partial M}\nabla r_{\partial M}\cdot\nabla\rho^2}{(R^2-r_{\partial M}^2)(b^2-\rho^2)} \\
& - \frac{24r_{\partial M}^2}{(R^2-r_{\partial M}^2)^2} - \frac{C(1+\sqrt{K}r_{\partial M})}{R^2-r_{\partial M}^2}.
\end{aligned}$$

因为

$$\rho(u(x)) \leq \frac{b}{2},$$

and

$$|\nabla(\rho^2(u(x)))| \leq 2\rho|\nabla^N\rho||\nabla u| \leq b|\nabla u|,$$

我们有

$$3b^2\phi - \frac{8r_{\partial M}b|\nabla u|}{(R^2-r_{\partial M}^2)(b^2-\rho^2)} - \frac{24r_{\partial M}^2}{(R^2-r_{\partial M}^2)^2} - \frac{C(1+\sqrt{K}r_{\partial M})}{R^2-r_{\partial M}^2} - 2(n-1)K \leq 0.$$

将上述不等式两边同乘 $(R^2-r_{\partial M}^2)^2$, , 我们有

$$3b^2F - 8r_{\partial M}bF^{\frac{1}{2}} - C(1+\sqrt{K}r_{\partial M})R^2 - 2(n-1)KR^4 \leq 0,$$

由此可得

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}(\partial M)} F^{\frac{1}{2}}(x) \leq F^{\frac{1}{2}}(x_0) \leq \frac{CR(1+\sqrt{K}R)}{b}.$$

特别地，我们有

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}(\partial M)} \frac{|\nabla u|}{R^2-\rho^2} \leq F^{\frac{1}{2}}(x_0) \leq \frac{C(1+\sqrt{K}R)}{bR}.$$

情形 2： $x_0 \in \partial M$。在这种情况下，我们知道

$$F_\nu(x_0) \geq 0.$$

由于 $r_{\partial M}(x_0) = 0$，我们很容易看出

$$\phi_\nu(x_0) = \frac{F_\nu(x_0)}{R^4} \geq 0. \tag{2.4}$$

选取沿着 ∂M、在 x_0 附近的 M 的局部标准正交标架 $\{e_1, \cdots, e_{n-1}, \nu\}$，使得 $T\partial M$ 由 $\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ 张成。根据我们的假设， $u(\partial M) = y_1$。这意味着在 x_0 处，我们有

$$|du(\nu)| = |\nabla u|, \quad du(e_i) = 0, \ for \ 1 \leq i \leq n-1.$$

此外，由于 u 是调和的，我们有 $\tau(u) = 0$。因此，由引理 2.2 可得

$$(|\nabla u|^2)_\nu(x_0) = -2H(x_0)|\nabla u|^2(x_0).$$

因此，(2.4) 在 x_0 处给出

$$0 \leq \phi_\nu = \frac{(|\nabla u|^2)_\nu}{(b^2-\rho^2)^2} + \frac{2|\nabla u|^2(\rho^2 \circ u)_\nu}{(b^2-\rho^2)^3}$$

$$= -2H\frac{|\nabla u|^2}{(b^2-\rho^2)^2} + \frac{4\rho|\nabla u|^2\langle\nabla^N\rho, du(\nu)\rangle}{(b^2-\rho^2)^3}. \tag{2.5}$$

注意， $\nabla^N\rho(u(x_0)) = \nabla^N\rho(y_1)$ 是从 y_0到 y_1的径向方向。由于$du(\nu)$与 y_0的选取无关，我们可以选择 $y_0 \notin u(M)$，使得 $\nabla\rho$指向 $-du(\nu)$的方向。由于 $u(M)$在 N中有界， y_0和 b也可以选取为使得

$$\rho(y_1) \geq \inf\{\rho(u(x))|x \in M\} \geq \frac{2}{3}\sup\{\rho(u(x))|x \in M\} \geq \frac{1}{4}b.$$

采用这一选择 y_0，我们看到 $\langle\nabla^N\rho, du(\nu)\rangle = -|du(\nu)| = -|\nabla u|$。因此，由（2.5）可得

$$b\phi^{\frac{3}{2}}(x_0) \leq -2H(x_0)\phi(x_0) \leq 2(n-1)\sqrt{K}\phi(x_0)$$

从而

$$F^{\frac{1}{2}}(x_0) = R^2\phi^{\frac{1}{2}}(x_0) \leq \frac{C\sqrt{K}R^2}{b} \leq \frac{CR(1+\sqrt{K}R)}{b}.$$

特别地，我们有

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}(\partial M)}\frac{|\nabla u|}{R^2-\rho^2} \leq F^{\frac{1}{2}}(x_0) \leq \frac{C(1+\sqrt{K}R)}{bR}.$$

定理的证明至此完成。 □

定理 A 的证明。主定理可通过在定理 $K = 0$ 中取R 并令其趋于无穷大2.4而得。 □

3. 定理 B 的证明

本节将给出定理 B 的证明，该证明同样基于梯度估计。

定理 B 的证明。我们首先假设 (M, g) 是一个 n 维、具有紧致边界的完备黎曼流形， $Ric_M \geq -(n-1)K$且 $H_{\partial M} \geq -(n-1)\sqrt{K}$，其中 $K \geq 0$。

设 u 是方程的一个正解

$$\Delta u + hu = 0 \quad \text{on} \quad M.$$

Let

$$w = \frac{|\nabla u|^2}{u^2}.$$

通过选取一个局部正交标架，我们计算得到 w 的方程如下：

$$w_j = \frac{2u_i u_{ij}}{u^2} - \frac{2u_i^2 u_j}{u^3} \tag{3.1}$$

and

$$\Delta w = w_{jj} = \frac{2u_{ij}^2}{u^2} + \frac{2u_i u_{ijj}}{u^2} - \frac{4u_i u_{ij} u_j}{u^3} - \frac{4u_i u_{ij} u_j}{u^3} - \frac{2u_i^2 u_{jj}}{u^3} + \frac{6u_i^2 u_j^2}{u^4}.$$

由里奇公式和（3.1），可得

$$\begin{aligned}
\Delta w =& 2\left(\frac{u_{ij}}{u} - \frac{u_i u_j}{u^2}\right)^2 - 2\nabla w \cdot \nabla \log u + \frac{2u_i(\Delta u)_i}{u^2} + \frac{2R_{ij}u_i u_j}{u^2} - \frac{2u_i^2 \Delta u}{u^3} \\
\geq& \frac{2}{n}\left(\frac{\Delta u}{u} - \frac{|\nabla u|^2}{u^2}\right)^2 - 2\nabla w \cdot \nabla \log u - 2\nabla h \cdot \nabla \log u - 2(n-1)Kw \\
=& \frac{2}{n}(w+h)^2 - 2\nabla(w+h) \cdot \nabla \log u - 2(n-1)Kw.
\end{aligned}$$

由于我们假设 $\Delta h \geq 0$，因此可得

$$\Delta(w+h) \geq \frac{2}{n}(w+h)^2 - 2\nabla(w+h) \cdot \nabla \log u - 2(n-1)Kw. \tag{3.2}$$

设 ψ 是一个支集包含于 $B_R(\partial M)$ 中的光滑截断函数，并满足以下性质：

（1） $\psi(x) = \psi(r_{\partial M}(x))$ 且 $\psi' \leq 0$；（2） $0 \leq \psi \leq 1$ 和 $\psi \equiv 1$ 在 $B_{R/2}(\partial M)$ 中；（3） 当 $a \in (0,1)$ 时，$\frac{|\psi'|}{\psi^a} \leq \frac{C_a}{R}$、$\frac{|\psi''|}{\psi^a} \leq \frac{C_a}{R^2}$。

情形 1：若 $(w+h)\psi$ 在某点 $x_1 \in B_R(\partial M) \setminus \partial M$ 处取得最大值，运用卡拉比论证，我们不妨设 $x_1 \notin \mathrm{Cut}\partial M$，则

$$\nabla[(w+h)\psi](x_1) = 0, \qquad \Delta[(w+h)\psi](x_1) \leq 0.$$

直接计算并利用（3.2），可得在 x_1 处有

$$\begin{aligned}
0 \geq& \psi\Delta(w+h) + 2\nabla(w+h) \cdot \nabla\psi + (w+h)\Delta\psi \\
\geq& \frac{2}{n}(w+h)^2\psi + 2(w+h)\nabla\psi \cdot \nabla \log u - 2(n-1)Kw\psi \\
& - 2(w+h)\frac{|\nabla\psi|^2}{\psi} + (w+h)\Delta\psi.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

我们将不等式（3.3）乘以 $\psi(x_1)$，并逐项估计新右端项。

首先，由于 h 非负，根据柯西不等式及 ψ 的性质可得

$$2(w+h)\psi\nabla\psi \cdot \nabla \log u \geq -(w+h)^{3/2}\psi|\psi'|$$

$$\geq -\frac{1}{4n}(w+h)^2\psi^2 - C(n)\left(\frac{|\psi'|}{\psi^{1/2}}\right)^4$$
$$\geq -\frac{1}{4n}(w+h)^2\psi^2 - C(n)\frac{1}{R^4}. \tag{3.4}$$

其次，我们有

$$-2(n-1)Kw\psi^2 \geq -\frac{1}{4n}(w+h)^2\psi^2 - C(n)K^2. \tag{3.5}$$

第三，

$$-2(w+h)|\nabla\psi|^2 \geq -\frac{1}{4n}(w+h)^2\psi^2 - C(n)\left(\frac{|\psi'|^2}{\psi}\right)^2$$
$$\geq -\frac{1}{4n}(w+h)^2\psi^2 - C(n)\frac{1}{R^4}. \tag{3.6}$$

最后，由拉普拉斯比较定理（定理 2.1）可得

$$\begin{aligned}(w+h)\psi\Delta\psi &\geq -\frac{1}{4n}(w+h)^2\psi^2 - C(n)(\Delta\psi)^2\\ &= -\frac{1}{4n}(w+h)^2\psi^2 - C(n)[\psi'' + \psi'\Delta r_{\partial M}]^2\\ &\geq -\frac{1}{4n}(w+h)^2\psi^2 - C(n)[|\psi''| + |\psi'|\frac{n-1}{r_{\partial M}}(1+\sqrt{K})r_{\partial M}]^2\\ &\geq -\frac{1}{4n}(w+h)^2\psi^2 - C(n)\left(\frac{1}{R^4}+K^2\right).\end{aligned} \tag{3.7}$$

将（3.4）-（3.7）代入（3.3），可得

$$\frac{1}{n}[(w+h)\psi]^2(x_1) \leq C(n)\left(\frac{1}{R^4}+K^2\right).$$

因此，

$$[(w+h)\psi](x) \leq [(w+h)\psi](x_1) \leq C(n)\left(\frac{1}{R^2}+K\right).$$

由于 $\psi \equiv 1$ 属于 $B_{R/2}(\partial M)$，我们有

$$\sup_{B_{R/2}(\partial M)} w \leq \sup_{B_{R/2}(\partial M)} (w+h) \leq C(n)\left(\frac{1}{R^2}+K\right).$$

情形 2：若 $(w+h)\psi$ 在某点 $x_2 \in \partial M$ 处取到最大值，则在 x_2 处有

$$[(w+h)\psi]_\nu \geq 0,$$

从而

$$w_\nu \geq (w+h)_\nu = \frac{1}{\psi}\left([(w+h)\psi]_\nu - (w+h)\psi_\nu\right) = [(w+h)\psi]_\nu \geq 0.$$

关于 u 的狄利克雷边界条件以及假设 $u_\nu \geq 0$ 表明$|\nabla u| = u_\nu$ 在 ∂M上成立。由Reilly公式（见 [8] ，或命题2.3，载于[6]）可知

$$\begin{aligned}
0 \leq & w_\nu \leq (|\nabla \log u|^2)_\nu = 2(\log u)_\nu(\Delta u - (\log u)_\nu H) \\
= & 2\frac{u_\nu}{u}\left(\frac{\Delta u}{u} - \frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \frac{u_\nu}{u}H\right) \\
= & 2\frac{u_\nu}{u}\left(-h - \frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \frac{u_\nu}{u}H\right) \\
\leq & 2\frac{u_\nu}{u}\left(-w - \frac{u_\nu}{u}H\right).
\end{aligned}$$

因此，

$$w \leq \max\{0, -w^{1/2}H\} \leq (n-1)\sqrt{K}w^{1/2}.$$

于是我们有

$$w \leq C(n)K.$$

综合上述两种情形，我们最终得到

$$\sup_{B_{R/2}(\partial M)} \frac{|\nabla u|^2}{u^2} = \sup_{B_{R/2}(\partial M)} w \leq C(n)\left(\frac{1}{R^2} + K\right). \tag{3.8}$$

当 M 是 Kasue流形时，我们有 $K = 0$。然后令 R 在（3.8）中趋于无穷，可得 u 是一个常数。注意到 h 非负且不恒等于 0，方程（1.1）不能容许正常数解。因此我们得到（1.1）没有正解，从而完成定理 B 的证明。

□

参考文献

[1]S.-Y. Cheng，调和映射的刘维尔定理，《拉普拉斯算子的几何》，《纯数学专题讨论会》36，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1980年，147–151页。[2] Jr. J. Eells 和 J. H. Sampson，黎曼流形上的调和映射，《美国数学杂志》86（1964年），109–160页。[3] X. Fu 和 J.-Y. Wu，带狄利克雷边界条件的非线性抛物方程的梯度估计，《古代数学杂志》45（2022年），96–109页。[4] A. Kasue，拉普拉斯比较定理与完备黎曼流形的函数论性质，《日本数学杂志》（新系列）8（1982年），309–341页。

[5] A. Kasue，带边界黎曼流形的里奇曲率、测地线及若干几何性质，《日本数学会杂志》35（1983年），117–131页。[6] K. Kunikawa 和 Y. Sakurai，在狄利克雷边界条件下带边界黎曼流形上的 Yau 型和 Souplet-Zhang 型梯度估计，Proc. Amer. Math. Soc. 150（2022年），1767–1777页。[7] A. Matei，p-调和映射的间隙现象，Ann. Global Anal. Geom. 18（2000年），541–554页。[8] R. Reilly，Hessian 算子在黎曼流形中的应用，Indiana Univ. Math. J. 26（1977年），459–472页。[9] Y. Sakurai，在里奇曲率下界条件下带边界流形的刚性，《大阪数学杂志》54（2017年），85–119页。[10] S.-T. Yau，完备黎曼流形上的调和函数，Comm. Pure Appl. Math. 28（1975年），201–228页。