非紧型秩一对称空间中球面的定量 C^1-稳定性

LAURO SILINI

瑞士苏黎世，苏黎世联邦理工学院数学系

arXiv:2304.02412v1 [math.DG] 5 Apr 2023

摘要。我们证明，在任意非紧型秩一对称空间 $M \in \{\mathbb{R}H^n, \mathbb{C}H^m, \mathbb{H}H^m, \mathbb{O}H^2\}$ 中，测地球面相对于保持小 C^1 体积的扰动具有一致的定量稳定性。我们利用 M 中测地球面上拉普拉斯算子明确的谱隙，根据扰动的 $W^{1,2}$ 来量化周长的增益。由此，我们给出一个定量证明：对于小体积，测地球面是所有有限周长集合中的等周区域。

1. 引言

1.1. 背景与动机。 在给定的黎曼流形 (M, g) 中，体积为 $0 < v < \mathrm{Vol}_g(M)$ 的等周区域是一个紧致光滑子集 $E \subset M$，它达到等周剖面

$$\mathrm{Per}_g(E) = I_M(v) := \inf\{\mathrm{Per}_g(F) : F \subset M, \mathrm{Vol}_g(F) = v\},$$

其中，$\mathrm{Per}_g(\cdot)$ 表示黎曼周长，$\mathrm{Vol}_g(\cdot)$ 表示黎曼体积。我们将 $M = \mathbb{K}H^m$ 视为非紧型秩一对称空间，即实 $\mathbb{R}H^m$、复 $\mathbb{C}H^m$ 和四元数 $\mathbb{H}H^m$ 双曲空间以及凯莱平面 $\mathbb{O}H^2$中的一种。它们具有许多精妙的共同性质，尤其是：经过适当归一化后，它们的截面曲率属于 $[-4, -1]$。此外，它们具有对称性，即曲率张量在平行移动下保持不变；换言之，每个测地对称都可以延拓为全局等距变换。因此，可以认为它们是在非恒定曲率流形背景下空间形式的自然推广。特别是，各向同性群在测地球面上的传递作用，加上经典对称化方法在常曲率流形中的应用（见 Steiner [25] 和 Schwarz [24]），自然引出了 Gromov $[15, 6.28\frac{1}{2_+}]$和 Ros 提出的猜想：在这一类流形中，测地球是等周区域。该猜想仅在常曲率情形下得到了证明 $M = \mathbb{R}H^m$。

由于等距群在 M 上的作用是余紧的，因此对所有体积都存在等周集，这是一个经典结论：关于泡集的情形，见 Morgan [20]；关于这一问题的非常一般的形式化处理，见 Galli 和 Ritoré [14] 的文章。另已知球面在无穷小保体积扰动下是稳定的；Barbosa、do Carmo 和 Eschenberg 在其著名论文 [3] 中针对 $\mathbb{C}H^m$ 证明了这一点（一般情形见 [23]）。他们的证明是以下变分原理的自然推论：设 Σ 是 M 中一个定向、闭且浸入的子流形，并设 Ric_Σ 和 II_Σ 分别是 Σ 上诱导的 Ricci曲率张量和第二基本形式。如果

$$\mathrm{Ric}_\Sigma + \|\mathrm{II}_\Sigma\|^2 = \text{ constant } = \lambda, \tag{1.1}$$

电子邮件地址：lauro.silini@math.ethz.ch。

那么，当且仅当 $\lambda = \lambda_1$ 是诱导拉普拉斯算子Δ_Σ的第一特征向量时， Σ 才是稳定的。借助一种关于全测地浸入纤维的纤维丛上拉普拉斯谱的特殊刻画（相关研究见 Bergery 和 Bourguignon[4]），可以显式计算测地球面上的拉普拉斯算子的第一特征值，从而将稳定性证明归结为直接验证方程（1.1）。

一个自然的问题是，能否通过量化最优性损失与扰动大小之间的关系来改进这一结果？在 $\mathbb{R}^n$ 这一方向上的首个结果归功于 Fuglede [11]。他证明，对于下述形式的单位球的任意保体积 Lipschitz 扰动：

$$\partial E := \{(1+\rho(\varphi))\varphi : \varphi \in S^{n-1}\},$$

其重心位于原点，等周亏量 P(E) −P(B(0, 1)) 可以用以下表达式给出下界：

$$\mathrm{P}(E) - \mathrm{P}(B(0,1)) \geq \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\nabla\rho|^2\,dx - (n-1)\int_{S^{n-1}} \rho^2\,dx + o\big(\|\rho\|_{W^{1,2}(S^{n-1})}\big), \tag{1.2}$$

利用周长和体积关于 E 的积分表示。将 ρ 展开为球谐函数后，第一特征值恰好等于 ($n-1$)，抵消了方程 (1.2) 中的负项，最终证明存在常数 $C = C(n) > 0$ ，使得

$$\mathrm{P}(E) - \mathrm{P}(B(0,1))) \geq C\|\rho\|^2_{W^{1,2}(S^{n-1})}.$$

如前所述，我们关于 M 中测地球面上拉普拉斯算子谱分解的信息，来自其与 Hopf 纤维化之间的内在联系

$$S^{d-1} \to S^{n-1}(r) \to \mathbb{K}P^{m-1},$$

这表明，Fuglede 的方法或许也能推广到所有非紧型秩一对称空间，而这正是我们将在本文第一部分证明的内容。

在第二部分，我们将关注小体积情形下的情况。已知，对于所有等距变换群余紧的黎曼流形，体积充分小的等周区域在其质心稳定子群的作用下保持不变。Tomter 最早在 Heisenberg 群的背景下提到了这一结果， [26], 并引用了 Kleiner 一篇未发表的文章。后来，我们可以在 Nardulli 的文章中找到这一结果的完整证明，它是该文提出伪泡概念后所得的一条推论，参见 [21]。由于球面是唯一在各向同性群作用下保持不变的曲面，因此可直接得出，在小体积情形下，它们是秩一对称空间中唯一的等周区域。

上述定理的证明依赖于一个隐式论证。我们利用 Fuglede 意义下球面的强稳定性，给出一种新的定量证明。为此，我们采用 $\mathbb{R}^n$ 中针对有限周长集背景下的深刻定量稳定性估计

$$\mathrm{P}(E) - \mathrm{P}(B(0,1)) \geq C(n)\alpha(E)^2,$$

其中

$$\alpha(E) := \min_{y\in\mathbb{R}^n}\Big\{\mathrm{V}(E\triangle B(y,1)) : \mathrm{V}(B(y,1)) = \mathrm{V}(E)\Big\},$$

是 Fraenkel 不对称指数，而 $E\triangle B(y,1)$ 表示对称差。该结果最初由 Fusco、Maggi 和 Pratelli 在 [13], 中证明，随后 Cicalese 和 Leonardi 在 [7] 中进一步简化了证明。之后，Figalli、Maggi 和 Pratelli 借助最优

运输技术，将同一结果推广至各向异性周长泛函，见 [10], ；Fusco 和 Julin 在 [12], 中对欧几里得情形作了进一步改进，Bögelein、Duzaar 和 Scheven 则在 [6] 中将其推广至实双曲空间。我们证明，经过重缩放的最优集合相对于提升后的切空间上的欧几里得度量是几乎极小的；也就是说，它们满足等周性质，误差与扰动大小成均匀正比。接着，我们利用 $\mathbb{R}^n$ 中的定量稳定性结果，证明这些集合与测地球面之间存在 L^1 邻近性；再借助几乎极小性，可将其改进为 L^∞ 邻近性，前提是选择形状的重心作为提升点。所需的正则性结论由 Figalli 在 [9] 中发展的正则性理论得到。

1.2. **主要结果**。 本文旨在证明以下结果。

定理 1.1。 设 $M=\mathbb{K}H^m$ 为非紧型秩一对称空间，$R_0>0$ 为任意固定半径。设 $E\subset M$ 是对 $\mathbf{B}^n(R)$,$0<R\le R_0$进行的保体积扰动，其边界具有如下形式

$$\partial E=\{\exp_o(R(1+\rho(\varphi))):\varphi\in S^{n-1}\},$$

其中 $o\in M$ 是一个固定基点，且 $\rho\in C^1(S^{n-1},(-1,+\infty))$。记 $\boldsymbol{\rho}:\mathbf{S}^{n-1}(R)\to(-1,+\infty)$ 为扰动 ρ，将其视为定义在 M中的测地球面上的函数，并用法坐标表示为

$$\boldsymbol{\rho}(R\varphi)=\rho(\varphi),\quad \varphi\in S^{n-1}.$$

那么，存在 $\varepsilon=\varepsilon(M,R_0)>0$ 以及 $C=C(M,R_0,R)>0$，使得

$$\mathrm{Per}_g(E)-\mathrm{Per}_g(\mathbf{B}^n(R))\ge C\big(\|\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))}+\|\nabla^g\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))}\big),$$

满足 $\|\rho\|_{C^1}\le\varepsilon$。特别地，若 E 是等周的，则 $E=\mathbf{B}^n(R)$。

为证明这一结果，我们将在 ρ 保持重心不变这一技术性假设下，给出以下显式下界。为得到定理 1.1，我们可以对扰动后的集合施加一个小的平移（即通过复合中心对称变换得到的平移），以弥补这一假设。

定理 1.2。 在定理 *1.1* 的相同假设下，进一步假设 E 的重心位于 $o\in M$ 中。记 λ_2^R 为$\mathbf{S}^{n-1}(R)$上拉普拉斯算子的第二特征值。则存在 $\varepsilon=\varepsilon(M,R_0)>0$，使得

$$\mathrm{Per}_g(E)-\mathrm{Per}_g(\mathbf{B}^n(R))\ge\frac{R^2\lambda_2^R}{48}\|\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))}+\frac{R^2}{32}\|\nabla^g\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))},$$

满足 $\|\rho\|_{C^1}\le\varepsilon$。

作为定理 1.2 的一项应用，我们将针对小体积情形的等周问题给出一种新的定量证明。

定理 1.3. 设 $M=\mathbb{K}H^m$ 为非紧型秩一对称空间。则存在一个可能可计算的体积 $\bar v=\bar v(M)>0$，使得所有体积为 $\mathrm{Vol}_g(B(R))<\bar v$ 的测地球$\mathbf{B}^n(R)\subset M$ 在 M中都是唯一的等周极值集。

注记 1.4。 采用完全相同的论证，在较弱的假设下，定理 1.1 和定理 1.2 仍然成立，即 ρ 属于 Sobolev 空间$W^{1,\infty}(S^1,(-1,+\infty))$。

2. 预备知识

对于每个实的有限维除代数 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$，我们将 $(M, g) = (\mathbb{K}H^m, g)$ 视为与之对应的非紧型秩一对称空间，其复维数为 $\dim_{\mathbb{K}}(M) = m$，实维数为 $\dim_{\mathbb{R}}(M) = md$，其中$d = \dim(\mathbb{K}) \in \{1, 2, 4, 8\}$。在八元数情形下，只有 16 维的 Cayley 射影平面 $\mathbb{O}H^2$。令 $\mathrm{dist}_g(\cdot, \cdot)$ 表示诱导的黎曼距离。关于对称空间的经典参考资料，我们引用 Eberlein [8] 和 Helgason [17] 的著作。黎曼流形 M 可实现为对称对 (G, K) 的商，其中 G 是一个在 M上传递作用的半单李群，而 K 表示各向同性群，即 G 中固定 M内任意选定点的所有元素所组成的群。特别地

$M = G/K$	G	K
$\mathbb{R}H^m$	$\mathrm{SO}(m, 1)$	$\mathrm{SO}(m)$
$\mathbb{C}H^m$	$\mathrm{SU}(m,1)$	$\mathrm{S}(\mathrm{U}(m)\,\mathrm{U}(1))$
$\mathbb{H}H^m$	$\mathrm{Sp}(m, 1)$	$\mathrm{Sp}(m)\,\mathrm{Sp}(1)$
$\mathbb{O}H^2$	F_4^{-20}	$\mathrm{Spin}(9)$

称其为对称 ，是因为黎曼曲率张量 $\mathbf{R}(X, Y)Z$ 沿测地线平行。等价地，所有测地反射都可以延拓为全局等距变换。秩 表示最大等距嵌入平坦子流形的维数。在我们的情形中，这意味着 M中的平坦子流形只有测地线。当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, M 时，它是具有常负曲率的实双曲空间。一般而言，经过重新归一化后， M 的截面曲率取值于 $[-4, -1]$ ，且它是单连通的，因此与 $\mathbb{R}^n$微分同胚。此外， M 是两点齐性的，即任意一对点都可以通过等距变换映射到另一对相互距离相同的点。因此，测地球面

$$\mathbf{S}^{n-1}(o, R) := \{x \in M : \mathrm{dist}_g(x, o) = R\},$$

以 $o \in M$ 为中心、半径为 $R > 0$的球面，是具有常平均曲率的齐性子流形。由于半径相同的所有球面彼此等距，我们常用 $\mathbf{S}^{n-1}(R)$ 表示 M 中半径为 $R > 0$ 的一个一般测地球面，其诱导度量仍记作 g。类似地，我们用

$$\mathbf{B}^n(o, R) := \{x \in M : \mathrm{dist}_g(x, o) < R\},$$

以 $o \in M$ 为中心、半径为 $R > 0$ 的开测地球，以及 M 中半径为 $R > 0$ 的一般开测地球 $\mathbf{B}^n(R)$。

2.1. 球面的分布与谱分解。对于 $x \in M$ 处的每一个非零向量 N_x ，Jacobi 算子

$$\mathbf{R}(\cdot, N_x)N_x : T_xM \to T_xM,$$

恰好有三个特征值： $\{-4, -1, 0\}$。分别记 $\mathcal{H}_x$ 和 $\mathcal{V}_x$ 为对应于特征值 -4 和 -1 的特征空间，则切平面 T_xM 正交分解为

$$T_xM = \mathcal{H}_x \oplus \mathcal{V}_x \oplus \mathbb{R}N_x, \tag{2.1}$$

其中 $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_x) = (d - 1)$，且 $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V}_x) = d(n - 1)$。因此，对于定义在开集 $U \subset M$ 上的每一个非零向量场 $N \in \Gamma(TU)$，映射 $x \mapsto \mathcal{H}_x$ 和 $x \mapsto \mathcal{V}_x$ 在 U 上诱导出两个定义良好的分布 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{V}$ 。我们将用正交

投影为

$$(\cdot)^h : TU \to \mathcal{H},$$
$$(\cdot)^v : TU \to \mathcal{V},$$
$$(\cdot)^n : TU \to \mathbb{R}N.$$

注意，当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 时， $\mathcal{H} = \emptyset$。在这一特殊情形下，我们令 $(\cdot)^v \equiv 0$。特别地，当 N 是从基点 $o \in M$ 出发的径向向量场时，由 (2.1) 的正交性可知，任意球面 $\mathsf{S}^{n-1}(o, R)$ 的切丛相对于 g 正交分解为 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{V}$ 在 $\mathsf{S}^{n-1}(o, R)$ 上的限制之直和。事实证明，这种分解也源自与欧氏球面著名的 Hopf 纤维化相关的垂直分布和水平分布

$$S^{d-1} \to S^{m-1}(R) \to \mathbb{K}P^{m-1},$$

其中， $\mathbb{K}P^{m-1}$ 分别是实、复、四元数和八元数射影空间，其复维数为 $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}P^{m-1}) = m - 1$。这一特殊结构使得我们能够计算 $L^2(\mathsf{S}^{n-1}(R), g)$ 关于诱导黎曼拉普拉斯算子的谱分解，参见 [3, 4, 23] ，以及近期的 [5]。在我们的情形中，只需知道相应的特征值 $\{\lambda_i^R\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足以下界

$$\lambda_j^R \geq \frac{j(j+d-2) + j(n-d)\cosh^2(R)}{\sinh^2(R)\cosh^2(R)},$$

当 $j = 1$ 时取等号。我们将记作

$$\{f_{j,k}^R \in L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R), g) : 1 \leq k \leq n_j\}_{j\geq 0}.$$

重数为 $n_j \geq 1$ 的球谐函数构成$L^2(\mathsf{S}^{n-1}(R), g)$的一组正交基，因此

$$\|\nabla^g f_{j,k}^R\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R),g)} = \lambda_j^R \|f_{j,k}^R\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R),g)},$$

其中 ∇^g 表示关于 g 在 $\mathsf{S}^{n-1}(R)$ 上的黎曼梯度。

2.2. 通过比较得到的有用几何恒等式。 用 $g_e = \langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上通常的欧几里得度量和范数；用 $S^{n-1}(x, r)$ 和 $B^n(x, r)$ 表示以 $x \in \mathbb{R}^n$ 为中心、半径为 $r > 0$ 的欧几里得球面和开球。照例， S^{n-1} 和 B^n 表示一般的单位球面和球。为了在 (M, g) 中进行计算，我们决定使用法坐标 $(r, \varphi) \in (0, +\infty) \times S^{n-1}$。令 $\mathsf{P}(\cdot)$ 和 $\mathsf{V}(\cdot)$ 分别表示相对于欧几里得度量在 $\mathbb{R}^n$ 上的周长算子和体积算子。设

$$\boldsymbol{\omega}_n := \mathrm{V}(B^n).$$

从现在起， $o \in M$ 将是一个任意固定的基点，除非另有说明。取回拉度量 $\exp_o^* g$ 我们可以等距地识别 M 与 $\mathbb{R}^n$。现在并永远选择 $N \in \Gamma(M \setminus \{o\})$ 为从 o发出的径向单位向量场。多亏了之前的讨论，我们可以找到一个将 g_e 与 g联系起来的显式公式。

引理 2.1. 对于每一个 $x = (r, \varphi) \in M \setminus \{o\}$，分裂

$$T_x M = \mathcal{H}_x \oplus \mathcal{V}_x \oplus \mathbb{R}N_x,$$

关于 g_e 是正交的。特别地，我们有

$$g(X, Y) = \langle X^n, Y^n \rangle + \frac{\cosh^2(r)\sinh^2(r)}{r^2}\langle X^h, Y^h \rangle + \frac{\sinh^2(r)}{r^2}\langle X^v, Y^v \rangle, \tag{2.2}$$

对所有 $X, Y \in T_x M$。

证明。任取一个单位方向 $N_o \in T_oM$，并设 $V_o \in T_oM$ 是相对于 $g|_o = g_e|_o$与其正交的任意向量。由于从o 出发、相对于 g 的径向测地线与欧氏情形相同，因此沿测地线 $\sigma : t \mapsto tN_o$的雅可比场 $Y(t)$，由初始条件 $Y(0) = 0, Y'(0) = V_o$ 确定，在两种度量下相同。设 $V(t)$ 和 $V_e(t)$ 分别表示相对于 g 和 g_e，将 V_o 沿 σ平行移动所得的向量。根据对称空间的定义，曲率张量 R 沿测地线本身平行。这意味着

$$tV_e(t) = Y(t) = \frac{\sinh(\sqrt{-\kappa}t)}{\sqrt{-\kappa}}V(t),$$

因为 V_o 属于 Jacobi 算子 $R(\cdot, N_o)N_o$的 κ-特征空间。因此，对于两种度量，特征空间中的平行向量场共线。于是，对于$t > 0$，线性子空间 $\mathcal{H}_{\sigma(t)}$ 和 $\mathcal{V}_{\sigma(t)}$ 恰好是沿着 σ 对 $R(\cdot, N_o)N_o$ 的相应特征空间进行平行移动所得。由此可知，分解$T_xM = \mathcal{H}_x \oplus \mathcal{V}_x$ 不仅关于 g正交，也关于欧氏度量 g_e正交。公式 (2.2) 直接由这一事实以及分布 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{V}$的定义得到。□

特别地，关于度量 g， M 上的体积密度是径向的，且可表示为

$$\omega_g(r, \varphi) = \omega_g(r) = \frac{\sinh^{n-1}(r)\cosh^{d-1}(r)}{r^{n-1}}.$$

设 $\mathrm{Per}_g(\cdot)$ 和 $\mathrm{Vol}_g(\cdot)$ 分别为 M中的周长算子和体积算子。根据前述引理，我们有以下公式。

引理 2.2. 设 E 是 M 的一个具有光滑边界的子集。那么，在法坐标中有

$$\mathrm{Vol}_g(E) = \int_E \omega_g(r)\, d\mathscr{H}^n, \tag{2.3}$$

and

$$\mathrm{Per}_g(E) = \int_{\partial E} \omega_g(r)\Big(|\nu^n|^2 + \frac{r^2}{\cosh^2(r)\sinh^2(r)}|\nu^h|^2 + \frac{r^2}{\sinh^2(r)}|\nu^v|^2\Big)^{1/2} d\mathscr{H}^{n-1}, \tag{2.4}$$

其中，ν 表示相对于 g_e的 ∂E 的法向量场。

证明. 方程 (2.3)是显然的。我们证明方程 (2.4)。记

$$\mathrm{vol}_g := \omega_g(r)dx = \omega_g(r)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

M中的体积形式为，并记 ν_g 和 ν 分别为相对于g 和 g_e 的 ∂E 的法向量场，则有

$$\mathrm{Per}_g(E) = \int_{\partial E} \iota_{\nu_g}\mathrm{vol}_g = \int_{\partial E} \omega_g(r)\iota_{\nu_g}\mathrm{vol},$$

其中，我们将内积 $(\iota_{\nu_g}\mathrm{vol}_g)(\cdot) = \mathrm{vol}_g(\nu_g, \cdot) \in \Omega^{n-1}(\partial E)$记为。现在，对固定的 $x \in \partial E$，选取 $T_x\partial E$中与 ν相对于 g_e正交的一个标准正交基 $\{v_2, \ldots, v_n\}$。于是，

$$\begin{aligned}(\iota_{\nu_g}\mathrm{vol})_x(v_2, \ldots, v_n) &= \mathrm{vol}_x(\nu_g, v_2, \ldots, v_n) = \langle \nu_g, \nu\rangle\, \mathrm{vol}_x(\nu, v_2, \ldots, v_n)\\ &= \langle \nu, \nu_g\rangle(\iota_\nu \mathrm{vol})_x(v_2, \ldots, v_n),\end{aligned}$$

这表明

$$\mathrm{Per}_g(E) = \int_{\partial E} \omega_g(r)\langle \nu, \nu_g\rangle \iota_\nu \mathrm{vol} = \int_{\partial E} \omega_g(r)\langle \nu, \nu_g\rangle\, d\mathscr{H}^{n-1}.$$

我们还需计算 $\langle \nu、\ \nu_g\rangle$。由引理 2.1 可得

$$\tilde{\nu}_g := \nu^n + \frac{r^2}{\cosh^2(r)\sinh^2(r)}\nu^h + \frac{r^2}{\sinh^2(r)}\nu^v,$$

对所有 $i = 2, \dots, n$，均成立 $g(\tilde{\nu}_g, v_i) = \langle \nu, v_i\rangle = 0$，这意味着 $\tilde{\nu}_g$ 与 ν_g 共线。由于 $g(\tilde{\nu}_g, \tilde{\nu}_g) = \langle \nu, \tilde{\nu}_g\rangle$，我们得到

$$\begin{aligned}\langle \nu, \nu_g\rangle &= \langle \nu, \tilde{\nu}_g\rangle g(\tilde{\nu}_g, \tilde{\nu}_g)^{-1/2} = \langle \nu, \tilde{\nu}_g\rangle^{1/2} \\ &= \Big(|\nu^n|^2 + \frac{r^2}{\cosh^2(r)\sinh^2(r)}|\nu^h|^2 + \frac{r^2}{\sinh^2(r)}|\nu^v|^2\Big)^{1/2},\end{aligned}$$

由此完成引理的证明。 □

将 E 的重心定义为

$$\mathrm{Bar}_g(E) := \mathrm{argmin}_{p\in M}\Big\{\int_E \mathrm{dist}_g^2(x,p)\, d\,\mathrm{vol}_g(x)\Big\} \in M.$$

由于 M 的负曲率意味着上述泛函关于 $p \in M$ 严格凸，因此该重心总是唯一且定义良好的，参见第 2.5] 节。求导可得，$p = \mathrm{Bar}_g(E)$ 当且仅当

$$-2\int_E \exp_p^{-1}(x)\, d\,\mathrm{vol}_g(x) = 0. \tag{2.5}$$

在以 $\mathrm{Bar}_g(E)$ 为基点的法坐标中，这可写为

$$0 = \int_E x\, d\,\mathrm{vol}_g(x) = \int_E r\varphi\omega_g(r)\, d\mathscr{H}^n. \tag{2.6}$$

在 ∂E 是 $\mathsf{S}^{n-1}(R)$ 的 C^1-径向扰动的特殊情形下

$$\partial E = \{\exp_o(R(1+\rho(\varphi))) : \varphi \in S^{n-1}\} = \{(R(1+\rho(\varphi)), \varphi) : \varphi \in S^{n-1}\}, \tag{2.7}$$

对某个 C^1 函数 $\rho:\ S^{n-1} \to (-1, +\infty)$，则相对于 g_e 的法向量 ν 为

$$\nu = \Big(\varphi - \frac{\nabla\rho}{1+\rho}\Big)\Big(1 + \frac{|\nabla\rho|^2}{(1+\rho)^2}\Big)^{-1/2},$$

其中 ∇ 表示相对于 S^{n-1} 上标准度量的梯度。应用引理 2.2 的方程 (2.4)，可得

$$\mathrm{Per}_g(E) = \int_{S^{n-1}} \omega_g(r) r^{n-1}\Big(1 + R^2\frac{|\nabla^h\rho|^2 + \cosh^2(r)|\nabla^v\rho|^2}{\sinh^2(r)\cosh^2(r)}\Big)^{1/2}\Big|_{r=R(1+\rho(\varphi))} d\varphi, \tag{2.8}$$

其中 $\nabla^h\rho$ 和 $\nabla^v\rho$ 分别是向量 $\nabla\rho \in T_{(R(1+\rho(\varphi)),\varphi)}M$ 在 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{V}$ 上的投影。为简化表述，定义

$$\phi(r) := \int_0^r \tau^{n-1}\omega_g(\tau)\, d\tau, \tag{2.9}$$

and

$$\psi(r) := \int_0^r \tau^n\omega_g(\tau)\, d\tau, \tag{2.10}$$

其中，我们回顾一下，$\omega_g(r)$ 是公式 (3.2) 中定义的体积密度。于是，我们得到公式

$$\mathrm{Vol}_g(E) = \int_{S^{n-1}} \phi(R(1+\rho))\, d\varphi, \tag{2.11}$$

并且当重心位于零点时

$$0 = \int_{S^{n-1}} \varphi\psi(R(1+\rho(\varphi)))d\varphi. \tag{2.12}$$

S取 $\rho \equiv 0$，我们得到测地球 $\mathbf{B}^n(R)$ 的体积和周长 ：

$$\mathrm{Vol}_g(\mathbf{B}^n(R)) = n\boldsymbol{\omega}_n\phi(R), \quad \mathrm{Per}_g(\mathbf{B}^n(R)) = n\boldsymbol{\omega}_n\phi'(R).$$

例如，当 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 时，我们可以计算

$$\mathrm{Vol}_g(\mathbf{B}^n(R)) = \boldsymbol{\omega}_n \sinh^n(R), \quad \mathrm{Per}_g(\mathbf{B}^n(R)) = n\boldsymbol{\omega}_n \sinh^{n-1}(R)\cosh(R).$$

2.3.有限周长集。 我们回顾一般黎曼流形中有限周长集的定义及其若干性质。关于欧氏空间中的详细介绍，请参阅 [19] 。

定义 2.3 （有限周长集）。设 (M, g) 为一个光滑黎曼流形，其体积元为 $d\mathrm{vol}$，且 $E \subset M$ 为一个可测子集。对于任意开子集$O \subset M$，我们用 $\Gamma_c(TO)$ 表示在 M 上紧支撑于 O 中的光滑向量场集合。我们将 E 在 O 中的相对周长定义为

$$\mathrm{Per}_g(E, O) := \sup\Big\{\int_O \mathrm{div}^g(\xi)\, d\,\mathrm{vol}_g, : \xi \in \Gamma_c(TO), \sup_{x\in O} g(\xi,\xi) \le 1\Big\}.$$

如果对于所有 $O \subset\subset M$，均有 $\mathrm{Per}_g(E, O) < +\infty$，则称 E 为局部有限周长集；如果 $\mathrm{Per}_g(E) := \mathrm{Per}_g(E, M) < +\infty$，则称 E 为有限周长集。

令 $D\chi_E$ 为特征函数 χ_E的分布梯度，则

$$\mathrm{Per}_g(E, O) = |D\chi_E|(O),$$

其中 $|D\chi_E|$ 表示测度 $D\chi_E$的全变差。

定义 2.4. 设 $E \subset M$ 是一个局部有限周长集。我们将其约化边界定义为

$$\partial^* E := \Big\{x \in \mathrm{spt}(|D\chi_E|) : \exists\, \nu_g(x) := \lim_{r\to 0^+} -\frac{D\chi_E(B_x(r))}{|D\chi_E(B_x(r))|} \text{ unit tangent vector at } x\Big\}.$$

下一个定理允许我们将 $\mathrm{Per}_g(E)$表示为在约化边界上的积分，其中 $\nu_g(x)$（ E的测度论外向单位法向量）是良好定义的。证明参见 [1]。

定理 2.5 (De Giorgi 结构定理). 设 $E \subset M$ 是一个局部有限周长集。那么，

$$D\chi_E = \nu_g(x) d\,\mathscr{H}^{n-1}|_{\partial^* E}, \ and\ P(E) = |D\chi_E|(M) = \mathscr{H}^{n-1}(\partial^* E).$$

这一刻画使我们能够将引理 2.2 中的方程 (2.4)推广到有限周长集这一类。

引理 2.6. 设 $E \subset M$ 为有限周长集。那么，对于 M 的任意开子集 O，都有

$$\mathrm{Per}_g(E, O) = \int_{\partial^* E\cap O} \omega_g(r)\Big(|\nu^n|^2 + \frac{r^2}{\cosh^2(r)\sinh^2(r)}|\nu^h|^2 + \frac{r^2}{\sinh^2(r)}|\nu^v|^2\Big)^{1/2} d\mathscr{H}^{n-1}, \tag{2.13}$$

其中， ν 是相对于平坦度量g_e而言的 E 的测度论外向单位法向量。

3. 一致 C^1强稳定性

固定任意上界 $R_0 > 0$ 和半径 $R \in$ （0， R_0] ），对于以法坐标给出的扰动球面

$$\partial E = \{(R(1+\rho(\varphi)), \varphi) : \varphi \in S^{n-1}\} \subset M,$$

其中， $\rho \in C^1(S^{n-1},(-1,+\infty))$ 是一种保持体积和重心的扰动，其意义如下:

$$\mathrm{Vol}_g(E) = \mathrm{Vol}_g(\mathbf{B}^n(R)),$$

and

$$\mathrm{Bar}_g(E) = \mathrm{Bar}_g(\mathbf{B}^n(R)) = 0.$$

我们假设

$$\|\rho\|_{C^1} := \|\rho\|_{C^1(S^{n-1})} = \sup_{\varphi\in S^{n-1}} \Big(|\rho(\varphi)| + |\nabla\rho(\varphi)|\Big) \le \varepsilon,$$

对于某个尚待定义的小量 $\varepsilon \in (0, 1\ 2)$。为简化表述，记

$$\bar\rho(\varphi) := R(1+\rho(\varphi)),$$

并令 $\boldsymbol{\rho} : \mathrm{S}^{n-1}(R) \to (-1,+\infty)$ 表示将该扰动视为从 M 中的测地球面到某个空间的函数，并用法坐标表示为

$$\boldsymbol{\rho}(R\varphi) = \rho(\varphi), \quad \varphi \in S^{n-1}.$$

注意到

$$\|\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))} := \|\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R),g)} = \int_{S^{n-1}} |\rho(\varphi)|^2 \phi'(R)\, d\varphi,$$

and

$$\|\nabla^g\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))} := \|\nabla^g\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R),g)} = \int_{S^{n-1}} \frac{|\nabla^h\rho|^2 + \cosh^2(R)|\nabla^v\rho|^2}{\sinh^2(R)\cosh^2(R)} \phi'(R)\, d\varphi. \tag{3.1}$$

对于 $k \in \{1,2,3\}$，定义辅助函数 ω_k： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 如下

$$\omega_k(r) := \frac{\phi^{(k)}(r)}{r^{n-k}}, \tag{3.2}$$

其中， $\phi(r)$ 的定义同 (2.9)。注意到 $\omega_1 = \omega_g$。我们需要接下来的三个引理来开始进行估计。

引理 3.1。对于 $k \in \{1,2,3\}$，在 (3.2) 中定义的函数 ω_k 为正、偶函数且严格凸，在零点处有可去奇点，其值为

$$\lim_{r\to 0}\omega_k(r) = \begin{cases} 1, & k=1, \\ (n-1), & k=2, \\ (n-1)(n-2), & k=3. \end{cases}$$

特别地，$\min\omega_k = \omega_k(0)$严格为正，除非$(n,k) = (2,3)$。这些常数

$$\begin{aligned} A_k &:= (n-k) + \max_{r\in[0,R_0]} r\frac{\omega_k'(r)}{\omega_k(r)}, \\ B_k &:= \max_{r\in[0,R_0]} \frac{\omega_k(2r)}{\omega_k(r)}, \\ C_k &:= \omega_k(2R_0), \end{aligned}$$

均为有限值，仅取决于(n,d,k,R_0)，并满足以下不等式

$$\phi_k^{(k)}(R(1+\tau)) \geq (1-A_k|\tau|)\phi^{(k)}(R), \tag{3.3}$$

$$\phi^{(k)}(R(1+\tau)) \leq B_k\phi^{(k)}(R), \tag{3.4}$$

$$\omega_k(R(1+\tau)) \leq C_k. \tag{3.5}$$

对 $R\in(0,R_0]$ 和 $\tau\in\mathbb{R}$, $|\tau|\leq 1$一致，其中 $\phi(r)$ 如 (2.9) 中所述。

证明。我们明确计算

$$\begin{aligned}
r^{n-1}\omega_1(r) &= \phi'(r) = \sinh^{n-1}(r)\cosh^{d-1}(r),\\
r^{n-2}\omega_2(r) &= \phi''(r) = (n-1)\sinh^{n-2}(r)\cosh^{d}(r) + (d-1)\sinh^{n}(r)\cosh^{d-2}(r),\\
r^{n-3}\omega_3(r) &= \phi'''(r) = (n-1)(n-2)\sinh^{n-3}(r)\cosh^{d+1}(r)\\
&\quad + (2dn-d-n)\sinh^{n-1}(r)\cosh^{d-1}(r) + (d-1)(d-2)\sinh^{n+1}(r)\cosh^{d-3}(r).
\end{aligned}$$

由于函数 $r^{-1}\sinh(r)$ 和 $r\sinh(r)$ 是偶函数、严格凸函数，且在零点处有正的（可去奇点），sinh(r) 是奇函数而 cosh(r) 是偶函数，因此可以推知，ω_k 本身是凸的、偶的且为正。通过泰勒展开可得

$$\begin{aligned}
r^{n-1}\omega_1(r) &= r^{n-1} + o(r^n),\\
r^{n-2}\omega_2(r) &= (n-1)r^{n-2} + o(r^{n-1}),\\
r^{n-3}\omega_3(r) &= (n-1)(n-2)r^{n-3} + (2dn-d-n)r^{n-1} + o(r^n),
\end{aligned}$$

这证明 ω_k 可在零点处延拓，取值为 1，$(n-1)$ 和 $(n-1)(n-2)$，具体取决于 k 等于 1、2 或 3，并且

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\omega_k'(r)}{\omega_k(r)} < +\infty, \quad \text{and } \lim_{r\to 0}\frac{\omega_k(2r)}{\omega_k(r)} < +\infty.$$

这表明 A_k 和 B_k 是定义良好的函数。为证明方程 (3.3)，由于 ω_k是凸的，且对于所有 $|\tau|\leq 1$ 和 $l\in\mathbb{Z}$，$(1+\tau)^l \geq 1+l\tau$，我们可以估计

$$\begin{aligned}
\phi^{(k)}(R(1+\tau)) &= R^{n-k}(1+\tau)^{n-k}\omega_k(R(1+\tau))\\
&\geq (1+(n-k)\tau)R^{n-k}\big(\omega_k(R)+\omega_k'(R)R\tau\big)\\
&= (1+(n-k)\tau)\big(1+R\frac{\omega_k'(R)}{\omega_k(R)}\tau\big)\phi^{(k)}(R)\\
&\geq (1-A_k|\tau|)\phi^{(k)}(R).
\end{aligned}$$

鉴于 ω_k 的性质以及对 τ的界，方程 (3.4) 和 (3.5) 可直接得到。 □

引理 3.2。对于每个函数 $\rho\in C^1(S^1,(-1,+\infty))$ 以及 $0<R\leq R_0$，都存在一个仅依赖于 R_0 的常数 $D>0$，使得

$$|\nabla\rho|^2 \geq \bar\rho^2\frac{|\nabla^h\rho|^2+\cosh^2(\bar\rho)|\nabla^v\rho|^2}{\sinh^2(\bar\rho)\cosh^2(\bar\rho)} \geq (1-D|\rho|)R^2\frac{|\nabla^h\rho|^2+\cosh^2(R)|\nabla^v\rho|^2}{\sinh^2(R)\cosh^2(R)}, \tag{3.6}$$

其中 $\bar\rho\in C^1(S^{n-1},(0,+\infty))$ 定义为 $\bar\rho(\varphi) = R(1+\rho(\varphi))$。

证明。令

$$\begin{aligned}
\omega_1^1(r) &:= \frac{\sinh^2(r)}{r^2},\\
\omega_1^2(r) &:= \frac{\sinh^2(r)\cosh^2(r)}{r^2},
\end{aligned}$$

并如引理 3.1 中那样进行论证，我们注意到 ω_1^1 和 ω_1^2 严格凸、为偶函数，且在零点处等于 1。令

$$\xi(r) := \frac{|\nabla^h \rho|^2}{\omega_1^2(r)} + \frac{|\nabla^v \rho|^2}{\omega_1^1(r)},$$

我们得到

$$\xi(r) \le \frac{1}{\omega_1^1(r)}(|\nabla^h \rho|^2 + |\nabla^v \rho|^2) \le |\nabla \rho|^2,$$

这是当 $r = \bar{\rho}$ 时方程 (3.6) 的第一个不等式。对于第二个不等式，对于$i = 1$，2 我们由 ω_1^i 的凸性得到

$$\omega_1^i(R) \ge \omega_1^i(\bar{\rho}) - (\omega_1^i)'(\bar{\rho})R\rho,$$

这意味着

$$\begin{aligned}\omega_1^i(\bar{\rho}) &\le \omega_1^i(R) + (\omega_1^i)'(\bar{\rho})R\rho \le \omega_1^i(R)\Big(1 + R\frac{(\omega_1^i)'(\bar{\rho})}{\omega_1^i(R)}|\rho|\Big) \\ &\le \omega_1^i(R)(1 + R_0(\omega_1^i)'(2R_0)|\rho|),\end{aligned}$$

and

$$\frac{1}{\omega_1^i(\bar{\rho})} \ge \frac{1}{1 + R_0(\omega_1^i)'(2R_0)|\rho|}\frac{1}{\omega_1^i(R)} \ge (1 - R_0(\omega_1^i)'(2R_0)|\rho|)\frac{1}{\omega_1^i(R)}.$$

因此，设 $D := \max_{i\in\{1,2\}}\{R_0(\omega_1^i)'(2R_0)\}$，我们可以估计

$$\xi(\bar{\rho}) \ge (1 - D|\rho|)\xi(R),$$

从而完成了引理的证明。 □

回顾一下，我们用 λ_1^R 表示球面 $\mathbb{S}^{n-1}(R)$ 上拉普拉斯算子的第一个非零特征值。

L引理 3.3. 令 $\phi(r)$ 如 (2.9) 中所示。对于所有 $r > 0$，我们有如下恒等式

$$\phi'''(r) = \phi'(r)\Big(\frac{\phi''(r)^2}{\phi'(r)^2} - \lambda_1^r\Big), \tag{3.7}$$

其中 λ_1^r 是球面 $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ 上拉普拉斯算子的第一特征向量。

证明。 由于 $\phi'(r) = r^{n-1}\omega_g(r) = \sinh^{n-1}(r)\cosh^{d-1}(r)$，我们可以计算得

$$\begin{aligned}\phi''(r) &= (n-1)\sinh^{n-2}(r)\cosh^d(r) + (d-1)\sinh^n(r)\cosh^{d-2}(r) \\ &= (n-1)\coth(r)\phi'(r) + (d-1)\tanh(r)\phi'(r),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\phi'''(r) &= \phi''(r)\Big((n-1)\coth(r) + (d-1)\tanh(r)\Big) + \phi'(r)\Big(\frac{d-1}{\cosh^2(r)} - \frac{n-1}{\sinh^2(r)}\Big) \\ &= \frac{\phi''(r)^2}{\phi'(r)} + \phi'(r)\frac{(d-1)\sinh^2(r) - (n-1)\cosh^2(r)}{\cosh^2(r)\sinh^2(r)} \\ &= \frac{\phi''(r)^2}{\phi'(r)} + \phi'(r)\frac{(d-1) - (n-1-d+1)\cosh^2(r)}{\cosh^2(r)\sinh^2(r)} = \frac{\phi''(r)^2}{\phi'(r)} - \phi'(r)\lambda_1^r,\end{aligned}$$

这正是所需的结果。 □

现在我们可以证明第一个估计了。

命题 3.4 （中间估计）。 在定理 *1.2* 的假设下，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Per}_g(E)-\mathrm{Per}_g(\mathbf{B}^n(R)) \geq &-\Big(\Big(\frac{B_3C_2C_3}{3}+A_3C_2^2\Big)\|\rho\|_{C^0}+R^2\lambda_1^R\Big)\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))}\\ &+R^2(1-(D+2)\|\rho\|_{C^1})\frac{1}{2}\|\nabla^g\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

此处常数 A_k、 B_k、 C_k 和 D 已在引理 *3.1* 和引理 *3.2* 中定义。证明。设

$$\xi(r):=r^2\frac{|\nabla^h\rho|^2+\cosh^2(r)|\nabla^v\rho|^2}{\sinh^2(r)\cosh^2(r)},$$

由方程(2.8)我们得到

$$\mathrm{Per}_g(E)=\int_{S^{n-1}}\Big(1+\frac{\xi(\bar\rho)}{(1+\rho)^2}\Big)^{1/2}\phi'(\bar\rho)\,d\varphi.$$

由初等不等式

$$\frac{1}{(1+t)^2}\geq(1-2t),\ \text{for all } t>-1,\ \text{and } (1+t)^{1/2}\geq 1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}\ \text{for all } t\geq 0,$$

我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Per}_g(E)&\geq\int_{S^{n-1}}(1+\xi(\bar\rho)(1-2\rho))^{1/2}\phi'(\bar\rho)\,d\varphi\\ &\geq\int_{S^{n-1}}\Big(1+(1-2\rho)\Big(1-(1-2\rho)\frac{\xi(\bar\rho)}{4}\Big)\frac{\xi(\bar\rho)}{2}\Big)\phi'(\bar\rho)\,d\varphi\\ &\geq\int_{S^{n-1}}\phi'(\bar\rho)\,d\varphi+\int_{S^{n-1}}\Big(1-2\rho-\xi(\bar\rho)\Big)\frac{\xi(\bar\rho)}{2}\phi'(\bar\rho)\,d\varphi\\ &\geq\int_{S^{n-1}}\phi'(\bar\rho)\,d\varphi+(1-2\|\rho\|_{C^1})(1-D\|\rho\|_{C^0})\int_{S^{n-1}}\frac{\xi(R)}{2}\phi'(\bar\rho)\,d\varphi\\ &\geq\int_{S^{n-1}}\phi'(\bar\rho)\,d\varphi+(1-(D+2)\|\rho\|_{C^1})\int_{S^{n-1}}\frac{\xi(R)}{2}\phi'(\bar\rho)\,d\varphi\\ &=\int_{S^{n-1}}\phi'(\bar\rho)\,d\varphi+(1-(D+2)\|\rho\|_{C^1})\frac{1}{2}R^2\|\nabla^g\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))},\end{aligned}\tag{3.9}$$

其中最后我们利用了方程(3.1)和(3.6)。我们需要处理第一项 ˆ

$$\int_{S^{n-1}}\phi'(\bar\rho)\ d\varphi.$$

现在，由泰勒展开可知，存在 $\eta:\ S^{n-1}\to[0,1]$ 使得

$$\phi'(\bar\rho)=\phi'(R)+\phi''(R)R\rho+\frac{R^2\rho^2}{2}\phi'''(R(1+\eta\rho)).$$

另一方面，得益于引理 3.1 和引理 3.3，我们有

$$\begin{aligned}\phi'''(R(1+\eta\rho))&\geq(1-A_3\|\rho\|_{C^0})\phi'''(R)=(1-A_3\|\rho\|_{C^0})\Big(\frac{\phi''(R)^2}{\phi'(R)^2}-\lambda_1^R\Big)\phi'(R)\\ &\geq\frac{\phi''(R)^2}{\phi'(R)}-\Big(A_3\Big(\frac{R^{n-2}\omega_2(R)}{R^{n-1}\omega_1(R)}\Big)^2\|\rho\|_{C^0}+\lambda_1^R\Big)\phi'(R)\\ &\geq\frac{\phi''(R)^2}{\phi'(R)}-\Big(A_3C_2^2R^{-2}\|\rho\|_{C^0}+\lambda_1^R\Big)\phi'(R),\end{aligned}$$

由此得到以下估计

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}}\phi'(\bar\rho)\,d\varphi \geq \mathrm{Per}_g(\mathbf{B}^n(R))+\int_{S^{n-1}}\phi''(R)R\rho+\frac{\phi''(R)^2}{\phi'(R)}\frac{R^2\rho^2}{2}\,d\varphi\\ -\left(A_3C_2^2\|\rho\|_{C^0}+R^2\lambda_1^R\right)\int_{S^{n-2}}\frac{\rho^2}{2}\phi'(R)\,d\varphi.\end{aligned}\tag{3.10}$$

现在，由于满足关于 ρ 的保体积约束，我们可以对泰勒展开进行积分

$$\phi(\bar\rho)-\phi(R)=\phi'(R)R\rho+\frac{R^2\rho^2}{2}\phi''(R)+\frac{R^3\rho^3}{6}\phi'''(R(1+\bar\eta\rho)),\tag{3.11}$$

其中，$\bar\eta\colon S^{n-1}\to[0,1]$ 经过适当选取，从而得到

$$\begin{aligned}\left|\int_{S^{n-1}}\phi'(R)R\rho+\frac{R^2\rho^2}{2}\phi''(R)\,d\varphi\right|&=\left|\int_{S^{n-1}}\frac{R^3\rho^3}{6}\phi'''(R(1+\bar\eta\rho))\,d\varphi\right|\\ &\leq\|\rho\|_{C^0}B_3\frac{R}{3}\int_{S^{n-1}}\frac{\rho^2}{2}R^2\phi'''(R)\,d\varphi\\ &=\|\rho\|_{C^0}B_3\frac{R}{3}\int_{S^{n-1}}\frac{\rho^2}{2}R^2\frac{\phi'''(R)}{\phi'(R)}\phi'(R)\,d\varphi\\ &=\|\rho\|_{C^0}B_3\frac{R}{3}\int_{S^{n-1}}\frac{\rho^2}{2}R^2\frac{R^{n-3}\omega_3(R)}{R^{n-1}\omega_1(R)}\phi'(R)\,d\varphi\\ &\leq\|\rho\|_{C^0}B_3C_3\frac{R}{3}\int_{S^{n-1}}\frac{\rho^2}{2}\phi'(R)\,d\varphi.\end{aligned}$$

这一关键估计使我们能够处理 (3.10)：

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}}\phi''(R)R\rho+\frac{\phi''(R)^2}{\phi'(R)}\frac{R^2\rho^2}{2}\,d\varphi&\geq-\left|\frac{\phi''(R)}{\phi'(R)}\right|\left|\int_{S^{n-1}}\phi'(R)R\rho+\frac{R^2\rho^2}{2}\phi''(R)\,d\varphi\right|\\ &\geq-\|\rho\|_{C^0}B_3C_3\frac{R}{3}\left|\frac{\phi''(R)}{\phi'(R)}\right|\int_{S^{n-1}}\frac{\rho^2}{2}\phi'(R)\,d\varphi,\\ &\geq-\|\rho\|_{C^0}B_3C_3\frac{R}{3}R^{-1}C_2\int_{S^{n-1}}\frac{\rho^2}{2}\phi'(R)\,d\varphi,\\ &=-\|\rho\|_{C^0}\frac{B_3C_2C_3}{3}\|\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))},\end{aligned}$$

将其与 (3.9) 和 (3.10) 结合，即可得到所需的不等式。 □

现在我们可以证明定理 1.2 了。

定理 *1.2* 的证明。回顾第 2.1 节，$L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R),\,g)$ 存在如下形式的球谐函数正交分解

$$\{f^R_{j,k}\in L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R),g):1\leq k\leq n_j\}_{j\geq0}.$$

选择重归一化，使得

$$\frac{1}{\mathrm{Per}_g(\mathbf{B}^n(R))}\|f^R_{j,k}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))}=1,$$

$f_0^R\equiv1$，与 λ_1^R 相关的特征空间由将一次齐次调和多项式限制在 $\mathbf{S}^{n-1}(R)$ 上所得的函数张成

$$f^R_{1,k}(x):=\sqrt{n}\frac{x^k}{R},\quad k=1,\dots,n,$$

在笛卡尔坐标图 $x = R\varphi$ 中给出。我们通过对所有 $j \geq 0$ 和 $1 \leq l \leq n_j$ 设定系数，在 $\mathbf{S}^{n-1}(R)$ 的球谐函数上展开 $\boldsymbol{\rho}$

$$c_{j,k} := \frac{1}{\mathrm{Per}_g(\mathbf{B}^n(R))}\langle \boldsymbol{\rho}, f^R_{j,k}\rangle_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))},$$

使得

$$\frac{1}{\mathrm{Per}_g(\mathbf{B}^n(R))}\|\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))} = \sum_{j\geq 0}\sum_{k=1}^{n_j} c^2_{j,k},$$

and

$$\frac{1}{\mathrm{Per}_g(\mathbf{B}^n(R))}\|\nabla^g \boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))} = \sum_{j\geq 1}\sum_{k=1}^{n_j} \lambda^R_j c^2_{j,k}.$$

为了简化叙述，我们将写$\sum_{j,k}$ 来代替双重求和，并用$\fint_{S^{n-1}}$ 表示关于$(\mathbf{S}^{n-1}(R),\ g)$的平均值，即$(\mathrm{Per}_g(\mathbf{B}^n(R)))^{-1}\int_{S^{n-1}}$。为了利用谱隙来控制(3.8)中的负项，我们必须估计零次和一次球谐函数 c_0 和$c_{1,k}$。由方程(3.11)，体积保持蕴含如下估计

$$\begin{aligned}\left|\int_{S^{n-1}} \rho\phi'(R)d\varphi\right| &= \left|\int_{S^{n-1}} \frac{R\rho^2}{2}\phi''(R) + \frac{R^2\rho^3}{6}\phi'''(R(1+\rho\eta))\,d\varphi\right| \\ &\leq (C_2+C_3)\int_{S^{n-1}}\frac{\rho^2}{2}\,\phi'(R)\,d\varphi,\end{aligned} \tag{3.12}$$

从而通过柯西-施瓦茨不等式可将一次球谐函数视为

$$c_0^2 = \left|\fint_{S^{n-1}} \rho\phi'(R)\,d\varphi\right|^2 \leq (C_2+C_3)^2\|\rho\|^2_{C^0}\fint_{S^{n-1}}\frac{\rho^2}{2}\phi'(R)\,d\varphi. \tag{3.13}$$

重心保持和方程(2.12)给出了二次球谐函数的类似结果：首先，由泰勒近似，存在 $\theta : S^{n-1} \to [0,1]$ 使得

$$\begin{aligned}\psi(\bar\rho) - \psi(R) &= \psi'(R)R\rho + \psi''(R(1+\theta\rho))\frac{R^2\rho^2}{2} \\ &= \phi'(R)R^2\rho + \big(\phi'(R(1+\theta\rho)) + R(1+\theta\rho)\phi''(R(1+\theta\rho))\big)\frac{R^2\rho^2}{2}.\end{aligned}$$

然后，对任意 $k \in \{1,\dots,n\}$，我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_{S^{n-1}}\frac{x^k}{R}\rho\phi'(R)\,dx\right| &= \left|\int_{S^{n-1}}\frac{x^k}{R}\frac{\rho^2}{2}\Big(\phi'(R(1+\theta\rho)) + R(1+\theta\rho)\phi''(R(1+\theta\rho))\Big)\,dx\right| \\ &\leq (B_1+2C_2)\int_{S^{n-1}}\frac{\rho^2}{2}\phi'(R)\,dx,\end{aligned}$$

这根据柯西-施瓦茨不等式意味着

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n c^2_{1,k} &= \sum_{k=1}^n\Big(\fint_{S^{n-1}}\sqrt{n}\frac{x^k}{R}\rho\phi'(R)\,d\varphi\Big)^2 \leq n^2(B_1+2C_2)^2\Big(\fint_{S^{n-1}}\frac{\rho^2}{2}\phi'(R)\,d\varphi\Big)^2 \\ &\leq \|\rho\|^2_{C^0}n^2(B_1+2C_2)^2\Big(\fint_{S^{n-1}}\frac{|\rho|}{2}\phi'(R)\,d\varphi\Big)^2 \\ &\leq \|\rho\|^2_{C^0}n^2(B_1+2C_2)^2\frac{1}{2}\fint_{S^{n-1}}\frac{\rho^2}{2}\phi'(R)\,d\varphi.\end{aligned} \tag{3.14}$$

结合（3.12）和（3.14），我们得到】【：】【“】【

$$c_0^2+\sum_{k=1}^{n}c_{1,k}^2\le\Big((C_2+C_3)^2+\frac{n^2}{2}(B_1+2C_2)^2\Big)\|\rho\|_{C^0}\sum_{j,k}c_{j,k}^2. \tag{3.15}$$

设 $K_1:=(C_2+C_3)^2+\frac{n^2}{2}(B_1+2C_2)^2$。特别地，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{Per}_g(\mathbf{B}^n(R))}\|\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))}=\sum_{j,k}c_{j,k}^2&\le\frac{1}{1-K_1\|\rho\|_{C^0}}\sum_{j\ge2,k}c_{j,k}^2\\&\le\frac{1}{\lambda_2^R(1-K_1\|\rho\|_{C^0})}\sum_{j\ge2,k}\lambda_j^Rc_{j,k}^2\\&\le\frac{1}{\lambda_2^R(1-K_1\|\rho\|_{C^0})}\frac{1}{\mathrm{Per}_g(\mathbf{B}^n(R))}\|\nabla^g\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))}.\end{aligned}$$

将这一关键估计代入命题 3.4 的方程 (3.8)

$$\begin{aligned}\mathrm{Per}_g(E)-\mathrm{Per}_g(\mathbf{B}^n(R))\ge&-\Big(K_2\|\rho\|_{C^0}+R^2\lambda_1^R\Big)\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))}\\&+R^2(1-K_3\|\rho\|_{C^1})\frac{1}{2}\|\nabla^g\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))},\end{aligned} \tag{3.16}$$

其中 $K_2=\frac{B_3C_2C_3}{3}+A_3C_2^2$和 $K_3=D+2$，我们最终可以利用前两个调和项之间的谱隙来控制负项。事实上，可以验证

$$\frac{\lambda_1^R}{\lambda_2^R}\le\frac{(d-1)+(n-d)\cosh^2(R)}{2d+2(n-d)\cosh^2(R)}<\frac{1}{2},$$

关于 R 一致成立，因此假设

$$\|\rho\|_{C^0}\le\frac{1}{3K_1},$$

因此

$$\frac{\lambda_1^R}{\lambda_2^R(1-K_1\|\rho\|_{C^1})}<\frac{1}{2}\frac{1}{(1-K_1\|\rho\|_{C^1})}\le\frac{3}{4},$$

我们可以估计

$$\begin{aligned}&\mathrm{Per}_g(E)-\mathrm{Per}_g(\mathbf{B}^n(R))\\&\quad\ge-K_2\|\rho\|_{C^0}\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2}+R^2\Big(1-\frac{\lambda_1^R}{\lambda_2^R(1-K_1\|\rho\|_{C^0})}-K_3\|\rho\|_{C^1}\Big)\frac{1}{2}\|\nabla^g\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2}\\&\quad\ge-K_2\|\rho\|_{C^0}\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2}+R^2\Big(\frac{1}{4}-K_3\|\rho\|_{C^1}\Big)\frac{1}{2}\|\nabla^g\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2}\\&\quad\ge\Big(\frac{R^2\lambda_2^R}{12}-K_2\|\rho\|_{C^0}\Big)\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2}+R^2\Big(\frac{1}{8}-K_3\|\rho\|_{C^1}\Big)\frac{1}{2}\|\nabla^g\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

最后，如果

$$\|\rho\|_{C^1}<\varepsilon:=\min\Big\{\frac{1}{2},\frac{1}{3K_1},\frac{R^2\lambda_2^R}{24K_2},\frac{1}{16K_3}\Big\},$$

我们得到所需的不等式

$$\mathrm{Per}_g(E)-\mathrm{Per}_g(\mathbf{B}^n(R))\ge\frac{R^2\lambda_2^R}{48}\|\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))}+\frac{R^2}{32}\|\nabla^g\boldsymbol{\rho}\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1}(R))}.$$

我们还需证明， $\varepsilon>0$ 可以在 R中一致地选取，即

$$R\mapsto R^2\lambda_2^R,$$

在 $[0, R_0]$中一致地远离零，因为其他所有常数都只依赖于（n， d， R_0）。这可由拉普拉斯算子在 $\mathbf{S}^{n-1}(R)$ 上的特征值的精确显式形式推出，该形式可表示为

$$\frac{a\cosh^2(R)+b}{\sinh^2(R)\cosh^2(R)},$$

对于某些系数 $a, b \in \mathbb{N}$，参见 [5, 定理 A]。特别地， $R \mapsto R^2\lambda_2^R$在 $[0, R_0]$中一致地远离零，正如所需。□

4. 小体积范围内球的极小性

本节旨在证明定理 1.3。证明分为三步：首先，我们证明小的等周集是一致几乎极小的。回顾一下，若集合 $E \subset M$ 在误差与扰动大小一致成比例的意义下达到最优，则称其为几乎极小。在我们的情形中，给定体积为 v的等周区域 E，这意味着存在一个全局常数 $C > 0$，使得

$$\mathrm{Per}_g(E, \mathbf{B}^n(x,s)) \le \mathrm{Per}_g(F, \mathbf{B}^n(x,s)) + \frac{C}{v^{1/n}}\,\mathrm{Vol}_g(E \triangle F),$$

只要 $E\triangle F \subset \mathbf{B}^n(x,s)$ 且 $s \le s_1 = s_1(v)$。随后，我们证明，结合欧氏空间中的强稳定性结果，这一条件意味着相对于诱导的欧氏度量 g_e，当 o 等于 E的重心时，该集合与测地球之间的 L^1 和 L^∞-接近性。由于与光滑曲面充分接近的几乎极小集是其 C^1、$^\alpha$-法向量扰动，因此我们最后应用定理 1.2 完成证明。

4.1. 近似极小性。 对于任意子集 $G \subset M$，记关于以 $o \in M$ 为中心的法坐标 (r, φ) 的膨胀为 $\tau > 0$，其中

$$\tau G := \{(\tau r, \varphi) \in M : (r, \varphi) \in G\}.$$

回顾一下，我们用 $\mathrm{P}(\cdot)$ 和 $\mathrm{V}(\cdot)$ 表示关于欧氏度量 g_e 的周长泛函和体积泛函。我们证明以下估计。

引理 4.1。 设 $G \subset M$ 是一个包含于$\mathbf{B}^n(o,R)$ 中的有限周长集，其中某个 $R > 0$。那么，存在 $C = C(n,d,R) > 0$，使得对所有 $t \in [0,1]$，膨胀$(1+t)$ 后的体积和周长满足以下估计

$$(1+t)^n\,\mathrm{Vol}_g(G) \le \mathrm{Vol}_g((1+t)G) \le (1+Ct)\,\mathrm{Vol}_g(G), \tag{4.1}$$

and

$$\mathrm{Per}_g((1+t)G) \le (1+Ct)\,\mathrm{Per}_g(G). \tag{4.2}$$

此外，有

$$\mathrm{V}(G) \le \mathrm{Vol}_g(G) \le (1+\omega_g'(R)R)\,\mathrm{V}(G), \tag{4.3}$$

and

$$\mathrm{P}(G) \le \mathrm{Per}_g(G) \le (1+\omega_g'(R)R)\,\mathrm{P}(G). \tag{4.4}$$

证明。 根据公式 2.3，我们可以表示为

$$\mathrm{Vol}_g((1+t)G) = \int_{(1+t)G} \omega_g(r)\,d\mathscr{H}^n = (1+t)^n \int_G \omega_g((1+t)r)\,d\mathscr{H}^n.$$

公式 (4.1) 中的第一个不等式直接由 ω_g 单调这一事实得出。另一方面，仿照引理 3.1 的论证，利用 ω_g 的凸性，我们可以估计

$$\omega_g((1+t)r) \le \Big(1 + r\frac{\omega_g'(r(1+t))}{\omega_g(r)}t\Big)\omega_g(r) \le \Big(1 + R\omega_g'(2R)t\Big)\omega_g(r),$$

证明

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_g((1+t)G) &\le (1+t)^n(1+R\omega_g'(2R)t)\,\mathrm{Vol}_g(G)\\ &\le (1+(2^n-1)t)(1+R\omega_g'(2R)t)\,\mathrm{Vol}_g(G) \le (1+C_1t)\,\mathrm{Vol}_g(G),\end{aligned}$$

对于 $C = (2^n+2)(R\omega_g'(2R)+1)$，正如所需。利用周长的积分表示式 (2.13)，我们有 $\mathrm{Per}_g((1+t)G)$ 等于

$$(1+t)^{n-1}\int_{\partial^* G}\omega_g(r(1+t))\Big(|\nu^n|^2 + \frac{1}{\omega_1^2(r(1+t))}|\nu^h|^2 + \frac{1}{\omega_1^1(r(1+t))}|\nu^v|^2\Big)^{1/2}\,d\mathscr{H}^{n-1},$$

其中 $\omega_1^1(r)^{-1} = \frac{r^2}{\text{双曲正弦}^2(r)}$ 和 $\omega_1^2(r)^{-1} = \frac{r^2}{\text{双曲正弦}^2(r)\,\text{双曲余弦}^2(r)}$ 均为递减函数。由此可得

$$\mathrm{Per}_g((1+t)G) \le (1+t)^{n-1}\big(1+\omega_g'(2R)t\big)\,\mathrm{Per}_g(G) \le (1+Ct)\,\mathrm{Per}_g(G),$$

正如所需。式 (4.3) 和 (4.4) 可类似地得到。 □

在证明小体积等周集的近似极小性之前，我们需要陈述两个重要结果。

命题 4.2. 存在 $\bar v = \bar v(n,d) > 0$ 和 $\mu = \mu(n,d) > 0$，使得

$$\mathrm{diam}(E) \le \mu\,\mathrm{Vol}_g(E)^{1/n},$$

只要 E 是体积为 $\mathrm{Vol}_g(E) \le \bar v$ 的等周集。

证明. 对于具有一致的 Ricci曲率下界和正注入半径的流形，这一结果完全成立。关于一般情形下 RCD空间的结果，参见 [22, 引理 4.9]以及近期论文中的命题 [2, 4.23]。□

引理 4.3. 固定 $v_0 > 0$。那么，存在 $C_0 = C_0(v_0, n) > 0$，使得对于任意满足 $\mathrm{Vol}_g(E) \le v_0$ 的有限周长集 E，都有

$$C_0\,\mathrm{Per}_g(E) \ge \mathrm{Vol}_g(E)^{(n-1)/n}.$$

证明. 对于具有有界 Ricci曲率下界的流形，这一结果完全成立。关于次黎曼流形一般情形下的另一种证明，参见 [16, 引理 3.5], 和 [14, 引理 3.10] 。□

从现在起，我们固定取命题 4.2 和引理 4.3 陈述中的 $v_0 = \bar v > 0$、$\mu > 0$ 和 $C_0 > 0$ 。现在我们可以证明，对于所有 $0 < v \le \bar v$，等周集都是近似极小集。

命题4.4 (在 M 中的近似极小性)。 存在 $C_1 = C_1(\bar v, n, d) > 0$，使得若 E 是等周集且 体积$_g(E) = v \le \bar v$，则

$$\mathrm{Per}_g(E, \mathbf{B}^n(x,s)) \le \mathrm{Per}_g(F, \mathbf{B}^n(x,s)) + \frac{C_1}{v^{1/n}}\,\mathrm{Vol}_g(E\triangle F), \tag{4.5}$$

每当

$$0 < s \le s_1 = \min\Big\{1, \phi^{-1}\Big(\frac{v}{2n\omega_n}\Big)\Big\},$$

且 $F \subset M$ 满足 $F \triangle E \subset \mathbf{B}^n(x,s)$。特别地，

$$\mathrm{Per}_g(E, \mathbf{B}^n(x,s)) \le \mathrm{Per}_g(F, \mathbf{B}^n(x,s)) + \frac{C_1}{v^{1/n}} \mathrm{Per}_g(E \triangle F)\phi(s)^{1/n}. \tag{4.6}$$

证明。由于等周剖面 $I_M(v) := \min\{\mathrm{Per}_g(G) : \mathrm{Vol}_g(G) = v\}$ 是递增的（参见 Hsiang 的文章 [18, 引理 3]），不失一般性，我们可以假设

$$0 \le \mathrm{Vol}_g(E) - \mathrm{Vol}_g(F) \le \mathrm{Vol}_g(\mathbf{B}^n(s)) = n\boldsymbol{\omega}_n \phi(s).$$

特别地，令 $s \le \phi^{-1}(v/(2n\boldsymbol{\omega}_n))$，可得 $\mathrm{Vol}_g(F) \le v/2$。另外，注意到我们可以假设 $\mathrm{Per}_g(F, \mathrm{B}^n(x,s)) \le \mathrm{Per}_g(\mathrm{B}^n(x,s))$，因为否则，由于下式成立，等式 (4.5) 即成立

$$\begin{aligned}\mathrm{Per}_g(E, \mathbf{B}^n(x,s)) &\le \mathrm{Per}_g(E \cup \mathbf{B}^n(x,s)) - \mathrm{Per}_g(E, M \setminus \mathbf{B}^n(x,s)) \\ &\le \mathrm{Per}_g(\mathbf{B}^n(s)) \le \mathrm{Per}_g(F, \mathbf{B}^n(x,s)).\end{aligned}$$

任取 o 中的点 E。那么，根据命题 4.2，$E \subset \mathrm{B}^n(o, \mu v^{1/n})$。因此，对于$s \le 1$，不失一般性，我们可以假设 $F \subset \mathrm{B}^n(o, \mu \bar{v}^{1/n} + 2)$，因为否则 $\mathrm{Per}_g(E, \mathrm{B}^n(x,s)) = 0 \le \mathrm{Per}_g(F, \mathrm{B}^n(x,s))$。根据引理 4.1 和等式 (4.1)，存在 $t^* \in (0,1]$ 使得

$$\mathrm{Vol}_g((1+t^*)F) = v,$$

其中，膨胀是以基于 $o \in M$ 的法坐标为参照进行的。另一方面，E 的极小性和方程 (4.2) 表明

$$\mathrm{Per}_g(E) \le \mathrm{Per}_g((1+t^*)F) \le (1+Ct^*)\,\mathrm{Per}_g(F),$$

因此，对于几乎处处的 $0 < s \le s_1 := \min\{1, \phi^{-1}(v/(2n\boldsymbol{\omega}_n))\}$，我们有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Per}_g(E, \mathbf{B}^n(x,s)) \\ &\quad\le (1+Ct^*)\,\mathrm{Per}_g(F, \mathbf{B}^n(x,s)) + Ct^*\,\mathrm{Per}_g(E, M \setminus \mathbf{B}^n(x,s)) \\ &\quad\le \mathrm{Per}_g(F, \mathbf{B}^n(x,s)) + Ct^*\big(\mathrm{Per}_g(F, \mathbf{B}^n(x,s)) + I_M(v)\big) \\ &\quad\le \mathrm{Per}_g(F, \mathbf{B}^n(x,s)) + Ct^*\big(n\boldsymbol{\omega}_n\phi'(s) + I_M(v)\big).\end{aligned}$$

我们注意到，引理 4.3 表明 $C_0 I_M(v) \le v^{(n-1)/n}$，并且由 ϕ' 的单调性可得，$\phi'(s) \le \phi'(\phi^{-1}(2v/(n\boldsymbol{\omega}_n))) \le \bar{C} v^{(n-1)/n}$，其中某个常数仅依赖于 $(n, d, \bar{v})$（要看出这一点，请参见引理 3.1 证明中的泰勒展开）。因此

$$\mathrm{Per}_g(E, \mathbf{B}^n(x,s)) \le \mathrm{Per}_g(F, \mathbf{B}^n(x,s)) + Cv^{(n-1)/n}t^*.$$

剩下的任务是求 t^* 的上界。由于

$$\mathrm{Vol}_g(E) - \mathrm{Vol}_g(F) \le \mathrm{Vol}_g(E \triangle F),$$

并且由方程 (4.2)

$$\mathrm{Vol}_g(E) - \mathrm{Vol}_g(F) = \mathrm{Vol}_g((1+t^*)F) - \mathrm{Vol}_g(F) \ge ((1+t^*)^n - 1)\,\mathrm{Vol}_g(F) \ge \frac{nv}{2}t^*,$$

我们得到

$$t^* \le \frac{2\,\mathrm{Vol}_g(E \triangle F)}{nv},$$

p继续推导等式 (4.5)。由引理 4.3 可知，等式 (4.6) 成立，因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_g(E \triangle F) &= \mathrm{Vol}_g(E \triangle F)^{(n-1)/n}\,\mathrm{Vol}_g(E \triangle F)^{1/n} \le C_0\,\mathrm{Per}_g(E \triangle F)\,\mathrm{Vol}_g(\mathbf{B}^n(x,s)) \\ &= C_0\,\mathrm{Per}_g(E \triangle F) n\boldsymbol{\omega}_n \phi(s).\end{aligned}$$

□

4.2. L^1 **和** L^∞**与测地球的接近性**。我们首先证明，当体积足够小时，等周集在欧几里得度量 g_e 下与测地球 L^1接近。然后，命题4.4中的近似极小性通过重新缩放将这一结论改进为 L^∞ 。从现在起，我们始终假设

– $E \subset M$ 是一个体积较小的等周集 $\mathrm{Vol}_g(E) = v \le \bar{v}$，其中 $\bar{v} > 0$如命题 4.2 所述。– 存在 $o \in M$ ，使得根据命题 4.2， $E \subset \mathrm{B}^n(o, \mu v^{1/n})$。如果 $E \subset \mathrm{B}^n(p, \mu v^{1/n})$，则称点 $p \in M$ 为可容许的 。– 欧几里得度量 g_e （及其相关几何概念 $B^n(x,s)$、$\mathrm{V}(\cdot)$、$\mathrm{P}(\cdot)$ 等）是由以 $o \in M$为基点的法坐标所确定的度量。

命题 4.5。 设 $E \subset M$ 是一个体积为$\mathrm{Vol}_g(E) = v \le \bar{v}$的等周集。考虑 g_e 为与以某点 $o \in M$为基点的法坐标相关联的欧几里得度量，使得 $E \subset \mathbf{B}^n(o, \mu v^{1/n})$。那么，存在常数 $C = C(n, d, \bar{v}) > 0$以及一点 $\tilde{x} = \tilde{x}(o) \in M$ ，使得

$$Cv^{1/n} \ge \Big(\frac{\mathrm{V}(E \triangle B^n(\tilde{x}, \tilde{t}))}{\mathrm{V}(E)}\Big)^2, \tag{4.7}$$

其中 $\tilde{t} > 0$ 满足 $\mathrm{V}(E) = \mathrm{V}(B^n(\tilde{t}))$。特别地

$$V(E \triangle B^n(\tilde{x}, \tilde{t})) \le Cv^{1+1/2n}. \tag{4.8}$$

证明。 我们先证明

$$\phi'(s) \le \cosh(s)^{d-1/n} (n\phi(s))^{(n-1)/n}.$$

事实上

$$\begin{aligned}\phi(s) = \int_0^s \phi'(\tau)\, d\tau &= \int_0^s \sinh^{n-1}(\tau)\cosh^{d-1}(\tau)\, d\tau \ge \frac{1}{\cosh(s)} \int_0^s \sinh^{n-1}(\tau)\cosh(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{1}{n\cosh(s)} \sinh^n(s),\end{aligned}$$

这意味着

$$\frac{\phi'(s)}{(n\phi(s))^{(n-1)/n}} \le \cosh(s)^{d-1+(n-1)/n} = \cosh(s)^{d-1/n}.$$

设 $\tilde{s} > 0$ 满足

$$\mathrm{Vol}_g(E) = \mathrm{Vol}_g(\mathbf{B}^n(\tilde{s})).$$

于是，由引理 4.1、公式 (4.3) 和 (4.4)，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E) &\le \mathrm{Per}_g(E) \le \mathrm{Per}_g(\mathbf{B}^n(s)) = n\boldsymbol{\omega}_n \phi'(\tilde{s}) \\ &\le n\boldsymbol{\omega}_n^{1/n} \cosh(\tilde{s})^{d-1/n} (n\boldsymbol{\omega}_n \phi(\tilde{s}))^{(n-1)/n} \\ &= n\boldsymbol{\omega}_n^{1/n} \cosh(\tilde{s})^{d-1/n} \,\mathrm{Vol}_g(E)^{(n-1)/n} \\ &\le n\boldsymbol{\omega}_n^{1/n} \cosh(\tilde{s})^{d-1/n} (1 + \omega'(\mu\bar{v}^{1/n})\mu\bar{v}^{1/n})\, \mathrm{V}(E)^{(n-1)/n} \\ &\le n\boldsymbol{\omega}_n^{1/n} (1 + Cv^{1/n})\, \mathrm{V}(E)^{(n-1)/n},\end{aligned}$$

由于 $\tilde{s} \le \mu v^{1/n}$。由 $\mathbb{R}^n$ 中的定量强等周不等式可知，参见 [10]，等式 (4.7) 立即成立。等式 (4.8) 是以下事实的推论：$\mathrm{V}(E) \le \mathrm{Vol}_g(E) \le v$。□

现在，我们通过重新缩放来论证。令

$$\lambda^n := \mathrm{V}(E) = \mathrm{V}(B^n(\tilde{t})) = \boldsymbol{\omega}_n \tilde{t}^n,$$

并定义重新缩放后的体积算子和周长算子

$$\mathrm{Vol}_g^*(G^*) := \lambda^{-n}\,\mathrm{Vol}_g(\lambda G^*),$$
$$\mathrm{Per}_g^*(G^*) := \lambda^{-(n-1)}\,\mathrm{Per}_g(\lambda G^*).$$

令 $E^* := \lambda^{-1}E$。于是立即可知，集合 E^* 相对于 g_e经过了重新归一化，即

$$\mathrm{V}(E^*) = 1.$$

此外， L^1-邻近性一致地由下式给出

$$\mathrm{Vol}_g^*(E^* \triangle B^n(\lambda^{-1}\tilde{x}, \boldsymbol{\omega}_n^{-1/n})) \le Cv^{1/2n}, \tag{4.9}$$

根据命题 4.5 和引理 4.1、公式 (4.3)，最后，存在仅依赖于 $(n, d, \bar{v}) > 0$ 的 $C^* > 0$和 $s^* > 0$，使得

$$\mathrm{Per}_g^*(E^*, B^n(x,s)) \le \mathrm{Per}_g^*(F^*, B^n(x,s)) + C^*\,\mathrm{Vol}_g^*(E^* \triangle F^*), \tag{4.10}$$

只要 $E^* \triangle F^* \subset B^n(x,s)$ 且 $0 < s \le s^*$。这是命题4.4以及截面曲率界的推论，它们保证存在 $\Lambda = \Lambda(n,d,\bar{v}) > 0$，使得在 $\mathrm{dist}_g(o,x) \le 2\mu\bar{v}^{1/n} + 2$, $0 < s < 1$的条件下， $B^n(x,s) \subset \mathrm{B}^n(x, \Lambda s)$。

命题 4.6。 设 $E \subset M$ 是体积为 $\mathrm{Vol}_g(E) = v < \bar{v}$的等周集，并且$\lambda > 0$ 满足 $E^* := \lambda^{-1}E$ 的欧几里得体积等于 *1*。存在 $\tilde{x}(o) \in M$和 $c_1 = c_1(n, \bar{v}) > 0$ 使得

$$B^n(\lambda^{-1}\tilde{x}, (1 - c_1 v^{1/2n^2})\boldsymbol{\omega}_n^{-1/n}) \subset E^* \subset B^n(\lambda^{-1}\tilde{x}, (1 + c_1 v^{1/2n^2})\boldsymbol{\omega}_n^{-1/n}).$$

证明。 设 $x \in \partial E^*$， 且 $h > 0$是 x到 $\partial B(\lambda^{-1}\tilde{x}, \boldsymbol{\omega}_n^{-1/n})$的欧几里得距离。对于$0 < r < \min\{h/2, \tilde{s}\}$，定义函数

$$W(r) := \mathrm{Vol}_g^*(E^* \cap B^n(x,r)).$$

由于 $(E^* \cap B^n(x,r)) \subset (E^* \triangle B^n(\lambda^{-1}\tilde{x}, \boldsymbol{\omega}_n^{-1/n}))$，根据等式 (4.9)，我们有

$$W(r) \le Cv^{1/2n}.$$

On 另一方面，令 $F^* := E^* \setminus B^n(x,r)$，一致的近似极小性给出 es

$$\mathrm{Per}_g^*(E^*) \le \mathrm{Per}_g^*(F^*) + C^* W(r).$$

由此结合引理 4.3 可得

$$\begin{aligned} C_0^{-1} W(r)^{(n-1)/n} &\le \mathrm{Per}_g^*(E^* \cap B^n(x,r)) \le \mathrm{Per}_g^*(E^*, B^n(x,r)) + \mathrm{Per}_g^*(E^* \cap \partial B^n(x,r)) \\ &\le C^* W(r) + 2\,\mathrm{Per}_g^*(E^* \cap \partial B^n(x,r)) \\ &= C^* W(r) + 2W'(r). \end{aligned}$$

¯这表明存在 $C > 0$ 使得

$$\bar{C} r^n \le W(r) \le Cv^{1/2n},$$

从而

$$0 < r < \min\{s^*, Cv^{1/2n^2}/\bar{C}\},$$

这表明，只要取足够小的 $\bar{v} > 0$，就有 $h \le 2Cv^{1/2n^2}/\bar{C}$。这证明存在 $c_1 > 0$，使得 ∂E^* 包含于环域

$$A := B^n(\lambda^{-1}\tilde{x}, (1 + c_1 v^{1/2n^2})\boldsymbol{\omega}_n^{-1/n}) \setminus B^n(\lambda^{-1}\tilde{x}, (1 - c_1 v^{1/2n^2})\boldsymbol{\omega}_n^{-1/n}).$$

L^1-邻近性 (4.9) 意味着 E^*包含球 $B^n(\lambda^{-1}\tilde{x}, (1-c_1v^{1/2n^2})\boldsymbol{\omega}_n^{-1/n})$，否则

$$\begin{aligned} Cv^{1/2n} \geq \mathrm{Vol}_g^*(E^* \triangle B^n(\lambda^{-1}\tilde{x}, \boldsymbol{\omega}_n^{-1/n})) &\geq \mathrm{Vol}_g^*(B^n(\lambda^{-1}\tilde{x}, (1-c_1v^{1/2n^2})\boldsymbol{\omega}_n^{-1/n})) \\ &\geq \mathrm{Vol}_g^*(\mathbf{B}^n(\lambda^{-1}\tilde{x}, (1-c_1v^{1/2n^2})\boldsymbol{\omega}_n^{-1/n})) \\ &= \lambda^{-n} n\boldsymbol{\omega}_n \phi'((1-c_1v^{1/2n^2})\boldsymbol{\omega}_n^{-1/n})), \end{aligned}$$

当 $v > 0$ 足够小时，这会导致矛盾，因为 $\lambda^n \sim v$。 □

为了完成对重标后的等周集合 E^*的 L^∞-邻近性证明，我们需要证明球 $\lambda^{-1}\tilde{x}$ 的中心在 v 趋于零时也趋于原点。如果令提升点 $o \in M$ 为 E的重心，即 $o = \mathrm{Bar}_g(E)$，就可以做到这一点。

引理 4.7。设 $E \subset M$ 如命题 *4.5* 中所述。则重心 $\mathrm{Bar}_g(E)$ 是可容许的，即

$$E \subset \mathbf{B}^n(\mathrm{Bar}_g(E), \mu v^{1/n}).$$

证明。根据命题 4.2，存在 $o \in M$ 使得 $E \subset \mathbf{B}^n(o, v^{1/n}\mu/2)$。若$p := \mathrm{Bar}_g(E) \in \mathbf{B}^n(o, v^{1/n}\mu/2)$，则证毕。若非如此，则

$$g(\exp_p^{-1}(x), \exp_p^{-1}(o)) > 0,$$

对所有 $x \in E$，这与方程 (2.5) 矛盾。 □

这允许我们在命题 4.5 和命题 4.6 中选择 $o = \mathrm{Bar}_g(E)$。我们可以证明，当 v 趋于零时，欧几里得球 $\lambda^{-1}\tilde{x}$ 的相关中心趋于原点。

命题 4.8. 设 $E \subset M$ 如命题 *4.5* 中所述。选择指向 $o = \mathrm{Bar}_g(E) \in M$ 的法坐标，我们有存在 $C = C(n, d, \bar{v}) > 0$ 使得

$$|\lambda^{-1}\tilde{x}| \leq Cv^{1/2n^2}.$$

特别地，存在 $c_2 = c_2(n, d, \bar{v}) > 0$ 使得

$$B^n(0, (1-c_2v^{1/2n^2})\boldsymbol{\omega}_n^{-1/n}) \subset E^* \subset B^n(0, (1+c_2v^{1/2n^2})\boldsymbol{\omega}_n^{-1/n}). \tag{4.11}$$

证明. 回顾方程 (2.6)，如果 E 的重心相对于法坐标 $x = r\varphi$ 位于原点，$(r, \varphi) \in (0, +\infty) \times S^{n-1}$，则

$$0 = \int_E x\omega_g(r)\, d\mathscr{H}^n.$$

重新缩放后，我们有

$$0 = \int_{E^*} x\omega_g(\lambda r)\, d\mathscr{H}^n.$$

因此

$$\begin{aligned} |\lambda^{-1}\tilde{x}| &= \left| \int_{E^*} (\lambda^{-1}\tilde{x} - x) + x(\omega_g(\lambda r) - 1)\, d\mathscr{H}^n \right| \\ &\leq \left| \int_{E^* - \lambda^{-1}\tilde{x}} x\, d\mathscr{H}^n \right| + \int_{E^*} r(\omega_g(\lambda r) - 1)\, d\mathscr{H}^n. \end{aligned}$$

感谢命题 4.6，我们可以如下估计第一个积分：

$$\begin{aligned}\left|\int_{E^*-\lambda^{-1}\tilde{x}} x\,d\mathscr{H}^n\right| &\le \left|\int_{S^{n-1}}\int_{\boldsymbol{\omega}_n^{-1/n}(1-c_1v^{1/2n^2})}^{\boldsymbol{\omega}_n^{-1/n}(1+c_1v^{1/2n^2})} \chi_E(r\varphi)r^n\varphi\,dr\,d\varphi\right| \\ &\le \mathrm{P}(\mathbf{B}^n)\int_{\boldsymbol{\omega}_n^{-1/n}(1-c_1v^{1/2n^2})}^{\boldsymbol{\omega}_n^{-1/n}(1+c_1v^{1/2n^2})} r^n\,dr \\ &= \frac{\mathrm{P}(\mathbf{B}^n)\boldsymbol{\omega}_n^{-(n+1)/n}}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(1-(-1)^k)c_1^kv^{k/2n^2} \\ &\le \frac{C}{2}v^{1/2n^2},\end{aligned}$$

对于某个常数 $C>0$。引理 4.7 表明，对某个普适的 $K>0$，有 $E^*\subset B^n(0,K)$。因此，我们将第二个积分估计为

$$\begin{aligned}\int_{E^*} r(\omega_g(\lambda r)-1)\,d\mathscr{H}^n &= \int_{E^*} r\int_0^{\lambda r}\omega_g'(\tau)\,d\tau\,d\mathscr{H}^n \\ &\le K^2\lambda\omega_g'(\lambda K) \\ &\le \frac{C}{2}v^{1/n},\end{aligned}$$

这表明 $|\lambda^{-1}\tilde{x}|\le Cv^{1/2n^2}$。方程 (4.11) 可由此以及命题 4.6 推得。□

在陈述关键的正则性结果后，定理 1.3 的证明将由定理 1.2 和命题 4.8 推出。

定理 4.9。设 $(E_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一列有限周长集，且 $(\mathcal{F}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ 是一列具有如下形式的泛函

$$\mathcal{F}_\varepsilon(G):=\int_{\partial^*G} f_\varepsilon(x,\nu)\,d\mathscr{H}^{n-1}(x),$$

其中，G 是一个一般的有限周长集，ν 是其测度论外向单位法向量，而 $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ 是一族 C^2-函数，它们一致地 λ-椭圆，且在固定球 $B(0,2R)$ 内的赫*essian* 矩阵一致有界，也就是说

$$\sup\Big\{|D^2_{\xi\xi}f_\varepsilon(x,\xi)| : (x,\xi)\in B(0,2R)\times S^{n-1}\Big\}\le\Lambda,$$

对于全局常数 $\Lambda>0$。如果对于所有 $\varepsilon>0$

$$B^n(0,(1-\varepsilon)r)\subset E_\varepsilon\subset B^n(0,(1+\varepsilon)r),$$

且 E_ε 关于 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 是一致几乎极小的，则存在 $\varepsilon_1>0$ 使得对于所有 $0<\varepsilon\le\varepsilon_1$

$$\partial E_\varepsilon=\Big\{r(1+\rho_\varepsilon(\varphi)) : \varphi\in S^{n-1}\Big\},$$

其中 $\rho_\varepsilon\in C^1(S^{n-1})$ 且 $\|\rho_\varepsilon\|_{C^1}\to 0$ 当 $\varepsilon\to 0$。

证明。参见 [9, 定理 2.2]。 □

我们现在准备证明定理 1.3。

定理 *1.3* 的证明。考虑一列递减的体积 $\bar{v}\ge v_k\to 0$，并设 E_k为 M 中体积为 v_k 的一个等周区域。设 E_k^* 为 E_k 在 Bar$_g$(E_k) 处的重新缩放，使得 V(E_k^*) $=1$。然后，将 E_k^* 视为具有有限

周长的集合序列在 $\mathbb{R}^n$ 中，我们可以应用命题 4.8 和定理 4.9 来推断存在$\rho_k^* \in C^1(S^{n-1})$ 使得

$$\partial E_k^* = \{\boldsymbol{\omega}_n^{-1/n}(1+\rho_k^*(\varphi)) : \varphi \in S^{n-1}\},$$

并且 $\|\rho_k^*\|_{C^1} \to 0$ 作为 $k \to \infty$。因此，令 $R_k > 0$ 满足 $\mathrm{B}^n(R_k) = v_k$，且$\lambda_k^n = \mathrm{V}(E_k)$，我们有

$$\partial E_k = \{R_k(1+\rho_k(\varphi)) : \varphi \in S^{n-1}\},$$

其中 $\rho_k := \frac{\lambda_k \boldsymbol{\omega}_n^{-1/n}}{R_k} - 1 + \frac{\lambda_k \boldsymbol{\omega}_n^{-1/n}}{R_k}\rho_k^* \to 0$ 属于 C^1，作为 $k \to +\infty$。应用定理 1.2，即得证。□

致谢。作者谨向 A. Figalli 教授和 U. Lang 教授致以谢意，感谢他们的指导与一贯支持。作者获得了欧洲研究理事会资助，资助协议编号为 721675，项目名称为“偏微分方程的正则性与稳定性（RSPDE）”。

参考文献

[1] Luigi Ambrosio. 有界变差函数与自由间断问题。英文版。牛津科学出版物。牛津：Clarendon Press，2000。[2] Gioacchino Antonelli 等。具有下界 *Ricci* 曲率的非塌缩空间上的锐等周比较。2022年。网址：https://arxiv.org/abs/2201.04916。[3] J. Barbosa、Manfredo Carmo 和 Jost Eschenburg。“黎曼流形中常平均曲率超曲面的稳定性”。载于：*Mathematische Zeitschrift*197（1988年3月），第123–138页。[4] Lionel Bérard Bergery 和 Jean-Pierre Bourguignon。“具有全测地纤维的黎曼浸没与拉普拉斯算子”。载于：*Illinois Journal of Mathematics* 26.2（1982年），第181–200页。[5] Renato G. Bettiol、Emilio A. Lauret 和 Paolo Piccione。秩一对称空间中距离球面的完整拉普拉斯谱。2022年。arXiv：2012。02349 [math.DG]

[6] Verena Bögelein、Frank Duzaar 和 Christoph Scheven。“双曲 n 空间中的尖锐定量等周不等式”。载于：变分学与偏微分方程54（2015 年 12 月）。[7] Marco Cicalese 和 Gian Paolo Leonardi。“尖锐定量等周不等式的选择原理”。载于：理性力学与分析档案206.2（2012），第 617–643 页。[8] Patrick Eberlein。非正曲率流形的几何。英文版。芝加哥数学讲座系列。芝加哥：芝加哥大学出版社，1996 年。[9] Alessio Figalli。“在对被积函数仅作最小假设的条件下，余维 1 极小化流的正则性”。载于：微分几何杂志106.3（2017），第 371–391 页。[10] Alessio Figalli、F. Maggi 和 Aldo Pratelli。“定量等周不等式的质量输运方法”。载于：数学发明182（2010 年 10 月），第 167–211 页。[11] Bent Fuglede。“Rn 中凸域或近似球形域等周问题的稳定性”。载于：美国数学会汇刊314.2（1989），第 619–638 页。[12] Nicola Fusco 和 Vesa Julin。“定量等周不等式的强形式”。载于：变分学50（2011 年 11 月）。[13] Nicola Fusco、Francesco Maggi 和 Aldo Pratelli。“尖锐定量等周不等式”。载于：数学年刊（2008），第 941–980 页。

[14] Matteo Galli 和 Manuel Ritoré。“接触次黎曼流形中等周区域的存在性”。载于：数学分析与应用杂志397.2（2013），第 697–714 页。[15] Mikhael Gromov 等。黎曼与非黎曼空间的度量结构。马萨诸塞州波士顿：Birkhäuser Boston，2014 年。[16] Emmanuel Hebey。流形上的非线性分析：*Sobolev* 空间与不等式。英文版。Courant 数学讲义；第 5 卷。纽约州纽约；Courant 数学科学研究所，2000 - 1999。ISBN：1-4704-1759-6。[17] Sigurdur Helgason。微分几何、李群与对称空间。英文版。数学研究生系列，第 34 卷。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，2001 - 1978。[18] Wu-Yi Hsiang。“关于非紧对称空间中的肥皂泡与等周区域，I”。载于：东北数学杂志44.2（1992），第 151–175 页。[19] Francesco Maggi。有限周长集合与几何变分问题：几何测度论导论。剑桥高等数学研究。剑桥大学出版社，2012 年。[20] Frank Morgan。“使面积加奇异曲线长度最小化的簇”。载于：数学年刊299.1（1994），第 697–714 页。[21] Stefano Nardulli。“光滑黎曼流形的小体积等周剖面”。载于：全球分析与几何年刊36（2009 年 9 月），第 111–131 页。[22] Stefano Nardulli 和 Luis Eduardo Osorio Acevedo。“有界几何完备非紧黎曼流形中涉及标量曲率的小体积尖锐等周不等式”。载于：国际数学研究通知2020.15（2018 年 6 月），第 4667–4720 页。ISSN：1687-0247。[23] H. J. Rivertz 和 P. Tomter。“测地球面的稳定性”。载于：子流形的几何与拓扑（1994），第 320–324 页。[24] H. A. Schwarz。“证明球体的表面积小于任何其他等体积实体”。载于：哥廷根皇家科学学会与乔治-奥古斯特大学纪事1884（1884），第 1–13 页。[25] J. Steiner。“等周主要定理的简明证明：”载于：纯粹与应用数学杂志（*Crelle* 数学杂志）1838.18（1838），第 281–296 页。[26] P. Tomter。“海森堡群中的常平均曲率曲面”。载于：纯数学专题讨论会论文集（1993），第 485–495 页。