# 双曲平面中紧束缚模型的态密度

雷´米·莫塞里[1], * 和 Julien Vidal[1], †[1] *Sorbonne Université, CNRS, Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée, LPTMC, 75005 Paris, France*

我们研究正则双曲镶嵌上紧束缚哈密顿量的能谱。更具体地说，我们利用格林函数的连分数展开，在格点数超过 $10^9$ 且采用开放边界条件的有限尺寸系统上计算态密度。该展开的系数被发现会迅速收敛，因此可以相当准确地推断热力学极限。这一态密度与近期提出的双曲能带理论所给出的预言形成鲜明对比。因此，我们得出结论：由双曲布洛赫类波本征函数所描述的能谱比例在热力学极限下趋于零。

arXiv:2304.02382v2 [cond-mat.str-el] 4 Sep 2023

## I. 引言

自量子力学诞生之初，对晶体固体电子性质的研究就一直是不断发展的研究领域。特别是，著名的布洛赫定理 [1], 由 Floquet [2]于1883年预言，催生了能带理论，而能带理论是当前大多数电子设备的核心。能带理论本质上源于固体中原子的规则排列，而固体在几何上可依据其对称群进行分类。在二维（2D）欧几里得平面（平坦曲率）中，所有周期性镶嵌都可以由五种布拉菲格子和17个壁纸群构造而成。重要的是，与布拉菲格子相关联的平移群是阿贝尔群，其一维不可约表示（不可约表示）可被视为布洛赫波的基石。

相比之下，在双曲平面$\mathbf{H}^2$（负常曲率）中，存在无穷多种由其考克斯特反射群 [3, 4] 表征的正则镶嵌。最近，Maciejko 和 Rayan 提出使用平移福克斯群 $\Gamma$（它是考克斯特反射群的一个子群）来构建双曲平面中的布洛赫波对应物 [5, 6]（另见参考文献 [7]）。然而，由于 $\Gamma$ 是一个非交换群，它并非只有一维不可约表示，因此这种被称为双曲能带理论（HBT）的方法还需要考虑高维不可约表示 [6, 8]。

因此，一个重要的未决问题是确定 $\Gamma$的不同不可约表示的相对权重。在本文中，我们通过考虑正则双曲铺砌来处理这一问题，并计算紧束缚哈密顿量的态密度（态密度）。我们聚焦于一组特定的双曲铺砌，但我们基于连分数方法的方法同样可应用于任何正则镶嵌。在第II节中，我们简要回顾这些铺砌的一些基本性质，并引入该模型。第III 节对连分数方法作了简短的教学性介绍，并解释系数的快速收敛如何使得第IV节中讨论的态密度的精确确定。

通过将总态密度与基于 $\Gamma$一维不可约表示的阿贝尔双曲能带理论（AHBT）所得到的态密度进行比较（参见第 V 节），我们得出结论：在热力学极限下，*AHBT* 所涵盖的完整谱比例趋于零。附录 A介绍了团簇逐壳层构造的相关信息，附录B 列出了用于计算态密度的系数。

## II. 铺砌与模型

由 $p$边形（边数为 $p$ 的多边形）构成且具有 $q-$重配位格点的二维正则镶嵌，以施莱夫利符号 $\{p,q\}$ [3] 表示。当$(p-2)(q-2) > 4$时，这些镶嵌可以嵌入负曲率的双曲平面 $\mathrm{H}^2$中。当 $(p-2)(q-2) = 4$时，则得到通常的方形 $\{4,4\}$、三角形 $\{3,6\}$和蜂窝状 $\{6,3\}$ 格，这些是平坦欧几里得平面中唯一的正则镶嵌。最-后，当$(p-2)(q-2) < 4$时，可得到五种柏拉图立体，即四面体 $\{3,3\}$、立方体 $\{4,3\}$、八面体 $\{3,4\}$、十二面体 $\{5,3\}$ 和二十面体 $\{3,5\}$，它们可以嵌入正-曲率的球面 $\mathrm{S}^2$中。一个$\{p,q\}$ 镶嵌的完整对称群是考克斯特反射群 $[p,q]$，它由基本三角-形区域各边上的反射生成，这种区域称为正交单形 [4]。

我们的主要目标是确定定义在 $\{p,q\}$ 铺砌上的标准紧束缚哈密顿量的态密度：

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle} |i\rangle\langle j|, \tag{1}$$

其中 $\langle i,\ j\rangle$ 表示最近邻格点，而$|i\rangle$ 是局域在铺砌的 $i$ 格点（顶点）上的一个态。下文中，我们将能量单位设为 $t = 1$，使得 $H$ 恰好是邻接矩阵的相反数。我们关注在热力学极限下分析 $H$ 的谱，也就是在无限铺砌上的谱。

一种可行的方法是对越来越大的簇进行精确对角化（ED），但对于双曲铺砌 $[(p-2)(q-2) > 4]$，存在若干

* remy.mosseri@upmc.fr
† vidal@lptmc.jussieu.fr

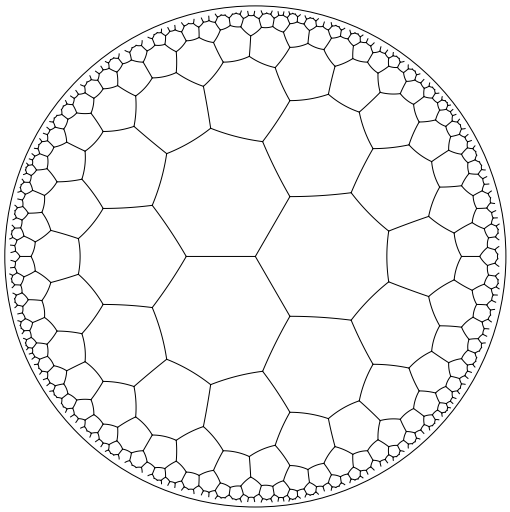

图1。具有开放边界条件和半径 $R = 10$的一部分 $\{7,3\}$ 双曲铺砌。它包含 472 个（体区）+ 270 （边界） = 742 顶点。在这里，我们使用双曲平面的标准庞加莱 '圆盘共形表示。

困难。事实上，如果采用开放边界条件的簇，那么在热力学极限下，边界上的格点数与体区内格点数之比趋于一个有限常数（示意见图1 ，定量讨论见附录A ），而在欧几里得平面中该比值趋于零。这一众所周知的现象源于$\mathbf{H}^2$ 的负曲率，并且由于会出现虚假的边缘态，因此无法对谱进行可靠的外推。

为避免边界效应，也可以考虑具有周期性边界条件的簇，但在这种情况下会出现另一种困难。事实上，对于亏格为 $g$ 的紧致（可定向）曲面，欧拉-庞加莱 '特征 $\chi$ 对于

$$\chi = 2 - 2g = V - E + F, \tag{2}$$

其中， $V$、 $E$和 $F$ 分别是顶点、边和面的数量。对于任意双曲 $\{p,q\}$ 铺砌，进一步有 $pF = 2E = qV$，因此立即得到

$$g - 1 = V\,\frac{p\,q - 2(p+q)}{4p}. \tag{3}$$

该关系表明，曲面的亏格与格点数成正比，即 $g \propto V$。因此，除了对于任意 $\{p,q\}$ 铺砌而言，构建大亏格紧致系统的实际困难之外，主要问题还来自所谓的闭测地线，它们被定义为周期性铺砌中最短的不可缩闭环，其典型长度按 $\log V$ [9]增长。因此，一个具有 $V$ 个顶点（格点）并采用周期性边界条件的有限尺寸簇，只能捕获无限铺砌的精确 $n$ 阶谱矩，其中 $n \propto \log V$ （更多详情见下文）。作为比较，在欧几里得情形（ $g = 1$）中， $n \propto \sqrt{V}$。总之，尽管对周期性簇进行精确对角化是研究欧几里得铺砌的紧束缚哈密顿量的一种高效工具，但由于显著的有限尺寸效应，它显然无法用于双曲铺砌。

### III. 连分数方法

这里，我们采用另一种方法来计算无限铺砌的谱的态密度。这种方法称为连分数方法，其做法是将格林函数$G(E) = 1/(E - H)$的对角矩阵元展开如下 [10–12]:

$$[G(E)]_{\alpha\alpha} = \cfrac{1}{E - a_1 - \cfrac{b_1}{E - a_2 - \cfrac{b_2}{E - a_3 - \cfrac{b_3}{\ddots}}}}, \tag{4}$$

其中，系数（$a_n, b_n$）是有理数，取决于所考虑的态 $|\alpha\rangle$ 。这些系数与通过递归法 [10]计算得到的系数直接相关。

于是，与能量 $E$ 相关联的任意态 $|\alpha\rangle$ 的局域态密度（ LDOS）为

$$\rho_\alpha(E) = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{Im}[G(E + \mathrm{i}\,\varepsilon)]_{\alpha\alpha}, \tag{5}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\alpha(E)\,\mathrm{d}E = 1. \tag{6}$$

由于对于正则镶嵌，所有格点都是等价的，与格点 $i$, $\rho_i(E)$ 相关的局域态密度与总态密度相同（相差一个归一化因子）。因此，该问题归结为从位于格点 $i$上的初始态出发，计算系数 $(a_n, b_n)$。这些系数与局域态密度的矩直接相关。更准确地说，计算 $n$ 系数即可获得局域态密度的前 $2n$ 个矩 $\langle i|H^{m\leqslant 2n}|i\rangle$，并且需要一个半径为 $R = n$ 的团簇（此处，“半径”是指从中心到边界的最短离散图路径）。例如，图 1所示的团簇可以用于计算前十个系数。对于二分镶嵌，有 $a_{n\geqslant 1} = 0$ ，这使人联想到对于所有 $m \in \mathbb{N}$， $\langle i|H^{2m+1}|i\rangle = 0$ 这一事实。$(a_n, b_n)$的大-$n$ -极限取决于态密度的性质。重要的是，如果这些系数收敛到唯一值$(a_\infty, b_\infty)$，那么态密度是无能隙的。此外，如果态密度包含范霍夫奇点，则预期会出现振荡 [13]。作为示例，我们在图2 中展示了蜂窝镶嵌的前 300 个系数 $b_n$ 。向渐近值 $b_\infty = 9/4$的缓慢收敛是由于在 $E = 0$处态密度为零，而振荡则源于位于 $E = \pm 1$ 处的两个众所周知的范霍夫奇点（见图 5 左图）。相比之下，当

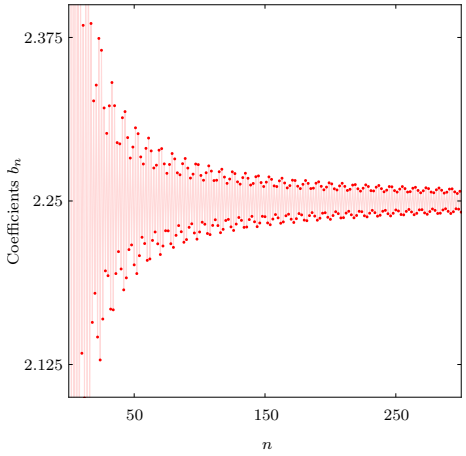


图2。与蜂窝晶格上的单个格点相关的前 300个连分数系数 $b_n$，在包含 $V = 135\,451$ 个格点的团簇上计算得到。由于范霍夫奇点，这些系数（缓慢地）在振荡中趋近于渐近值 $b_\infty = 9/4$。红线用于引导观察。

态密度平滑且无能隙，预计系数会快速收-敛，例如在3–与之对应的规则贝特格 $\{\infty, 3\}$铺砌 [14] 且对于它可得到 $a_{n\geqslant 1} = 0$， $b_1 = 3$，以及$b_{n\geqslant 2} = 2$ （关于态密度，见图5，右图）。

这些考量促使我们讨论连分数的终止。如果系数 ($a_n, b_n$) 在足够大的 $n$下收敛，则可以在给定的 $n$之后，用其外推的渐近值 $(a_\infty, b_\infty)$替代它们。这一近似可以解释为将所考虑的团簇嵌入有效介质中，从而抑制虚假的边缘态。然后，引入连分式终止项

$$t(E) = \frac{1}{E - a_\infty - b_\infty t(E)}, \tag{7}$$

即，

$$t(E) = \frac{1}{2b_\infty}\left[E - a_\infty - \sqrt{(E-a_\infty)^2 - 4\,b_\infty}\right], \tag{8}$$

通过增大 $n$的值，可以获得态密度的非常良好的近似，并检查其收敛性；超过该值后，我们使用渐近值。此外，利用式（4）、（5）和（8），可以发现只有在 $E \in [E_-, E_+]$时态密度才不为零，其中

$$E_\pm = a_\infty \pm 2\sqrt{b_\infty}. \tag{9}$$

对于上文讨论的两种情况，可以得到蜂窝晶格已知的上界和下界 [15] ($E_\pm = \pm 3$，以及 3-正则贝特晶格的上界和下界 [16] ($E_\pm = \pm 2\sqrt{2}$。对于这些铺砌，我们明确验证了：只要格林函数中存在奇点，它们都位于区间 $[E_-, E_+]$内，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_i(E)\,\mathrm{d}E = \int_{E_-}^{E_+} \rho_i(E)\,\mathrm{d}E = 1. \tag{10}$$

然而，我们要强调的是，如果 $H$ 的谱包含具有有限谱权重的孤立平带，情况就会不同，例如参考文献 [17–20] 中讨论的类 kagome 双曲铺砌。在这种情况下，格林函数中会出现额外的极点。

## IV. $\{p, 3\}$ 铺砌的态密度

本文聚焦于双曲 $\{p, 3\}$ 铺砌，并使用连分数方法计算这些铺砌的态密度。由于 $\mathbf{H}^2$ 具有负曲率，典型半径为 $R$ 的团簇中的格点数增长速度远快于欧几里得情形（$\mathrm{e}^{\#R}$ 而非$R^2$），如附录 A所示。这对连分数系数的计算构成了很大的限制。此外，曲率随 $p$增大，因此，对于给定的半径 $R$ （它决定了可计算系数的最大数量），相应团簇的格点数也随 $p$增大。本文通常取值 $R$，从而得到含有 $\sim 10^9$ 个格点的团簇（详情见表I）。计算$n$ 连分数系数需要由围绕给定格点的前 $R = n$ 层构成的图的邻接矩阵。因此，我们将递归算法应用于逐层构建的团簇。计算更多系数的唯一限制是存储哈密顿量所需的内存。

当考虑 $H$ 单个格点的局域态密度时，系数（$a_n$， $b_n$）是有理数。这些系数列于附录B，并绘于图 3中。可以看出，对于所考虑的每种铺砌，这些系数都趋向于一个唯一值，速度远快于蜂窝晶格（参见图2 以作比较）。如上所述，这表明态密度中不存在范霍夫奇点和能隙。此外，这种收敛性使我们能够外推渐近值（$a_\infty$， $b_\infty$），并以比精确对角化结果更高的精度计算 $E_\pm$ [18, 21]。

在相差一个归一化因子的意义下，双曲 $\{p, q\}$ 铺砌在热力学极限中的态密度可以定义为具有相同矩的量

| $p$ | $R$ | $V$ | $a_\infty$ | $b_\infty$ | $E_-$ | $E_+$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 42 | 1 054313 137 | -0.1795(1) | 1.9066(6) | -2.9411 | 2.5821 |
| 8 | 35 | 1 049446 747 | 0 | 2.1095(4) | -2.9048 | 2.9048 |
| 9 | 32 | 1 165124 974 | -0.0808(2) | 1.9606(3) | -2.8812 | 2.7196 |
| 10 | 31 | 1 342 655 086 | 0 | 2.0528(3) | -2.8656 | 2.8656 |
| 11 | 30 | 1 279 395 802 | -0.0368(1) | 1.9851(2) | -2.8547 | 2.7811 |
| 12 | 30 | 1 675 149 250 | 0 | 2.0266(3) | -2.8471 | 2.8471 |

表 I。对于 $\{p, 3\}$ 本文研究的铺砌，该表给出了簇的半径 $R$、相应的格点数 $V$ （见附录 A）、渐近系数（$a_\infty$、$b_\infty$），这些系数由附录 B所给数据外推得到；此外还给出了态密度不为零的能量范围的相应边界 [，见式（9）]。

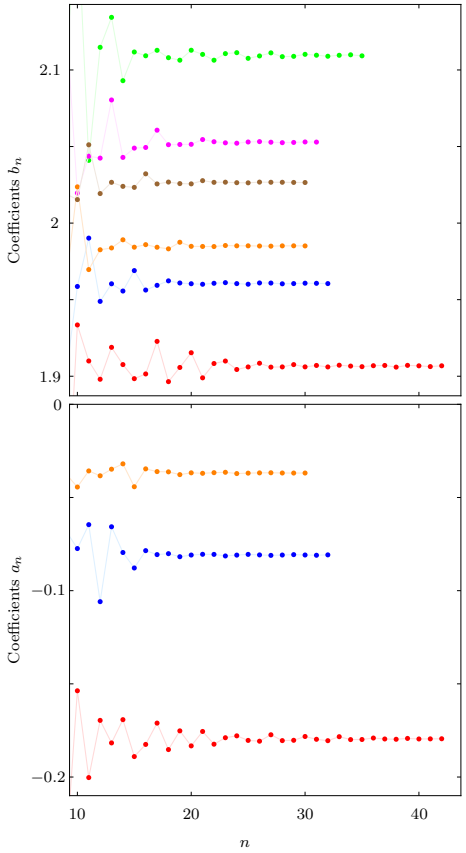


图3。与双曲 $\{p,3\}$ 铺砌中的单个格点相关的连分数系数（数据见附录 B），绘制于 $n \geq 10$。彩色点：红色（$p=7$）、绿色（$p=8$）、蓝色（$p=9$）、品红色（$p=10$）、橙色（$p=11$）、棕色（$p=12$）。线条仅用于视觉引导。偶数 $a_{n\geqslant 1}=0$ 的系数 $p$ （二分晶格）。

阶数 $m$ 作为从半径为 $R \geqslant m$ 的团簇中心处某个格点的局域态密度计算得到的哈密顿量的阶数，其中 $m$可以任意大。然而，即使对于非常大的团簇，精确矩的数量（等价地，连分数系数的数量）仍然相当少。尽管难以给出一些准确的误差范围，但所观察到的系数快速收敛表明，大$-m$矩可以通过使用渐近系数（$a_\infty$，$b_\infty$）补全连分数而得到良好刻画。

使用这些系数和连分式终止项$t(E)$，可以计算双曲 $\{p,3\}$铺砌的态密度。如图4所示，对于 $p=7$，...12，这些态密度呈现出若干有趣的特征。对于偶数（奇数）$p$，态密度关于 0 对称（不对称）。这仅仅是因为，对于偶数（奇数） $\{p,3\}$ 铺砌是（非）二分的。正如从系数 [13], 的行为中所预期的那样，我们需要强调，奇数 $E_+$ 附近 $p$ 所观察到的峰并不是范霍夫奇点。我们仔细检查过，该能量范围内的态密度是有限的。

这些态密度显然不同于蜂窝态密度的-

梳状晶格 ($p=6$) [15]

$$\rho^{\{6,3\}}(E)=\frac{|E|}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{Z_0}}K\left(\sqrt{\frac{Z_1}{Z_0}}\right), \tag{11}$$

with

$$Z_0=\begin{cases}(1+|E|)^2-\frac{\left(E^2-1\right)^2}{4}, & \text{for } |E|<1\\ 4|E|, & \text{for } 1\leq|E|\leq 3\end{cases}, \tag{12}$$

and

$$Z_1=\begin{cases}(1+|E|)^2-\frac{\left(E^2-1\right)^2}{4}, & \text{for } 1\leq|E|\leq 3\\ 4|E|, & \text{for } |E|<1\end{cases}, \tag{13}$$

其中，$K$ 是第一类完全椭圆积分。然而，随着 $p$增大，这些态密度趋近于3-正则贝特晶格的态密度（$p=\infty$），其表达式为 [16]

$$\rho^{\{\infty,3\}}(E)=\frac{3}{2\pi}\frac{\sqrt{8-E^2}}{9-E^2}. \tag{14}$$

这两个（众所周知的）极限情形在图中给出。 5。图中显示的态密度 4 应被视为无限 $\{p,3\}$ 铺砌的精确态密度的极佳近似，其意义在于它具有相同的 $2R$ 矩。尽管在连分数框架下难以给出误差范围，但误差的主要来源是将系数（$a_n,b_n$）替换为其外推的渐近值（$a_\infty,b_\infty$），对于 $n>R$而言。正如附录B所列数据所示，相对误差为 $\sim 10^{-4}$ （见表I），因此我们得到精确态密度的极佳近似。

若干 $\{p,3\}$ 铺砌的态密度最近通过对具有开放和周期性边界条件的簇进行精确对角化计算得到。在文献 [18], Koll´ar 等人重点研究了 $p=7$，8，并使用任意分箱宽度计算态密度 [见文献中的图 14(a)–14(d)[18]]。在文献 [22],Urwyler 等人对 $p=8$ 进行了类似研究，但使用了额外的滤波过程来消除边界效应，同时采用任意的高斯展宽函数 [见文献中的图 1(b) [22]]。关于$p=8$、10、12 的一些结果也可见于文献 [23], , 其中提出了一种分类方法。与我们的结果进行比较可以看出，对包含数千个格点的双曲有限尺寸簇进行精确对角化，几乎无法再现图4所示渐近态密度的主要形态；这一比较凸显了边界对于双曲铺砌的重要性。

## V. 与双曲能带理论的比较

在上一节中，我们计算了一些 $\{p,3\}$ 铺砌的总态密度。如上所述，这些态密度具有相同的

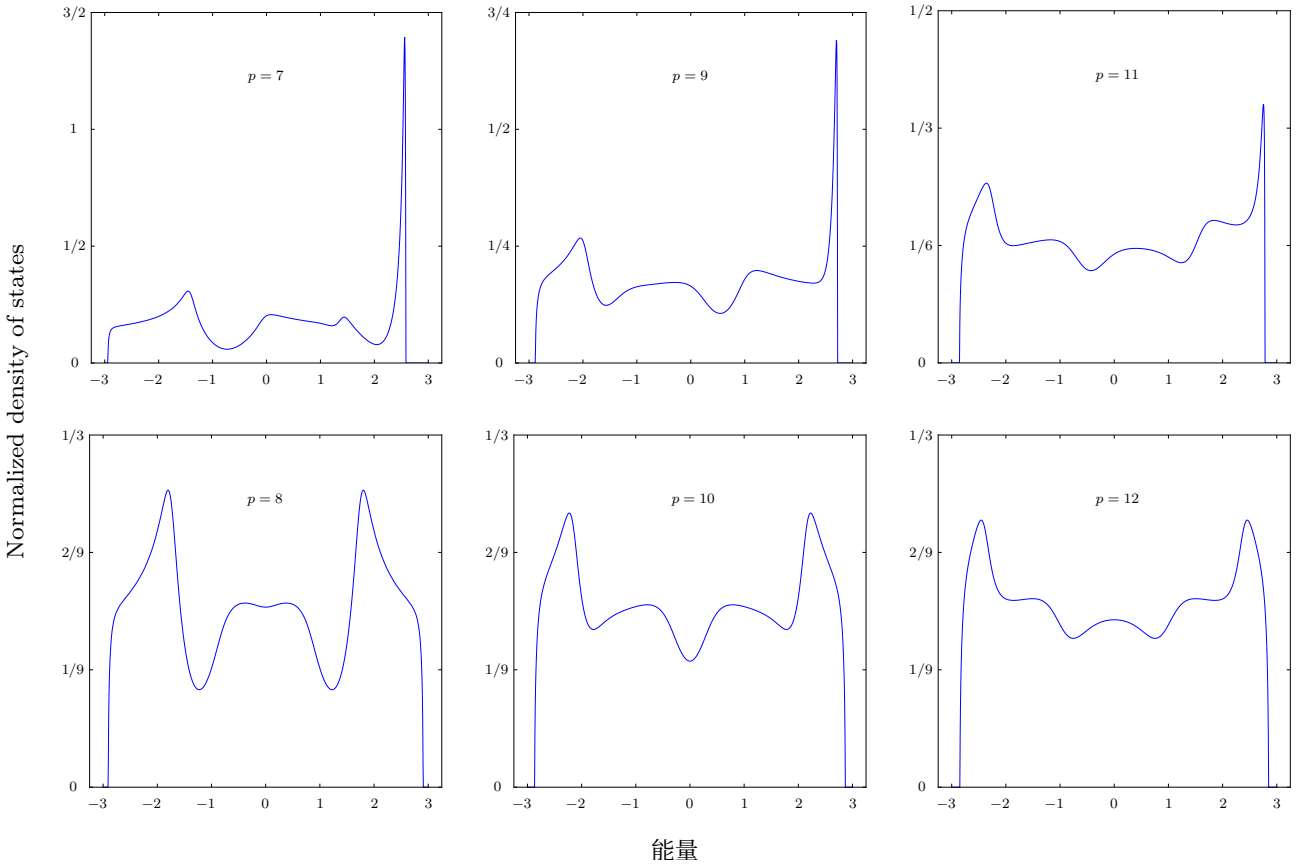


图 4。双曲 $\{7 \leqslant p \leqslant 12, 3\}$ 铺砌的归一化态密度。

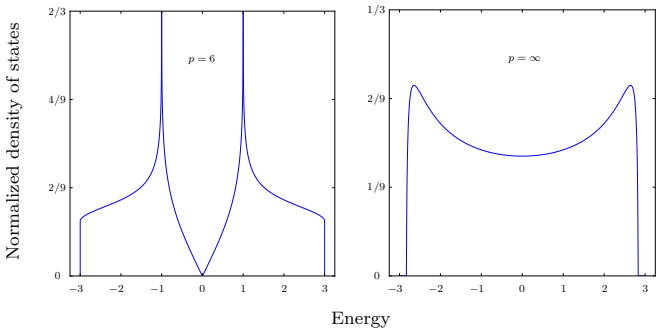


图 5. 蜂窝晶格（左）和 3-正则贝特晶格（右）的归一化态密度。

前 $2n$ 个矩，这是由构造决定的，与相应无限铺砌的矩相同，其中 $n$ 是所计算的连分数系数的数量。不过，在此阶段，有必要明确“无限铺砌”的含义。与欧几里得铺砌一样，双曲铺砌的“无限”极限可以通过增大线性系统尺寸，在开放或周期性边界条件下得到。然而，在双曲情形中，可以考虑多种紧化方式，从而产生完全不同的态密度。因此，为了将我们的结果与 AHBT 得出的预测进行比较，我们将

首先讨论无限 $\{p, q\}$ 铺砌的情形，它是无限双曲平面的镶嵌$\mathbf{H}^2$，然后再讨论紧致情形。

### A. 无限 $\{p, q\}$ 铺砌

如第 II 节所述，无限 $\{p, q\}$ 铺砌的对称群是考克斯特反射群 $[p, q]$。该群包含一个无挠福克斯子群 $\Gamma$，它描述了 $\mathbf{H}^2$ 的非交换平移。尽管是非阿贝尔的，$\Gamma$ 仍具有一维不可约表示，可用于计算与类布洛赫本征态 [5–7] 相关的一些特征值。AHBT 旨在描述与这些不可约表示相关的能带结构。

在欧几里得平面中，平移群是阿贝尔群，因此所有不可约表示都是一维的。于是，$H$ 的整个谱都可以用标准的布洛赫能带理论来描述。相比之下，在双曲平面中，AHBT 核心所涉及的一维不可约表示的权重 $\omega_1$，一直是近期研究的主题 [5, 6, 8, 19]，据我们所知，至今仍未得到确定。正如我们接下来将要论证的，这一权重在无限 $\{p, q\}$ 双曲铺砌中实际上为零。尽管无限离散福克斯群的不可约表示分解是一个复杂的问题，

总态密度总可以形式化地分解为:

$$\rho^{\text{full}}(E) = \sum_d \omega_d \, \rho^{(d)}(E), \tag{15}$$

其中， $\rho^{(d)}$ 是从 $\Gamma$ 的所有 $d$ 维不可约表示得到的归一化态密度， $\omega_d$ 是这些表示在 $\Gamma$ 分解为不可约表示时所占的权重。我们的目标是在热力学极限下计算 $\omega_1$ 。

为此，我们聚焦于双曲 $\{8,8\}$ 铺砌，AHBT 已在文献中针对该铺砌建立。 [6], 但同样的推理过程可以直接推广到任意 $\{p,q\}$ 铺砌。关于 $\{8,8\}$ 铺砌的 AHBT 理论指出，源自 $\Gamma$ 的一维不可约表示的谱为

$$E(\mathbf{k}) = -2 \sum_{j=1,4} \cos k_j, \tag{16}$$

其中$\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ 是一个四维向量，其组成部分 $k_j$ 与$\Gamma$ [6]的四个生成元 $\gamma_j$ 相关联。这个色散关系实际上与四维超立方晶格的色散关系相同。在这里，遵循参考文献 [6]„ 我们考虑热力学极限，并假设这些动量可以在四维第一布里渊区中取任意值，即$-\pi \leqslant k_j < \pi$。因此，相应的态密度为:

$$\rho^{(1)}(E) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty J_0(2u)^4 \cos(uE) \, \mathrm{d}u, \tag{17}$$

其中 $J_0$ 是第一类贝塞尔函数。该态密度绘制于图6（红线），并且在 $E \in [-8, +8]$。

为了计算总态密度 $\rho^{\text{full}}(E)$的双曲$\{8,8\}$ 铺砌，我们使用第 III 节中所述的连分数方法。对于此铺砌，这里所考虑的最大团簇半径为 $R = 10$，但是，正如附录 B 中所推断的那样，我们再次观察到系数 $b_n$ 快速收敛，这使得我们能够外推其渐近值 $b_\infty = 7.02912(1)$。使用该值作为连分式终止项，我们可以计算双曲 $\{8,8\}$ 铺砌的态密度，其在$E \in [E_-, E_+]$ 处非零，其中 $E_+ = -E_- = 2\sqrt{b_\infty} \simeq 5.3025$。注意，我们对 $E_+$ 的估计位于紧区间$8 \times [0.662772, 0.662816]$ [24, 25]内。此外，利用附录 B中给出的十个系数，可以直接计算态密度的前 20 个矩。我们检查了这些矩与文献 [26], 中给出的矩相吻合，其中前 8 个矩是在具有周期性边界条件的特定团簇上计算得到的（见附录 B）。

如图所示，6 其中我们绘制了 $\rho^{(1)}$ 和 $\rho^{\text{full}}$，存在一个扩展的能量区域，其中 $\rho^{(1)}$ 为有限值，而 $\rho^{\text{full}}$ 消失，$[-8, E_-]$（及其对称对应项， $[E_+, 8]$）。利用公式（19），可以计算

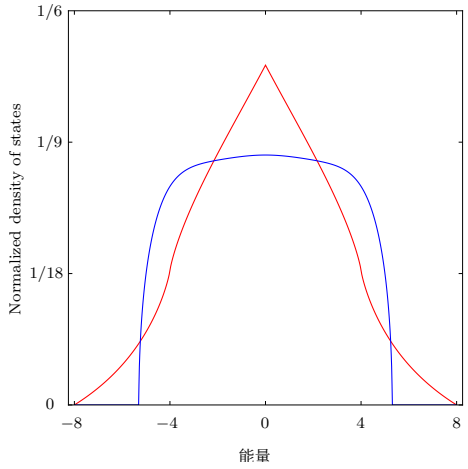


图6.精确的AHBT态密度（红色）与使用连分数方法计算的双曲 $\{8,8\}$ 铺砌的总态密度（蓝色）进行比较。

该区域中的积分态密度

$$\int_{-8}^{E^-} \rho^{\text{full}}(E) \, \mathrm{d}E \;=\; 0, \tag{18}$$

$$\int_{-8}^{E^-} \rho^{(1)}(E) \, \mathrm{d}E \;\simeq\; 0.030186, \tag{19}$$

根据式（*15*），可直接推出$\omega_1 = 0$。换言之，*AHBT* 捕获的谱权重在热力学极限下趋于零。

对于规则的 $\{p,q\}$ 铺砌，归一化态密度在 $E \leqslant E_-$ 时消失；对于双曲 $\{p,q\}$ 铺砌，有 [18]

$$-q < -q\sqrt{1-\alpha^2} \leqslant E_-, \tag{20}$$

其中

$$\alpha = \frac{q-2}{q} \sqrt{1 - \frac{4}{(p-2)(q-2)}}, \tag{21}$$

是文献 [27], 中给出的等周常数，类似于 Cheeger 常数 [28]。因此，我们可以得出结论：对于所有双曲 $\{p,q\}$ 铺砌，有:

$$\int_{-q}^{-q\sqrt{1-\alpha^2}} \rho^{\text{full}}(E) \, \mathrm{d}E = 0. \tag{22}$$

相比之下，AHBT 会在附近导致非零的态密度 $E_0 = -q$，对于$\mathbf{k} = 0$总能达到该区域 $d$维布里渊区，预计态密度的行为为 $\rho(E) \sim E^{\frac{d-2}{2}}$ 在能带边缘附近（例如参见图 6 和 7 ，其中 $d = 4$），因此在 $E_0$ 附近的任何有限区域内，积分态密度都非零。因此，我们得出结论： $\omega_1 = 0$。

作为最后一个例子，我们通过对文献 $\{8,3\}$ （另见参考文献 [22, 29]）中给出的（$16 \times 16$）矩阵进行精确对角化，计算了 [30] 铺砌的 AHBT态密度，采用了一个

四维布里渊区的离散化。正如图 7（红色）所示，AHBT态密度显示出数个界定清晰的峰，并且在范围 $[-3, E_-]$ （约占 。2%的态）内具有非零权重。这再次说明，源自AHBT的态密度与总态密度不具有任何共同特征，这与 $\omega_1 = 0$ 一致，但与参考文献 [30]的结论却存在明显矛盾。

### B. 紧致情形

现在我们来分析紧致双曲$\{p, q\}$ 铺砌的情形，参考文献 [6]对此进行了详细讨论。如上所述，在双曲平面 $\mathbf{H}^2$, 中，这些铺砌在福克斯群 $\Gamma$作用下保持不变。采用周期性边界条件时，情况则有所不同，因为这些铺砌仅在剩余商群 $G = \Gamma/\Gamma_{\mathrm{PBC}}$作用下保持不变，其中 $\Gamma_{\mathrm{PBC}}$ 是 $\Gamma$ [6]的一个有限指数正规子群。在这种情况下，式（15）涉及 $G$ 的不可约表示，必须区分两种情况。

当 $G$ 为阿贝尔群时，参考文献 [6], 将相应的团簇称为阿贝尔簇，它们可由 AHBT 完整描述。对于 $p = q = 8$，这些阿贝尔簇的完整谱由式（16）给出，其中四维布里渊区需作适当离散化。因此，对于这些簇，有 $\omega_1 = 1$。然而，这些阿贝尔簇在局部结构上与在 $\{8, 8\}$ $\mathrm{H}^2$ 中定义的双曲铺砌有很大差异，它们对应于四维超立方晶格的紧致化版本。考察矩 $\langle H^{m\geqslant 4}\rangle$即可清楚地看出这一点。事实上，对于无限 $\{8, 8\}$ 铺砌中的任意格点 $i$ $\langle i|H^4|i\rangle = 120$，有 $\langle i|H^4|i\rangle = 168$；而对于四维超立方晶格，得到的是 $\langle i|H^4|i\rangle = 168$。两者的差异源于后者中存在大量前者所没有的正方形（四边形）。由此可见，尽管 AHBT 能给出这些阿贝尔簇的完整谱，却无法描述热力学极限下双曲铺砌的态密度（见图 6）。

第二种情况涉及与一个非阿贝尔商群相关联的非阿贝尔簇 $G$。对于足够大的簇，可以获得直到给定阶数的精确矩，但瓶颈在于 $l$ 最短闭测地线的长度。然而，非阿贝尔$G$ 具有一些一维不可约表示。如式（16）之后所述，对于紧化的 $\{8, 8\}$ 铺砌，这些不可约表示由四维布里渊区中的四组离散独立 $k_j$ 标记。对于每个方向，允许的最大 $k_j$ 值通常为 $l$的量级，因而至多得到 $l^4$ 个特征值（实际上，由于还存在更多约束

由于曲面的高亏格（其随系统尺寸增加）。如第 II 节所述， $l$ 通常按 $\log V$ 增长。由于希尔伯特空间维数等于 $V$，我们得出 $\omega_1$ 随 $V$ 减小，并在$V \to \infty$时消失。请注意，将 $l$ 作为各个方向上的上界，与我们考虑具有越来越准确的 $l$ 第一矩的簇有关。

作为本节的总结，我们要强调， $G$ 还具有

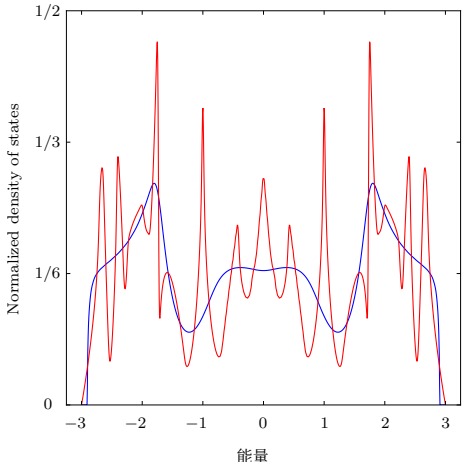


图7. 数值AHBT态密度（红色，由 $64^4$ 个四维布里渊区中的点计算得到，分箱宽度=$10^{-3}$）与双曲 $\{8, 3\}$铺砌的总态密度（蓝色，用连分数方法计算，亦见图4）之间的比较。除最尖锐峰附近外，我们通过改变布里渊区中的点数和分箱宽度检验了AHBT态密度的收敛性（类似结果亦见参考文献 [22, 29] ）。

由有限维离散参数集 $[(2d^2 + 2)$ 标记的（$d > 1$）维不可约表示，适用于 $\{8, 8\}$铺砌][6]。要确定这些不可约表示对总态密度的贡献，即 $\omega_{d>1}$，需要更深入地了解相应的非阿贝尔布里渊区离散化，以及最短闭测地线施加的约束。

## VI. 结论

使用连分数方法对大型系统尺寸（$\sim 10^9$ 格点）进行计算，我们得到了规则双曲 $\{p, 3\}$ 铺砌的态密度，取值为 $p = 7$，.....，12，这与无限铺砌的态密度非常接近（见第III节中关于终止分数的讨论）。我们发现，这些态密度是平滑的（没有范霍夫奇点）且无能隙。重要的是，我们发现这些态密度在能量范围 $[-3, E_-]$内为零，其中 $E_- > -3$ 满足方程（20）。这表明，在热力学极限下，由 AHBT理论描述且态密度在相同能量范围内非零的谱的比例趋于零。这对平移福克斯群 $\Gamma$的高维表示的权重提出了重要问题。在近期的一项工作中，Cheng等人 [8] 考察了 $\Gamma$ 的二维不可约表示（不可约表示），对应于 $\{8, 8\}$ 铺砌。他们展示了相应的十维能带结构的某个截面，该能带结构延伸至佩龙–弗罗贝尼乌斯界 $-8$。因此，与一维不可约表示的情况一样，这表明这些二维不可约表示的权重也很可能趋于零。要进一步推进研究，显然需要更好地了解 $\Gamma$的不可约表示分解，以及相关的高维布里渊区几何。最后需要指出的是，我们的方法同样可以应用于其他种类的哈密顿

哈密顿量包括复杂或长程跃迁、多重轨道等。它还可以描述有能隙态密度，在这种情况下，系数分裂成趋向不同值的子集。我们希望，这样一条有前景的路径也能在使用电路的实验中得到探测量子电动力学 [17]。

**致谢**

我们感谢J.-N.Fuchs、J.-P. Gaspard、S.Gou¨ezel和R. Vogeler所进行的富有成效的讨论。

[1] F.Bloch, ¨晶格中电子的量子力学, 《物理学杂志》52，555（1929年）。[2] G.Floquet，关于具有周期性系数的 ´微分 ´线性 ´方程 `，Ann.Sci. de l'ENS 12，47（1883年）。[3] H.S. M. Coxeter， *Regular Polytopes*（Dover出版社，纽约，1973年）。[4] W. Magnus， *Noneuclidean Tesselations and Their Groups* 1974 （学术出版社，纽约，）。[5] J.Maciejko 和S. Rayan，双曲能带理论，《科学进展》7，eabe9170（2021年）。[6] J.Maciejko 和S. Rayan，双曲晶格的自守布洛赫定理，《美国国家科学院院刊》119，e2116869119（2022年）。[7] I. Boettcher、A.V. Gorshkov、A. J. Koll´ar、J.Maciejko、S. Rayan 和 R. Thomale，双曲晶格的晶体学，《物理评论B》105，125118（2022年）。[8] N.Cheng、F.Serafin、J.McInerney、Z. Rocklin、K.Sun和X.Mao，无限双曲晶[9] 格的高维表示的能带理论与边界模，《物理评论快报》129，088002（2022年）。[10] L.Guth，极小长度几何中的隐喻，arXiv:1003.4247。[11] R.Haydock、V.Heine 和 M.J.Kelly，基于局域原子环境的紧束缚能带电子结构，《物理学杂志C辑》5，2845（1972年）。[12] J. P. Gaspard和 F.Cyrot-Lackmann，由矩得到态密度：杂质带的应用，《物理学杂志C辑》6，3077（1973年）。[13] R.Haydock、V.Heine 和 M. J.Kelly，基于局域原子环境的紧束缚能带电子结构。II，《物理学杂志C辑》8，2591（1975年）。[14] C.H. Hodges，范霍夫奇点与连分数系数，《物理学快报》38，187（1977年）。[15] R.Mosseri和J. F. Sadoc，贝特格：双曲平面的正则铺砌，《物理学快报》43，249 1982年（）。[16] J.P. Hobson和 W. A. Nierenberg，二维六边形网络的统计，《物理评论》89，662（1953年）。

*Excitations in Disordered Systems* M. F. Thorpe，[17]（全会出版社，纽约，1981年）。´A. J. Koll[18] ar、M. Fitzpatrick 和 A.A. Houck，电路量子电动力学中的双曲晶格，《自然》（伦敦）571，45（2019年）。´A.J. Koll[19] ar、M. Fitzpatrick、P.Sarnak和A.A. Houck，线图晶格：欧几里得平带与非欧平带及其在电路量子电动力学中的实现，《数学物理通讯》376，1909（2020年）。T. Bzdu˘sek和J.Maciejko，双曲晶格中源于实空间拓扑的平带与能带接触，《物理评论B》106，155146（2022年）。

[20]R.Mosseri、R.Vogeler 和J. Vidal，《阿哈罗诺夫-玻姆笼、平带以及双曲铺砌中的能隙标记》，《物理评论B》106，155120（2022年）。[21] I. Boettcher、P.Bienias、R. Belyansky、A. J.Koll´ar 和 A.V.Gorshkov，《利用电路量子电动力学对双曲空间进行量子模拟：从图到几何》，《物理评论A》102，032208（2020年）。[22] D.M. Urwyler、P. M. Lenggenhager、I. Boettcher、R. Thomale、T.Neupert和T. Bzdu˘sek，《双曲拓扑能带绝缘体》，《物理评论快报》129，246402 2022年()。[23] N. Gluscevich、A.Samanta、S. Manna和 B. Roy，《二维电子双曲晶格上的动力学质量生成》，arXiv:2302.04864。[24] T. Nagnibeda，《曲面群上随机游走谱半径的一个估计》，《数学科学杂志》96，3542（1999年）。[25] S.Gou¨ezel，《曲面群上随机游走谱半径的数值下界》，《组合学、概率与计算》24，238（2015年）。[26] F. R. Lux和 E.Prodan，《凯莱晶体的谱与组合方面》，arXiv:2212.10329。[27] Y. Higuchi和T.Shirai，《$(d, f)$-正则平面图的等周常数》，《跨学科信息科学》9，221（2003年）。[28] J.Cheeger *Problems in Analysis (A Symposium in Honor of S. Bochner)* （普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970年）。[29] D.M. Urwyler，《双曲拓扑绝缘体》，硕士论文，Z¨urich 大学，（2021年）。[30] A. Chen、H. Brand、T. Helbig、T.Hofmann、S.Imhof、A. Fritzsche、T. Kießling、A. Stegmaier、L. K.Upreti、T.Neupert、T. Bzdu˘sek、M. Greiter、R.Thomale和 I. Boettcher，《具有可调复相位的电路中的双曲物质》，《自然·通讯》14，622（2023年）。

## 附录 A：簇的大小随半径 $R$ 的变化

在本附录中，我们提供了一些递推公式，用于计算本文所使用的双曲 $\{p, 3\}$ 铺砌的半径为 $R$ 时的格点数。从中心格点出发，引入壳层的概念很有帮助，壳层定义为位于给定（图）距离处的格点集合。根据定义，第 $R^{th}$ 壳层对应于半径 $R$。记 $n_j$ 为第 $j^{th}$ 壳层的格点总数，并记 $d_j$ 为第 $j^{th}$ 壳层中在（$j+1$）$^{th}$壳层内有两个邻居的格点数；[其余（$n_j - d_j$）个格点只有一个邻居

在（$j+1$）$^{th}$ 壳层]。

仔细考察逐壳层增长可得到以下递推关系

$$d_j = 2d_{j-1} - 2d_{j-r} + d_{j-r-1}, \quad \text{(A1)}$$
$$n_j = d_j + d_{j-r}, \quad \text{(A2)}$$

对于偶数 $p = 2r$，以及

$$d_j = 2d_{j-1} - 2d_{j-r} + 2d_{j-r-1} - 2d_{j-2r} + d_{j-2r-1}, \quad \text{(A3)}$$
$$n_j = d_j + 2d_{j-r} + d_{j-2r}, \quad \text{(A4)}$$

对于奇数 $p = 2r+1$。这些关系对于 $j \geqslant r$ 在以下初始条件下成立： $d_{j<0} = 0$、 $d_0 = 3$ 和 $d_{1\leqslant j\leqslant r-1} = 3\times 2^{j-1}$。

半径为 $R$ 的团簇中的格点总数最终由

$$V(R) = 1 + \sum_{j=1}^{R} n_j. \quad \text{(A5)}$$

利用这些关系，可以直接得出，任意双曲 $\{p,3\}$铺砌 $\lambda_p$ = 渐近增长率为$_{R\to\infty}{}^{V\,(R+1)\,V\,(R)}$。它由多项式方程的最大非负（Pisot-Vijayaraghavan）根给出

$$x^{r+1} - 2x^r + 2x - 1 = 0, \quad \text{(A6)}$$

对于偶数 $p = 2r$，以及

$$x^{2r+1} - 2x^{2r} + 2x^{r+1} - 2x^r + 2x - 1 = 0, \quad \text{(A7)}$$

对于奇数 $p = 2r+1$。

这给出了指数增长 $V(R) \sim \lambda_p^R$，这是正则双曲镶嵌所预期的。对于极限情形 $p = 6$ （蜂窝晶格），可得 $\lambda_6 = 1$，这让人联想到欧几里得平面中截然不同的标度，在那里 $V(R) \sim R^2$。在大-$p$ 极限下，可以恢复 3-正则贝特晶格的增长率 $\lambda_\infty = 2$。值得注意的是，当 $p = 8$, 10 时，可以得到以下简单的解析表达式

$$\lambda_8 = \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{13} + \sqrt{2\sqrt{13} - 2}\right) \simeq 1.72208, \quad \text{(A8)}$$
$$\lambda_{10} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\right) \simeq 1.88320. \quad \text{(A9)}$$

这些数值与参考文献 [30]补充材料中给出的数值结果一致。很容易验证， $\lambda_p$ 是 $p \geqslant 6$的单调递增函数。

**附录 B：连分数系数**

在本附录中，我们给出本文所研究的 $\{p,3\}$ 铺砌以及 $\{8,8\}$ 铺砌对应的系数（$a_n$， $b_n$）。这些系数都是有理数，但为清晰起见，我们仅以这种形式给出前十个系数。

| | $\{7,3\}$ | $\{$ 9,3 $\}$ | $\{$ 11,3 $\}$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 0 | 0 | 0 |
| $a_2$ | 0 | 0 | 0 |
| $a_3$ | 0 | 0 | 0 |
| $a_4$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 |
| $a_5$ | $-\frac{1}{14}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 |
| $a_6$ | $-\frac{109}{287}$ | $-\frac{1}{124}$ | $-\frac{1}{8}$ |
| $a_7$ | $-\frac{895}{20\,869}$ | $-\frac{2\,426}{28\,799}$ | $-\frac{1}{1\,016}$ |
| $a_8$ | $-\frac{215\,701}{14\,48\,614}$ | $-\frac{2\,977\,042}{24\,348\,161}$ | $-\frac{68\,596}{2\,032\,127}$ |
| $a_9$ | $-\frac{22\,367\,419}{92\,514\,922}$ | $-\frac{2\,720\,237\,055}{40\,071\,097\,354}$ | $-\frac{1\,190\,359\,196}{31\,846\,454\,279}$ |
| $a_{10}$ | $-\frac{13\,311\,270\,229}{86\,595\,884\,905}$ | $-\frac{20\,055\,768\,316\,639}{259\,125\,041\,818\,854}$ | $-\frac{21\,445\,227\,755\,471}{483\,141\,503\,018\,839}$ |
| $a_{11}$ | -0.2002967411 | -0.0645775422 | -0.0357443812 |
| $a_{12}$ | -0.1696004570 | -0.1058977166 | -0.0383582342 |
| $a_{13}$ | -0.1816966879 | -0.0657104328 | -0.0348093723 |
| $a_{14}$ | -0.1692155243 | -0.0795238494 | -0.0319445279 |
| $a_{15}$ | -0.1890266285 | -0.0878232196 | -0.0442313413 |
| $a_{16}$ | -0.1824985928 | -0.0785198490 | -0.0346354601 |
| $a_{17}$ | -0.1710620428 | -0.0806426945 | -0.0361022603 |
| $a_{18}$ | -0.1852717728 | -0.0801376552 | -0.0362444720 |
| $a_{19}$ | -0.1752233562 | -0.0817817362 | -0.0377254575 |
| $a_{20}$ | -0.1832919042 | -0.0808816316 | -0.0367628802 |
| $a_{21}$ | -0.1755484537 | -0.0804796200 | -0.0370226959 |
| $a_{22}$ | -0.1823834605 | -0.0805314355 | -0.0366759599 |
| $a_{23}$ | -0.1789067207 | -0.0813731403 | -0.0364735833 |
| $a_{24}$ | -0.1778987384 | -0.0809167668 | -0.0371592471 |
| $a_{25}$ | -0.1803519218 | -0.0805287669 | -0.0369329370 |
| $a_{26}$ | -0.1807663195 | -0.0808180145 | -0.0367983443 |
| $a_{27}$ | -0.1773146456 | -0.0810638822 | -0.0367319221 |
| $a_{28}$ | -0.1804581485 | -0.0808744295 | -0.0368556230 |
| $a_{29}$ | -0.1802893026 | -0.0806615422 | -0.0368804917 |
| $a_{30}$ | -0.1782479737 | -0.0808573363 | -0.0368682992 |
| $a_{31}$ | -0.1797527809 | -0.0810001089 | |
| $a_{32}$ | -0.1804963609 | -0.0807915986 | |
| $a_{33}$ | -0.1783586603 | | |
| $a_{34}$ | -0.1799096739 | | |
| $a_{35}$ | -0.1798647291 | | |
| $a_{36}$ | -0.1790760687 | | |
| $a_{37}$ | -0.1795811934 | | |
| $a_{38}$ | -0.1797409614 | | |
| $a_{39}$ | -0.1792827917 | | |
| $a_{40}$ | -0.1795777244 | | |
| $a_{41}$ | -0.1795289697 | | |
| $a_{42}$ | -0.1794620439 | | |

表 II。本文研究的所有 $\{p,3\}$ 铺砌的系数列表。对于二分镶嵌（偶数 $p$），以及 $a_{n\geqslant 1}=0$。

| | { 7,3 } | { 8,3 } | { 9,3 } | { 10,3 } | { 11,3 } | { 12,3 } |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_1$ | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| $b_2$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $b_3$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $b_4$ | $\frac{7}{4}$ | $\frac{5}{2}$ | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $b_5$ | $\frac{82}{49}$ | $\frac{19}{10}$ | $\frac{31}{16}$ | $\frac{9}{4}$ | 2 | 2 |
| $b_6$ | $\frac{3\,563}{1\,681}$ | $\frac{192}{95}$ | $\frac{1\,858}{961}$ | $\frac{71}{36}$ | $\frac{127}{64}$ | $\frac{17}{8}$ |
| $b_7$ | $\frac{466\,744}{259\,081}$ | $\frac{1\,435}{608}$ | $\frac{1\,624\,958}{863\,041}$ | $\frac{1\,298}{639}$ | $\frac{32\,002}{16\,129}$ | $\frac{271}{136}$ |
| $b_8$ | $\frac{16\,546\,063}{8\,099\,716}$ | $\frac{53\,675}{27\,552}$ | $\frac{1\,420\,353\,674}{686\,911\,681}$ | $\frac{93\,114}{46\,079}$ | $\frac{505\,530\,866}{256\,032\,001}$ | $\frac{9\,318}{4\,607}$ |
| $b_9$ | $\frac{3\,790\,751\,045}{2\,113\,410\,098}$ | $\frac{5\,117\,344}{2\,432\,325}$ | $\frac{4\,442\,005\,081\,431}{2\,337\,553\,556\,836}$ | $\frac{\text{一百零二万三千六百七十八}}{479\,611}$ | $\frac{7\,768\,506\,013\,282}{3\,961\,210\,497\,841}$ | $\frac{2\,549\,218}{1\,262\,589}$ |
| $b_{10}$ | $\frac{27\,441\,726\,460\,437}{14\,192\,886\,254\,450}$ | $\frac{996\,022\,307}{451\,765\,525}$ | $\frac{56\,260\,939\,420\,701\,038}{28\,724\,812\,358\,313\,681}$ | $\frac{21\,518\,893}{10\,654\,902}$ | $\frac{11\,925\,020\,979\,148\,0311}{58\,927\,873\,705\,910\,881}$ | $\frac{703\,998\,380}{349\,317\,843}$ |
| $b_{11}$ | 1.9099614142 | 2.0409742217 | 1.9901940863 | 2.0437041571 | 1.9696415108 | 2.0511292014 |
| $b_{12}$ | 1.8980216501 | 2.1147900908 | 1.9488793608 | 2.0424319634 | 1.9825865391 | 2.0192825585 |
| $b_{13}$ | 1.9188757385 | 2.1343590649 | 1.9603634536 | 2.0804121861 | 1.9837731591 | 2.0266312300 |
| $b_{14}$ | 1.9076043684 | 2.0929965018 | 1.9556323717 | 2.0428949588 | 1.9890943205 | 2.0239897720 |
| $b_{15}$ | 1.8984122342 | 2.1117327570 | 1.9689855709 | 2.0489672866 | 1.9842666406 | 2.0233232583 |
| $b_{16}$ | 1.9014941806 | 2.1092519737 | 1.9562792157 | 2.0493838687 | 1.9859259226 | 2.0321707408 |
| $b_{17}$ | 1.9227626558 | 2.1128371617 | 1.9593538591 | 2.0606714712 | 1.9842298525 | 2.0255750100 |
| $b_{18}$ | 1.8964658469 | 2.1080093699 | 1.9622805785 | 2.0511933622 | 1.9831821766 | 2.0267955811 |
| $b_{19}$ | 1.9057267568 | 2.1063772837 | 1.9608916272 | 2.0513327471 | 1.9874982510 | 2.0257927666 |
| $b_{20}$ | 1.9153463807 | 2.1128820963 | 1.9604032064 | 2.0514394969 | 1.9848285336 | 2.0256152673 |
| $b_{21}$ | 1.8989460074 | 2.1101619721 | 1.9600571477 | 2.0545544548 | 1.9847441368 | 2.0277187917 |
| $b_{22}$ | 1.9083032359 | 2.1063672332 | 1.9606957617 | 2.0531377036 | 1.9846896144 | 2.0266121387 |
| $b_{23}$ | 1.9099285244 | 2.1106767717 | 1.9611107232 | 2.0524104665 | 1.9853636852 | 2.0267155107 |
| $b_{24}$ | 1.9043990627 | 2.1112849502 | 1.9604826517 | 2.0521731483 | 1.9851526874 | 2.0263860553 |
| $b_{25}$ | 1.9060675304 | 2.1075971495 | 1.9600890915 | 2.0529601604 | 1.9851660959 | 2.0262903312 |
| $b_{26}$ | 1.9084876568 | 2.1091525930 | 1.9609144549 | 2.0532068120 | 1.9850303328 | 2.0267658961 |
| $b_{27}$ | 1.9059486122 | 2.1111627628 | 1.9608480799 | 2.0528183119 | 1.9849405419 | 2.0266632108 |
| $b_{28}$ | 1.9060851409 | 2.1086943848 | 1.9603493231 | 2.0525196876 | 1.9851286602 | 2.0266541652 |
| $b_{29}$ | 1.9075925091 | 2.1088975541 | 1.9605057348 | 2.0526635295 | 1.9851666383 | 2.0265531284 |
| $b_{30}$ | 1.9061094109 | 2.1102067643 | 1.9607455795 | 2.0529841666 | 1.9850980048 | 2.0264998061 |
| $b_{31}$ | 1.9070439609 | 2.1096212693 | 1.9606731972 | 2.0529054816 | | |
| $b_{32}$ | 1.9060671213 | 2.1089557441 | 1.9605012778 | | | |
| $b_{33}$ | 1.9071946002 | 2.1095759718 | | | | |
| $b_{34}$ | 1.9066326631 | 2.1099008138 | | | | |
| $b_{35}$ | 1.9062481065 | 2.1092213222 | | | | |
| $b_{36}$ | 1.9068805138 | | | | | |
| $b_{37}$ | 1.9070449307 | | | | | |
| $b_{38}$ | 1.9059497758 | | | | | |
| $b_{39}$ | 1.9071011410 | | | | | |
| $b_{40}$ | 1.9067937263 | | | | | |
| $b_{41}$ | 1.9063003478 | | | | | |
| $b_{42}$ | 1.9068134885 | | | | | |

表 III。本文研究的所有 $\{p,3\}$ 铺砌的系数列表 $b_n$。在大 $p$ 极限下，这些铺砌趋近于 3-正则贝特晶格，对于后者，有 $b_1=3$ 和 $b_{n\geqslant 2}=2$。

| $n$ | $b_n$ | $\langle H^{2n} \rangle$ |
|---|---|---|
| 1 | 8 | 8 |
| 2 | 7 | 120 |
| 3 | 7 | 2 192 |
| 4 | $\frac{345}{49}$ | 44 264 |
| 5 | $\frac{39\,607}{5\,635}$ | 950 608 |
| 6 | $\frac{32\,015\,739}{4\,554\,805}$ | 21 288 912 |
| 7 | $\frac{3\,819\,904\,499\,705}{543\,448\,874\,817}$ | 491 515 088 |
| 8 | $\frac{457\,663\,490\,414\,626\,565}{65\,109\,351\,624\,213\,411}$ | 11 614 244 072 |
| 9 | $\frac{385\,418\,200\,444\,183\,773\,404\,967}{54\,831\,603\,309\,520\,014\,006\,895}$ | 279 495 834 368 |
| 10 | $\frac{6844506\,818\,384\,509\,461\,062\,609\,435\,843}{973735\,600\,854\,857\,922\,718\,228\,679\,945}$ | 6 826 071 585 040 |
| 11 | $\frac{854384354399029\,778\,591\,853\,594\,278\,622\,479\,055}{121549244543021\,810\,945\,136\,773\,063\,596\,240\,213}$ | 168 755 930 104 880 |
| 12 | $\frac{249\,887\,384\,305\,886\,872\,771\,075\,994\,660\,075\,645\,942\,846\,356\,081}{3555029816287163276893 0\,141\,283\,569\,631\,274\,191\,260\,129}$ | 4 214 946 994 935 248 |

表 IV. 首批精确系数列表 $b_n$ 对于 $\{8,8\}$ 在半径为 $R=10$、含有 $V=369\,256\,049$ 个格点的团簇上计算的铺砌。作为一种二分铺砌，$a_{n\geqslant 1}=0$。在最右侧一列中，我们还给出了 LDOS 的精确偶数阶矩（由于铺砌是二分的，奇数阶矩为零）。这些矩通过考虑链上第一个格点对应的 LDOS 计算得出，其跃迁项为 $\sqrt{b_n}$（见参考文献 [12]）。我们还补充了另外两个矩（最后两行），由 S. Gou¨ezel 使用一种基于词枚举的完全不同方法给出 [25],，这证实了 $b_n$ 的快速收敛性。前八个矩也可见参考文献 [26]。