arXiv:2304.02376v1 [math.PR] 5 Apr 2023

霍克斯过程的显式相关性*

CarolineHillairet† Anthony Réveillac‡

2023年4月6日

摘要

本文填补了文献中的一项空白，为一般霍克斯过程及其强度过程的相关性提供了精确且显式的表达式。我们的方法基于泊松嵌入表示，以及关于计数过程的 Malliavin 微积分和伪混沌表示的最新研究成果。

关键词： 霍克斯过程；泊松嵌入表示；Malliavin 微积分。**数学主题分类（2020年）：** 60G55；60G57；60H07。

1 引言

霍克斯过程最初由 [11]引入，用于描述具有聚类特征的地震学现象，例如地震。事实上，这些点过程具有对激发效应进行建模的特性：过去的跳变会通过激发核影响点过程的强度，从而触发（如果核为负，则抑制）未来的跳变。这意味着连续跳变事件之间存在相关性。自首次应用于地震学以来，霍克斯过程已被广泛应用于许多不同领域，其中包括金融和保险、神经科学以及社交网络建模。例如，霍克斯过程被用于神经科学中，对神经元在其脉冲序列中的相互作用进行建模（例如参见 [15]）；对社交媒体中的转发级联进行建模（例如参见 [19]）；对信用风险中的违约到达进行建模（例如参见 [8]）；或对高频金融中限价订单簿内买卖订单的到达进行建模（例如参见 [2]）。它们还可用于对保险损失组合中的频率成分进行建模（例如参见 [14] 中的网络风险）。

从数学上讲，给定参数 $\mu > 0$ 以及一个映射（通常称为激发核）$\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，参数为（$\mu$，$\Phi$）的霍克斯过程表示一个计数过程（$H_t$）$_{t\geq 0}$，其随机强度（$\lambda_t$）$_{t\geq}$ 满足一个Volterra型积分方程：

$$\lambda_t = \mu + \int_{(0,t)} \Phi(t-s) dH_s, \quad t \geq 0. \tag{1.1}$$

*本研究由法国国家研究署（ANR）“未来投资”计划（LabEx Ecodec/ANR-11-LABX-0047）以及与安盛研究基金合作的联合研究计划“网络风险：精算建模”资助。

†ENSAE Paris，CRESTUMR 9194，法国帕莱索91120，Henry Le Chatelier大道5号。电子邮箱：caroline.hillairet@ensae.fr

‡图卢兹国立应用科学学院，IMT UMR法国国家科学研究中心5219，图卢兹大学，法国图卢兹31077 Cedex 4，Rangueil大道135号。电子邮箱：anthony.reveillac@insa-toulouse.fr

在经典假设 $\|\Phi\|_1 < 1$ 下，已在 [11, 10] 中证明该沃尔泰拉方程是适定的。更确切地说，通过将关系式(1.1)替换为， H 成为一个平稳过程

$$\lambda_t = \mu + \int_{(-\infty,t)} \Phi(t-s)dH_s, \quad t \geq 0.$$

这一平稳特征本身确实很有趣，而且还可以通过所谓的一阶和二阶统计量 （见 [11, 3]）唯一刻画平稳过程类中的霍克斯过程，即表达式 $\mathbb{E}[\lambda_t] = \mathbb{E}[\lambda_0]$ 以及 Cov(dH_s, dH_t)；在平稳情形下，该表达式仅取决于差值 $t-s$。这里的刻画是指，核 Φ 是描述测度 Cov(dH_s, dH_t)的沃尔泰拉积分方程的唯一解（精确表述见 [3] ）。然而，即使在这一平稳情形下，这些知识也不足以推导混合相关的一般表达式，例如 $\mathbb{E}[\lambda_s H_t]$。此外，对于某些应用而言，考虑从 $-\infty$ 开始的过程并不总是相关：这促使人们研究强度函数由关系式（1.1）给出的霍克斯过程，此时平稳性确实不再成立。获取霍克斯过程分布定量信息的另一条研究路线，是利用 [12]中得到的霍克斯过程的移民-出生表示。更具体地说，可以证明边缘分布 H_t 的拉普拉斯变换再次满足一个沃尔泰拉积分方程。这使得人们能够推导边缘分布H_t 的矩，并给出概率 $\mathbb{P}[H_t = k]$的解析表达式。这一结果已扩展到相关过程，例如 [9, 8, 7]中的复合霍克斯过程。这些关系在非平稳框架下仍然有效，也就是说，强度过程具有形式（1.1），但它们无法为强度过程 λ 以及(H_s, λ_t)的混合相关提供类似信息，其中边缘时间 s 和 t可能不同。最后我们提到，在指数核和Erlang核（以及它们的线性组合）的特殊情形下，可以获得关于 H 和 λ 的分布律（如矩）的具体信息。简而言之，这些核可写成 $\Phi(u) := \alpha u^n e^{-\beta u}$，其中参数 α, β, n 需适当选取。这些核的特殊之处在于，它们具有一种马尔可夫结构，因此可以使用所谓的Dynkin公式。在这条研究路线中，我们提到 [8, 5, 6, 18] ，仅举数例。

在本文中，我们通过在定理 2.4 中给出具有一般核 Φ 的一般霍克斯过程的数量 $\mathbb{E}[H_s H_t]$、$\mathbb{E}[\lambda_s H_t]$ 和 $\mathbb{E}[\lambda_s \lambda_t]$ 的显式表达式来填补这一空白。我们的方法依赖于近期关于 Malliavin 微积分以及计数过程的伪-混沌表示的研究成果，这些成果见于 [14, 13]。作为副产品，我们的方法还可沿用定理5.4，应用于更一般的计数过程。特别地，本文聚焦于一维霍克斯过程，并将多维情形的扩展留待未来研究。

我们安排如下。主要结果定理 2.4 在第 2 节中陈述。我们在第 3节介绍计数过程的 Malliavin 微积分相关要素，并将在第 4节应用于霍克斯过程的具体情形。最后，定理 2.4 的证明将在第 5 节给出。

2 主要结果

在本文中， Φ 表示映射 $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$。

假设2.1。 映射 Φ： $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 属于 $L^1(\mathbb{R}_+;\ dt)$ 其中

$$\|\Phi\|_1 := \int_{\mathbb{R}_+} \Phi(t)dt < 1.$$

定义 2.2 （霍克斯过程，[11]）。 令$(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P},\ \mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ 为一个带滤子的概率空间， $\mu > 0$ 且 $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 满足假设2.1。一个霍克斯过程 $H := (H_t)_{t\geq 0}$具有参数 μ 和 Φ ，是满足以下条件的计数过程

(i) $H_0 = 0, \quad \mathbb{P} - a.s.$,

（ii）其（$\mathbb{F}$-可预测）强度过程为

$$\lambda_t := \mu + \int_{(0,t)} \Phi(t-s)dH_s, \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

也就是说，对任意 $0 \leq s \leq t$ 和 $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A(H_t - H_s)\right] = \mathbb{E}\left[\int_{(s,t]} \mathbf{1}_A \lambda_r dr\right].$$

按定义，霍克斯过程呈现出与沃尔泰拉积分方程相关的卷积结构，我们将在第4节中予以精确说明。与沃尔泰拉常微分方程类似，我们的相关性表达式仅涉及下方的映射 Ψ ，它是激发核 Φ的迭代卷积的无穷和。

命题 2.3（见例如 [1]）。假设 Φ 满足假设 *2.1*。令 Φ 的迭代卷积序列为:

$$\Phi_1 := \Phi, \quad \Phi_n(t) := \int_0^t \Phi(t-s)\Phi_{n-1}(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.2}$$

对于每个 $n \geq 1$、 $\|\Phi_n\|_1 = \|\Phi\|_1^n$ 以及映射

$$\Psi := \sum_{n=1}^{+\infty} \Phi_n \tag{2.3}$$

在 $L_1(\mathbb{R}_+;\, dt)$ 和 $\|\Psi\|_1 = \frac{\|\Phi\|_1}{1-\|\Phi\|_1}$ 中作为极限是良定义的。

现在我们陈述主要结果。

定理 2.4。 设$(H_t)_{t\geq 0}$ 为一个霍克斯过程（其强度为 λ，满足 *(2.1)*），参数为 $\mu > 0$ 和 Φ：$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 且满足假设 *2.1*。

对于任意 $t \geq 0$，有

$$\begin{cases} \mathbb{E}[H_t] = \mu \int_0^t \left(1 + \int_0^u \Psi(r)dr\right) du \\ \mathbb{E}[\lambda_t] = \mu \left(1 + \int_0^t \Psi(r)dr\right). \end{cases} \tag{2.4}$$

对于任意 s、t，若 $0 \leq s \leq t$，则

(i) 霍克斯过程 H 的协方差为

$$\begin{aligned} Cov(H_s, H_t) &= \mathbb{E}[H_s H_t] - \mathbb{E}[H_s]\mathbb{E}[H_t] \\ &= \mu \int_0^s \left(1 + \int_0^v \Psi(w)dw\right)\left(1 + \int_v^s \Psi(y-v)dy\right)\left(1 + \int_v^t \Psi(y-v)dy\right) dv. \end{aligned} \tag{2.5}$$

(ii) 霍克斯过程的强度 λ 的协方差为

$$\begin{aligned} Cov(\lambda_s, \lambda_t) &= \mathbb{E}[\lambda_s \lambda_t] - \mathbb{E}[\lambda_s]\mathbb{E}[\lambda_t] \\ &= \int_0^s \Psi(s-v)\Psi(t-v)\left(1 + \int_0^v \Psi(v-w)dw\right) dv. \end{aligned} \tag{2.6}$$

(iii) 霍克斯过程与其强度之间的混合相关性为

$$\begin{cases} Cov(\lambda_s, H_t) &= \mathbb{E}[\lambda_s H_t] - \mathbb{E}[\lambda_s]\mathbb{E}[H_t] \\ &= \int_0^s \Psi(s-v)\left(1 + \int_0^v \Psi(w)dw\right)\left(1 + \int_v^t \Psi(y-v)dy\right) dv, \\ Cov(H_s, \lambda_t) &= \mathbb{E}[H_s \lambda_t] - \mathbb{E}[H_s]\mathbb{E}[\lambda_t] \\ &= \int_0^s \Psi(t-v)\left(1 + \int_0^v \Psi(w)dw\right)\left(1 + \int_v^s \Psi(y-v)dy\right) dv. \end{cases} \tag{2.7}$$

定理2.4 的证明见第 5.2 节，并由第 5.1 节中的定理5.4推出。

注2.5.特别地，我们恢复了从 [9] 得到的 $\mathbb{E}[(H_t)^2]$ 的表达式，即

$$\mathbb{E}[(H_t)^2] = \left(\mu \int_0^t \Psi_1(s)ds\right)^2 + \mu \int_0^t \Psi_2(u)du,$$

其中使用了 [9]、$\mu \int_0^t \Psi_1(s)\, ds = \mathbb{E}[H_t]$ 和

$$\mu \int_0^t \Psi_2(u)du = \mu \int_0^t \left(1 + \int_0^v \Psi(w)dw\right)\left(1 + \int_v^t \Psi(y-v)dy\right)^2 dv.$$

3 泊松空间上的 Malliavin 演算要素

我们将 $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 设为正整数集合。我们采用约定:

约定 3.1. 对于 $a,\ b \in \mathbb{Z}$ 满足 $a > b$，且对于任意映射 $\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$,

$$\prod_{i=a}^{b} \rho(i) := 1; \quad \sum_{i=a}^{b} \rho(i) := 0.$$

我们设

$$\mathbb{X} := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = \{x = (t, \theta),\ t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}_+\}; \tag{3.1}$$

本文始终使用符号（t, θ）表示 $\mathbb{X}$中一个元素的第一坐标和第二坐标。

记号 3.2. 设 $k \in \mathbb{N}^*$ 与 $(x_1, \ldots, x_k) = ((t_1, \theta_1) \ldots, (t_k, \theta_k))$ 属于 $\mathbb{X}^k$。我们令 $(x_{(1)}, \ldots, x_{(k)})$ 为 $(x_1, \ldots, x_k)$ 的 t- 分量中的有序排列，其中 $0 \le t_{(1)} \le \cdots \le t_{(k)}$, 并记 $x_{(i)} := (t_{(i)}, \theta_{(i)})$。

我们简单地将 $dx := dt\, d\theta$ 记作 $\mathbb{X}$ 上的勒贝格测度。我们还将 $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ 设为 $\mathbb{X}$ 的博雷尔集集合。

我们的方法基于所谓的泊松嵌入表示，它使人们能够相对于 $\mathbb{X}$ 上的基准随机泊松测度表示一个计数过程。本节介绍的大多数内容取自 [17, 16]。

我们将 Ω 定义为 $\mathbb{X}$ 上的构型空间

$$\Omega := \left\{ \omega = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i},\ x_i := (t_i, \theta_i) \in \mathbb{X},\ i = 1, \ldots, n,\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n,\ \theta_i \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \right\}.$$

计数过程的每条路径都表示为 Ω中的一个元素 ω，它是定义在 $\mathbb{X} = \mathbb{R}_+^2$上的 $\mathbb{N}$-值σ-有限测度。令 $\mathcal{F}$ 为Ω上与模糊拓扑相关的 σ-域。令$\mathbb{P}$ 为Ω上的泊松测度，在该测度下，Ω 上的典范过程 N 是强度为一的泊松过程，即:

$$(N(\omega))([0, t] \times [0, b])(\omega) := \omega([0, t] \times [0, b]), \quad t \ge 0,\ b \in \mathbb{R}_+,$$

是强度为一的齐次泊松过程（$N([0, t] \times [0, b]$ 是强度为 bt的泊松随机变量，对于任意（t, b）$\in \mathbb{X}$）。我们设 $\mathbb{F}^N := (\mathcal{F}_t^N)_{t \ge 0}$ 为 N 的自然历史，即 $\mathcal{F}_t^N := \sigma\{N(\mathcal{T} \times B)\ \ \mathcal{T} \subset \mathcal{B}([0, t])$ $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$。关于 $\mathbb{P}$的期望记为 $\mathbb{E}[\cdot]$。我们还设 $\mathcal{F}_\infty^N := \lim_{t \to +\infty} \mathcal{F}_t^N$。

为了介绍我们的加点算子和逐路径导数，我们介绍泊松空间上的随机分析的一些要素。我们记:

$$L^0(\Omega) := \left\{ F : \Omega \to \mathbb{R},\ \mathcal{F}_\infty^N - \text{ measurable} \right\},$$
$$L^2(\Omega) := \left\{ F \in L^0(\Omega),\ \mathbb{E}[|F|^2] < +\infty \right\}.$$

令 $j \in \mathbb{N}^*$】【。

$$L^2(\mathbb{X}^j) := \left\{ f : \mathbb{X}^j \to \mathbb{R},\ \int_{\mathbb{X}^j} |f(x_1, \cdots, x_j)|^2 dx_1 \cdots dx_j < +\infty \right\}. \tag{3.2}$$

定义 3.3（对称化）。设 $j \in \mathbb{N}^*$。

- 对于 f 中的 $L^2(\mathbb{X}^j)$，我们定义 $\tilde{f}$ f 的对称化，即映射 $\tilde{f}\colon \mathbb{X}^j \to \mathbb{R}$，其定义为

$$\tilde{f}(x_1, \cdots, x_j) := \frac{1}{j!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_j} f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(j)}), \tag{3.3}$$

  其中 $\mathcal{S}_j$ 表示从 $\{1, \cdots, j\}$ 到其自身的所有双射组成的集合。

- 若映射 f 属于 $L^2(\mathbb{X}^j)$，且满足 $f = \tilde{f}$，则称其为对称映射，并记

$$L^2_s(\mathbb{X}^j) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{X}^j) \text{ and } f \text{ is symmetric} \right\} \tag{3.4}$$

  定义在 $\mathbb{X}^j$上的对称平方可积函数集合 f。

本文的核心内容是泊松空间 Ω 上的加点算子。

定义 3.4。 [加点算子]

（i）对于 k 中的 $\mathbb{N}^*$，以及 $\mathbb{X}$ 中任意一个基数为 k 的子集（记为 $\{x_i,\, i \in \{1, \ldots, k\}\} \subset \mathbb{X}$），我们定义可测映射:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{+,k}_{(x_1,\ldots,x_k)} : \Omega &\longrightarrow \Omega \\ \omega &\longmapsto \omega + \sum_{i=1}^{k} \delta_{x_i}; \end{aligned}$$

约定，给定 ω 的一个表示为 $\omega = \sum_{i=1}^{n} \delta_{y_i}$（对于某些 $n \in \mathbb{N}^*$、$y_i \in \mathbb{X}$），$\omega + \sum_{i=1}^{k} \delta_{x_i}$ 应理解如下[1]:

$$\omega + \sum_{i=1}^{k} \delta_{x_i} := \sum_{i=1}^{n} \delta_{y_i} + \sum_{i=1}^{k} \delta_{x_i} \mathbf{1}_{\{x_i \neq y_i\}}. \tag{3.5}$$

（ii）当 $k = 1$ 我们简单地写作 $\varepsilon^+_{x_1} := \varepsilon^{+,\ 1}_{x_1}$。

在本文中，我们还将使用一个纯确定性的路径算子。

定义 3.5。令 $n \in \mathbb{N}^*$，且 $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{X}^n$，其中 $t_1 < \cdots < t_n$。对于 $F \in L^1(\Omega)$，我们定义

$$\mathcal{D}^n_{(x_1,\cdots,x_n)} F := \sum_{J \subset \{x_1,\cdots,x_n\}} (-1)^{n-|J|} F(\varpi_J),$$

其中若 $J = \{y_1, \ldots, y_k\}$, $\varpi_{\{y_1,\ldots,y_k\}} := \sum_{i=1}^{k} \delta_{y_i} \in \Omega$.

特别地，尽管 F 是一个随机变量，$\mathcal{D}^n_{(x_1,\cdots,x_n)} F$ 是一个实数，因为每一项$F(\varpi_J)$都是 F在结果 ϖ_J处的取值。

我们将要处理的分解采用迭代随机积分的形式，其定义将在本节中予以明确。

记号 3.6。对于 $j \in \mathbb{N}^*$，我们定义以下两个集合

$$\begin{aligned} \Delta_j &:= \left\{ (x_1, \ldots, x_j) \in \mathbb{X}^j,\ x_i \neq x_k,\ \forall i \neq k \in \{1, \cdots, j\} \right\}, \\ \Delta_{(j)} &:= \left\{ (x_1, \ldots, x_j) = ((t_1, \theta_1), \ldots, (t_j, \theta_j)) \in \mathbb{X}^j,\ t_1 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_j \right\}. \end{aligned}$$

[1]注意，给定固定原子（x_1, ..., x_n），由于 $\mathbb{P}$ 是Ω上的泊松测度，以 $\mathbb{P}$-概率1，标记x_i 不属于 ω的表示。

定义 3.7。令 $j \in \mathbb{N}^*$。

- 对于 $L^2(\mathbb{X}^j)$中的元素 f_j （不必对称），我们将 $\mathcal{I}_j(f_j)$设为 f_j 关于泊松测度的第 j次迭代积分，定义如下:

$$\mathcal{I}_j(f_j) := \int_{\Delta_j} f_j(x_1, \ldots, x_j) N(dx_1) \cdots N(dx_j)$$

  其中，上述每个积分对于 $\mathbb{P}$-几乎处处的 $\omega \in \Omega$ 都是逐路径良定义的，并且我们回顾记号 $x_i = (t_i, \theta_i)$ 和 $dx_i = dt_i\, d\theta_i$。

- 对于 f_j 中的 $L^2_s(\mathbb{X}^j)$（根据定义 3.3，这是一个对称函数），上述第 j 次迭代积分可写为

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_j(f_j) \\
&= \int_{\Delta_j} f_j(x_1, \ldots, x_j) N(dx_1) N(dx_j) \\
&= j! \int_{\mathbb{X}} \int_{[0,t_{j-1})\times\mathbb{R}_+} \cdots \int_{[0,t_2)\times\mathbb{R}_+} f_j(x_1, \ldots, x_j) N(dx_1) \cdots N(dx_j) \\
&= j! \int_{\mathbb{X}} \int_{[0,t_{j-1})\times\mathbb{R}_+} \cdots \int_{[0,t_2)\times\mathbb{R}_+} f_j((t_1,\theta_1), \ldots, (t_j,\theta_j)) N(dt_1, d\theta_1) \cdots N(dt_j, d\theta_j). \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

- 根据对称化的定义（再次参见定义 3.3），对于 f_j $L^2(\mathbb{X}^j)$ 中的任意元素（不一定是对称的），

$$\mathcal{I}_j(f_j) = \mathcal{I}_j(\tilde{f}_j).$$

注3.8。注意，我们的定义与 [16]中所呈现的阶乘测度概念一致。

我们回顾在 [13] 中引入的伪混沌展开。

定理 3.9 （伪混沌展开）。 设 F 属于 $L^2(\Omega)$。若存在一个序列 $(c_j^F)_{j\geq 1}$ ，满足 $c_j^F \in L^2_s(\mathbb{X}^j)$ （见记号 *(3.4)*），使得：则称 F 具有伪混沌展开。

$$F = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j!} \mathcal{I}_j(c_j^F).$$

根据 *[13,* 定理 *3.13* 和 *3.15],* 如果这种分解存在，则它是唯一的。

最后，我们回顾以下引理。它是采用我们的记号对 Mecke公式的简单推论（例如，参见 [16]中的关系式 (11)）。

命题 3.10。设 $j \in \mathbb{N}^*$， $c_j \in L^2_s(\mathbb{X}^j)$ 和 $F \in L^2(\Omega)$。则

$$\mathbb{E}\left[F\, \mathcal{I}_j(c_j)\right] = \int_{\mathbb{X}^j} \mathbb{E}\left[F \circ \varepsilon^{+,j}_{(x_1,\ldots,x_j)}\right] c_j(x_1, \ldots, x_j) dx_1 \cdots dx_j. \qquad (3.7)$$

特别地，取 $F = 1$ ，我们有

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{I}_j(c_j)\right] = \int_{\mathbb{X}^j} c_j(x_1, \ldots, x_j) dx_1 \cdots dx_j. \qquad (3.8)$$

4 霍克斯过程的伪混沌展开

我们的方法依赖于相对于扩展泊松噪声 N 对霍克斯过程的一种特定表示，参见例如 [14, 推论 2.7] 这种表示被称为泊松嵌入 [4]。

命题4.1。令 Φ 如假设 *2.1* 中所述，且 $\mu > 0$。下面的随机微分方程存在唯一解 $(\lambda_t)_{t\geq 0}$ ：

$$\lambda_t = \mu + \int_{(0,t)\times\mathbb{R}_+} \Phi(t-s)\mathbf{1}_{\{\theta\leq\lambda_s\}} N(ds,d\theta), \quad t \geq 0; \tag{4.1}$$

并且一个具有强度 λ 的霍克斯过程 H （由参数 (μ,Φ) 刻画）可以表示为

$$H_t = \int_{(0,t]\times\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\{\theta\leq\lambda_s\}} N(ds,d\theta), \quad t \geq 0. \tag{4.2}$$

为了对 H 和 λ 进行计算，我们将它们归入同一个记号中。**记号 4.2**。给定 $\zeta \equiv \Phi$ 或 $\zeta \equiv 1$ ，我们定义：

$$X_t^\zeta := \int_{(0,t)\times\mathbb{R}_+} \zeta(t-s)\mathbf{1}_{\{\theta\leq\lambda_s\}} N(ds,d\theta), \quad t \geq 0,$$

$$\text{so that} \quad X_t^\zeta = \begin{cases} \lambda_t - \mu, & \text{if } \zeta(u) = \Phi(u) \\ H_t, & \text{if } \zeta(u) = 1. \end{cases}$$

沃尔泰拉积分方程要点

对于 f, g 在 $L^1(\mathbb{R}_+; dt)$ 中，我们将 f 与 g 的卷积定义为

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-u)g(u)du, \quad t \geq 0.$$

这使得可以如下求解一个线性沃尔泰拉积分方程。

引理4.3 （参见引理 5，见 [1]）。对于 g 局部有界，方程的唯一解 f_g 为：

$$f_g(t) = g(t) + \int_0^t \Phi(t-s)f_g(s)ds, \quad t \geq 0,$$

给出为

$$f_g(t) = g(t) + \int_0^t \Psi(t-s)g(s)ds, \quad t \geq 0.$$

我们还回顾 [13, 引理 5.4]。

引理 4.4。令 f 属于 $L_1(\mathbb{R}_+; dt)$。对于满足 $n \geq 3$ 的任意 $n \in \mathbb{N}$ ，以及任意 $0 \leq s \leq t$,

$$\int_s^t \int_s^u \Phi_{n-1}(u-r)f(r)drdu = \int_s^t \int_s^{v_n} \int_s^{v_{n-1}} \cdots \int_s^{v_2} \prod_{i=2}^{n} \Phi(v_i - v_{i-1})f(v_1)dv_1 \cdots dv_n. \tag{4.3}$$

尤其取 $f = 1$,

$$\int_s^u \Phi_{n-1}(u-r)dr = \int_s^u \int_s^{v_{n-1}} \cdots \int_s^{v_2} \Phi(u-v_{n-1}) \prod_{i=2}^{n-1} \Phi(v_i - v_{i-1})dv_1 \cdots dv_{n-1}, \quad \textit{for a.a. } u \in \mathbb{R}_+.$$

证明。如前所述，关系式 (4.3) 见于 [13, 引理 5.4]。设 M 和 P 为 $\mathbb{R}_+$ 上的博雷尔测度，

$$M([0,t]) := \int_s^t \int_s^u \Phi_{n-1}(u-r)drdu;$$

$$P([0,t]) := \int_s^t \int_s^{v_n} \int_s^{v_{n-1}} \cdots \int_s^{v_2} \prod_{i=2}^{n} \Phi(v_i - v_{i-1}) f(v_1) dv_1 \cdots dv_n.$$

关系 (4.3) 意味着 $M = P$，从而得到 $L^1(\mathbb{R}_+)$ 中它们相对于勒贝格测度的密度相等。

□

霍克斯过程的伪混沌展开

我们遵循 [13]，为霍克斯过程得到所谓的伪混沌展开。它分别依赖于迭代积分 $\mathcal{I}_n$ 和路径导数算子 $\mathcal{D}^n$，这两者分别在定义 3.7 和 3.5 中引入。

命题4.5。令 $\zeta \equiv \Phi$ 或 $\zeta \equiv 1$，并回顾记号 *4.2*。令 $t \geq 0$。那么 X_t^ζ 具有如下伪混沌展开

$$X_t^\zeta = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{I}_n(c_n^{\zeta,t}),$$

对所有$(x_1, \cdots, x_n) \in ([0,t] \times \mathbb{R}_+)^n$成立时，

$$c_n^{\zeta,t}(x_1, \cdots, x_n) = \mathcal{D}^n_{(x_{(1)}, \cdots, x_{(n)})} X_t^\zeta = \zeta(t - t_n) \mathcal{D}^{n-1}_{(x_{(1)}, \cdots, x_{(n-1)})} \mathbf{1}_{\{\theta_{(n)} \leq \lambda_{(t_n)}\}}.$$

证明。这可由 [13] 得出，该文给出了 $\mathbb{R}^2$上任意随机线性泛函的伪混沌展开，其中将其限制在一个有界区域内（例如 $[0,T] \times [0,M]$、T、$M > 0$），并重点讨论形如 $F = H_t$ 的随机变量，其中 H 是具有有界强度的计数过程（完整论述请参见 [13] ）。尽管霍克斯过程的强度无界，[13]证明了霍克斯过程的边缘分布具有伪混沌展开。仿照这一证明，我们得到 $c^\zeta_{n}{}^{t} = \mathcal{D}^n X_t^\zeta$。

令 $(x_1, \cdots, x_n) \in ([0,t] \times \mathbb{R}_+)^n$，其中 $t_1 < \cdots < t_n$。令 $J \subset \{1, \cdots, n\}$。我们有

$$\begin{aligned} X_t^\zeta(\sum_{k \in J} \delta_{x_k}) &= \left(\int_{(0,t] \times \mathbb{R}_+} \zeta(t-s) \mathbf{1}_{\{\theta \leq \lambda_s\}} N(ds, d\theta) \right) \left(\sum_{k \in J} \delta_{x_k} \right) \\ &= \sum_{k \in J} \zeta(t - t_k) \mathbf{1}_{\left\{\theta_k \leq \lambda_{t_k}(\sum_{j \in J} \delta_{x_j})\right\}} \\ &= \sum_{k \in J} \zeta(t - t_k) \mathbf{1}_{\left\{\theta_k \leq \lambda_{t_k}(\sum_{j \in J \cap \{1, \cdots, k-1\}} \delta_{x_j})\right\}}, \end{aligned}$$

由于 λ是可料过程。因此使用记号 $\{1, \cdots, k-1\} := \emptyset$表示 $k = 1$,

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}^n_{(x_1, \ldots, x_n)} X_t^\zeta \\ &= \sum_{J \subset \{1, \cdots, n\}} (-1)^{n-|J|} \left(\int_{(0,t] \times \mathbb{R}_+} \zeta(t-s) \mathbf{1}_{\{\theta \leq \lambda_s\}} N(ds, d\theta) \right) \left(\sum_{k \in J} \delta_{x_k} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{J\subset\{1,\cdots,n\}} (-1)^{n-|J|} \sum_{k\in J} \zeta(t-t_k)\mathbf{1}_{\left\{\theta_k\le\lambda_{t_k}(\sum_{j\in J\cap\{1,\cdots,k-1\}}\delta_{x_j})\right\}} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{J\subset\{1,\cdots,n\};k\in J} (-1)^{n-|J|}\zeta(t-t_k)\mathbf{1}_{\left\{\theta_k\le\lambda_{t_k}(\delta_{x_k}+\sum_{j\in J\cap\{1,\cdots,k-1\}}\delta_{x_j})\right\}} \\
&+ \sum_{J\subset\{1,\cdots,n\};n\in J} (-1)^{n-|J|}\zeta(t-t_k)\mathbf{1}_{\left\{\theta_n\le\lambda_{t_n}(\delta_{x_n}+\sum_{j\in J\cap\{1,\cdots,n-1\}}\delta_{x_j})\right\}} - \mathbf{1}_{\{J=\emptyset\}}\times 0 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \zeta(t-t_k) \sum_{J\subset\{1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\}} (-1)^{n-1-|J|}\mathbf{1}_{\left\{\theta_k\le\lambda_{t_k}(\delta_{x_k}+\sum_{i\in J\cap\{1,\cdots,k-1\}}\delta_{x_i})\right\}} \\
&+ \zeta(t-t_n) \sum_{J\subset\{1,\cdots,n-1\}} (-1)^{n-1-|J|}\mathbf{1}_{\left\{\theta_n\le\lambda_{t_n}(\delta_{x_n}+\sum_{i\in J\cap\{1,\cdots,n-1\}}\delta_{x_i})\right\}}.
\end{aligned}
$$

一方面，对于 $k\in\{1,\cdots,n-1\}$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{J\subset\{1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\}} (-1)^{n-1-|J|}\mathbf{1}_{\left\{\theta_k\le\lambda_{t_k}(\delta_{x_k}+\sum_{i\in J\cap\{1,\cdots,k-1\}}\delta_{x_i})\right\}} \\
&= \sum_{U=\tilde{U}\cup\{k\};\tilde{U}\subset\{1,\cdots,k-1\}} \sum_{J\subset\{1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\};\tilde{U}\subset J} (-1)^{n-1-|J|}\mathbf{1}_{\left\{\theta_k\le\lambda_{t_k}(\sum_{i\in U}\delta_{x_i})\right\}} \\
&= \sum_{U=\tilde{U}\cup\{k\};\tilde{U}\subset\{1,\cdots,k-1\}} \mathbf{1}_{\left\{\theta_k\le\lambda_{t_k}(\sum_{i\in U}\delta_{x_i})\right\}}(-1)^{n-1-|\tilde{U}|} \sum_{J\subset\{1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\};\tilde{U}\subset J} (-1)^{|\tilde{U}|-|J|} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

˜因为 $[k\le n-1]$ 意味着 $\#\{J\subset\{1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\};\ U\subset J\}>1$ 因此根据牛顿二项式公式 a

$$
\sum_{J\subset\{1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\};\tilde{U}\subset J} (-1)^{|\tilde{U}|-|J|} = 0.
$$

另一方面

$$
\zeta(t-t_n) \sum_{J\subset\{1,\cdots,n-1\}} (-1)^{n-1-|J|}\mathbf{1}_{\left\{\theta_n\le\lambda_{t_n}(\sum_{i\in J\cap\{1,\cdots,n-1\}}\delta_{x_i})\right\}} = \zeta(t-t_n)\mathcal{D}^{n-1}_{(x_1,\cdots,x_{n-1})}\mathbf{1}_{\{\theta_n\le\lambda_{t_n}\}};
$$

这就完成了证明。 □

命题 4.6。令 $\zeta\equiv\Phi$ 或 $\zeta\equiv 1$，并回顾记号 *4.2*。令 $t\ge 0$、$n\in\mathbb{N}^*$ 和$(x_1$、$\cdots$、$x_n)\in\mathbb{X}^n$，其中 $0<t_1<\ldots<t_n\le t$。我们有：

$$
\int_{\mathbb{R}_+^n}\cdots\int c_n^{\zeta,t}(x_1,\cdots,x_n)d\theta_1\ldots d\theta_n = \mu\zeta(t-t_n)\prod_{i=2}^{n}\Phi(t_i-t_{i-1}).
$$

证明。首先注意到，由于 $\mathcal{D}^k\mu=0$，我们在命题 4.5 的证明中已经证明：

$$
\mathcal{D}^n_{(x_1,\ldots,x_n)}\lambda_s = \Phi(s-t_n)\mathcal{D}^{n-1}_{(x_1,\cdots,x_{n-1})}\mathbf{1}_{\{\theta_n\le\lambda_{t_n}\}};\quad \forall s\ge t_n.
$$

我们有：

$$
\int_{\mathbb{R}_+} c_n^{\zeta,t}(x_1,\cdots,x_n)d\theta_n \;=\; \zeta(t-t_n)\int_{\mathbb{R}_+}\mathcal{D}^{n-1}_{x_1,\cdots,x_{n-1}}\mathbf{1}_{\{\theta_n\le\lambda_n\}}d\theta_n
$$

$$
\begin{aligned}
&= \zeta(t-t_n)\int_{\mathbb{R}_+}\sum_{J\subset\{1,\cdots,n-1\}}(-1)^{n-1-|J|}\mathbf{1}_{\left\{\theta_n\le\lambda_{t_n}\left(\sum_{j\in J}\delta_{x_j}\right)\right\}}d\theta_n\\
&= \zeta(t-t_n)\sum_{J\subset\{1,\cdots,n-1\}}(-1)^{n-1-|J|}\int_{\mathbb{R}_+}\mathbf{1}_{\left\{\theta_n\le\lambda_{t_n}\left(\sum_{j\in J}\delta_{x_j}\right)\right\}}d\theta_n\\
&= \zeta(t-t_n)\sum_{J\subset\{1,\cdots,n-1\}}(-1)^{n-1-|J|}\lambda_{t_n}\left(\sum_{j\in J}\delta_{x_j}\right)\\
&= \zeta(t-t_n)\mathcal{D}^{n-1}_{x_1,\cdots,x_{n-1}}\lambda_{t_n}\\
&= \begin{cases}\zeta(t-t_1)\mu, & \text{if } n=1\\ \zeta(t-t_n)\Phi(t_n-t_{n-1})D^{n-2}_{x_1,\cdots,x_{n-2}}\mathbf{1}_{\left\{\theta_{n-1}\le\lambda_{t_{n-1}}\right\}}, & \text{if } n\ge 2\end{cases}\\
&= \begin{cases}\zeta(t-t_1)\mu, & \text{if } n=1\\ \zeta(t-t_n)\Phi(t_n-t_{n-1})c^{\zeta,t}_{n-1}(x_1,\cdots,x_{n-1}), & \text{if } n\ge 2.\end{cases}
\end{aligned}
$$

该结果由归纳法得出。 □

注记4.7. 由关系式(3.8)可立即得到

$$\mathbb{E}[X^\zeta_t]=\sum_{n\ge1}\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{X}^n}c^{\zeta,t}_n(x_1,\cdots,x_n)dx_1\dots x_n$$

这将使我们能够推导出 $\mathbb{E}[H_t]$ 和 $\mathbb{E}[\lambda_t]$ 的众所周知的表达式（参见定理5.4的证明）。

5 定理2.4的证明

证明依赖于若干结果。

5.1 预备结果

下面的引理揭示了系数 $c^{\zeta,\ n}{}^t$的支撑集的一个关键性质。

引理5.1。 令 $\zeta\equiv\Phi$ 或 $\zeta\equiv1$，并回顾记号 *4.2*。固定 $t\ge0$，令 $n\in\mathbb{N}^*$，$(x_1,\dots,x_n)\in\Delta_{(n)}\cap((0,t]\times\mathbb{R}_+)^n$。则有：

$$c^{\zeta,t}_n(x_1,\dots,x_n)=c^{\zeta,t}_n(x_1,\dots,x_n)\mathbf{1}_{\{\theta_1\le\mu\}}\prod_{i=2}^n\mathbf{1}_{\left\{\theta_i\le\mu+\sum_{j=1}^{i-1}\Phi(t_i-t_j)\right\}}.$$

证明。 根据定义

$$c^{\zeta,t}_n(x_1,\dots,x_n)=\zeta(t-t_n)\sum_{J\subset\{x_1,\cdots,x_{n-1}\}}(-1)^{n-1-|J|}\mathbf{1}_{\left\{\theta_n\le\lambda_{t_n}\left(\sum_{j\in J}\delta_j\right)\right\}}.$$

因此

$$c^{\zeta,t}_n(x_1,\dots,x_n)\mathbf{1}_{\left\{\theta_n>\mu+\sum_{j=1}^{n-1}\Phi(t_n-t_j)\right\}}=0.$$

设 $k \in \{1, \cdots, n-1\}$。

$$
\begin{aligned}
&c_n^{\zeta,t}(x_1, \ldots, x_n)\zeta(t-t_n)\mathbf{1}_{\left\{\theta_k > \mu + \sum_{j=1}^{k}\Phi(t_k - t_j)\right\}} \\
&= \zeta(t-t_n)\mathbf{1}_{\left\{\theta_k > \mu + \sum_{j=1}^{k}\Phi(t_k - t_j)\right\}} \sum_{J \subset \{x_1, \cdots, x_{n-1}\}} (-1)^{n-1-|J|}\mathbf{1}_{\left\{\theta_n \le \lambda_{t_n}(\sum_{j\in J}\delta_j)\right\}} \\
&= \zeta(t-t_n)\mathbf{1}_{\left\{\theta_k > \mu + \sum_{j=1}^{k}\Phi(t_k - t_j)\right\}} \sum_{J \subset \{x_1, \cdots, x_{n-1}\}; x_k \in J} (-1)^{n-1-|J|}\mathbf{1}_{\left\{\theta_n \le \lambda_{t_n}(\sum_{j\in J}\delta_j)\right\}} \\
&+ \zeta(t-t_n)\mathbf{1}_{\left\{\theta_k > \mu + \sum_{j=1}^{k}\Phi(t_k - t_j)\right\}} \sum_{J \subset \{x_1, \cdots, x_{n-1}\}; x_k \notin J} (-1)^{n-1-|J|}\mathbf{1}_{\left\{\theta_n \le \lambda_{t_n}(\sum_{j\in J}\delta_j)\right\}} \\
&= \zeta(t-t_n)\mathbf{1}_{\left\{\theta_k > \mu + \sum_{j=1}^{k}\Phi(t_k - t_j)\right\}} \sum_{J \subset \{x_2, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_{n-1}\}} (-1)^{n-2-|J|}\mathbf{1}_{\left\{\theta_n \le \lambda_{t_n}(\delta_{x_k} + \sum_{j\in J}\delta_j)\right\}} \\
&+ \zeta(t-t_n)\mathbf{1}_{\left\{\theta_k > \mu + \sum_{j=1}^{k}\Phi(t_k - t_j)\right\}} \sum_{J \subset \{x_2, \cdots, x_{n-1}\}} (-1)^{n-1-|J|}\mathbf{1}_{\left\{\theta_n \le \lambda_{t_n}(\sum_{j\in J}\delta_j)\right\}} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

as $\lambda_{t_n}(\delta_{x_k} + \sum_{j\in J}\delta_j)\mathbf{1}_{\left\{\theta_k > \mu + \sum_{j=1}^{k}\Phi(t_k - t_j)\right\}} = \lambda_{t_n}(\sum_{j\in J}\delta_j)\mathbf{1}_{\left\{\theta_k > \mu + \sum_{j=1}^{k}\Phi(t_k - t_j)\right\}}$. □

根据前面的观察，只要 θ_i 参数属于上述描述的支撑集，扰动强度的期望就仅取决于标记的时间分量 x_i。这构成了 t_i 分量与 θ_i 分量之间的一种解耦。

命题5.2。固定 $t \ge 0$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta_{(n)}$ 使得

$$
\mathbf{1}_{\{\theta_1 \le \mu\}} \prod_{i=2}^{n} \mathbf{1}_{\left\{\theta_i \le \mu + \sum_{j=1}^{i-1}\Phi(t_i - t_j)\right\}} = 1.
$$

$$
\textit{Then} \quad \mathbb{E}\left[\lambda_t \circ \varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}\right] = \mu\left(1 + \int_0^t \Psi(t-s)ds\right) + \sum_{j=1}^{n}\Psi(t-t_j)\mathbf{1}_{[t_j,+\infty)}(t), \quad t \ge 0.
$$

证明。设 $t \ge 0$ 且 $(x_1, \ldots\ldots, x_n) \in \Delta_{(n)}$ 使得 $\mathbf{1}_{\{\theta_1 \le \mu\}}\prod_{i=2}^{n}\mathbf{1}_{\left\{\theta_i \le \mu + \sum_{j=1}^{i-1}\Phi(t_i - t_j)\right\}} = 1$。我们有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\lambda_t \circ \varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}\right] &= \left[\mu + \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge t_1}\Phi(t-s)\lambda_s \circ \varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}ds\right]\right] \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{1}_{\{t \ge t_i\}}\mathbf{1}_{\left\{\theta_i \le \lambda_{t_i}\right\}}\left[\Phi(t-t_i) + \mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t\wedge t_{i+1}}\Phi(t-s)\lambda_s \circ \varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}ds\right]\right] \\
&+ \mathbf{1}_{\{t \ge t_{n-1}\}}\mathbf{1}_{\left\{\theta_i \le \lambda_{t_{n-1}}\right\}}\left[\Phi(t-t_{n-1}) + \mathbb{E}\left[\int_{t_{n-1}}^{t}\Phi(t-s)\lambda_s \circ \varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}ds\right]\right].
\end{aligned}
$$

固定 i。根据假设，$\prod_{j=1}^{i}\mathbf{1}_{\left\{\theta_j \le \mu + \sum_{k=1}^{j-1}\Phi(t_k - t_j)\right\}} = 1$，因此根据 λ_{t_i} 的定义，我们有 $\lambda_{t_i} \ge \mu + \sum_{k=1}^{j-1}\Phi(t_k - t_j)$，从而得到 $\mathbf{1}_{\left\{\theta_i \le \lambda_{t_i}\right\}}\prod_{j=1}^{i}\mathbf{1}_{\left\{\theta_j \le \mu + \sum_{k=1}^{j-1}\Phi(t_k - t_j)\right\}} = 1.$。回到我们的计算，

$$
\mathbb{E}\left[\lambda_t \circ \varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}\right] = \left[\mu + \int_0^{t\wedge t_1}\Phi(t-s)\mathbb{E}\left[\lambda_s \circ \varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}\right]ds\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{1}_{\{t\geq t_i\}}\left[\Phi(t-t_i)+\int_{t_i}^{t\wedge t_{i+1}}\Phi(t-s)\mathbb{E}\left[\lambda_s\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\dots,x_n)}ds\right]\right]\\
&+\mathbf{1}_{\{t\geq t_n\}}\left[\Phi(t-t_{n-1})+\int_{t_{n-1}}^{t}\Phi(t-s)\mathbb{E}\left[\lambda_s\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\dots,x_n)}ds\right]\right]\\
&=\mu^{t_1,\cdots,t_n}(t)+\int_0^t\Phi(t-s)\mathbb{E}\left[\lambda_s\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\dots,x_n)}\right]ds,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\mu^{t_1,\cdots,t_n}(t):=\mu+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{\{t\geq t_i\}}\Phi(t-t_i).
$$

我们注意到，引理 4.3 中的常微分方程的唯一解对于 $t\geq 0$ 为

$$
\mu^{t_1,\cdots,t_n}(t)+\int_0^t\Psi(t-s)\mu^{t_1,\cdots,t_n}(s)ds=\mu\left(1+\int_0^t\Psi(t-s)ds\right)+\sum_{j=1}^{n}\Psi(t-t_j)\mathbf{1}_{\{[t_j,+\infty)\}}(t).
$$

□

前一个公式传播到过程 X^ζ 如下。

命题5.3。设 $\zeta\equiv\Phi$ 或 $\zeta\equiv 1$，并回顾记号 *4.2*。

$$
\textit{Let } (x_1,\dots,x_n)\in\Delta_{(n)} \textit{ such that } \mathbf{1}_{\{\theta_1\leq\mu\}}\prod_{i=2}^{n}\mathbf{1}_{\left\{\theta_i\leq\mu+\sum_{j=1}^{i-1}\Phi(t_i-t_j)\right\}}=1.
$$

令 $t\geq 0$ 满足 $t_1<\cdots<t_n\leq t$。有如下结论:

$$
\mathbb{E}\left[X_t^\zeta\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\dots,x_n)}\right]=\int_0^t\zeta(t-u)\varphi^{t_1,\cdots,t_n}(u)du+\sum_{i=1}^{n}\zeta(t-t_i)
$$

$$
\textit{with}\quad \varphi^{t_1,\cdots,t_n}(u):=\mu\left(1+\int_0^u\Psi(u-v)dv\right)+\sum_{j=1}^{n}\Psi(u-t_j)\mathbf{1}_{\{[t_j,+\infty)\}}(u),\quad u\geq 0. \quad (5.1)
$$

证明。我们有

$$
\begin{aligned}
&X_t^\zeta\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\dots,x_n)}\\
&=X^\zeta_{t\wedge(t_1-)}+\mathbf{1}_{\{\theta_1\leq\mu\}}\mathbf{1}_{\left\{\theta_1\leq\lambda_{t_1}\right\}}\mathbf{1}_{\{t\geq t_1\}}\left[\zeta(t-t_1)+\int_{(t_1,t]\times\mathbb{R}_+}\zeta(t-s)\mathbf{1}_{\left\{\theta\leq\lambda_s\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\dots,x_n)}\right\}}N(ds,d\theta)\right]\\
&=X^\zeta_{t\wedge(t_1-)}+\mathbf{1}_{\{t\geq t_1\}}\left[\zeta(t-t_1)+\int_{(t_1,t\wedge t_2)\times\mathbb{R}_+}\zeta(t-s)\mathbf{1}_{\left\{\theta\leq\lambda_s\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\dots,x_n)}\right\}}N(ds,d\theta)\right]\\
&+\mathbf{1}_{\{t\geq t_2\}}\mathbf{1}_{\{\theta_1\leq\mu\}}\mathbf{1}_{\{\theta_2\leq\mu+\Phi(t_2-t_1)\}}\mathbf{1}_{\left\{\theta_2\leq\lambda_{t_2}\circ\varepsilon^{+}_{x_1}\right\}}\left[\zeta(t-t_2)+\int_{(t_2,t]\times\mathbb{R}_+}\zeta(t-s)\mathbf{1}_{\left\{\theta\leq\lambda_s\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\dots,x_n)}\right\}}N(ds,d\theta)\right]\\
&=X^\zeta_{t\wedge(t_1-)}+\mathbf{1}_{\{t\geq t_1\}}\left[\zeta(t-t_1)+\int_{(t_1,t\wedge t_2)\times\mathbb{R}_+}\zeta(t-s)\mathbf{1}_{\left\{\theta\leq\lambda_s\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\dots,x_n)}\right\}}N(ds,d\theta)\right]
\end{aligned}
$$

$$+\mathbf{1}_{\{t\geq t_2\}}\mathbf{1}_{\{\theta_1\leq\mu\}}\mathbf{1}_{\{\theta_2\leq\mu+\Phi(t_2-t_1)\}}\mathbf{1}_{\left\{\theta_2\leq\lambda_{t_2}\circ\varepsilon^+_{x_1}\right\}}\left[\zeta(t-t_2)+\int_{(t_2,t]\times\mathbb{R}_+}\zeta(t-s)\mathbf{1}_{\left\{\theta\leq\lambda_s\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}\right\}}N(ds,d\theta)\right],$$

其中$\mathbf{1}_{\{\theta_1\leq\mu\}}\mathbf{1}_{\{\theta_2\leq\mu+\Phi(t_2-t_1)\}}\mathbf{1}_{\left\{\theta_2\leq\lambda_{t_2}\circ\varepsilon^+_{x_1}\right\}}=1$ 沿用前一个证明中的相同步骤。因此，通过归纳法我们得到

$$\begin{aligned}X^\zeta_t\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}&=X^\zeta_{t\wedge(t_1-)}\\&+\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{1}_{\{t\geq t_i\}}\left[\zeta(t-t_i)+\int_{(t_i,t\wedge t_{i+1})\times\mathbb{R}_+}\zeta(t-s)\mathbf{1}_{\left\{\theta\leq\lambda_s\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}\right\}}N(ds,d\theta)\right]\\&+\mathbf{1}_{\{t\geq t_n\}}\left[\zeta(t-t_n)+\int_{(t_n,t]\times\mathbb{R}_+}\zeta(t-s)\mathbf{1}_{\left\{\theta\leq\lambda_s\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}\right\}}N(ds,d\theta)\right].\end{aligned}$$

取期望可得:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X^\zeta_t\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}\right]&=\mathbb{E}\left[X^\zeta_{t\wedge(t_1-)}\right]\\&+\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{1}_{\{t\geq t_i\}}\left[\zeta(t-t_i)+\int_{(t_i,t\wedge t_{i+1})}\zeta(t-s)\mathbb{E}\left[\lambda_s\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}\right]ds\right]\\&+\mathbf{1}_{\{t\geq t_n\}}\left[\zeta(t-t_n)+\int_{(t_n,t]}\zeta(t-s)\mathbb{E}\left[\lambda_s\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}\right]ds\right]\\&=\int_0^{t\wedge t_1}\zeta(t-s)\mathbb{E}\left[\lambda_s\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}\right]ds\\&+\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{1}_{\{t\geq t_i\}}\left[\zeta(t-t_i)+\int_{(t_i,t\wedge t_{i+1})}\zeta(t-s)\mathbb{E}\left[\lambda_s\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}\right]ds\right]\\&+\mathbf{1}_{\{t\geq t_n\}}\left[\zeta(t-t_n)+\int_{(t_n,t]}\zeta(t-s)\mathbb{E}\left[\lambda_s\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}\right]ds\right].\end{aligned}$$

由于我们假设 $t\geq t_n$,

$$\mathbb{E}\left[X^\zeta_t\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}\right]=\int_0^t\zeta(t-s)\mathbb{E}\left[\lambda_s\circ\varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}\right]ds+\sum_{i=1}^n\zeta(t-t_i).$$

结论由命题 5.2 得出。 □

定理5.4。令 $\zeta\equiv\Phi$ 或 $\zeta\equiv1$ （回忆记号 *4.2*）。

(i) 对于 $s\geq0$

$$\mathbb{E}\left[X^\zeta_s\right]=\begin{cases}\mu s+\mu\int_0^s\int_0^u\Psi(r)drdu, & \text{if } \zeta\equiv1,\\ \mu\int_0^s\Psi(u)du, & \text{if } \zeta\equiv\Phi.\end{cases}.$$

(ii) 令 $s\leq t$。我们有

$$\mathbb{E}\left[X^\Phi_sX^\zeta_t\right]=\mathbb{E}\left[X^\Phi_s\right]\mathbb{E}\left[X^\zeta_t\right]+\mu\int_0^s\zeta(t-v)\Psi(s-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)dv$$

$$+\mu\int_0^t\int_0^{s\wedge u}\zeta(t-u)\Psi(u-v)\Psi(s-v)\left(1+\int_0^v\Psi(v-w)dw\right)dvdu. \quad (5.2)$$

$$\mathbb{E}\left[X_s^1X_t^\zeta\right]=\mathbb{E}\left[X_s^1\right]\mathbb{E}\left[X_t^\zeta\right]+\mu\int_0^s\zeta(t-u)\left(1+\int_u^s\Psi(y-u)dy\right)\left(1+\int_0^u\Psi(w)dw\right)du$$
$$+\mu\int_0^t\int_0^{s\wedge u}\zeta(t-u)\Psi(u-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)dvdu. \quad (5.3)$$

证明。 在整个证明过程中，我们采用以下记号

$$\int_a^b\Phi_0(t)dt:=1,\quad\forall(a,b),\ 0\le a\le b,$$
$$\text{and for } n\in\mathbb{N}^*,\quad \Delta_{(n)}^s:=\{(x_1,\cdots,x_n)\in([0,s]\times\mathbb{R}_+)^n;\ t_1<\cdots<t_n\le s\}.$$

我们先考虑第 (i) 部分。根据 X_s^ζ 的伪混沌展开，我们有

$$X_s^\zeta=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\mathcal{I}_n(c_n^{\zeta,s}).$$

因此，利用关系式(3.8)和命题 3.10

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_s^\zeta\right]&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\mathbb{E}\left[\mathcal{I}_n(c_n^{\zeta,s})\right]\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\Delta_{(n)}^s}c_n^{\zeta,s}(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n\\&=\mu\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{0\le t_1<\cdots<t_n\le s}\zeta(s-t_n)\prod_{i=2}^n\Phi(t_i-t_{i-1})dt_1\cdots dt_n,\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由命题 4.6 得出。由引理 4.4 可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_s^1\right]&=\mu\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{0\le t_1<\cdots<t_n\le s}\prod_{i=2}^n\Phi(t_i-t_{i-1})dt_1\cdots dt_n\\&=\mu\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^s\int_0^u\Phi_{n-1}(u-r)drdu\\&=\mu\int_0^s\left(1+\int_0^u\Psi(r)dr\right)du.\end{aligned}$$

引理 4.4 的第二部分意味着

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_s^\Phi\right]&=\mu\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{0\le t_1<\cdots<t_n\le s}\Phi(s-t_n)\prod_{i=2}^n\Phi(t_i-t_{i-1})dt_1\cdots dt_n\\&=\mu\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^s\Phi_n(s-r)dr=\mu\int_0^s\Psi(r)dr.\end{aligned}$$

我们转到第（ii）部分。令 $\xi \equiv \Phi$ 或 $\xi \equiv 1$。利用 Mecke公式 (3.7)、引理5.1 和命题 5.3，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[X_s^{\xi} X_t^{\zeta}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \mathbb{E}\left[\mathcal{I}_n(c_n^{\xi,s}) X_t^{\zeta}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_{([0,s]\times\mathbb{R}_+)^n} \mathbb{E}\left[c_n^{\xi,s}(x_1,\cdots,x_n) X_t^{\zeta} \circ \varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}\right] dx_1 \cdots dx_n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\Delta_{(n)}^s} c_n^{\xi,s}(x_1,\cdots,x_n) \mathbb{E}\left[X_t^{\zeta} \circ \varepsilon^{+,n}_{(x_1,\ldots,x_n)}\right] dx_1 \cdots dx_n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\Delta_{(n)}^s} c_n^{\xi,s}(x_1,\cdots,x_n) \left[\int_0^t \zeta(t-u)\varphi^{t_1,\cdots,t_n}(u)du + \sum_{i=1}^n \zeta(t-t_i)\right] dx_1 \cdots dx_n
\end{aligned}
$$

其中 $\varphi^{t_1,\ \ldots,\ t_n}$ 由 (5.1) 给出。因此，利用命题 4.6，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[X_s^{\xi} X_t^{\zeta}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^s \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}_+^n} c_n^{\xi,s}(x_1,\cdots,x_n) d\theta_1 \cdots d\theta_n \left[\int_0^t \zeta(t-u)\varphi^{t_1,\cdots,t_n}(u)du + \sum_{i=1}^n \zeta(t-t_i)\right] dt_1 \cdots dt_n \\
&= \mu \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^s \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \xi(s-t_n) \prod_{i=2}^n \Phi(t_i - t_{i-1}) \left[\int_0^t \zeta(t-u)\varphi^{t_1,\cdots,t_n}(u)du + \sum_{i=1}^n \zeta(t-t_i)\right] dt_1 \cdots dt_n.
\end{aligned}
$$

使用由(5.1)给出的 $\varphi^{t_1,\cdots,t_n}$ 的定义，即

$$
\varphi^{t_1,\cdots,t_n}(u) = \mu\left(1 + \int_0^u \Psi(u-v)dv\right) + \sum_{j=1}^n \Psi(u-t_j)\mathbf{1}_{\{[t_j,+\infty)\}}(u); u \geq 0,
$$

前一个表达式可以写成:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[X_s^{\xi} X_t^{\zeta}\right] \\
&= \mu \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^s \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \xi(s-t_n) \prod_{i=2}^n \Phi(t_i - t_{i-1}) \left[\int_0^t \zeta(t-u)\varphi^{t_1,\cdots,t_n}(u)du + \sum_{i=1}^n \zeta(t-t_i)\right] dt_1 \cdots dt_n \\
&= \mu^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^s \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \xi(s-t_n) \prod_{i=2}^n \Phi(t_i - t_{i-1}) \left[\int_0^t \zeta(t-u)\left(1 + \int_0^u \Psi(u-v)dv\right)du\right] dt_1 \cdots dt_n \\
&+ \mu \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^s \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \xi(s-t_n) \prod_{i=2}^n \Phi(t_i - t_{i-1}) \\
&\times \left[\int_0^t \zeta(t-u) \sum_{j=1}^n \Psi(u-t_j)\mathbf{1}_{\{[t_j,+\infty)\}}(u)du + \sum_{i=1}^n \zeta(t-t_i)\right] dt_1 \cdots dt_n \\
&= \mu^2 \left[\int_0^t \zeta(t-u)\left(1 + \int_0^u \Psi(u-v)dv\right)du\right] \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^s \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \xi(s-t_n) \prod_{i=2}^n \Phi(t_i - t_{i-1}) dt_1 \cdots dt_n
\end{aligned}
$$

$$+\mu\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^s\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2}\xi(s-t_n)\prod_{i=2}^{n}\Phi(t_i-t_{i-1})\sum_{j=1}^{n}\left(\zeta(t-t_j)+\int_{t_j}^{t}\zeta(t-u)\Psi(u-t_j)du\right)dt_1\cdots dt_n.$$

利用第 (i) 部分的计算，我们得到

$$\mu\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^s\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2}\xi(s-t_n)\prod_{i=2}^{n}\Phi(t_i-t_{i-1})dt_1\cdots dt_n=\mathbb{E}\left[X_s^{\xi}\right].$$

此外，如果 $\zeta\equiv 1$,

$$\mu\left[\int_0^t\zeta(t-u)\left(1+\int_0^u\Psi(u-v)dv\right)du\right]=\mathbb{E}\left[X_t^{\zeta}\right].$$

若 $\zeta\equiv\Phi$ ，则有

$$\begin{aligned}
&\mu\left[\int_0^t\zeta(t-u)\left(1+\int_0^u\Psi(u-v)dv\right)du\right]\\
&=\mu\left[\int_0^t\Phi(t-u)du+\int_0^t\Phi(t-u)\int_0^u\Psi(u-v)dvdu\right]\\
&=\mu\left[\int_0^t\Phi(t-u)du+\int_0^t\int_v^t\Phi(t-u)\Psi(u-v)dudv\right]\\
&=\mu\left[\int_0^t\Phi(t-u)du+\int_0^t\int_0^{t-v}\Phi(t-v-w)\Psi(w)dudv\right]\\
&=\mu\left[\int_0^t\Phi(t-u)du+\int_0^t(\Psi*\Phi)(t-v)dv\right]\\
&=\mu\left[\int_0^t\Phi(t-u)du+\int_0^t\Psi(t-v)dv-\int_0^t\Phi(t-v)dv\right]\\
&=\mu\int_0^t\Psi(t-v)dv=\mathbb{E}\left[X_t^{\zeta}\right].
\end{aligned}$$

其中我们利用了这一事实： $\Psi*\Phi=\Psi-\Phi_{\circ}$ 因此

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[X_s^{\xi}X_t^{\zeta}\right]\\
&=\mathbb{E}\left[X_s^{\xi}\right]\mathbb{E}\left[X_t^{\zeta}\right]\\
&+\mu\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^s\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2}\xi(s-t_n)\prod_{i=2}^{n}\Phi(t_i-t_{i-1})\sum_{j=1}^{n}\left(\zeta(t-t_j)+\int_{t_j}^{t}\zeta(t-u)\Psi(u-t_j)du\right)dt_1\cdots dt_n.
\end{aligned}$$

现在我们来处理 μ 中的项。我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^s\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2}\xi(s-t_n)\prod_{i=2}^{n}\Phi(t_i-t_{i-1})\sum_{j=1}^{n}\left(\zeta(t-t_j)+\int_{t_j}^{t}\zeta(t-u)\Psi(u-t_j)du\right)dt_1\cdots dt_n\\
&=\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{n=j}^{+\infty}\int_0^s\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2}\xi(s-t_n)\prod_{i=2}^{n}\Phi(t_i-t_{i-1})\left(\zeta(t-t_j)+\int_{t_j}^{t}\zeta(t-u)\Psi(u-t_j)du\right)dt_1\cdots dt_n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{n=j}^{+\infty}\int_0^s\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2}\xi(s-t_n)\prod_{i=2}^{n}\Phi(t_i-t_{i-1})\zeta(t-t_j)dt_1\cdots dt_n\\
&+\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{n=j}^{+\infty}\int_0^s\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2}\xi(s-t_n)\prod_{i=2}^{n}\Phi(t_i-t_{i-1})\int_{t_j}^{t}\zeta(t-u)\Psi(u-t_j)dudt_1\cdots dt_n\\
&=: T_1+T_2.
\end{aligned}
$$

我们分别处理这两项。对于两项，我们都会用到富比尼定理。对于项 T_2，积分域为:

$$
0<t_1<\cdots<t_j<t_{j+1}<\cdots<t_n<s;\quad t_j<u<t.
$$

我们将该定义域重写为

$$
\int_0^t\int_0^{s\wedge u}\left(\int_{0<t_1<\cdots<t_j}dt_1\cdots dt_{j-1}\right)\left(\int_{t_j<t_{j+1}<\cdots<t_n<s}dt_{j+1}\cdots dt_n\right)dt_j du.
$$

因此我们有

$$
\begin{aligned}
&T_2\\
&=\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{n=j}^{+\infty}\int_0^s\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2}\xi(s-t_n)\prod_{i=2}^{n}\Phi(t_i-t_{i-1})\int_{t_j}^{t}\zeta(t-u)\Psi(u-t_j)dudt_1\cdots dt_n\\
&=\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{n=j}^{+\infty}\int_0^t\int_0^{s\wedge u}\zeta(t-u)\Psi(u-t_j)\left(\int_{t_j}^{s}\xi(s-t_n)\int_{t_j}^{t_n}\cdots\int_{t_j}^{t_{j+2}}\prod_{k=j+1}^{n}\Phi(t_k-t_{k-1})dt_{j+1}\cdots dt_{n-1}dt_n\right)\\
&\times\left(\int_0^{t_j}\int_0^{t_{j-1}}\cdots\int_0^{t_2}\prod_{\ell=2}^{j}\Phi(t_\ell-t_{\ell-1})dt_1\cdots dt_{j-2}dt_{j-1}\right)dt_j du.
\end{aligned}
$$

根据引理 4.4,

$$
\int_0^{t_j}\int_0^{t_{j-1}}\cdots\int_0^{t_2}\prod_{\ell=2}^{j}\Phi(t_\ell-t_{\ell-1})dt_1\cdots dt_{j-2}dt_{j-1}=\int_0^{t_j}\Phi_{j-1}(t_j-w)dw
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_j}^{s}\xi(s-t_n)\int_{t_j}^{t_n}\cdots\int_{t_j}^{t_{j+2}}\prod_{k=j+1}^{n}\Phi(t_k-t_{k-1})dt_{j+1}\cdots dt_{n-1}dt_n\\
&\qquad=\begin{cases}\int_{t_j}^{s}\Phi_{n-j}(y-t_j)dy, & \text{if } \xi\equiv 1\\ \Phi_{n-j+1}(s-t_j), & \text{if } \xi\equiv\Phi \text{ and } j\geq n+1;\\ \xi(s-t_j), & \text{if } \xi\equiv\Phi \text{ and } j=n.\end{cases}
\end{aligned}
$$

此外，回想起 $\int\Phi_0=1$，我们有 $\sum_{j=0}^{+\infty}\int\Phi_j(x)dx=1+\int\Psi(x)dx$.

• 如果 $\xi \equiv 1$

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{n=j}^{+\infty}\int_0^t\int_0^{s\wedge u}\zeta(t-u)\Psi(u-t_j)\int_{t_j}^{s}\Phi_{n-j}(y-t_j)dy\times\int_0^{t_j}\Phi_{j-1}(t_j-w)dwdt_jdu\\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{n=j}^{+\infty}\int_0^t\int_0^{s\wedge u}\zeta(t-u)\Psi(u-v)\int_{v}^{s}\Phi_{n-j}(y-v)dy\times\int_0^{v}\Phi_{j-1}(v-w)dwdvdu\\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\int_0^t\int_0^{s\wedge u}\zeta(t-u)\Psi(u-v)\left(1+\int_{v}^{s}\Psi(y-v)dy\right)\times\int_0^{v}\Phi_{j-1}(v-w)dwdvdu\\
&= \int_0^t\int_0^{s\wedge u}\zeta(t-u)\Psi(u-v)\left(1+\int_{v}^{s}\Psi(y-v)dy\right)\left(1+\int_0^{v}\Psi(v-w)dw\right)dvdu.
\end{aligned}
$$

• 如果 $\xi \equiv \Phi$,

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{n=j}^{+\infty}\int_0^t\int_0^{s\wedge u}\zeta(t-u)\Psi(u-t_j)\\
&\quad\times\left(\int_{t_j}^{s}\xi(s-t_n)\int_{t_j}^{t_n}\cdots\int_{t_j}^{t_{j+2}}\prod_{k=j+1}^{n}\Phi(t_k-t_{k-1})dt_{j+1}\cdots dt_{n-1}dt_n\right)\\
&\quad\times\left(\int_0^{t_j}\int_0^{t_{j-1}}\cdots\int_0^{t_2}\prod_{\ell=2}^{j}\Phi(t_\ell-t_{\ell-1})dt_1\cdots dt_{j-2}dt_{j-1}\right)dt_jdu\\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\int_0^t\int_0^{s\wedge u}\zeta(t-u)\Psi(u-t_j)\Phi(s-t_j)\int_0^{t_j}\Phi_{j-1}(t_j-w)dwdt_jdu\\
&\quad+\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{n=j+1}^{+\infty}\int_0^t\int_0^{s\wedge u}\zeta(t-u)\Psi(u-t_j)\Phi_{n-j+1}(s-t_j)\int_0^{t_j}\Phi_{j-1}(t_j-w)dwdt_jdu\\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\int_0^t\int_0^{s\wedge u}\zeta(t-u)\Psi(u-t_j)\Phi(s-t_j)\int_0^{t_j}\Phi_{j-1}(t_j-w)dwdt_jdu\\
&\quad+\sum_{j=1}^{+\infty}\int_0^t\int_0^{s\wedge u}\zeta(t-u)\Psi(u-t_j)(\Psi(s-t_j)-\Phi(s-t_j))\int_0^{t_j}\Phi_{j-1}(t_j-w)dwdt_jdu\\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\int_0^t\int_0^{s\wedge u}\zeta(t-u)\Psi(u-t_j)\Psi(s-t_j)\int_0^{t_j}\Phi_{j-1}(t_j-w)dwdt_jdu\\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\int_0^t\int_0^{s\wedge u}\zeta(t-u)\Psi(u-v)\Psi(s-v)\int_0^{v}\Phi_{j-1}(v-w)dwdvdu\\
&= \int_0^t\int_0^{s\wedge u}\zeta(t-u)\Psi(u-v)\Psi(s-v)\left(1+\int_0^{v}\Psi(v-w)dw\right)dvdu.
\end{aligned}
$$

再次运用富比尼定理，我们得到

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{n=j}^{+\infty}\int_0^s\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2}\xi(s-t_n)\prod_{i=2}^{n}\Phi(t_i-t_{i-1})\zeta(t-t_j)dt_1\cdots dt_n \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{n=j}^{+\infty}\int_0^s\zeta(t-t_j)\left(\int_{t_j}^s\xi(s-t_n)\int_{t_j}^{t_n}\cdots\int_{t_j}^{t_{j+2}}\prod_{k=j+1}^{n}\Phi(t_k-t_{k-1})dt_{j+1}\cdots dt_{n-1}dt_n\right) \\
&\times\left(\int_0^{t_j}\int_0^{t_{j-1}}\cdots\int_0^{t_2}\prod_{\ell=2}^{j}\Phi(t_\ell-t_{\ell-1})dt_1\cdots dt_{j-2}dt_{j-1}\right)dt_j.
\end{aligned}
$$

- 如果 $\xi\equiv 1$

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{n=j}^{+\infty}\int_0^s\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2}\prod_{i=2}^{n}\Phi(t_i-t_{i-1})\zeta(t-t_j)dt_1\cdots dt_n \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{n=j}^{+\infty}\int_0^s\zeta(t-t_j)\int_{t_j}^s\Phi_{n-j}(y-t_j)dy\int_0^{t_j}\Phi_{j-1}(t_j-w)dwdt_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{n=j}^{+\infty}\int_0^s\zeta(t-r)\int_r^s\Phi_{n-j}(y-r)dy\int_0^r\Phi_{j-1}(r-w)dwdr \\
&= \int_0^s\zeta(t-u)\left(1+\int_u^s\Psi(y-u)dy\right)\left(1+\int_0^u\Psi(w)dw\right)du.
\end{aligned}
$$

- 如果 $\xi\equiv\Phi$

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{n=j}^{+\infty}\int_0^s\zeta(t-t_j)\left(\int_{t_j}^s\xi(s-t_n)\int_{t_j}^{t_n}\cdots\int_{t_j}^{t_{j+2}}\prod_{k=j+1}^{n}\Phi(t_k-t_{k-1})dt_{j+1}\cdots dt_{n-1}dt_n\right) \\
&\times\left(\int_0^{t_j}\int_0^{t_{j-1}}\cdots\int_0^{t_2}\prod_{\ell=2}^{j}\Phi(t_\ell-t_{\ell-1})dt_1\cdots dt_{j-2}dt_{j-1}\right)dt_j \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\int_0^s\zeta(t-t_j)\xi(s-t_j)\int_0^{t_j}\Phi_{j-1}(t_j-w)dwdt_j \\
&+ \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{n=j+1}^{+\infty}\int_0^s\zeta(t-t_j)\Phi_{n-j+1}(s-t_j)\int_0^{t_j}\Phi_{j-1}(t_j-w)dwdt_j \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\int_0^s\zeta(t-v)\xi(s-v)\int_0^{v}\Phi_{j-1}(v-w)dwdv \\
&+ \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{n=j+1}^{+\infty}\int_0^s\zeta(t-t_j)\Phi_{n-j+1}(s-v)\int_0^{v}\Phi_{j-1}(v-w)dwdv \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\int_0^s\zeta(t-v)\Phi(s-v)\int_0^{v}\Phi_{j-1}(v-w)dwdv
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{j=1}^{+\infty}\int_0^s \zeta(t-v)(\Psi(s-v)-\Phi(s-v))\int_0^v \Phi_{j-1}(v-w)dwdv\\
&=\int_0^s \zeta(t-v)\Psi(s-v)\left(1+\int_0^v \Psi(w)dw\right)dv.
\end{aligned}
$$

将 $\xi\equiv 1$ （分别为 $\xi\equiv\Phi$）的 T_1 和 T_2 项合并，我们得到关系式（5.3）（分别为关系式（5.2））。 □

5.2 定理2.4的证明

该结果是定理5.4的直接推论。更具体地说，由定理5.4的第 (i) 部分，我们可以得到霍克斯过程边缘分布的期望及其强度的众所周知的表达式。事实上（注意到 $\lambda_t=\mu+X_t^{\xi}$ with $\xi\equiv\Phi$）

$$
\mathbb{E}\left[H_t\right]=\mu t+\mu\int_0^t\int_0^u \Psi(r)drdu;\quad \mathbb{E}\left[\lambda_t\right]=\mu\left(1+\int_0^t\Psi(r)dr\right);\quad t\geq 0.
$$

第 (i) 部分的证明：

我们将关系式（5.3）应用于 $\zeta\equiv 1$。对于任意 $s\leq t$，有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[H_sH_s\right]&=\mathbb{E}\left[H_s\right]\mathbb{E}\left[H_t\right]\\
&+\mu\int_0^s\left(1+\int_u^s\Psi(y-u)dy\right)\left(1+\int_0^u\Psi(w)dw\right)du\\
&+\mu\int_0^t\int_0^{s\wedge u}\Psi(u-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)dvdu\\
&=\mathbb{E}\left[H_s\right]\mathbb{E}\left[H_t\right]\\
&+\mu\int_0^s\left(1+\int_u^s\Psi(y-u)dy\right)\left(1+\int_0^u\Psi(w)dw\right)du\\
&+\mu\int_0^s\int_0^u\Psi(u-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)dvdu\\
&+\mu\int_s^t\int_0^s\Psi(u-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)dvdu\\
&=\mathbb{E}\left[H_s\right]\mathbb{E}\left[H_t\right]\\
&+\mu\int_0^s\left(1+\int_u^s\Psi(y-u)dy\right)\left(1+\int_0^u\Psi(w)dw\right)du\\
&+\mu\int_0^s\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)\int_v^s\Psi(u-v)dudv\\
&+\mu\int_0^s\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)\int_s^t\Psi(u-v)dudv\\
&=\mathbb{E}\left[H_s\right]\mathbb{E}\left[H_t\right]\\
&+\mu\int_0^s\left(1+\int_u^s\Psi(y-u)dy\right)\left(1+\int_0^u\Psi(w)dw\right)du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\mu\int_0^s\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)\int_v^t\Psi(u-v)dudv\\
&=\mathbb{E}\left[H_s\right]\mathbb{E}\left[H_t\right]\\
&+\mu\int_0^s\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)\left(1+\int_v^t\Psi(u-v)du\right)dv.
\end{aligned}
$$

（ii）部分的证明：

令 $s\leq t$，首先应使用定理5.4计算：$\mathbb{E}\left[X_s^{\xi}X_t^{\zeta}\right]$ 先用（ζ，ξ）$\equiv$（$\mathbf{1}$，Φ），然后用（ζ，ξ）$\equiv$（Φ，$\mathbf{1}$）。显然，这两个量是相似的。根据（5.2），我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(\lambda_s-\mu)H_t]-(\mathbb{E}[\lambda_s]-\mu)\mathbb{E}[H_t]\\
&=\mu\int_0^s\Psi(s-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)dv\\
&+\mu\int_0^t\int_0^{s\wedge u}\Psi(u-v)\Psi(s-v)\left(1+\int_0^v\Psi(v-w)dw\right)dvdu\\
&=\mu\int_0^s\Psi(s-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)dv\\
&+\mu\int_0^s\int_0^u\Psi(u-v)\Psi(s-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)dvdu\\
&+\mu\int_s^t\int_0^s\Psi(u-v)\Psi(s-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)dvdu\\
&=\mu\int_0^s\Psi(s-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^s\Psi(u-v)du\right)dv\\
&+\mu\int_0^s\Psi(s-v)\int_s^t\Psi(u-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)dudv\\
&=\mu\int_0^s\Psi(s-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^t\Psi(u-v)du\right)dv.
\end{aligned}
$$

Thus

$$
\mathbb{E}[\lambda_sH_t]-\mathbb{E}[\lambda_s]\mathbb{E}[H_t]=\mu\int_0^s\Psi(s-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^t\Psi(u-v)du\right)dv.
$$

同样地，利用 (5.3)

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[H_s(\lambda_t-\mu)]-\mathbb{E}[H_s](\mathbb{E}[\lambda_t]-\mu)\\
&=\mu\int_0^s\Phi(t-v)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)dv\\
&+\mu\int_0^t\int_0^{s\wedge u}\Phi(t-u)\Psi(u-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)dvdu\\
&=\mu\int_0^s\Phi(t-v)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)dv\\
&+\mu\int_0^s\int_0^u\Phi(t-u)\Psi(u-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)dvdu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\mu\int_s^t\int_0^s \Phi(t-u)\Psi(u-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)dvdu\\
&=\mu\int_0^s \Phi(t-v)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)dv\\
&+\mu\int_0^s \left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)\int_v^s\Phi(t-u)\Psi(u-v)dudv\\
&+\mu\int_0^s \left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)\int_s^t\Phi(t-u)\Psi(u-v)dudv\\
&=\mu\int_0^s \Phi(t-v)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)dv\\
&+\mu\int_0^s \left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)\int_0^{t-v}\Phi(t-v-x)\Psi(x)dxdv\\
&=\mu\int_0^s \Phi(t-v)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)dv\\
&+\mu\int_0^s \left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)[\Psi(t-v)-\Phi(t-v)]dv\\
&=\mu\int_0^s \Psi(t-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)dv.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\mathbb{E}[H_s\lambda_t]-\mathbb{E}[H_s]\mathbb{E}[\lambda_t]=\mu\int_0^s\Psi(t-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)\left(1+\int_v^s\Psi(y-v)dy\right)dv.
$$

第三部分的证明：

令 $s\le t_\circ$ 关系式（5.2）意味着

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(\lambda_s-\mu)(\lambda_t-\mu)\right]\\
&=\mathbb{E}\left[(\lambda_s-\mu)\right]\mathbb{E}\left[(\lambda_t-\mu)\right]\\
&+\mu\int_0^s\Phi(t-v)\Psi(s-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)dv\\
&+\mu\int_0^t\int_0^{s\wedge u}\Phi(t-u)\Psi(u-v)\Psi(s-v)\left(1+\int_0^v\Psi(v-w)dw\right)dvdu\\
&=\mathbb{E}\left[(\lambda_s-\mu)\right]\mathbb{E}\left[(\lambda_t-\mu)\right]\\
&+\mu\int_0^s\Phi(t-v)\Psi(s-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)dv\\
&+\mu\int_0^s\Psi(s-v)\left(1+\int_0^v\Psi(v-w)dw\right)\int_v^s\Phi(t-u)\Psi(u-v)dudv\\
&+\mu\int_0^s\Psi(s-v)\left(1+\int_0^v\Psi(v-w)dw\right)\int_s^t\Phi(t-u)\Psi(u-v)dudv\\
&=\mathbb{E}\left[(\lambda_s-\mu)\right]\mathbb{E}\left[(\lambda_t-\mu)\right]\\
&+\mu\int_0^s\Phi(t-v)\Psi(s-v)\left(1+\int_0^v\Psi(w)dw\right)dv
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\mu\int_0^s \Psi(s-v)\left(1+\int_0^v \Psi(v-w)dw\right)\int_v^t \Phi(t-u)\Psi(u-v)dudv\\
&=\mathbb{E}\left[(\lambda_s-\mu)\right]\mathbb{E}\left[(\lambda_t-\mu)\right]\\
&+\mu\int_0^s \Phi(t-v)\Psi(s-v)\left(1+\int_0^v \Psi(w)dw\right)dv\\
&+\mu\int_0^s \Psi(s-v)\left(1+\int_0^v \Psi(v-w)dw\right)\int_0^{t-v} \Phi(t-v-x)\Psi(x)dxdv\\
&=\mathbb{E}\left[(\lambda_s-\mu)\right]\mathbb{E}\left[(\lambda_t-\mu)\right]\\
&+\mu\int_0^s \Psi(s-v)\Psi(t-v)\left(1+\int_0^v \Psi(v-w)dw\right)dv.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\mathbb{E}\left[\lambda_s\lambda_t\right]-\mathbb{E}\left[\lambda_s\right]\mathbb{E}\left[\lambda_t\right]=\mu\int_0^s \Psi(s-v)\Psi(t-v)\left(1+\int_0^v \Psi(v-w)dw\right)dv.
$$

参考文献

[1] E. Bacry、S. Delattre、M.Hoffmann 和 J.F.Muzy。关于霍克斯过程的一些极限定理及其在金融统计中的应用。随机过程及其应用，123(7):2475 –2499，2013年。为纪念2013年国际统计年而发行的特别专刊。

[2] E. Bacry、I.Mastromatteo 和 J.-F. Muzy。金融领域的霍克斯过程。市场微观结构与流动性，1(01):1550005，2015年。

[3] E. Bacry 和 J.-F. Muzy。霍克斯过程的一阶和二阶统计特征刻画及非参数估计。*IEEE Transactions on Information Theory*，62(4):2184–2202，2016年。

[4] P.Brémaud 和 L. Massoulié。非线性霍克斯过程的稳定性。概率-年刊，24(3):1563–1588，1996年。

[5] L. Cui, A. G. Hawkes, 和 H. Yi。霍克斯过程的矩的初等推导。 *Advances in Applied Probability*,52(1):102–137,2020年。

[6] L. Cui、B. Wu 和 J. Yin. 伽马衰减核函数下霍克斯过程的矩。*Methodology and Computing in Applied Probability*，24:1565—1601，2022年。

[7] O. El Euch 和 M. Rosenbaum. 粗糙 Heston 模型的特征函数。*Mathematical Finance*, 29(1):3–38, 2019年。

[8] E. Errais、K.Giesecke和 L. R. Goldberg。仿射点过程与投资组合信用风险。*SIAM Journal on Financial Mathematics*，1(1):642–665，2010年。

[9] X.Gao、X. Zhou和 L. Zhu。霍克斯过程的变换分析及其在暗池交易中的应用。*Quantitative Finance*，18(2):265–282，2018年。

[10] A. G. Hawkes. 若干互激点过程的点谱。*Journal of theRoyal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 33(3):438–443, 1971年。

[11]A. G. Hawkes. 若干自激与互激点过程的谱。*Biometrika*, 58(1):83–90, 1971年。[12] A.G. Hawkes 与 D. Oakes. 自激过程的簇过程表示。*Journal of Applied Probability*, 11(3):493–503, 1974年。[13] C. Hillairet 与 A. Réveillac. 关于计数过程的混沌展开。预印本。, 2022年。[14] C. Hillairet、A. Réveillac 与 M. Rosenbaum. 霍克斯过程的展开公式及其在网络保险衍生品中的应用。随机过程及其应用, 160:89–119, 2023年。[15] P. Hodara 与 E. Löcherbach. 具有可变长度记忆和无穷多个分量的霍克斯过程。*Advances in Applied Probability*, 49(1):84–107, 2017年。[16] G. Last. 泊松点过程的随机分析。载于《泊松点过程的随机分析：*Malliavin* 微积分、*Wiener-Itô* 混沌展开与随机几何》（编者：*Peccati, G.* 与 *Reitzner, M.*）, 第1–36页。Springer International Publishing, 2016年。[17] N. Privault. 离散与连续情形下的随机分析。Springer Berlin Heidelberg, 2009年。[18] N. Privault. 霍克斯累积量的递归计算。*Statistics & ProbabilityLetters*, 177, 2021年。[19] M.A. Rizoiu、Y. Lee、S. Mishra 与 L. Xie. 用于社交媒体事件的霍克斯过程。载于 *Frontiers of Multimedia Research*, 第191–218页。2017年。