arXiv:2304.02414v1 [math.DG] 5 Apr 2023

闵可夫斯基空间锥中的类空平均曲率流毛细管问题

WILHELM KLINGENBERG、BEN LAMBERT 和 JULIAN SCHEUER

Abstract. 考虑三维闵可夫斯基空间中的一个凸锥，它要么包含光锥，要么包含于光锥之中。本文研究该锥内一个真类空、严格平均凸的圆盘的平均曲率流，该圆盘相对于锥的射线是图形状的。要求其边界与锥的边界具有恒定的交角。我们证明，相应的图形抛物型边值问题存在一个全时间解，并且经缩放后趋于一个自相似膨胀解。

1. Introduction

我们研究闵可夫斯基空间中类空曲面的平均曲率流毛细管问题 M_t ，其中曲面在一个非退化（即黎曼或洛伦兹）曲面上具有自由边界 Σ 。众所周知，具有梯度估计的类空平均曲率流性质良好，例如参见[2, 3, 4, 5, 20]。因此，一类尤为引人关注的毛细管边界条件是 Σ 边界为黎曼子流形，因为这立即意味着边界处具有一致的类空性（仅取决于障碍物），进而在紧致情形下给出全局梯度估计。然而，正如我们将看到的，这必然会引发其他问题，例如边界可能发生塌缩。本文研究如下情形的毛细管问题： Σ 是任意一个具有非退化诱导度量的凸锥的边界。这个问题带来了若干技术难点：通常，曲面为类空意味着它是图形状的——但当 Σ 为黎曼锥时，这并不成立，而我们必须证明这一性质在流动过程中得以保持。第二个难点是，一阶边界导数中会出现不需要的曲率项，这些项源于非垂直的边界条件。我们通过运用二维技巧和对平均曲率的良好估计来处理这一问题。

对于任意这样的锥 Σ，带有毛细边界条件的平均曲率流由以下偏微分方程给出

$$\begin{cases} (\partial_t x)^{\perp} = \vec{H} = H\nu & \text{on } \Omega \times [0,T) \\ x(\cdot,0) = x_0(\cdot) & \text{in } \Omega \\ x(\xi,t) \in \Sigma & \text{for } (\xi,t) \in \partial\Omega \times [0,T) \\ -\langle \nu(\xi,t), \mu(x(\xi,t)) \rangle = \alpha & \text{for } (\xi,t) \in \partial\Omega \times [0,T), \end{cases} \tag{1.1}$$

对于某个固定的 $\alpha \in \mathbb{R}$。此外， μ 是 Σ的未来指向法向量，见（2.3）。令$\mathcal{C} \in \mathbb{R}^3_1$ 是一个满足 $\Sigma = \partial\mathcal{C}$的开凸锥。我们的凸锥 $\mathcal{C}$ 来源于以下构造。令 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个包含原点的凸、有界开域。我们也可以将 Ω视为 $\mathbb{R}^3_1$ 在切片 $\{x^3 = 1\}$内的子集。

Date：2023年4月6日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 53E10；35R35。
Key words and phrases. 类空平均曲率流；毛细边界条件。

然后，Ω 通过径向延拓在 $\mathbb{R}^3_1$ 中生成一个开凸锥 $\mathcal{C}$，其顶点为 $\mathbb{R}^3_1$ 的原点，即 Ω 与 $\mathcal{C}$ 通过

$$\Omega = \mathcal{C} \cap \{x \in \mathbb{R}^3_1 \colon \langle x, e_3\rangle = -1\}.$$

式（1.1）中的边界条件有一个专门的名称。

1.1. 定义。当 $\alpha \in \mathbb{R}$ Σ 为洛伦兹时，以及当 $\alpha > 1$ Σ 为黎曼时，我们称带边界 ∂M 的曲面 $M \subset \mathcal{C}$ 为 α-毛细曲面，若 $\partial M \subset \Sigma$，且沿着 ∂M 有

$$-\langle \nu, \mu\rangle = \alpha.$$

最后，如果我们可以通过其图函数对 M 进行参数化，则称 M 为图形状的

$$u \colon \Omega \to \mathbb{R},$$

使得 Ω 到 $\mathcal{C}$ 的嵌入 x 由下式给出

$$x(\xi) = u(\xi)(\xi + e_3). \tag{1.2}$$

这里我们将 $\xi \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \{1\} \sim \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3_1$等同起来，因此 $\langle \xi、\ e_3\rangle = 0$。

我们的主要结果如下。

1.2. 定理。假设 $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3_1$ 是一个严格凸锥，其边界 Σ非退化，并且假设 $M_0 \subset \mathcal{C}$ 是 α-毛细管的、类空的、图形状的且严格平均凸的。那么：

(1) 方程 (1.1)的一个解对所有时间都存在，并且当 $\mathbb{R}^3_1$ 足够大时离开 t的任意紧子集。

(2) 我们将重标度流定义为 $\widetilde{M_t} \colon = (1+t)^{-\frac{1}{2}} M_t$。重标度解始终位于有界区域内，并且一致收敛于 MCF 的一个膨胀解片段；当 $t \to \infty$时，该解满足边界条件。

1.3.备注。 (i)我们要求 $\alpha \geq 1$ 在黎曼情形下，因为根据未来指向的类时向量的性质 $\alpha = -\langle \nu,\ \mu\rangle \geq 1$。事实上，为使其成为该偏微分方程的斜边界条件，我们要求严格不等式，参见 引理 2.3。（ii）注意，在上述情形中，并非每个 α 在洛伦兹情形下都允许平均凸数据。然而，很容易看出，对于 $\alpha < 0$ 此类初始数据总是存在。（iii）关于初始时刻正则性的完整处理，参见 定理 7.2。

半黎曼流形中的平均曲率流多年来备受关注，其应用包括 K. Ecker 和 G. Huisken 的研究中构造给定平均曲率超曲面[5] ，以及 C. Gerhardt 的研究 [9] ，还有 G. Li 和 I. Salavessa 通过构造流形之间的同伦 [21]。H. Roesch 和第三作者最近将一种受限于零超曲面内部的平均曲率流变体用作在广义相对论中寻找 MOTS 的方法 [23], ，并发现它与 Yamabe 流存在有趣的联系[27]。

半黎曼空间中的带边界条件的平均曲率流已由多位作者研究，例如 K. Ecker [4], 第二作者 [16, 18] 以及 S. Gao、G. Li 和 C. Wu [8]。特别是，第二作者 [17] 证明了洛伦兹锥上垂直边界条件的情形适用于所有维数（这与本文中的 $\alpha = 0$ 等价）。F. Guo、G. Li 和 C. Wu [12] 也研究了平均曲率类型流的类似垂直类时边界条件。在黎曼情形下，平均曲率流的各类边界问题已得到广泛研究。此处不列出完整的参考文献，仅提及 G. Huisken [14], 、A. Stahl [25], 、A. Freire [7]、B. Guan [11], 、V. Wheeler [26], 以及 N. Edelen、R. Haslhofer、M. Ivaki 和 J. Zhu [6]的研究。

正如引言中所提到的，人们或许希望类空平均曲率流在具有一致类空估计的情况下表现良好（例如，通过应用诸如内部估计等方法。

在 [4, 20]）。然而，我们注意到，当 Σ为黎曼时，即使具有一致的类空估计，边界也可能因边界塌缩而出现奇点。事实上，Halldorsson 的自收缩解示例 [13, 定理 7。1] 给出了满足毛细边界条件的自收缩解，其 Σ 轴 x位于 $\mathbb{R}^2_1$ 中（对所有角度均成立），并形成奇点，整个边界收缩为一点。我们预计在 $\mathbb{R}^3_1$ 中也存在类似的旋转对称自收缩解，这表明对 Σ的严格凸性假设是必要的。

证明方法是证明一致的图形状性和类空性估计，最终使我们能够将（1.1）重写为具有斜向非线性边界条件的一致抛物型偏微分方程，见（2.7）。在 Σ 为黎曼或洛伦兹的情况下，证明有所不同。事实上，Σ 为黎曼时，需要付出明显更多的工作来证明图形状性估计，而如上所述，一致的类空性或多或少可以直接得到。两种情况下的主要困难都是获得边界估计，而这些估计是利用平均曲率估计，并像[1, 19]中那样谨慎地使用极大性条件得到的。

在第2节中，我们描述这一约化，并给出斜性与抛物性的充分条件，见命题 2.4。在第3节中，我们通过分析边界条件收集所需的边界恒等式。在第4 节中，我们证明在 Σ 为洛伦兹或黎曼这两种情形下均成立的初始估计，包括高度估计和速度上界。随后我们的证明分为两种情形：

- 如果 Σ 是黎曼的：由引理 4.1可立即得到一致的类空性界，因此所需的关键估计是一致的图形状估计。此估计在第5节中完成。
- 如果 Σ 是洛伦兹的：该流自动是图形状的，并且我们需要一个一致的类空性估计。这在第6节中得到证明。

最后，我们在第7节证明完整定理，详见定理 7.2 。

致谢。作者感谢卡迪夫大学、达勒姆大学和利兹大学接待访问，使本项工作得以开展。

2. Geometric quantities in cone coordinates

类空性和图形状性。本节进一步研究具有图形状的性质，并推导出关于几何量的公式，这些公式以图形参数化表示，如（1.2）所示。首先需要注意的是，如果 Σ 是黎曼的，则类空性通常并不意味着图形状性，这与更常见的情形相反，在后者中，曲面是平坦欧氏子空间上的图形。稍后我们将证明，在平均曲率流下，这些性质中的每一个都会以定量的方式得到保持。

对于 t 为了压缩一些公式，偶尔使用 h

$$\rho = \log u$$

而不是 u。

在 Ω 中的标准基底 (e_1, e_2) 下，切向量为

$$x_i = ue_i + D_i u(\xi + e_3),$$

其中，D 是 Ω 中的标准方向导数，在这些坐标下，M 上诱导的度量为

$$\begin{aligned} g_{ij} &= u^2\delta_{ij} + u(\xi_i D_j u + \xi_j D_i u) + D_i u D_j u(|\xi|^2 - 1) \\ &= e^{2\rho}\left[\delta_{ij} + (\xi_i D_j \rho + \xi_j D_i \rho) + D_i \rho D_j \rho(|\xi|^2 - 1)\right]. \end{aligned}$$

其逆矩阵为

$$g^{jk} = e^{-2\rho}\left(\delta^{jk} + \frac{D^j\rho D^k\rho + |D\rho|^2\xi^j\xi^k - (1+D\rho\cdot\xi)(\xi^j D^k\rho + \xi^k D^j\rho)}{(1+D\rho\cdot\xi)^2 - |D\rho|^2}\right). \tag{2.1}$$

通过观察可知

$$\widetilde{\nu} := Du + (u + \xi\cdot Du)e_3$$

满足

$$\langle\widetilde{\nu}, x_i\rangle = D_i u(u + Du\cdot\xi) - D_i u(u + Du\cdot\xi) = 0.$$

与 $\xi = 0$ 一样， $\widetilde{\nu}$ 具有非平凡的正 e_3 部分，因此可知这是一个未来指向法向量；根据关于 M 的假设，它必为类时的。因此我们得到

$$0 > |\widetilde{\nu}|^2 = |Du|^2 - (u + \xi\cdot Du)^2$$

从而

$$(u + \xi\cdot Du)^2 > |Du|^2.$$

这给出了一个全局定义的单位法向量

$$\nu = \frac{Du + (u + \xi\cdot Du)e_3}{\sqrt{(u + \xi\cdot Du)^2 - |Du|^2}}. \tag{2.2}$$

因此，类空性的标准度量满足

$$1 \le v := -\langle\nu, e_3\rangle = \frac{(u + \xi\cdot Du)}{\sqrt{(u + \xi\cdot Du)^2 - |Du|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|Du|^2}{(u+\xi\cdot Du)^2}}}.$$

曲面的支撑函数由 $M \subset \mathbb{R}^3_1$ 给出

$$S := -\langle x, \nu\rangle = -\frac{uDu\cdot\xi - uDu\cdot\xi - u^2}{\sqrt{(u + \xi\cdot Du)^2 - |Du|^2}} = \frac{u^2}{\sqrt{(u + \xi\cdot Du)^2 - |Du|^2}}.$$

在 M 上的高斯公式为

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathrm{II}(X, Y),$$

其中 $\overline{\nabla}$ 是 $\mathbb{R}^3_1$上的Levi-Civita联络，因此第二基本形式由

$$h_{ij} = -\langle\mathrm{II}(\partial_i, \partial_j), \nu\rangle = -\langle D_{ij}x, \nu\rangle.$$

按照这一约定， M 的平均曲率为

$$\begin{aligned} H &= -\left\langle 2g^{ij}D_j u e_i + g^{ij}D_{ij}u(\xi + e_3), \nu\right\rangle \\ &= -\frac{2g^{ij}D_i u D_j u}{\sqrt{(u + \xi\cdot Du)^2 - |Du|^2}} + \frac{ug^{ij}D_{ij}u}{\sqrt{(u + \xi\cdot Du)^2 - |Du|^2}}. \end{aligned}$$

Σ 上的几何量将以加帽符号表示，例如第二基本形式定义为

$$\widehat{h}_{ij} = \left\langle\overline{\nabla}_i\mu, y_j\right\rangle,$$

其中 y 是 Σ的一个嵌入，并且未来指向的法向量 μ 由

$$\mu = \frac{N + N\cdot\xi\ \ e_3}{\sqrt{|1 - (N\cdot\xi)^2|}}. \tag{2.3}$$

这里， N 是 $\partial\Omega$的指向外侧的单位法向量 $\subset \mathbb{R}^2$ （并将其视为$\mathbb{R}^2 \times \{0\}$中的一个向量），即 $N\cdot\xi$ 是 $\mathbb{R}^2$上的标准欧氏支撑函数。法向量 μ

由于 Σ的度量非退化性，该定义良好。为了跟踪 Σ的指标，我们还定义

$$\sigma = \langle \mu, \mu \rangle = \begin{cases} +1, & \Sigma \text{ is Lorentzian} \\ -1, & \Sigma \text{ is Riemannian.} \end{cases}$$

还要注意， σ 的符号与 $1-(N\cdot\xi)^2$. 的符号一致。接下来我们推导 α-毛细曲面的一些几何性质。

对于任意的 $p \in \mathbb{R}^3_1$ 和 $W \in T_p\mathbb{R}^3_1$，在处理因果性未知的向量的半黎曼范数时，我们写作

$$\|W\|^2 = ||W|^2| = |\langle W, W \rangle|.$$

对于 $p \in \partial M_t$ 和向量 $W \in T_p\mathbb{R}^3_1$，我们将记作

$$W^\top = W + \langle \nu, W \rangle \nu$$

对于从 W 到 T_pM_t 的正交投影以及

$$W^\Sigma = W - \sigma \langle \mu, W \rangle \mu$$

关于将 W 正交投影到 $T_p\Sigma$。我们将 $W^{M\cap\Sigma}$ 记作将 W 投影到$T_p\partial M = T_pM_t \cap T_p\Sigma$的投影。特别地，我们有

$$\mu^\top = \mu - \alpha\nu, \qquad \nu^\Sigma = \nu + \sigma\alpha\mu,$$
$$|\mu^\top|^2 = \alpha^2 + \sigma, \qquad |\nu^\Sigma|^2 = -\sigma(\alpha^2+\sigma) = -\sigma\|\nu^\Sigma\|^2.$$

我们注意到， $\mu^\top$ 与 ν^Σ 均正交于 ∂M_t，并且分别包含在 TM 与 $T\Sigma$ 中。

2.1.引理。设 $M \subset \mathcal{C}$ 是 α-毛细管。则 $\mu^\top$ 是 $\partial M \subset \Sigma = \partial\mathcal{C}$ 的法向量，并指向 $\mathcal{C}$ 外部。

证明。对于 $p \in \partial M$， $T_p\partial M$ 与 ν 和 μ均正交。我们立即看到， $\mu^\top(p)$ 与 $T_p\partial M$正交。在 Σ 为洛伦兹的情况下，如果向量 V位于 $T_p\Sigma$ 相对于 μ的同一侧，则它在 $p \in \partial M$处从 $\mathcal{C}$ 指向外侧。如果 Σ 为黎曼的，则当 V 位于 $T_p\Sigma$ 相对于 μ的另一侧时，它从 $\mathcal{C}$ 指向外侧。在这两种情况下， $\langle V, \mu\rangle > 0$。通过计算即可得到引理

$$\left\langle \mu, \mu^\top \right\rangle = \langle \mu, \mu - \alpha\nu \rangle = \alpha^2 + \sigma > 0.$$

□

Σ的第二基本形式。我们假设 $z\colon [0,\ell(\partial\Omega)] \to \mathbb{R}^2$ 是 $\partial\Omega$的弧长参数化，其中 $\ell(\partial\Omega)$是 $\partial\Omega$的长度。我们将 z关于弧长参数 s的微分记作 $\dot{z}$。现在我们可以通过 $\widehat{z}$对 Σ 进行参数化：$[0,\ell(\partial\Omega)]\times(0,\infty) \to \mathbb{R}^3_1$，定义为

$$\widehat{z}(s,\lambda) = \lambda(z(s) + e_3).$$

很容易看出， $\widehat{h}$ 在 $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ 方向上有一个零特征向量，而在 $\partial\Omega$ 个方向上，回顾（2.3），

$$\widehat{h}(\dot{z},\dot{z}) = -\lambda^{-2}\langle \widehat{z}_{ss}, \mu\rangle = \frac{\kappa}{\lambda\sqrt{|1-(N\cdot z)^2|}} = \frac{\kappa\sqrt{||z|^2-1|}}{\|\widehat{z}\|\sqrt{|1-(N\cdot z)^2|}},$$

其中 κ 表示平面曲线 $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 的曲率。我们可以写

$$\nu^\Sigma = a\dot{z} + b\frac{\widehat{z}}{\|\widehat{z}\|},$$

其中（作为 $\mathrm{sign}(|x|^2) = -\sigma$），

$$-S\|\widehat{z}\|^{-1} = a\left\langle \dot{z}, \frac{\widehat{z}}{\|\widehat{z}\|}\right\rangle - \sigma b$$

因此

$$|\nu^\Sigma|^2 = a^2 + 2ab\left\langle \dot{z}, \frac{\widehat{z}}{\|\widehat{z}\|}\right\rangle - \sigma b^2 = a^2\left(1 + \sigma\left\langle \dot{z}, \frac{\widehat{z}}{\|\widehat{z}\|}\right\rangle^2\right) - \sigma S^2\|\widehat{z}\|^{-2}.$$

我们得到

$$a^2 = \frac{|\nu^\Sigma|^2 + \sigma S^2\|\widehat{z}\|^{-2}}{1 + \sigma\left\langle \dot{z}, \frac{\widehat{z}}{\|\widehat{z}\|}\right\rangle^2} = \frac{\sigma(-\|\nu^\Sigma\|^2 + S^2\|\widehat{z}\|^{-2})}{1 + \sigma\left\langle \dot{z}, \frac{\widehat{z}}{\|\widehat{z}\|}\right\rangle^2},$$

其中注意到，根据柯西–施瓦茨不等式，分母始终为正，且仅依赖于 $\partial\Omega$。由于 $\frac{\widehat{z}}{\|\widehat{z}\|}$ 是零特征向量（因为它沿着 $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ 方向），我们立即得到，

$$\begin{aligned}\widehat{h}(\nu^\Sigma, \nu^\Sigma)|_x &= \sigma(S^2\|\widehat{z}\|^{-2} - \|\nu^\Sigma\|^2)\frac{\sqrt{||z|^2 - 1|}\kappa}{\|\widehat{z}\|\left(1 + \sigma\left\langle \dot{z}, \frac{\widehat{z}}{\|\widehat{z}\|}\right\rangle^2\right)\sqrt{|1 - \langle N, z\rangle^2|}} \\ &=: \frac{\sigma}{\|\widehat{z}\|}(S^2\|\widehat{z}\|^{-2} - \|\nu^\Sigma\|^2)q(\widehat{z}), \qquad (2.4)\end{aligned}$$

其中 $q\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ 是一个有界的正函数，且有正的下界。

锥坐标中毛细曲面的平均曲率流。 在本文中，我们关注 α-毛细曲面在锥 $\mathcal{C}$中的运动，如（1.1）所述，其中 T 是最大时间，使得该流作为类空且光滑曲面的流存在。使用（$\partial_t x$）$^\perp$ 确保这组方程是几何的，即在Ω的含时重参数化下不变。如果我们利用锥坐标固定一个参数化，那么

$$x(\xi, t) = u(\xi, t)(\xi + e_3) = e^{\rho(\xi,t)}(\xi + e_3)$$

按平均曲率流演化，如果

$$H = -\langle \partial_t x(\xi, t), \nu\rangle = -\partial_t\rho\,\langle x(\xi, t), \nu\rangle = \frac{e^\rho\partial_t\rho}{\sqrt{(1 + \xi\cdot D\rho)^2 - |D\rho|^2}}$$

从而

$$\partial_t\rho = g^{ij}(\xi, \rho, D\rho)D_{ij}\rho - g^{ij}(\xi, \rho, D\rho)D_i\rho D_j\rho.$$

特别地，我们注意到

$$\partial_t\rho = \frac{H}{S}. \qquad (2.5)$$

我们定义一个“重标度的” ρ by

$$\widetilde{\rho} := \rho - \frac{1}{2}\log(1 + t) \qquad (2.6)$$

以及一个修正后的时间函数

$$\tau := \log(1 + t).$$

那么（1.1）等价于

$$\begin{cases} \widetilde{\rho}_\tau = e^{-2\widetilde{\rho}} a^{ij}(\xi, D\widetilde{\rho}) D_{ij}\widetilde{\rho} - e^{-2\widetilde{\rho}} a^{ij}(\xi, D\widetilde{\rho}) D_i\widetilde{\rho} D_j\widetilde{\rho} - \frac{1}{2} & \text{on } \Omega \times [0, \widetilde{T}) \\ b(\xi, D\widetilde{\rho}) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times [0, \widetilde{T}) \\ \widetilde{\rho}(0, \cdot) = \widetilde{\rho}_0(\cdot) & \text{on } \Omega, \end{cases} \tag{2.7}$$

其中，当 $D\widetilde{\rho} = D\rho$ 并利用（2.1）中的显式公式，

$$a^{ij}(\xi, D\widetilde{\rho}) = e^{2\rho} g^{ij}(x, \rho, D\rho)$$

并且，利用（2.2）和（2.3），

$$b(\xi, p) = \frac{p \cdot N - N \cdot \xi(1 + \xi \cdot p)}{\sqrt{|(N \cdot \xi)^2 - 1|}\sqrt{(1 + \xi \cdot p)^2 - |p|^2}} + \alpha.$$

~在上述内容中， T 可取为该流保持类空、光滑且图形状的最大时间。

一致抛物性和斜性的条件。

2.2.引理。假设存在常数 $c_{Su^{-1}}$、 $C_v > 0$ ，使得 $Su^{-1} > c_{Su^{-1}}$ 且 $v < C_v$ 对所有 $t \in [0, T)$ 。那么存在常数 $0 < c = c(c_{Su^{-1}}, C_v, \Omega) < C = C(c_{Su^{-1}}, C_v, \Omega)$，使得特征值 λ_i 所对应的 $a^{ij} = e^{2\rho} g^{ij}$ 满足 $c < \lambda < C$。

证明。注意到，就 ρ 而言，

$$Su^{-1} = \frac{1}{\sqrt{(1 + D\rho \cdot \xi)^2 - |D\rho|^2}}, \qquad 1 - \frac{1}{v^2} = \frac{|D\rho|^2}{(1 + D\rho \cdot \xi)^2}, \qquad \frac{v}{Su^{-1}} = 1 + D\rho \cdot \xi.$$

尤其是，

$$|D\rho|^2 = (1 - v^{-2}) \frac{v^2}{(Su^{-1})^2} \le \frac{v^2}{(Su^{-1})^2} \le C_v^2 c_{Su^{-1}}^{-2},$$

and

$$\frac{|D\rho|^2}{(1 + D\rho \cdot \xi)^2 - |D\rho|^2} = (1 - v^{-2}) \frac{(1 + D\rho \cdot \xi)^2}{(1 + D\rho \cdot \xi)^2 - |D\rho|^2} = v^2 - 1.$$

对于 Ω 上关于欧氏度量的任意单位向量 w ，我们有

$$e^{-2\rho} w^i g_{ij} w^j \le 1 + 2|\xi||D\rho| + |\xi|^2 |D\rho|^2 < C_1(c_{Su^{-1}}, C_v),$$

and

$$\begin{aligned} e^{2\rho} w_i g^{ij} w_j &\le 1 + \frac{|D\rho|^2 + |\xi|^2|D\rho|^2 + 2(1 + D\rho \cdot \xi)|D\rho||\xi|}{(1 + D\rho \cdot \xi)^2 - |D\rho|^2} \\ &\le 1 + (1 + |\xi|^2)(v^2 - 1) + 2v\sqrt{v^2 - 1}|\xi| \\ &\le C_2(c_{Su^{-1}}, C_v). \end{aligned}$$

这意味着这些特征值严格远离零和无穷大。因此，由于 $g_{ij} > 0$在初始时刻成立，这一性质也得以保持，所声称的估计均有效。□

2.3.引理。设 $M \subset \mathcal{C}$ 为 α-毛细的，其径向图函数为 u。则

$$N^i \frac{\partial b}{\partial p^i}\Big|_{p=D\rho} = \sqrt{|(N \cdot \xi)^2 - 1|}\left((b(\xi, D\rho) - \alpha)^2 + \sigma\right) Su^{-1}.$$

因此，在给定 $Su^{-1} > c_{Su^{-1}} > 0$ 的情况下， b 是一致斜交的。

证明。我们计算

$$N^i\frac{\partial b}{\partial p^i} = \frac{1-(N\cdot\xi)^2}{\sqrt{|(N\cdot\xi)^2-1|}\sqrt{(1+\xi\cdot p)^2-|p|^2}} - (b-\alpha)\frac{(1+\xi\cdot p)N\cdot\xi - N\cdot p}{(1+\xi\cdot p)^2-|p|^2}$$
$$= \frac{\sqrt{|(N\cdot\xi)^2-1|}}{\sqrt{(1+\xi\cdot p)^2-|p|^2}}\left((b-\alpha)^2 + \frac{1-(N\cdot\xi)^2}{|1-(N\cdot\xi)^2|}\right).$$

我们使用 $b=0$ 来完成证明。

□

我们汇总了引理 2.2 和引理 2.3 以下命题。

2.4. 命题。假设存在常数 $C_v, c_{Su^{-1}}, C_{\widetilde{\rho}}, c_{\widetilde{\rho}} > 0$，使得对于所有 $t\in[0,T)$，我们都有

$$v < C_v, \qquad Su^{-1} > c_{Su^{-1}}, \qquad and \qquad c_{\widetilde{\rho}} < \widetilde{\rho} < C_{\widetilde{\rho}}.$$

然后(2.7) 是一致抛物型的，并具有一致斜边界条件。

3. Boundary identities

我们计算该流的边界性质。注意到 引理 3.1 和 引理 3.2对于任意流形 Σ 均作为毛细边界条件成立。

3.1. 引理（第一空间导数）。对于任意 $Y\in T\partial M_t$,

$$0 = h(Y,\mu^\top) + \widehat{h}(Y,\nu^\Sigma).$$

证明. 我们有

$$0 = Y(\langle\nu,\mu\rangle) = \langle\overline{\nabla}_Y\nu,\mu\rangle + \langle\nu,\overline{\nabla}_Y\mu\rangle = h(Y,\mu^\top) + \widehat{h}(Y,\nu^\Sigma).$$

□

3.2. 引理（第一次时间导数）。在 ∂M_t,

$$\nabla_{\mu^\top}H = H\left[-\sigma\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|},\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|}\right) - \alpha h\left(\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|},\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}\right)\right].$$

证明。我们考虑平均曲率流 y 的重新参数化： $B_1(0) \to \mathbb{R}^3_1$ 使得 $\mathrm{Im}(y|_{\partial B_1(0)}) \subset \Sigma$。在 $\partial B_1(0)$ 上有，

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^\top = \beta\mu^\top + V$$

其中， V 是 $T\partial M_t$ 中的一个向量场，而 β 是某个函数。通过在边界附近重新参数化，我们可以选择使 V 为零。

我们知道 $y\in\Sigma$ 对所有时间都成立，因此

$$0 = \left\langle H\nu + \beta\mu^\top, \mu\right\rangle = -H\alpha + \beta(\alpha^2+\sigma),$$

以及在边界处

$$\frac{dy}{dt} = H\nu + \frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma}H\mu^\top = \sigma\frac{H}{\alpha^2+\sigma}\nu^\Sigma.$$

在此速度下，我们有

$$\left\langle\frac{d}{dt}\nu(y), y_i\right\rangle = -\left\langle\nu, (H\nu + \frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma}H\mu^\top)_i\right\rangle = H_i + \frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma}Hh(y_i,\mu^\top).$$

由此应用可得

$$0=\frac{d}{dt}\langle\nu(y),\mu(y)\rangle=\nabla_{\mu^\top}H+\alpha Hh\left(\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|},\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}\right)+\sigma H\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|},\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|}\right).$$

□

以下恒等式将在后文中对我们有所帮助。

3.3. 引理。在 ∂M_t 上我们有

$$\nabla_{\mu^\top}S=S\left[-\sigma\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|},\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|}\right)-\alpha h\left(\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|},\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}\right)\right].$$

证明。我们利用 $\langle x、\ \mu\rangle=0$，并使用两组标准正交基表示 x：

$$x=x^{M\cap\Sigma}+S\nu+\left\langle x,\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}\right\rangle\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}=x^{M\cap\Sigma}-\sigma\left\langle x,\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|}\right\rangle\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|}.$$

重写并整理第二个等式,

$$x-\sigma\frac{S}{\|\nu^\Sigma\|^2}\nu^\Sigma=x^{M\cap\Sigma}. \tag{3.1}$$

我们有

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu^\top}S&=-h\left(x^\top,\mu^\top\right)\\&=-h\left(x^{M\cap\Sigma}+\left\langle x^\top,\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}\right\rangle\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|},\mu^\top\right)\\&=\widehat{h}(x^{M\cap\Sigma},\nu^\Sigma)-\left\langle x^\top,\mu^\top\right\rangle h\left(\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|},\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}\right)\\&=-\sigma S\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|},\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|}\right)-\langle x,\mu-\alpha\nu\rangle h\left(\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|},\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}\right)\\&=S\left(-\sigma\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|},\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|}\right)-\alpha h\left(\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|},\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}\right)\right),\end{aligned}$$

其中我们在第三行使用了 引理 3.1，并且在第四行使用了 h 在其中具有零特征值的 x 方向以及（3.1）。□

3.4. 引理。在 ∂M_t 上有:

$$\nabla_{\mu^\top}v=\widehat{h}(e_3^{M\cap\Sigma},\nu^\Sigma)-(\langle e_3,\mu\rangle+\alpha v)h\left(\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|},\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}\right).$$

证明。我们有

$$e_3^\top=e_3^{M\cap\Sigma}+\left\langle e_3^\top,\mu^\top\right\rangle\mu^\top(\alpha^2+\sigma)^{-1}=e_3^{M\cap\Sigma}+(\langle e_3,\mu\rangle+\alpha v)\mu^\top(\alpha^2+\sigma)^{-1},$$

因此使用 引理 3.1

$$\nabla_{\mu^\top}v=-h(e_3^\top,\mu^\top)=\widehat{h}(e_3^{M\cap\Sigma},\nu^\Sigma)-(\langle e_3,\mu\rangle+\alpha v)h\left(\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|},\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}\right).$$

□

4. Initial estimates

本节将证明流（1.1）在非退化边界下成立的先验估计 Σ，即以下两者之一 $\sigma = \pm 1$。回顾一下， T 是光滑且类空存在的最大时间。按照惯例，我们将使用依赖于时间的缩放来理解该解的渐近行为。定义

$$\widetilde{M_t} := (1+t)^{-1/2} M_t \subset \mathbb{R}^3_1,$$

$\widetilde{\ }$并且我们通常将以重标度的时间坐标 $\tau = \log(1+t)$ 来考察 M_t。我们$\widetilde{\ }$将对在 M_τ 上计算得到的所有几何量加上波浪号。我们立即看到

$$(\partial_\tau \widetilde{x})^\perp = \widetilde{H}\widetilde{\nu} - \frac{1}{2}\widetilde{x}^\perp.$$

我们首先观察到以下事实。

4.1. 引理(类空性黎曼 M_t for Riemannian Σ)。 在定理 1.2 的假设下，并且在 Σ 为黎曼（即 $\sigma = -1$）时，存在一个常数 $C = C(\alpha, \Sigma)$ 使得对于所有 $t \in [0, T)$，

$$v \le \max\{\sup_{M_0} v, C\} =: C_v.$$

证明。我们首先估计 v 在 ∂M_t 上。我们写作 $\mu = ae_3 + V$， $\nu = be_3 + W$，其中 V， $W \perp e_3$，以及a, $b > 0$。于是 $|W|^2 = b^2 - 1$， $|V|^2 = a^2 - 1$，且 $\alpha = ab - \langle V, W\rangle$。由柯西–施瓦茨不等式，

$$ab \le \alpha + |V||W| = \alpha + \sqrt{a^2-1}\sqrt{b^2-1}.$$

将两边平方并整理，可得

$$a^2 + b^2 \le \alpha^2 + 2\alpha\sqrt{a^2-1}\sqrt{b^2-1} + 1 \le \alpha^2 + 2\alpha ab + 1 \le \alpha^2 + \frac{b^2}{2} + 2\alpha^2 a^2 + 1,$$

其中我们利用杨氏不等式得到最后的估计。最后我们看到

$$v = b \le \sqrt{2\alpha^2 + 2(2\alpha^2 - 1)\langle \mu, e_3\rangle^2 + 2}.$$

由 μ、 $|\langle \mu$、 $e_3\rangle| < C(\Sigma)$ 的一致类时性，从而 $v \le C(\alpha, \Sigma)$ 在 ∂M_t 上成立。

至于内部， v 的演化由下式给出

$$\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right) v = -|A|^2 v,$$

我们应用弱最大值原理以得到内部界。至此证明完成。 □

4.2. 引理 （平均凸性的保持： M_t）。 在 定理 1.2 的假设下，对所有 $t \in [0, T)$， M_t 保持严格平均凸。

证明。 在 M_t 的内部，由 [4, 命题 2.6(i)]，

$$\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right) H = -H|A|^2$$

并且由于 $H > 0$ 在 M_0，任何内部点 p 满足 $H(p) = 0$ 都会与强最大值原理相矛盾。令 t_1 为 min 首次达到的时刻$_{M_t} H = 0$。则存在一个 $p \in \partial M_t$使得 $H(p, t_1) = 0$，因此，根据 引理 3.2， $\nabla_{\mu^\top} H = 0$。这与抛物型 Hopf 引理相矛盾，因此不存在这样的 t_1。 □

4.3. 引理 （保持图形状性之 M_t）。 在定理 1.2的假设下，对所有 $t \in [0, T)$， M_t 是图形状的，即 $S > 0$。

证明。 在 Σ 为洛伦兹时， $S|x|^{-1} \geq 1$ 因此上述结论自动成立。如果 Σ 为黎曼（即 $\sigma = -1$），则根据引理 4.2， $H > 0$ 保持不变，因此利用 [17,引理 4。3],

$$\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right) S = -|A|^2 S + 2H \geq -|A|^2 S.$$

因此，根据强最大值原理，不可能存在 S 的内部极小值，其中 $S = 0$。正如引理4.2中所述，带有 $S = 0$ 的边界极小值将与霍普夫引理相矛盾，这是由于引理3.3中的边界导数形式所致。因此图形状得以保持。□

4.4. 引理 (速度界). 在 定理 1.2 的假设下， 当 $t \in [0, T)$ 时， 存在常数 $0 < c_{\frac{S}{H}} < C_{\frac{S}{H}}$，其仅依赖于初始数据，使得

$$2(c_{\frac{S}{H}} + t) \leq \frac{S}{H} \leq 2(C_{\frac{S}{H}} + t).$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)\left(\frac{S}{H} - 2t\right) &= \frac{S}{H}\left[\frac{1}{S}\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right) S - \frac{1}{H}\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right) H\right] + 2\left\langle \frac{\nabla H}{H}, \nabla \frac{S}{H}\right\rangle - 2 \\ &= 2\left\langle \frac{\nabla H}{H}, \nabla \frac{S}{H}\right\rangle.\end{aligned}$$

根据 引理 3.2 和 引理 3.3， H 和 S 满足相同的线性边界条件，因此

$$\nabla_{\mu^\top}\left(\frac{S}{H} - 2t\right) = 0.$$

我们可以将最大值原理应用于 $\frac{S}{H} - 2t$ ，从而得到所要求的估计，其中 $C_{\frac{S}{H}} = \frac{1}{2}\sup_{M_0} \frac{S}{H}$ 和 $c_{\frac{S}{H}} = \frac{1}{2}\inf_{M_0} \frac{S}{H}$。□

4.5. 引理 (重标度流的界)。 在 定理 1.2 的假设下，存在常数 $c_{\widetilde{\rho}} < C_{\widetilde{\rho}}$，它们仅依赖于 M_0，使得当 $t \in [0, T)$,

$$c_{\widetilde{\rho}} \leq \widetilde{\rho} \leq C_{\widetilde{\rho}}.$$

证明。 由（2.5）可知， $\rho_t = H/S$. 应用 引理 4.4 并利用 $\widetilde{\rho}$， （2.6），可得

$$\frac{1 - C_{\frac{S}{H}}}{2(C_{\frac{S}{H}} + t)(1 + t)} \leq \widetilde{\rho}_t \leq \frac{1 - c_{\frac{S}{H}}}{2(c_{\frac{S}{H}} + t)(1 + t)}.$$

对时间积分即可得到该引理。 □

还需注意，对于 $\xi \in \partial\Omega$，存在常数 $0 < c_{\|x\|^2 u^{-2}} < C_{\|x\|^2 u^{-2}}$，它们仅依赖于 M_0，满足

$$c_{\|x\|^2 u^{-2}} u^2(\xi, t) \leq \|x(\xi, t)\|^2 \equiv u^2(\xi, t)||\xi|^2 - 1| \leq C_{\|x\|^2 u^{-2}} u^2(\xi, t). \tag{4.1}$$

应用 引理 4.5 可知，存在常数 $0 < c_{\underline{\|x\|}} < C_{\underline{\|x\|}}$ 使得对于 $_{1+t}$ $_{1+t}$ 位置向量 $x \in \partial M_t$,

$$c_{\frac{\|x\|^2}{1+t}} < \frac{\|x\|^2}{1 + t} < C_{\frac{\|x\|^2}{1+t}}. \tag{4.2}$$

5. The graphicality estimate in case Σ is Riemannian

在本节中，我们致力于实现严格的图形状性，即将 引理 4.3 改进为关于 S 在 Σ 为黎曼曲面的情况下的严格正下界。我们首先指出一些有用的线性代数事实。

由 Cauchy-Schwarz 不等式，在任意边界点处，我们有

$$S = -\left\langle \nu^{\Sigma}, x \right\rangle \leq |x|\sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

然而，若 $S < |x|\sqrt{\alpha^2-1}$（即 x 与 ν^{Σ} 不平行），则 $\{x, \nu^{\Sigma}\}$ 是 $T\Sigma$的一组基。在以下计算中，我们将假定处于这种情况。因此我们看到，对任意 $Z \in T\partial M_t$,

$$Z = \frac{S\left\langle Z, x\right\rangle}{|x|^2(\alpha^2-1) - S^2}\nu^{\Sigma} + (\alpha^2-1)\frac{\left\langle Z, x\right\rangle}{|x|^2(\alpha^2-1)-S^2}x.$$

由于 x 是 h的零特征向量，我们现在可以应用上述恒等式，从而得到如下有用公式

$$\widehat{h}(Z, \nu^{\Sigma}) = \frac{(\alpha^2-1)S\left\langle Z, x\right\rangle}{(\alpha^2-1)|x|^2 - S^2}\widehat{h}\left(\frac{\nu^{\Sigma}}{|\nu^{\Sigma}|}, \frac{\nu^{\Sigma}}{|\nu^{\Sigma}|}\right). \tag{5.1}$$

5.1.引理. 设 定理 1.2 的假设成立，且 Σ 是黎曼的。则存在常数 c、$C > 0$，依赖于 α、Σ，以及 C_v、$C_{\frac{S}{H}}$、$c_{\widetilde{\rho}}$、$C_{\widetilde{\rho}}$（见 引理 4.1、引理 4.4 与 引理 4.5），使得下列结论成立。对任意 $x \in \partial M_t$ 处，当 $\frac{S}{v}$ 取得最小值 $\frac{S}{v} < c|x|$时，我们有

$$\nabla_{\mu^{\top}}\frac{S}{v} \geq \frac{S}{v}\left[(1 - C\frac{S}{v}|x|^{-1})\widehat{h}\left(\frac{\nu^{\Sigma}}{|\nu^{\Sigma}|}, \frac{\nu^{\Sigma}}{|\nu^{\Sigma}|}\right) - C\frac{S}{v}|x|^{-2}\right].$$

证明。 利用引理 4.1，我们选取 $c < C_v^{-1}\sqrt{\alpha^2-1}$ 待稍后确定，使得 $S \lhd |x|\sqrt{\alpha^2-1}$。因此，$x$ 与 ν^{Σ} 线性无关，从而我们可以应用上面的线性代数计算。特别地，

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mu^{\top}}\frac{S}{v} &= \frac{S}{v}\left[S^{-1}\nabla_{\mu^{\top}}S - v^{-1}\nabla_{\mu^{\top}}v\right] \\
&= \frac{S}{v}\left[\widehat{h}\left(\frac{\nu^{\Sigma}}{|\nu^{\Sigma}|}, \frac{\nu^{\Sigma}}{|\nu^{\Sigma}|}\right) - \alpha h\left(\frac{\mu^{\top}}{|\mu^{\top}|}, \frac{\mu^{\top}}{|\mu^{\top}|}\right) - v^{-1}\widehat{h}(e_3^{\Sigma\cap M}, \nu^{\Sigma})\right. \\
&\qquad \left. + (v^{-1}\left\langle e_3, \mu\right\rangle + \alpha)h\left(\frac{\mu^{\top}}{|\mu^{\top}|}, \frac{\mu^{\top}}{|\mu^{\top}|}\right)\right] \\
&= \frac{S}{v}\left[\left(1 - v^{-1}\frac{(\alpha^2-1)S\left\langle e_3^{\Sigma\cap M}, x\right\rangle}{(\alpha^2-1)|x|^2 - S^2}\right)\widehat{h}\left(\frac{\nu^{\Sigma}}{|\nu^{\Sigma}|}, \frac{\nu^{\Sigma}}{|\nu^{\Sigma}|}\right)\right. \\
&\qquad \left. - v^{-1}|\left\langle e_3, \mu\right\rangle| h\left(\frac{\mu^{\top}}{|\mu^{\top}|}, \frac{\mu^{\top}}{|\mu^{\top}|}\right)\right],
\end{aligned}$$

其中我们使用了（5.1）。根据假设， Sv^{-1} 在 M_t 上达到全局最小值，且取值点为 $x \in \partial M_t$，因此 Sv^{-1} 在 ∂M_t 上也达到最小值，取值点为 x。因此，将∂M_t 的单位切向量记为 γ，我们有

$$
\begin{aligned}
0 = \nabla_\gamma \frac{S}{v} &= \frac{S}{v}\left[-h(S^{-1}x^\top - v^{-1}e_3^\top, \gamma)\right] \\
&= \frac{S}{v}\left[-\left\langle S^{-1}x - v^{-1}e_3, \gamma\right\rangle h(\gamma,\gamma) + \left\langle S^{-1}x - v^{-1}e_3, \frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}\right\rangle \widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|}, \gamma\right)\right].
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

注意，

$$
\left\langle S^{-1}x - v^{-1}e_3, \mu^\top\right\rangle = \left\langle S^{-1}x - v^{-1}e_3, \mu\right\rangle = -v^{-1}\left\langle \mu, e_3\right\rangle = v^{-1}|\left\langle \mu, e_3\right\rangle| > 0,
$$

而

$$
|S^{-1}x - v^{-1}e_3|^2 = S^{-2}|x|^2 - 2v^{-1}S^{-1}\left\langle x, e_3\right\rangle - v^{-2} = S^{-2}|x|^2 + 2v^{-1}uS^{-1} - v^{-2}.
$$

因此，由前面两个方程，我们得到

$$
\begin{aligned}
\left\langle S^{-1}x - v^{-1}e_3, \gamma\right\rangle^2 &= S^{-2}|x|^2 + 2v^{-1}uS^{-1} - v^{-2} - v^{-2}\left\langle \mu, e_3\right\rangle^2 (\alpha^2-1)^{-1} \\
&\geq S^{-2}(\check{c}|x|^2 - \check{C}v^{-2}S^2)
\end{aligned}
$$

对某个˘ $0 < \breve{c}$ 和 $1 < C$，仅依赖于 Σ 和 $\alpha_\circ$ 我们也为后续估计修改这些常数（通过使˘c 更小，并使˘C 更大，取决于类空性估计于引理 4.1），从而由对 S 如上所述的上界可得，

$$
|x|^2(\alpha^2-1) - S^2 > \check{c}|x|^2 - \check{C}v^{-2}S^2 > 0.
$$

应用（5.1），我们还有

$$
\left\langle S^{-1}x - v^{-1}e_3, \frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}\right\rangle \widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|}, \gamma\right) = \frac{S\left\langle \gamma, x\right\rangle v^{-1}|\left\langle e_3, \mu\right\rangle|}{(\alpha^2-1)|x|^2 - S^2}\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|}, \frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|}\right).
$$

利用（5.2）在 p处，并结合上述估计与恒等式，我们看到

$$
\begin{aligned}
h\left(\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}, \frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}\right) &= H - h(\gamma,\gamma) \\
&\leq \frac{S}{2c_{\frac{S}{H}} + 2t} - \left\langle S^{-1}x - v^{-1}e_3, \gamma\right\rangle^{-1}\frac{S\left\langle \gamma, x\right\rangle v^{-1}|\left\langle e_3, \mu\right\rangle|}{|x|^2(\alpha^2-1) - S^2}\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|}, \frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|}\right) \\
&\leq \frac{S}{2c_{\frac{S}{H}} + 2t} + \frac{S^2v^{-1}|\left\langle \gamma, x\right\rangle\left\langle e_3, \mu\right\rangle|}{(\check{c}|x|^2 - \check{C}v^{-2}S^2)^{\frac{3}{2}}}\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|}, \frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|}\right).
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\mu^\top}\frac{S}{v} \geq \frac{S}{v}\Bigg[&\left(1 - v^{-1}\frac{S(\alpha^2-1)|\left\langle e_3^{\Sigma\cap M}, x\right\rangle|}{\check{c}|x|^2 - \check{C}v^{-2}S^2} - \frac{S^2v^{-2}|\left\langle \gamma, x\right\rangle|\left\langle e_3, \mu\right\rangle^2}{(\check{c}|x|^2 - \check{C}v^{-2}S^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|}, \frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|}\right) \\
&- v^{-1}|\left\langle e_3, \mu\right\rangle|\frac{S}{2c_{\frac{S}{H}} + 2t}\Bigg].
\end{aligned}
$$

现在我们选择

$$
c = \min\left\{\sqrt{\frac{\check{c}}{2\check{C}}}, C_v^{-1}\sqrt{\alpha^2-1}\right\},
$$

利用这一界，我们可以找到一个 C，它仅依赖于 α、Σ 以及 引理 4.1、4.4 和 4.5 中的估计，使得

$$\nabla_{\mu^\top}\frac{S}{v}\geq\frac{S}{v}\left[(1-C\frac{S}{v}|x|^{-1})\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|},\frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|}\right)-C\frac{S}{v}|x|^{-2}\right].$$

□

5.2. 命题 (一致图形状估计)。 若满足 定理 1.2 的假设，且 Σ 是黎曼的，则存在 $c>0$，它仅依赖于 α、Σ 以及引理 4.1、引理 4.4 和 引理 4.5 中的估计，使得对所有 $t\in[0,T)$，

$$\inf_{M_t}\frac{S}{vu}\geq c.$$

证明。 在整个证明中，令 c_i、$C_i>0$、$i\in\mathbb{N}$为依赖于 α、Σ 以及以下估计的常数：引理 4.1、引理 4.4 和 引理 4.5。考虑函数$\frac{S}{v}$。由（2.4）和 引理 4.1，存在 C_1 和 $c_\Sigma=c_\Sigma(\Sigma)$，使得在边界处，

$$\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|},\frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|}\right)=q(x)|x|^{-1}(1-S^2|x|^{-2}(\alpha^2-1)^{-1})>c_\Sigma|x|^{-1}-C_1S^2v^{-2}|x|^{-3},$$

其中，为了得到 q 的下界，我们用到了 Σ 的严格凸性。因此，当 $\frac{S}{v}<\sqrt{\frac{c_\Sigma}{2C_1}}|x|$ 时，我们有

$$\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|},\frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|}\right)>\frac{1}{2}c_\Sigma|x|^{-1}.$$

现在，对于 c如引理 5.1中所述，而当 $\frac{S}{v}<\min\left\{c,\sqrt{\frac{c_\Sigma}{2C_1}}\right\}|x|$，成立

$$\nabla_{\mu^\top}\frac{S}{v}\geq\frac{S}{v}|x|^{-1}\left[\frac{1}{4}c_\Sigma-C_2\frac{S}{v}|x|^{-1}\right].$$

我们看到，由于 $\mu^\top$ 指向外侧，不可能取到边界最小值，因 r

$$\frac{S}{v|x|}<\min\left(c,\sqrt{\frac{c_\Sigma}{2C_1}},\frac{1}{4}c_\Sigma C_2^{-1}\right)=:c_2.$$

因此，利用（4.2）和引理 4.5，存在一个 $c_3>0$，使得在边界最小值处成立

$$\frac{S}{v}\geq c_3\sqrt{1+t}.$$

接下来在内部，利用引理 4.4，

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)\frac{S}{v}&=\frac{S}{v}\left[S^{-1}\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)S-v^{-1}\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)v\right]+2\left\langle v^{-1}\nabla v,\nabla\frac{S}{v}\right\rangle\\&=2\frac{H}{v}+2\left\langle v^{-1}\nabla v,\nabla\frac{S}{v}\right\rangle\\&\geq\frac{1}{(C_{\frac{S}{H}}+t)}\frac{S}{v}+2\left\langle v^{-1}\nabla v,\nabla\frac{S}{v}\right\rangle.\end{aligned}$$

因此

$$\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)\frac{S}{v}(C_{\frac{S}{H}}+t)^{-\frac{1}{2}}\geq\frac{1}{2(C_{\frac{S}{H}}+t)^{\frac{3}{2}}}\frac{S}{v}+2\left\langle v^{-1}\nabla v,\nabla\left(\frac{S}{v}(C_{\frac{S}{H}}+t)^{-\frac{1}{2}}\right)\right\rangle.$$

应用弱最大值原理可得 $\frac{S}{v}(C_{\frac{S}{H}}+t)^{-\frac{1}{2}} > c_4(M_0, c_3, C_{\frac{S}{H}})$。现在由引理 4.5即可得出该引理。□

5.3. 注。我们注意到，上述演化方程乍看之下似乎允许更强的下界。然而，这样的全局估计不可能成立，因为较小的边界极小值并不会被上述边界估计排除。

6. A uniform spacelikeness estimate in case Σ is Lorentzian

现在我们在 S 为洛伦兹的情形下，得到了 S 的一致上界估计，即 $\sigma = 1$。我们有

$$S^2 = \|x\|^2\|\nu^\Sigma\|^2\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|}\right\rangle^2 \geq \|x\|^2(\alpha^2+1),$$

因为单位类时向量的内积的模大于或等于 1。与上一节一样，我们只处理 $S^2 > \|x\|^2(\alpha^2+1)$ 的情形，因为我们的目标是从上方估计 S。在这种情况下，$\{x, \nu^\Sigma\}$ 是 $T\Sigma$ 的一组基。与前面一样，对于任意 $Z \in T\partial M_t$，我们可以计算

$$Z = (\alpha^2+1)\frac{\langle Z, x\rangle}{S^2 - \|x\|^2(\alpha^2+1)}x - \frac{\langle Z, x\rangle S}{S^2-\|x\|^2(\alpha^2+1)}\nu^\Sigma.$$

因此我们有

$$\widehat{h}(Z, \nu^\Sigma) = -\frac{\langle Z, x\rangle(\alpha^2+1)S}{S^2-\|x\|^2(\alpha^2+1)}\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|}, \frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|}\right). \tag{6.1}$$

6.1. 引理。 假设 定理 1.2 的假设成立，并且 Σ 是洛伦兹的。于是，对于任意一个 $x \in \partial M_t$ 使得 S 在该点取得其值为 $S^2 > \|x\|^2$（α^2+1）的全局最大值时，我们有

$$\nabla_{\mu^\top} S = S\left(-\frac{(S^2-\|x\|^2)(\alpha^2+1)}{S^2-\|x\|^2(\alpha^2+1)}\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|}, \frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|}\right) - \alpha H\right).$$

证明。我们回顾一下，根据引理 3.3,

$$\nabla_{\mu^\top} S = S\left(-\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|}, \frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|}\right) - \alpha h\left(\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}, \frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}\right)\right).$$

由于 S 在 $x \in \partial M_t$处取得其全局最大值， S 也在 ∂M_t上取得其最大值。因此，对于单位向量 $\gamma \in T_p\partial M_t$,

$$0 = \nabla_\gamma S = -h(x^\top, \gamma) = -\left\langle x^\top, \gamma\right\rangle h(\gamma,\gamma) + \left\langle x^\top, \frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}\right\rangle \widehat{h}\left(\gamma, \frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|}\right).$$

我们知道 $\langle x^\top、\ \gamma\rangle = \langle x、\ \gamma\rangle \neq 0$（否则 $x = \beta\nu^\Sigma$，从而 $S^2 = \|x\|^2(\alpha^2+1)$）。因此我们可以写成

$$h(\gamma,\gamma) = \frac{\langle x^\top, \mu^\top\rangle}{\langle x, \gamma\rangle(\alpha^2+1)}\widehat{h}(\gamma, \nu^\Sigma). \tag{6.2}$$

我们有

$$\left\langle x^\top, \mu^\top\right\rangle = S\alpha$$

因此

$$\left\langle x^\top, \gamma\right\rangle^2 = |x^\top|^2 - \left\langle x^\top, \frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}\right\rangle^2 = \frac{S^2}{\alpha^2+1} - \|x\|^2.$$

因此由（6.1）和（6.2）可得

$$h\left(\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|},\frac{\mu^\top}{|\mu^\top|}\right)=H-h(\gamma,\gamma)=H-\frac{S\alpha}{(\alpha^2+1)\langle\gamma,x\rangle}\widehat{h}\left(\gamma,\nu^\Sigma\right)$$
$$=H+\frac{S^2\alpha}{S^2-\|x\|^2(\alpha^2+1)}\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|},\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|}\right)$$

因此

$$\nabla_{\mu^\top}S=S\left(-\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|},\frac{\nu^\Sigma}{|\nu^\Sigma|}\right)-\frac{S^2\alpha^2}{S^2-\|x\|^2(\alpha^2+1)}\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|},\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|}\right)-\alpha H\right)$$
$$=S\left(-\frac{(S^2-\|x\|^2)(\alpha^2+1)}{S^2-\|x\|^2(\alpha^2+1)}\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|},\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|}\right)-\alpha H\right).$$

□

6.2. 命题（一致类空性的保持）。 假设定理 1.2 的条件成立，且 Σ 是洛伦兹的。那么存在常数 $C>0$，它仅依赖于 α、Σ 以及引理 4.1、引理 4.4 和引理 4.5 中的估计，使得对所有$t\in[0,T)$，都有 $S<C\|x\|$。

证明。 我们首先估计 S 在边界处的最大值。设 $S^2\|x\|^{-2}>2(1+\alpha^2)$。由（2.4）可得

$$\widehat{h}\left(\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|},\frac{\nu^\Sigma}{\|\nu^\Sigma\|}\right)=q(x)\|x\|^{-1}\left(\frac{S^2\|x\|^{-2}}{\alpha^2+1}-1\right)>c_\Sigma\|x\|^{-1}\left(\frac{S^2\|x\|^{-2}}{\alpha^2+1}-1\right).$$

因此，在边界最大值处，根据 引理 6.1、 引理 4.4、 引理 4.5以及方程（4.2）。

$$\nabla_{\mu^\top}S\leq S\left(\frac{-c_\Sigma}{\|x\|}\left(\frac{S^2\|x\|^{-2}}{\alpha^2+1}-1\right)+\frac{S|\alpha|}{2C_{\frac{S}{H}}+2t}\right)\leq\frac{S}{\|x\|}\left(-c_\Sigma\left(\frac{S^2\|x\|^{-2}}{\alpha^2+1}-1\right)+C_1S\|x\|^{-1}\right)$$

对某个 $C_1=C_1\left(\alpha,\ c_{\frac{S}{H}},\ C_{\frac{\|x\|^2}{1+t}}\right)$。因此 $\nabla_{\mu^\top}S<0$ 若 $S\|x\|^{-1}>C_2$ 对某个 $C_2=C_2(c_\Sigma,\ C_1)>\sqrt{2}(1+\alpha^2)$。利用（4.2），这意味着存在一个 $C_3=C_3(C_2,\ C_{\frac{\|x\|^2}{1+t}})$ 使得 S^2 在边界上的任何全局极大值满足 $S^2<C_3(1+t)$。

现在我们处理内部极大值。也就是说，我们有

$$\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)S\leq-|A|^2S+2H\leq-\frac{1}{2}H^2S+2H\leq2S^{-1},$$

so

$$\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)S^2\leq4-\frac{|\nabla S^2|^2}{2S^2}.$$

因此，存在 $C_4=C_4(M_0,C_3)$ 使得在 $\overline{M}_t$ 上我们有 $S^2\leq C_4+$最大值$\{4,C_3\}t$，由最大值原理可得。因此，由 引理 4.5 和 (4.1) 即得所述结论。 □

6.3.推论。 假设定理 1.2 的假设成立，并且 Σ 是洛伦兹的。则存在一个 $C_v>0$ 仅依赖于 α、 Σ 以及引理 4.1、引理 4.4 和引理 4.5 中的估计，使得对所有 $t\in[0,T)$， $v<C_v$。

证明。 对所有 $x\in\Sigma$， $-\langle e_3,\ x\|x\|^{-1}\rangle\leq C(\Sigma)$，因此按照引理 4.1 的证明中所用的直接估计方法，但将 μ 替换为 $x\|x\|^{-1}$，并将 α 替换为估计 $C(\Sigma)$，可得 $v<\widehat{C}(\Sigma)S\|x\|^{-1}$。该估计现在由命题 6.2推出。 □

7. Proof of Theorem 1.2

我们对引理 4.4作如下改进。

7.1. 引理。在重标度流 M_τ 上，我们有

$$\left|\frac{\widetilde{H}}{\widetilde{S}}-\frac{1}{2}\right|\leq Ce^{-\tau}.$$

证明。由缩放性质，我们有$\frac{H}{S}=(1+t)\frac{H}{S}$。利用上述演化方程可得

$$\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)(1+t)\frac{H}{S}=-2\frac{H}{S}\left((1+t)\frac{H}{S}-\frac{1}{2}\right)+2\left\langle\frac{\nabla S}{S},\nabla\frac{H}{S}\right\rangle.$$

记 $\phi=(1+t)\frac{H}{S}-\frac{1}{2}$,

$$\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)\phi=-2\frac{H}{S}\phi+2\left\langle\frac{\nabla S}{S},\nabla\phi\right\rangle.$$

利用引理 4.4,

$$\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)\phi^2=-4\frac{H}{S}\phi^2+\left\langle 4\phi\frac{\nabla S}{S}-2\nabla\phi,\nabla\phi\right\rangle\leq-\frac{2}{C_{\frac{S}{H}}+t}\phi^2+2\left\langle\frac{\nabla S}{S},\nabla\phi^2\right\rangle,$$

因此

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)\phi^2(C_{\frac{S}{H}}+t)^2&\leq 2(C_{\frac{S}{H}}+t)\phi^2-2(C_{\frac{S}{H}}+t)\phi^2+2\left\langle\frac{\nabla S}{S},\nabla(C_{\frac{S}{H}}+t)^2\phi^2\right\rangle\\&=2\left\langle\frac{\nabla S}{S},\nabla(C_{\frac{S}{H}}+t)^2\phi^2\right\rangle.\end{aligned}$$

应用最大值原理可得

$$\left|(1+t)\frac{H}{S}-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{C(M_0)}{C_{\frac{S}{H}}+t}.$$

□

我们将 k^{th} 相容条件定义为

$$\frac{d^k}{dt^k}b(x,D\widetilde{\rho})\Big|_{t=0}=0,$$

其中 b 如（2.7）。

现在我们证明以下结果，它蕴含 定理 1.2。

7.2. 定理. 设 Σ是严格凸锥$\mathcal{C}\subset\mathbb{R}^3_1$ 的非退化边界，且$M_0\subset\overline{\mathcal{C}}$ 是严格平均凸、类空且图形状的，其图为 $\widetilde{\rho}_0$。进一步设 $\widetilde{\rho}_0$ 满足边界条件以及直至 k^{th} 阶的所有相容条件。则:

（1）唯一有界解

$$\widetilde{\rho}\in C^{2k+\alpha;\frac{2k+\alpha}{2}}(\Omega\times[0,\infty)))\cap C^\infty(\Omega\times(0,\infty))$$

的 (2.7) 对所有缩放时间 τ。该解有界，并且对于任意固定的$\epsilon>0$，我们有一致的 $C^{l;\frac{l}{2}}(\Omega\times[\epsilon,\infty))$ 对于所有 $0\leq l\in\mathbb{N}$。

(2) 解 $\widetilde{\rho}$ 一致且光滑地收敛到一段满足边界条件的 MCF 膨胀解，当 $t\to\infty$ 时。

证明。这部分首先由一致抛物性和斜性估计，以及标准理论的应用得到，正如 [24, 第 2.6 节和第 6 节中所述。1]现在我们给出更多细节。

按照与 [10, 定理 2.5.7, 第 106] 页相同的方法，可以得到短时间存在性；我们也以完全相同的方式线性化边界条件，并利用[15, 定理 5.3, 第 320] 页，确保线性化问题在 $\tau \in [0, T_1)$ 上具有适当的存在性和估计，并满足一些小的 $T_1 > 0$。现在假设 $T < \infty$ 是图形解存在的最大时间区间。

在 $\sigma = -1$的情况下，(2.7) 的一致抛物性和斜性要求已在命题 2.4 中得到满足，引理 4.1、命题 5.2 和引理 4.5分别对此进行了证明。

对于情形 $\sigma = 1$，命题 2.4 中的第一个条件由 推论6.3得到。类时的向量的性质表明，存在常数 $C = C(\Sigma) > 0$ 使得$Su^{-1} \geq -C\left\langle \nu, x\|x\|^{-1}\right\rangle \geq C > 0$ 因此 命题2.4 中的第二个条件得到满足。由于 命题 2.4中的最后一个条件由 引理 4.5得到，故一致抛物性和斜性成立。

此外，利用这些估计，我们还可以得到

$$c_{\widetilde{\rho}} \leq \widetilde{\rho} \leq C_{\widetilde{\rho}} \qquad \text{and} \qquad |D\widetilde{\rho}|^2 < \frac{v^2}{S^2 u^{-2}} < C_v^2 c_{Su^{-1}}^{-2}.$$

根据纳什–莫泽–德·乔治里偏微分方程估计 [22, 引理 13.22, 第353] 页 $C^{1+\beta;\frac{1+\beta}{2}}$，我们现在在 [24, 中得到了统一估计；此外，按照1], 第 2.6 节和 6. $C^{k+\beta;\frac{k+\beta}{2}}$中的方法，我们可以进一步进行引导，从而得到统一的 $\times[0, \widetilde{T}(\Omega\ k))$（其中 $\epsilon > 0$ 如定理陈述中所述）。此外，对于任意 $C^{l+\beta;\frac{l+\beta}{2}}$，我们还可以得到关于 $\times[\epsilon, \widetilde{T}(\Omega\ \epsilon))$ 的估计，这些估计只依赖于 l 和 。由此，我们可以将解光滑地延拓到区间 $[\epsilon, T]$，并且 $u(T)$ 满足任意阶的相容条件。因此，我们可以再次应用短时间存在性定理，从而 ，这与 T 的极大性相矛盾。因此，$T = \infty$，并且我们得到了所声称的光滑估计。

由引理 7.1 可知，指数表减 $\widetilde{\rho}_{\tau} = \frac{H}{S} - \frac{1}{2}$ 因此存在一个时间子序列，使得 $\widetilde{\rho}$ 收敛于平稳方程 $\widetilde{H} = \frac{S}{2}$ 的一个解，我们将其记为 $\widetilde{\rho}_\infty$。然而，通过积分可知，对于 τ_1，$\tau_2 > 0$，

$$|\widetilde{\rho}(x, \tau_1) - \widetilde{\rho}(x, \tau_2)| < Ce^{-\min\{\tau_1, \tau_2\}},$$

并在 τ_2 中取相同的子序列极限，

$$|\widetilde{\rho}(x, \tau) - \widetilde{\rho}_\infty| < Ce^{-\tau},$$

这意味着重标度方程的完全一致收敛。根据我们的光滑估计和插值，光滑收敛随即得到。□

References

[1] StevenJ.Altschuler和 Lang Wu, *Translating surfaces of the non-parametric mean curvature flow with prescribed contact angle* **2** 1994 101 111，《变分法与偏微分方程》（），–。MR 1384396[2] RobertBartnik, *Existence of maximal surfaces in asymptotically flat spacetimes*, Commun. Math. Phys. **94** 1984 2, 155 175 0761792（），第 – 期。MR Klaus Ecker,

[3] *On mean curvature flow of spacelike hypersurfaces in asymptotically flat spacetimes*, J.Aus-tral. Math. Soc.55（1993），第1期，41–59。MR 1231693[4]，*Interior estimates and longtime solutions for mean curvature flow of noncompact spacelike hypersurfaces in Minkowski space* **46** 1997 3, 481 498 1484889，J. Differ. Geom.（），第 – 期。MR [5] Klaus Ecker 和 Gerhard Huisken, *Parabolic methods for the construction of spacelike slices of prescribed mean curvature in cosmological spacetimes* **135** 1991 595 613 1091580，Commun. Math. Phys.（），–。MR

[6] Nick Edelen, Robert Haslhofer, Mohammad N. Ivaki,and Jonathan J. Zhu, *Mean convex mean curvature flow with free boundary* **75** 2022 4, 767 817 , Comm. PureAppl. 4400902
Math. ( ),no. – .MR [7] *Mean curvature motion of graphs with constant contact angle at a free boundary*
Alexandre Freire, , Anal. PDE 3 (2010), no. 4, 359–407. MR 2718258[8] Shanze Gao,Guanghan Li, and Chuanxi Wu, *Translating spacelike graphs by mean curvature flow with prescribed contact angle* **103** 2014 6, 499 508 , Arch.Math. (Basel) ( ), 3282644
no. –. MR [9] *Hypersurfaces of prescribed mean curvature in Lorentzian manifolds* Claus Gerhardt,, Math. Z.
235(2000),no. 1, 83 97 1785072 – . MR,, 几何与拓扑丛书，第39卷，波士顿国际出版社有限公司，萨默维尔，2006年。
[10] ——— *Curvature problems*
MR2284727[11] BoGuan, *Mean curvature motion of nonparametric hypersurfaces with contact angle condition*, 几何中的椭圆型和抛物型方法（明尼阿波利斯，MN，1994），A KPeters，韦尔斯利，MA，1996年，第47–56页。MR 1417947[12] Fangcheng Guo, Guanghan Li, and Chuanxi Wu, *Mean curvature type flow with perpendicular Neumann boundary condition inside a convex cone* 2014 315768, 7 , Abstr.Appl. Anal. ( ), 3240531
Art. ID . MR [13] *Self-similar solutions to the mean curvature flow in the Minkowski plane* $\mathbb{R}^1$
HoeskuldurP. Halldorsson, ,1, J. Reine Angew. Math. **704** 2015 209 243 3365779 ( ), – .
MR GerhardHuisken, *Non-parametric mean curvature evolution with boundary conditions*,J. Differ. Equ. 77 (1989), no. 2, 369–378. MR 0983300[15] Olga Ladyˇ [14]
z *Linear and quasi-linear equations of para-* enskaya,
bolic type 23,
VsevolodSolonnikov,and NinaUral'tseva, 数学专著译丛，第卷，美国数学学会，普罗维登斯，R.I，1968年，MR 0241821[16] *A note on the oblique derivative problem for graphical mean curvature flow in Minkowski*
Ben Lambert, *space* **82** 2012 1, 115 120 2922727 , Abh.
Math. Semin. Univ. Hamb. ( ), no. –. MR[17] *The perpendicular Neumann problem for mean curvature flow with a timelike cone boundary condition* **366** 2014 7, 3373 3388 ,Trans. Amer. Math. 3192599
Soc. ( ), no. –. MR [18] ——— *Construction of maximal hypersurfaces with boundary conditions* , , Manuscripta Math.
153 (2017), no.3-4, 431–454. MR3662054[19] , *Gradient estimates for spacelike mean curvature flow with boundary conditions*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2 **62** 2019 2, 459 469 3935807) ( ), no. – . MR Ben Lambert and
[20] *Spacelike mean curvature flow*
JasonLotay,,J. Geom. Anal.31 (2021), no. 2, 1291–1359. MR 4215263[21] Guanghan Li and Isabel Salavessa, *Mean curvature flow of spacelike graphs*, Math. Z.269(2011), 697–719. MR 2860260[22]Gary Lieberman, *Second order parabolic differential equations*, 世界科学出版社，新加坡，1998年。MR 1465184[23] Henri Roesch and J ulian Scheuer, *Mean curvature flow in null hypersurfaces and the detection of MOTS*, Commun. Math. Phys. **390** 2022 3, 1149 1173 4389079 ( ), no. – . MR Oliver C. Schnurer,
[24] ¨ *Translating solutions to the second boundary value problem for curvature flows*, Manuscripta Math. 108 (2002), no. 3, 319–347. MR 1918081[25] Axel Stahl, *Convergence of solutions to the mean curvature flow with a Neumann boundary condition*, Calc. Var.Partial Differential Equations 4 (1996), no. 5, 421–441. MR 1402731[26] Valentina-Mira Wheeler, *Mean curvature flow with free boundary in embedded cylinders or cones and uniqueness results for minimal hypersurfaces* **190** 2017 157 183 ,Geom. Dedicata ( ), – . 3704818
MR [27] *Ricci flow on surfaces along the standard lightcone in the* $3+1$*-Minkowski spacetime*Markus Wolff, ,
Calc. Var. Partial Differ. Equ. 62 (2023), no. 3, art. 90. MR 4541080

Department of Mathematical Sciences, Durham University Upper Mountjoy Campus, Stock-ton Rd, Durham DH1 3LE, UK*Email address*: wilhelm.klingenberg@durham.ac.uk

School of Mathematics, The University of Leeds, Leeds, LS2 9JT, UK
Email address: b.s.lambert@leeds.ac.uk

Goethe-Universität Frankfurt am Main, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Str. 10,60325 Frankfurt, Germany*Email address*: Scheuer@math.uni-法兰克福.de