arXiv:2304.02393v1 [eess.SY] 5 Apr 2023

随机丢包下时变多智能体系统的鲁棒性能分析[1]

克里斯蒂安·赫斯佩 * **赫伯特·维尔纳** *

*德国汉堡工业大学控制系统研究所，*21073* 汉堡。*{christian.hespe, h.werner}@tuhh.de*

摘要： 最近，有人提出了一种可扩展的方法，用于分析具有伯努利分布丢包的同质多智能体系统并进行控制器综合。该研究方向的一项关键成果表明，如何获得对不确定互连拓扑具有鲁棒性的 H_2-范数上界。本文的主要贡献在于证明，这些相同的上界不仅适用于不确定拓扑，也适用于叠加随机丢包的时变拓扑。由于研究结果以与智能体数量无关的线性矩阵不等式形式表述，因此可以高效分析任意规模的多智能体系统。本文通过一个数值一阶一致性示例展示了该方法的适用性，并将所得上界与蒙特卡洛仿真的估计结果进行了比较。

关键词：多智能体系统、时变系统、网络化系统、基于图的网络化系统方法、共识、网络控制

1. 引言

在许多情况下，以分布式或分散式方式处理大规模控制问题是可取的，甚至是不可避免的。与集中式方法相比，上述方法能够将单个大规模问题拆分为一系列较小的问题，这些较小的问题从工程和计算角度都更容易求解（Massioniand Verhaegen, 2009）。

一类特殊的分布式控制系统是那些借助某种形式的通信网络交换信息的系统。正如Schenato等人（2007）所概述的，这类网络在传输信息时本质上并不可靠，因而会受到随机丢包的影响。尽管如此，许多关于分布式控制系统的现有工作忽略了这一随机性来源，并将信息交换视为理想且确定性的。在Massioni和Verhaegen（2009）最初针对线性时不变系统提出的可分解系统框架中，情况尤其如此。直到最近，Hespe等人（2023b）才提出将该框架扩展到马尔可夫跳变线性系统（马尔可夫跳变线性系统），从而能够在保持该方法可扩展性的同时，研究具有均匀丢失概率的伯努利分布丢包。作为该项工作的一部分，作者建议将系统的互联结构视为参数不确定性。然而，他们现有的分析并未涵盖时变互联结构，这与线性时不变系统的类似结果形成对比（参见，例如，（Pilz等人，2009））。本文的主要结果是弥补这一空白，并证明Hespe等人（2023b）所提出的分析条件不仅适用于不确定互联，也适用于时变互联。

为捕捉叠加丢包和时变图的影响，Costa等人（2005年）所描述的具有单一随机切换律的标准马尔可夫跳变线性系统并不够用。虽然丢包具有随机性，但互联结构的切换并非随机，因此需要额外的确定性切换律。此类系统已在文献中被研-究，称为切换马尔可夫跳变线性系统：例如，Bolzern 等人（2010 年）、Song等人（2016 年）和Qu 等人（2018 年）研究了其稳定-性，而Zhang等人（2011年）和 Hou等人（2013年）则从（随机） l_2 和 l_2-l_∞ 系统范数的角度考察了系统性-能。重要的是，我们仅考虑一类特殊的切换马尔可夫跳变线性系统，其中随机切换在时间上相互独立。正如Fioravanti等人（2012年）针对标准马尔可夫跳变线性系统所概述的，可以为此类系统推导出简化的分析条件，而此前关于切换马尔可夫跳变线性系统的论文均未加以利用。

另一方面，本文的多智能体系统（MAS）框架将一致性问题作为一种特殊情形包含其中；关于切换图——涵盖确定性 但不涵盖随机性 丢包——的研究，早先已有 Ren 和 Beard（2005）以及 Mesbahi和Egerstedt（2010）等开展。与本文当前所作的概率性陈述，即均方稳定性和平均输出能量，相比，沿着这一研究方向的论文给出了确定性结果。然而，这些方法要求底层图的连通性满足更强的假设，而这在实践中可能难以满足。

[1] © 2023 作者。本文已获国际自动控制联合会接收，将依据知识共享许可协议 CC-BY-NC-ND 出版

本文的主要贡献体现在两个定理中：定理6为具有独立随机切换的通用切换马尔可夫跳变线性系统建立了稳定性和性能界，而定理 7则将该结果专门化，获得了网络化多智能体系统的可扩展条件，其形式为线性矩阵不等式（LMI）。两个定理均在第3节中给出，第3节之前是第2节的问题设置与建模。第4节通过一个一阶一致性示例展示了这些结果的应用，第5节对本文进行总结。

2. 问题设定

2.1 记号与定义

令 I_N 表示 $N \times N$ 单位矩阵。 $M_1 \otimes M_2$ 表示两个矩阵的克罗内克积，且 $M \succ (\succeq) 0$ 或 $M \prec (\preceq)\ 0$ 分别表示 M 是正定或负（半）定的。对于块对角拼接，我们使用记号 $\mathrm{diag}(M_1, M_2, \ldots)$。 $\lambda_i(M)$ 表示矩阵 M 的第 i 个特征值。欧几里得向量范数为 $\|x\| := \sqrt{x^T x}$，同一符号也用于表示随机信号 l_2-范数 $\|z\|^2 := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\|z_k\|^2\right]$。

对于互联结构的建模，我们将使用图 $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{E})$，其由顶点集 $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, N\}$ 和边集 $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 组成。定义 $e_{ij} := (j, i)$， $\mathcal{G}$ 称为无向图，如果 $e_{ij} \in \mathcal{E} \Leftrightarrow e_{ji} \in \mathcal{E}$，并且假设图不包含自环，即 $e_{ii} \notin \mathcal{E}$。顶点序列 $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathcal{V}^n$ 称为路径，如果对于 $1 \le i \le n-1$，$(v_i, v_{i+1}) \in \mathcal{E}$。如果对于所有 $i \in \mathcal{V}$，都存在一条通往所有其他 $j \in \mathcal{V} \setminus \{i\}$ 的路径，则称 $\mathcal{G}$ 是连通的。此外，拉普拉斯矩阵的元素逐一给出为 $L(\mathcal{G}) := [l_{ij}(\mathcal{G})]$，其中

$$l_{ij}(\mathcal{G}) := \begin{cases} -1 & \text{if } i \neq j \text{ and } e_{ij} \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{if } i \neq j \text{ and } e_{ij} \notin \mathcal{E}, \\ -\sum_{l \neq i} l_{il}(\mathcal{G}) & \text{if } i = j. \end{cases} \tag{1}$$

2.2 作为随机图的随机丢包

本文重点分析随机丢包对网络化多智能体系统的影响，这些多智能体系统的互联结构，即哪些智能体彼此相邻并交换信息，会随时间发生变化。这与Hespe等人（2023b）的早期研究形成对比，在该研究中，信息交换受到随机丢包的影响，但假设底层互联结构保持不变。

首先，我们描述互联结构的不确定性。如上所述，MAS 中智能体之间的邻接关系将使用图进行建模，其中智能体与图的顶点之间存在一一映射，使得 N 对应于 MAS 中智能体的数量。假设智能体集合——因此也是顶点集合——保持不变。在MAS 中，边 e_{ij} 表示智能体 i 从智能体 j 接收信息。然而，与顶点集不同，边集是时变的，表示互联结构的变化。给定 $\mathcal{F} := \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots\} \subset 2^{\mathcal{V} \times \mathcal{V}}$，所有可容许边集的族，以及离散时间索引 $k \ge 0$，时间依赖性由切换序列 ν 描述，其中 $\nu_k \in \mathcal{K} := \{1, \ldots, |\mathcal{F}|\}$ 使得 $\mathcal{E}_{\nu_k}$ 是时间 k 时的边集。此外，引入 $\mathcal{G}_j := (\mathcal{V}, \mathcal{E}_j)$ 和 $\mathcal{E}^0 := \bigcup_{\mathcal{E}_j \in \mathcal{F}} \mathcal{E}_j$，即所有可容许边集的并集。随后我们作出以下假设以刻画不确定性：

假设*1*。 存在常数 $0 < \underline{\lambda} \le \lambda$ 使得 $\mathcal{G}_j \in \{\mathcal{G} \text{ 无向}: \underline{\lambda} \le \lambda_i(L(\mathcal{G})) \le \bar{\lambda},\ 2 \le i \le N\}$ 对所有 $j \in \mathcal{K}$。 (2)

请注意，假设1意味着 $\mathcal{G}_{\nu_k}$ 对于所有 $k \ge 0$ 均为连通的。实际上，可以根据可容许图的最大度和Cheeger 不等式（Mesbahi和Egerstedt，2010 年，第2.4.2节）估计 $\underline{\lambda}$ 和 λ。

除了互联结构不断变化之外，多智能体系统（MAS）的通信网络还会受到随机丢包的影响。对于每个 $e_{ij} \in \mathcal{E}^0$，引入一个随机过程 $\{\alpha_k^{ij}\}$，其满足 $\alpha_k^{ij} \in \{0, 1\}$。 $\alpha_k^{ij} = 1$ 的取值表示 e_{ij} 在时刻 k 处于激活状态，即，如果 e_{ij} 属于 $\mathcal{E}_{\nu_k}$，则信息可能通过 e_{ij} 传输；而 $\alpha_k^{ij} = 0$ 则表示无论 $\mathcal{E}_{\nu_k}$ 如何，信息都不会从智能体 j 传输到智能体 i。本文将分析范围限定为时间上相互独立的伯努利分布丢包。此外，假设任意两对不同顶点之间的丢包相互独立。以下假设对此作出形式化表述：

假设 *2.* 随机过程 $\{\alpha_k^{ij}\}$ 部分 独立且服从相同的伯努利分布，因此对于所有 k、$k' \ge 0$、 e_{ij}、$e_{rs} \in \mathcal{E}^0$，均有

$$\Pr\left(\alpha_k^{ij} = 1\right) = p \qquad \Pr\left(\alpha_k^{ij} = 0\right) = 1 - p \tag{3}$$

其中 $p \in [0, 1]$ 、 α_k^{ij} 和 $\alpha_{k'}^{rs}$ 是相互独立的随机变量，当 $k \neq k'$ 或 $(r, s) \neq (i, j) \wedge (r, s) \neq (j, i)$。

互联结构切换与丢包的结合扩大了可能表示信息交换的图集合。在 $\mathcal{F}$ 的情况下，丢包下的可允许边集族描述为

$$\tilde{\mathcal{F}} := \left\{\tilde{\mathcal{E}} : \exists \mathcal{E} \in \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{E}\right\} = \left\{\tilde{\mathcal{E}}_1, \tilde{\mathcal{E}}_2, \ldots\right\}. \tag{4}$$

类似于 $\mathcal{G}_j$ 上面的定义，定义切换图 $\tilde{\mathcal{G}}_i := \tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{V}, \mathcal{E}_i)$。注意，与 $\mathcal{G}_j$ 相比，图 $\tilde{\mathcal{G}}_i$ 不必是无向图，也不必是连通图。于是，我们可以取一个函数 $\mu: \mathcal{E}^0 \to \{1, \ldots, |\mathcal{E}^0|\}$，该函数为每个 $e_{ij} \in \mathcal{E}^0$ 分配一个唯一的整数，并定义

$$\sigma_k := 1 + \sum_{e_{ij} \in \mathcal{E}_{\nu_k}} \alpha_k^{ij} 2^{\mu(e_{ij})-1} \tag{5}$$

使得 $\sigma_k \in \mathcal{K} := \{1, \ldots, |\mathcal{F}|\}$ 且 $\tilde{\mathcal{G}}_{\sigma_k}$ 描述了时刻 k 多智能体系统中的信息交换。

由于随机丢包，$\{\tilde{\mathcal{G}}_{\sigma_k}\}$ –以及相应地 $\{L(\tilde{\mathcal{G}}_{\sigma_k})\}$ –是随机过程。定义以下两个简写记号 $L_j := L(\mathcal{G}_j)$ 和 $\tilde{L}_i := L(\tilde{\mathcal{G}}_i)$，我们有如下引理：

引理 *3.* 给定一个满足假设 1 和 2 的通信网络，时刻 $k \ge 0$ 的图拉普拉斯矩阵的条件期望为

$$\mathbb{E}\left[\tilde{L}_{\sigma_k} \middle| \nu_k = j\right] = pL_j, \tag{6a}$$

$$\mathbb{E}\left[\tilde{L}_{\sigma_k}^T \tilde{L}_{\sigma_k} \middle| \nu_k = j\right] = p^2 L_j^2 + 2p(1-p)L_j. \tag{6b}$$

证明。 根据上述概述的网络模型，若 $e_{ij} \in \mathcal{E}_{\nu_k}$ 且 $\alpha_k^{ij} = 1$，则信息在时间 k 通过边 e_{ij} 传输。对于按元素表示的图拉普拉斯矩阵~ ~$L_{\sigma_k} = [l_{ij}(\sigma_k)]$,，由此得到

$$\tilde{l}_{ij}(\sigma_k) = \begin{cases} -\alpha_k^{ij} & \text{if } i \neq j \text{ and } e_{ij} \in \mathcal{E}_{\nu_k}, \\ 0 & \text{if } i \neq j \text{ and } e_{ij} \notin \mathcal{E}_{\nu_k}, \\ -\sum_{l \neq i} \tilde{l}_{il}(\sigma_k) & \text{if } i = j. \end{cases} \quad (7)$$

应用 Hespe等人（2023b）的引理4，可得到上述期望值；其中我们利用了假设1所述的所有 $\mathcal{G}_j$ 均为无向图这一条件，而这又意味着所有 L_j 均为对称矩阵。

2.3 可分解跳变线性系统

在上一小节介绍了网络模型之后，我们将重点转向多智能体系统的动态模型。为在后文得到可扩展的分析条件，我们采用 Massioni 和 Verhaegen（2009）提出的可分解系统框架。按照他们的定义，若矩阵 M 可拆分为解耦部分 M^d和耦合部分 M^c，即 $M = I_N \otimes M^d + S \otimes M^c$，则称其为可分解矩阵，其中 S称为模式矩阵。相应地，若线性时不变状态空间模型的所有矩阵均相对于同一个模式矩阵可分解，则称该模型为可分解模型。

Hespe等人（2023b）将这一概念推广至马尔可夫跳变线性系统，以获得适用于存在随机丢包的多智能体系统的可扩展性能分析条件（有关马尔可夫跳变线性系统的一般介绍，参见 Costa 等人（2005））。基于这项研究，本文将考虑如下形式的系统

$$P: \begin{cases} \xi_{k+1} = A_{\sigma_k,\nu_k}\xi_k + B_{\sigma_k,\nu_k}w_k, \\ z_k = C_{\sigma_k,\nu_k}\xi_k + D_{\sigma_k,\nu_k}w_k, \end{cases} \quad (8)$$

其中， ν_k 和 $\{\sigma_k\}$ 是上述引入的切换序列， $\xi_k \in \mathbb{R}^{Nn_\xi}$ 是动态状态，而 $w_k \in \mathbb{R}^{Nn_w}$和 $z_k \in \mathbb{R}^{Nn_z}$ 分别是系统的性能输入和输出。此外，切换系统矩阵如下:

$$A_{i,j} = I_N \otimes A^d + \tilde{L}_i \otimes A^c + L_j \otimes A^p \quad (9)$$

对于 $B_{i,\ j}, C_{i,\ j}$ 和 $D_{i,\ j}$，情况也类似。这种具有确定性（L_j）和随机（L_i）模式矩阵的特定结构，是 Hespe等人（2023a）提出的可分解马尔可夫跳变线性系统的扩展，旨在支持确定性性能通道，因为当传输概率较低时，需要这些通道来防止性能输出消失 p。第 4.1 节通过一个一阶一致性示例展示了如何将网络多智能体系统转化为具有矩阵结构（9）的马尔可夫跳变线性系统（8）形式。

与之前的研究（Hespe等人，2023b、a）相比， P由两条切换序列进行调度，以适应互连结构的任意切换和随机丢包。此外， $\{\sigma_k\}$ 的分布通过(5)取决于 ν_k。因此， P 不是经典的，而是切换MJLS。

3. 鲁棒性能分析

基于上述引入的随机系统模型，我们推导出以线性矩阵不等式形式表示的条件—式（线性矩阵不等式），能够以可扩展的方式计算网络化多智能体系统的鲁棒H_2范数上界。首先，我们推导切换马尔可夫跳变线性系统（8）的条件，然后将其具体化到本文所考虑的特定多智能体系统。

3.1 H_2分析的条件

首先，考虑一般系统矩阵下的切换 MJLS(8)，即不施加条件 (9)。在假设 2下，随机过程 $\{\alpha_k^{ij}\}$ 在时间上相互独立。因此， σ_k 的分布不依赖于 σ_{k-1} ，并由下式给出

$$\Pr(\sigma_k = i \,|\, \nu_k = j) = t_i^j \qquad \text{with} \qquad \sum_{i \in \tilde{\mathcal{K}}} t_i^j = 1 \quad (10)$$

且对所有 $j \in \mathcal{K}$， $t_i^j \geq 0$ 。这是一种特殊类型的 MJLS，与一般情况相比，它允许推导出简化的分析条件。

带有一般 $\{\sigma_k\}$ 的切换MJLS在以往文献中已有研究。Bolzern等人（2010）研究了连续时间切换MJLS的稳定性特性，其中 $\{\sigma_k\}$ 的分布与 ν_k 无关。Song等人（2016）报告了对 $\{\sigma_k\}$ 依赖于 ν_k 的MJLS的扩展。Zhang等人（2011）针对具有单个（随机）切换序列但 $\{\sigma_k\}$ 的分布随时间变化的离散时间MJLS提出了有界实引理，而Hou等人（2013）则研究了一般切换MJLS的广义 H_2-范数。然而，上述方法均未考虑在时间上相互独立的切换序列 $\{\sigma_k\}$。下面，我们推导出 H_2-范数的分析条件，利用这一特性获得类似于Fioravanti等人（2012）针对非切换MJLS所提出方法的计算优势。

随机切换系统存在多种不同的稳定性概念，包括几乎必然稳定性、依概率稳定性和均方稳定性。本文重点关注后者，因为它意味着系统满足前两种定义中的稳定性（Costa 等，2005）。以下定义改编自 Costa 等（2005），以涵盖额外的切换序列 ν:

定义 *4.* 切换 MJLS (8)是 均方稳- 定 若

$$\lim_{k \to \infty} \mathbb{E}\left[\|\xi_k\|^2\right] = 0$$

对于所有初始条件 ξ_0、初始分布 σ_0 以及切换序列 ν。

除了研究切换MJLS 的稳定性特性外，我们还将进一步从 H_2 系统范数的角度考察系统性能。对于一般的非切换 MJLS，Costa 等人（1997）研究了该范数。至于均方稳定性，该文中所采用的定义调整如下，以涵盖切换 MJLS:

定义 *5.* 切换 MJLS (8) 的 H_2-范数为

$$\|P\|_{H_2}^2 := \sup_{\nu} \sum_{s=1}^{Nn_w} \left\|z^{\nu,s}\right\|^2, \quad (11)$$

其中 $z^{\nu,\,s}$ 是对第 s 个输入施加离散单位脉冲后得到的输出，其切换序列为 ν和 $\xi_0 = 0$。

在定义了切换 MJLS的 H_2-范数后，我们可以给出一组 LMI 条件，以保证均方稳定性以及以该范数表示的系统性能上界：

定理*6*。具有切换概率(10)的切换MJLS(8)是均方稳定的，并且 $\|P\|_{H_2} < \gamma$ 若存在 $Q \succ 0$ 和一个对称的 Z，满足tr(Z) $< \gamma^2$，使得

$$\sum_{i\in\bar{\mathcal{K}}} t_i^j \left(A_{i,j}^T Q A_{i,j} + C_{i,j}^T C_{i,j}\right) \prec Q, \tag{12a}$$

$$\sum_{i\in\bar{\mathcal{K}}} t_i^j \left(B_{i,j}^T Q B_{i,j} + D_{i,j}^T D_{i,j}\right) \prec Z \tag{12b}$$

对所有 $j \in \mathcal{K}$ 均成立。

证明。 参见附录 A

与 Fioravanti等人（2012）提出的条件类似，定理6中的性能测试包含两个与 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}$的基数无关的矩阵˜变量。然而，需要针对每个 $j \in \mathcal{K}$检查两个线性矩阵不等式（12），如果集合 $\mathcal{K}$很大，这可能导致可处理性问题。尽管如此，与不具备 $\{\sigma_k\}$时间独立性的马尔可夫跳变线性系统分析条件相比，该结果显著降低了计算复杂度，因为˜后者需要针对所有 $j \in \mathcal{K}$ 以及 $i \in \mathcal{K}$评估线性矩阵不等式（Costa et al., 2005；Qu et al., 2018）。

3.2 在多智能体系统中的应用

第二步，我们将具有切换概率（10）的一般切换马尔可夫跳变线性系统的条件，具体化为具有系统矩阵结构（9）的可分解马尔可夫跳变线性系统的条件。由于系统矩阵具有特定结构，我们可以应用引理 3，对（12）中的条件˜期望进行解析计算，从而无需遍历所有 $i \in \mathcal{K}$。此外，基于假设1以及 LMI 条件关于拉普拉斯矩阵特征值的凸性，我们可以构造不依赖智能体数量的分析条件。Hespe等人（2023b，引理9）提出了类似条件，但之前的结果未涵盖互联结构切换的情况，且仅适用于不确定但恒定的 ν。

定理 *7.* 满足假设1和2的切换多智能体系统（8）是均方稳定的，并且 $\|P\|_{H_2}^2 < \beta^2 + (N-1)\gamma^2$，如果存在 $Q \succ 0$ 以及对称的 Z_1, Z_2，满足 tr(Z_1) $< \gamma^2$ 且 tr(Z_2) $< \beta^2$，使得

$$\bar{A}_\lambda^T Q \bar{A}_\lambda + \bar{C}_\lambda^T \bar{C}_\lambda + \bar{p}_\lambda \left(A^{cT} Q A^c + C^{cT} C^c\right) \prec Q, \tag{13a}$$

$$\bar{B}_\lambda^T Q \bar{B}_\lambda + \bar{D}_\lambda^T \bar{D}_\lambda + \bar{p}_\lambda \left(B^{cT} Q B^c + D^{cT} D^c\right) \prec Z_1, \tag{13b}$$

$$A^{dT} Q A^d + C^{dT} C^d \prec Q, \tag{13c}$$

$$B^{dT} Q B^d + D^{dT} D^d \prec Z_2, \tag{13d}$$

适用于 $\lambda \in \{\underline{\lambda}, \bar{\lambda}\}$，其中 $\bar{p}_\lambda := 2\underline{p}\ 1 - p\ \underline{\lambda}$ $\bar{A}_\lambda = A^d + (\ )$以及：$\lambda(pA^c + A^p)$，对于 B_λ、C_λ 和 D_λ 同样如此。

证明。 见附录 B

注*8.*需要特别指出的是，变量的规模大幅缩减。虽然 $Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ 和Z_1、$Z_2 \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w}$ 在定理 7中，定理6要求$Q \in \mathbb{R}^{Nn_x \times Nn_x}$ 和 $Z \in \mathbb{R}^{Nn_w \times Nn_w}$。

注 *9.* 尽管本文给出的结果仅涉及系统分析，（13）中的条件仍可按照（Hespe等人，2023a）的思路方便地推广到鲁棒控制器综合。

注 *10.* 线性矩阵不等式（13c）仅当 A^d 的所有特征值严格位于单位圆内时才可行。然而，对于许多相关问题，例如编队控制，A^d的谱半径将为1（另见第4.1节中的示例）。如Hespe等人（2023b）所讨论的，在这种情况下，仍可通过将系统投影到不一致空间来分析系统，即仅考虑系统相对于其质心的部分。此时只需检验（13a）和（13b）。这类似于忽略拉普拉斯矩阵的0特征值，而这是分析由线性时不变智能体构成的多智能体系统时的常用技术（Fax and Murray, 2004）。

4. 数值演示

为研究由定理 7 得到的 H_2-范数上界的性质，我们将在本节中展示其应用。该定理中的线性矩阵不等式在 Matlab 中使用 Yalmip（Löfberg, 2004）实现，生成这些图的源代码可在（Hespe and Werner, 2023）获取。

4.1 具有丢包的一阶一致性

我们考虑用于研究定理7的例子是具有丢包和时变互联结构的一阶一致性。分别使用 x_k^i、u_k^i和 $w_k^i \in \mathbb{R}$ 作为智能体 i 的状态、输入和扰动，智能体的动力学表示为

$$x_{k+1}^i = x_k^i + u_k^i + w_k^i. \tag{14}$$

对于每个智能体，输入 u_k^i 由在局部邻域内交换信息确定。在当前场景中，我们认为该邻域是时变的，原因有二：

i) 互联拓扑在遵循假设1的图之间任意切换，并且
ii) 传输的信息按照假设2所描述的方式随机丢失。

总体而言，这导出了一致性协议

$$u_k^i = \kappa \sum_{(j,i)\in\mathcal{E}_{\nu_k}} \alpha_k^{ij} \left(x_k^j - x_k^i\right), \tag{15}$$

其中 $\kappa > 0$ 是该协议的增益参数。关于具有时不变互连结构且无丢包的一致性问题的详细内容，可参见 (Olfati-Saber et al., 2007)。

将状态堆叠为 $x_k^T = [x_k^1, x_k^2, \ldots x_k^N]$，并以类似方式将输入 u_k 和扰动 w_k进行堆叠，一致性问题可以转化为带有切换多智能体系统（8）的形式

$$\begin{aligned} A^d &= 1, & B^d &= 1, & C^d &= 0, & D^d &= 0, \\ A^c &= -\kappa, & B^c &= 0, & C^c &= 0, & D^c &= 0, \\ A^p &= 0, & B^p &= 0, & C^p &= 1, & D^p &= 0, \end{aligned}$$

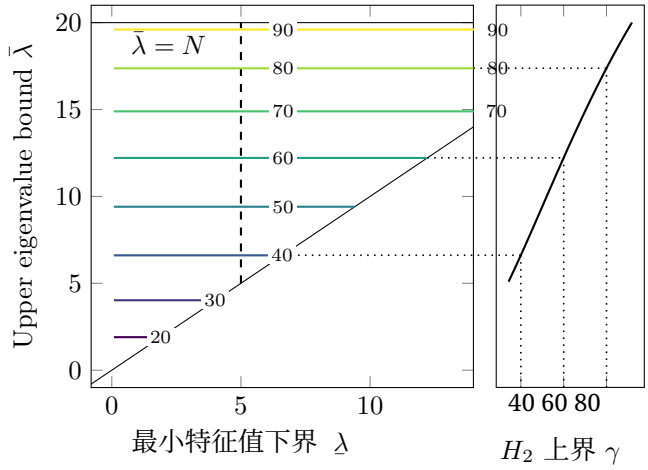

图 1.对于一致性示例，根据定理 7 可获得的 H_2-范数最佳上界的等高线图。第二幅图展示了固定 $\underline{\lambda} = 5$ 时 H_2-范数上界的一个切片，该固定值由等高线图中的虚线表示。

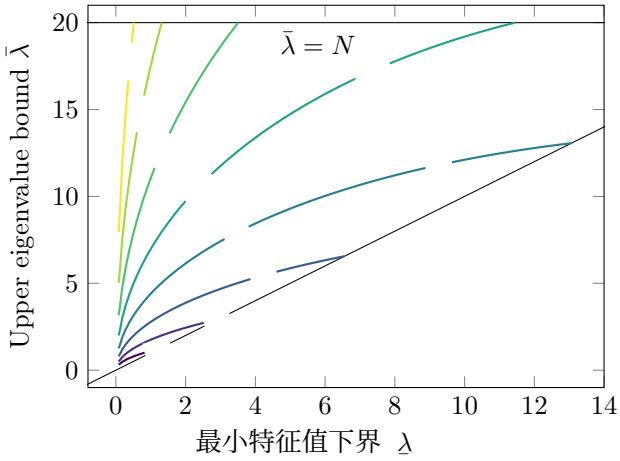

图 2. 对于输入/输出切换系统，根据定理 7 可获得的 H_2-范数最佳上界的等高线图。

其中，我们使用一致性误差 $z_k = L_{\nu_k} x_k$ 作为性能输出。注意，z_k 是根据确定性拉普拉斯矩阵 L_{ν_k} 而非随机拉普拉斯矩阵 L_{σ_k} 计算得到的，因此，即使在它们之间传输的数据包丢失，两个智能体之间的偏差仍会受到惩罚。这确保了即使传输概率 $p \to 0$ 较小，一致性误差也能在性能度量中得到准确反映。

在下文中，我们将仅考虑 $N = 20$ 和 $\kappa = 0.1$。请注意，根据备注10，由于 A^d 的谱半径为1，对于定理 7，仅检查线性矩阵不等式 (13a) 和 (13b)。

4.2 $\underline{\lambda}$ 与 $\bar{\lambda}$ 对 H_2范数界的影响

我们研究的第一个影响是区间大小区间 $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ 对 H_2-范数界的影响。由于假设1，只需检查遵守约束 $0 < \underline{\lambda} \leq \bar{\lambda} \leq N$ 的区间。固定传输概率为 $p = 0.5$ 后，对于每个可接受区间，我们得到满足定理 7 中条件、使得存在 Q 和 Z_1的最小 γ。函数 γ 关于 $\underline{\lambda}$ 和 $\bar{\lambda}$ 的等高线显示在图1的左侧。此外，该图的右侧显示了在 $\underline{\lambda} = 5$ 和 $5 \leq \bar{\lambda} \leq 20$ 为常数时函数的一个切片。

对于一致性问题，只有上界 $\bar{\lambda}$ 与 H_2-范数界相关。此外，如图的第二部分所示，当 κ取该值时，γ 与 $\bar{\lambda}$ 之间的关系近似线性。不过，这只是此处所考察的特定示例所具有的特征。交换系统的输入和输出，即 $B^d = C^p = 0$和 $B^p = C^d = 1$，上界则由图 2 中的等值线描述。扩大区间 $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ 仍会增大 H_2-范数的上界，但这种关系不再独立于 $\underline{\lambda}$，也不再是线性的。

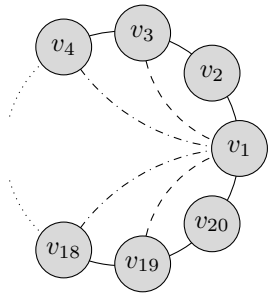

图3. 具有20个顶点以及一条（）、两条（）或三条（）前向链路的无向环形图。- - -　　-·-·-

4.3 保守性估计

在第二项数值研究中，我们估计定理 7 中针对一致性示例的条件有多保守。具体而言，我们采用蒙特卡洛方法求得 H_2-范数的下界，再将其与定理 7 给出的上界进行比较。

对于这一场景，互联结构在七个环形图中的一个之间切换，因此每个智能体拥有一至七个前向邻居，并且由于图的对称性，拥有数量相等的后向邻居。图 3 展示了具有一至三个前向邻居时的图结构。对于这组图，其特征值界为 $\underline{\lambda} = 2.68$ 和 $\bar{\lambda} = 18.24$。

为准确评估定理 7 的保守性，有必要在给定的图集上找到最坏情况切换序列 ν。我们将转而通过对多种切换序列评估性能来求取 H_2范数的下界，这些序列包括七个图各自的恒定序列、图之间的顺序切换以及随机切换。该过程对 $p \in (0, 1]$重复进行。由此获得的性能度量范围与定理 7 给出的上界一并示于图 4。对于每个切换序列和概率，针对丢包抽取 10 个随机样本，以经验方式评估 H_2范数。

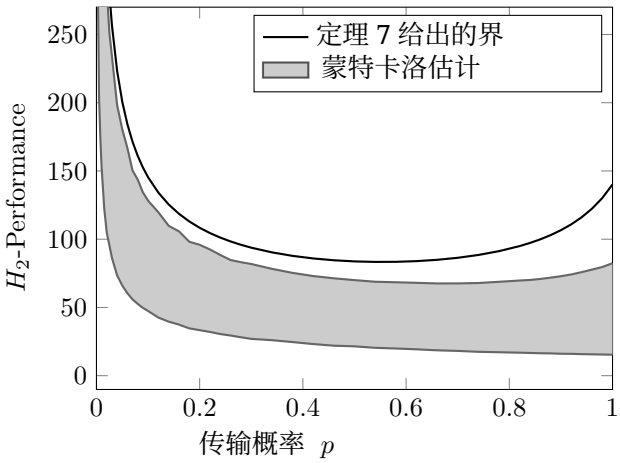

图4. H_2-不同传输概率下一阶一致性系统的性能。上界由定理7 得出，并使用蒙特卡洛模拟来估计不同切换序列 ν 下的范数，如灰色带所示。

该图表明，上界能够较好地逼近由蒙特卡洛仿真得到的最坏情况下界。仅当概率 p 接近 1 时，才观察到差距显著扩大。对于 $p \to 0$，两个界均表现出性能的急剧下降。这与 $p = 0$ 是系统的临界概率相一致，在该概率下不一致动态不再稳定（参见 Schenato 等人（2007））。

5. 结论

本文研究了具有时变互联结构和随机丢包的多智能体系统在 H_2-范数意义下的系统性能。特别地，推导出了复杂度与智能体数量无关且能够从上界约束 H_2-范数的 LMI 条件。最后，利用蒙特卡洛仿真，针对一阶一致性示例估计了 LMI 条件的保守性。

参考文献

Bolzern, P., Colaneri, P., 和 Nicolao, G.D.（2010）。具有切换转移率的马尔可夫跳变线性系统：带驻留时间的均方稳定性。*Automat-ica*，46(6)，1081–1088。Costa, O.L.V., Val, J.B.R.D., 和 Geromel, J.C.（1997）。离散时间马尔可夫跳变线性系统 H2 控制的凸规划方法。*InternationalJournal of Control*，66(4)，557–580。Costa, O.L.d.V., Marques, R.P., 和 Fragoso, M.D.（2005）。离散时间马尔可夫跳变线性系统。伦敦 Springer。Duan, Z. 和 Xiang, Z.（2013）。离散时间二维切换系统的 H_2 输出反馈控制器设计。*Transactions of the Instituteof Measurement and Con-trol*，36(1)，68–77。Fax, J.A. 和 Murray, R.M.（2004）。车辆编队的信息流与协同控制。*IEEETransactions on Automatic Control*，49(9)，1465–1476。Fioravanti, A.R., Goncalves, A.P.C., Deaecto, G.S., 和 Geromel, J.C.（2012）。等价 LMI 约束：应-用于离散时间 MJLS 和切换系统。在 51st 决策与控制会议。IEEE。Hespe, C., Datar, A., Schneider, D., Saadabadi, H., Werner, H., 和 Frey, H.（2023a）。具有随机丢包的多智能体系统的分布式 H_2 控制器综合。在美国控制会议。IEEE。Hespe, C., Saadabadi, H., Datar, A., Werner, H., 和 Tang, Y.（2023b）。一种针对具有伯努利丢包的多智能体系统的分解方法。*IEEE Transactionson Controlof Network Systems*。doi:10.48550/ARXIV. 2209.03024。暂定录用。Hespe, C. 和 Werner, H.（2023）。论文代码：时变多智能体系统在随机丢包下的鲁棒性能分析。doi:10.5281/zenodo. 7801182。Hou, L., Zong, G., Zheng, W., 和 Wu, Y.（2013）。离散时间切换马尔可夫跳变线性系统的指数 l2–l-∞ 控制。*Circuits, Systems, andSignal Processing*，32(6)，2745–2759。Löfberg, J.（2004）。YALMIP：用于 MATLAB 建模与优化的工具箱。在*IEEE* 国际机器人与自动化会议。IEEE。Massioni, P. 和 Verhaegen, M.（2009）。相同动态耦合系统的分布式控制：一种分解方法。*IEEE Transactions on AutomaticControl*，54(1)，124–135。Mesbahi, M. 和 Egerstedt, M.（2010）。多智能体网络中的图论方法。普林斯顿大学出版社。Olfati-Saber, R., Fax, J.A., 和 Murray, R.M.（2007）。网络化多智能体系统中的一致性与协作。*Proceedings of the IEEE*，95(1)，215–233。Pilz, U., Popov, A.P., 和 Werner, H.（2009）。四旋翼直升机编队飞行的鲁棒控制器设计。在 48th 决策与控制会议。IEEE。Qu, H., Hu, J., Song, Y., 和 Yang, T.（2018）。离散时间切换马尔可夫跳变线性系统的均方稳定化。*Optimal Control Applications andMethods*，40(1)，141–151。Ren, W. 和 Beard, R.W.（2005）。动态变化交互拓扑下多智能体系统的一致性寻求。*IEEE Transactions on AutomaticControl*，50(5)，655–661。Schenato, L., Sinopoli, B., Franceschetti, M., Poolla, K., 和 Sastry, S.S.（2007）。有损网络上的控制与估计基础。*Proceedings of the IEEE*，95(1)，163–187。Song, Y., Yang, J., Yang, T., 和 Fei, M.（2016）。切换马尔可夫跳变线性系统的几乎必然稳定性。*IEEE Transactions on Automatic Control*，61(9)，2638–2643。Zhang, L., Leng, Y., Chen, L., 和 Zhao, Y.（2011）。一类具有分段常数 TP 的离散时间马尔可夫跳变线性系统的 BRL。国际自动控制联合会论文集，44(1)，8699–8704。

附录 A. 定理6的证明

为证明定理6，我们需要以下关于随机二次型界定的引理：

引理 *11*。设 $v \in \mathbb{R}^n$ 和 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 分别为随机向量和对称随机矩阵。此外，假

设 v 和 M 是相互独立的随机变量。则对于满足 $\mathbb{E}[M] \preceq W$ 的对称 W，可得

$$\mathbb{E}\left[v^T M v\right] \leq \mathbb{E}\left[v^T W v\right].$$

证明。对于满足 $A \preceq W$的对称矩阵 A 和 W，以及任意的 $B \succeq 0$，我们有

$$\begin{aligned} A \preceq W \quad &\Rightarrow \quad B^{\frac{1}{2}} A B^{\frac{1}{2}} \preceq B^{\frac{1}{2}} W B^{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow \quad \operatorname{tr}\left(B^{\frac{1}{2}} A B^{\frac{1}{2}}\right) \leq \operatorname{tr}\left(B^{\frac{1}{2}} W B^{\frac{1}{2}}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{tr}(AB) \leq \operatorname{tr}(WB). \end{aligned}$$

由 v 和 M 的独立性，以及期望与迹的线性性可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[v^T M v\right] &= \mathbb{E}\left[\operatorname{tr}(v^T M v)\right] = \mathbb{E}\left[\operatorname{tr}(M v v^T)\right] \\ &= \operatorname{tr}\left(\mathbb{E}[M v v^T]\right) = \operatorname{tr}\left(\mathbb{E}[M]\,\mathbb{E}[v v^T]\right) \end{aligned}$$

并取 $A = \mathbb{E}[M]$ 和 $B = \mathbb{E}[vv^T]$，我们有

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left(\mathbb{E}[M]\,\mathbb{E}[v v^T]\right) &\leq \operatorname{tr}\left(W\,\mathbb{E}[v v^T]\right) = \operatorname{tr}\left(\mathbb{E}[W v v^T]\right) \\ &= \mathbb{E}\left[\operatorname{tr}(W v v^T)\right] = \mathbb{E}\left[v^T W v\right], \end{aligned}$$

从而完成上述论断。

然后，我们可以证明定理6。证明方法受到Duan和Xiang（2013）的启发。

证明。由线性矩阵不等式 (12) 可知，对于所有 $j \in \mathcal{K}$，存在一个 $\varepsilon_j > 0$，使得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[A_{\sigma_k,j}^T Q A_{\sigma_k,j} - Q + C_{\sigma_k,j}^T C_{\sigma_k,j} \,\middle|\, \nu_k = j\right] &\preceq -\varepsilon_j I \\ \mathbb{E}\left[B_{\sigma_k,j}^T Q B_{\sigma_k,j} - Z + D_{\sigma_k,j}^T D_{\sigma_k,j} \,\middle|\, \nu_k = j\right] &\preceq -\varepsilon_j I \end{aligned}$$

对于所有 $k \geq 0$。因此，令 $\bar{\varepsilon} := \min_{j\in\mathcal{K}} \varepsilon_j$，简写为$A_k := A_{\sigma_k}$, ν_k 对于 B_k、C_k 和 D_k 同理，我们有

$$\mathbb{E}\left[A_k^T Q A_k - Q + C_k^T C_k\right] \preceq -\bar{\varepsilon} I \prec 0 \tag{A.1a}$$

$$\mathbb{E}\left[B_k^T Q B_k - Z + D_k^T D_k\right] \preceq -\bar{\varepsilon} I \prec 0 \tag{A.1b}$$

对所有 $k \geq 0$ 和所有 ν 均成立。此外，(A.1a) 蕴含了

$$\mathbb{E}\left[A_k^T Q A_k - Q\right] \preceq -\bar{\varepsilon} I \tag{A.2}$$

同样适用于所有 $k \geq 0$ 和 ν。

引入储能函数 $V(\xi) = \xi^T Q \xi$ 及其增量 $\Delta V_k := V(\xi_{k+1}) - V(\xi_k)$。则 $V(0) = 0, V\ \xi\ > 0 \quad \xi \neq 0 \quad V\ \xi\ \leq c\|\xi\|^2 \quad \xi$ () 对所有成立，并且 ()对所有满足$c := \|Q\|$。此外，引理 11 和 (A.2) 意味着

$$\mathbb{E}\left[\Delta V_k\right] = \mathbb{E}\left[\xi_k^T (A_k^T Q A_k - Q)\xi_k\right] \leq -\bar{\varepsilon}\,\mathbb{E}\left[\|\xi_k\|^2\right]$$

因为 ξ_k 和 σ_k 相互独立。接着考虑望远镜求和中的任意 $T \geq 0$ 和 ξ_0

$$\sum_{k=0}^{T} \mathbb{E}\left[\Delta V_k\right] = \mathbb{E}\left[V(\xi_{T+1})\right] - V(\xi_0) \leq -\bar{\varepsilon} \sum_{k=0}^{T} \mathbb{E}\left[\|\xi_k\|^2\right],$$

从而导致

$$\mathbb{E}\left[\|\xi_T\|^2\right] \leq \sum_{k=0}^{T} \mathbb{E}\left[\|\xi_k\|^2\right] \leq \frac{1}{\bar{\varepsilon}} V(\xi_0) \leq \frac{c}{\bar{\varepsilon}} \|\xi_0\|^2$$

对所有 $T \geq 0$，因此有界。在极限下，我们有

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{k=0}^{T} \mathbb{E}\left[\|\xi_k\|^2\right] \leq \frac{c}{\bar{\varepsilon}} \|\xi_0\|^2 < \infty,$$

这意味着 $\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[\|\xi_k\|^2] = 0$，因此具有均方稳定性。

为界定 H_2-范数，令 ξ^s 表示与输出 $z^{\nu,s}$ 对应的随机状态序列，其中

对于某个切换序列 ν，并分别令 B_k^s、D_k^s 为 B_k 和 D_k的第 s列。于是，对于所有 $k \geq 1$，有 $\xi_0^s = 0$、$\xi_1^s = B_0^s$和 $\xi_{k+1}^s = A_k \xi_k^s$。令 ΔV_k^s为与 ξ^s对应的储能函数增量，可得

$$\sum_{k=0}^{T} E[\Delta V_k^s] = \mathbb{E}\left[V(\xi_{T+1}^s)\right] - V(\xi_0^s) = \mathbb{E}\left[V(\xi_{T+1}^s)\right].$$

由稳定性可知，$\lim_{T\to\infty} \sum_{k=0}^{T} E[\Delta V_k^s] = 0$。另一方面，以上关于 ξ^s 的值给出

$$\sum_{k=0}^{\infty} E[\Delta V_k^s] = \mathbb{E}\left[B_0^{sT} Q B_0^s\right] + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\xi_k^{sT} (A_k^T Q A_k - Q)\xi_k^s\right].$$

特定 ν 的平均输出能量为

$$\begin{aligned} \|z^{\nu,s}\|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[(z^{\nu,s})^T z^{\nu,s}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[D_0^{sT} D_0^s\right] + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\xi_k^{sT} C_k^T C_k \xi_k^s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[B_0^{sT} Q B_0^s + D_0^{sT} D_0^s\right] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\xi_k^{sT} (A_k^T Q A_k - Q + C_k^T C_k)\xi_k^s\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[B_0^{sT} Q B_0^s + D_0^{sT} D_0^s\right], \end{aligned}$$

其中，在第三个等式中，我们加上了 $0 = \sum_{k=0}^{\infty} E[\Delta V_k^s]$；根据引理 11 和式 (A.1a)，由于 ξ_k^s 和 σ_k 相互独立，不等式成立。H_2-范数为

$$\begin{aligned} \|P\|_{H_2}^2 &= \sup_{\nu} \sum_{s=1}^{Nn_w} \left\|z^{\nu,s}\right\|^2 \\ &\leq \max_{\nu_0} \sum_{s=1}^{Nn_w} \mathbb{E}\left[B_0^{sT} Q B_0^s + D_0^{sT} D_0^s\right] \\ &= \max_{\nu_0} \operatorname{tr}\left(\mathbb{E}[B_0^T Q B_0 + D_0^T D_0]\right) < \operatorname{tr}(Z) < \gamma^2, \end{aligned}$$

其中，倒数第二个不等式由式 (A.1b) 得出。

附录 B. 定理 7 的证明

证明。首先针对可分解 MJLS (8)，对线性矩阵不等式 (12) 进行特化。代入模型矩阵结构(9)˜并假设 $Q = I_N \otimes Q$，我们得到

$$\begin{aligned} & I_N \otimes (B^{dT} \tilde{Q} B^d + D^{dT} D^d) + L_j^2 \otimes (B^{pT} \tilde{Q} B^p + D^{pT} D^p) \\ &\quad + L_j \otimes (B^{dT} \tilde{Q} B^p + B^{pT} \tilde{Q} B^d + D^{dT} D^p + D^{pT} D^d) \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\tilde{L}_{\sigma_k} \middle| \nu_k = j\right] \otimes (B^{dT} \tilde{Q} B^c + D^{dT} D^c) \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\tilde{L}_{\sigma_k}^T \middle| \nu_k = j\right] \otimes (B^{cT} \tilde{Q} B^d + D^{cT} D^d) \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\tilde{L}_{\sigma_k}^T \tilde{L}_{\sigma_k} \middle| \nu_k = j\right] \otimes (B^{cT} \tilde{Q} B^c + D^{cT} D^c) \\ &\quad + \left(L_j\, \mathbb{E}\left[\tilde{L}_{\sigma_k} \middle| \nu_k = j\right]\right) \otimes (B^{pT} \tilde{Q} B^c + D^{pT} D^c) \\ &\quad + \left(\mathbb{E}\left[\tilde{L}_{\sigma_k}^T \middle| \nu_k = j\right] L_j\right) \otimes (B^{cT} \tilde{Q} B^p + D^{cT} D^p) \prec Z \end{aligned}$$

对于 (12b)。根据引理 3，这等价于

$$
\begin{aligned}
&I_N \otimes \left(B^{dT}\tilde{Q}B^d + D^{dT}D^d\right) \\
&+L_j \otimes \left[B^{dT}\tilde{Q}B^p + B^{pT}\tilde{Q}B^d + D^{dT}D^p + D^{pT}D^d\right. \\
&\quad + p(B^{dT}\tilde{Q}B^c + B^{cT}\tilde{Q}B^d + D^{dT}D^c + D^{cT}D^d) \\
&\quad \left. + 2p(1-p)(B^{cT}\tilde{Q}B^c + D^{cT}D^c)\right] \\
&+L_j^2 \otimes \left[B^{pT}\tilde{Q}B^p + D^{pT}D^p + p^2(B^{cT}\tilde{Q}B^c + D^{cT}D^c)\right. \\
&\quad \left. + p(B^{cT}\tilde{Q}B^p + B^{pT}\tilde{Q}B^c + D^{cT}D^p + D^{pT}D^c)\right] \prec Z
\end{aligned}
$$

and by algebraic matrix manipulation to

$$
\begin{aligned}
&\left(*\right)^T\left(I_N \otimes \tilde{Q}\right)\left(I_N \otimes B^d + L_j \otimes (pB^c + B^p)\right) \\
&\quad + \left(*\right)^T\left(I_N \otimes D^d + L_j \otimes (pD^c + D^p)\right) \\
&\quad + 2p(1-p)L_j \otimes \left(B^{cT}\tilde{Q}B^c + D^{cT}D^c\right) \prec Z.
\end{aligned} \tag{B.1}
$$

另一方面，如Hespe等人 (2023b, 引理9)所示，线性矩阵不等式 (12) 关于 λ 是凸的，因此在 $\underline{\lambda}$ 和 λ 处找到公共的 Q, Z_1 意味着线性矩阵不等式在整个区间 $[\underline{\lambda}, \lambda]$上成立。因此，(13b)意味着对于所有对角 $\Lambda \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$，其元素位于 $[\underline{\lambda}, \lambda]$ 中，我们有

$$
\begin{aligned}
&(*)^T\left(I_{N-1} \otimes Q\right)\left(I_{N-1} \otimes B^d + \Lambda \otimes (pB^c + B^p)\right) \\
&\quad + (*)^T\left(I_{N-1} \otimes D^d + \Lambda \otimes (pD^c + D^p)\right) \\
&\quad + 2p(1-p)\Lambda \otimes \left(B^{cT}QB^{cT} + D^{cT}D^c\right) \prec I_{N-1} \otimes Z_1.
\end{aligned}
$$

此外，注意到(13c)是带有 $\lambda = 0$的 (13a)，因此 带有 $\Lambda := \mathrm{diag}(0, \Lambda)$ 和 $Z := \mathrm{diag}(Z_2, I_{N-1} \otimes Z_1)$

$$
\begin{aligned}
&(*)^T\left(I_N \otimes Q\right)\left(I_N \otimes B^d + \bar{\Lambda} \otimes (pB^c + B^p)\right) \\
&\quad + (*)^T\left(I_N \otimes D^d + \bar{\Lambda} \otimes (pD^c + D^p)\right) \\
&\quad + 2p(1-p)\bar{\Lambda} \otimes \left(B^{cT}QB^{cT} + D^{cT}D^c\right) \prec \bar{Z}.
\end{aligned} \tag{B.2}
$$

由假设1可知，对于每个 L_j、 $j \in \mathcal{K}$，存在一个正交变换 U 使得$U^T L_j U = \bar{\Lambda}$，其中某个 $\bar{\Lambda}$如上所述。因此，我们可以将 $U \otimes I_{n_w}$ 作为合同变换应用于 (B.2)，从而表明 (B.1) 对所有 $j \in \mathcal{K}$均成立。对于(12a) 也可得出类似结论。最后，$\mathrm{tr}(\bar{Z}) = \mathrm{tr}(Z_2) + (N-1)\mathrm{tr}(Z_1) < \beta^2 + (N-1)\gamma^2$。