脉冲体力产生层流涡环力

拉比娅·松梅兹[1]，罗伯特·A. 汉德勒[1,2,(a)]，瑞安·凯利[3]，戴维·B. 戈德斯坦[3]，和赛伊莎 n 苏里亚纳拉亚南[4]1) 机械工程系，乔治·梅森大学，弗吉尼亚州费尔法克斯，22030 2) 乔治·梅森大学模拟与建模中心，弗吉尼亚州费尔法克斯，22030 3) 航空航天工程系，德克萨斯大学，德克萨斯州奥斯汀，78712 4) 机械工程系，阿克伦大学，俄亥俄州阿克伦，44325a) 通讯作者：rhandler@gmu.edu

研究表明，具有特定时空特征的脉冲体力能够生成层流涡环。该方法可在初始静止的流体中生成涡环；涡环生成后，流场会自动满足边界条件且无散度。数值模拟和解析模型表明，尽管生成过程具有非线性特征，仅考虑扩散也能准确预测这些涡环的强度。本文提出了一种特别简单的模型，通过垂直薄层近似涡量源。该模型对涡环环量的预测几乎与采用涡量源精确几何形状的模型一样准确。研究发现，当力的持续时间短于基于力半径和流体粘度确定的时间尺度时，使用无黏模型即可准确预测涡环环量。

1. 引言

涡环是一种尤为引人入胜的流体动力学流动，不仅因其在理解涡旋动力学方面具有基础性作用而备受关注，也因其技术应用而受到重视 [1]。然而，研究涡环动力学需要确保其生成高效、可控且可重复。早期实验 [2] 采用了一种简单方法：让一滴染色水进入水柱；现代方法 [3-7] 则采用控制精确的活塞驱动系统。

这些实验研究也辅以数值模拟，用于研究层流和湍流涡环以及相关涡状结构的动力学 [8-12]。Dommermuth （ 1993 ）采用基于 Helmholtz 分解的数值方法，研究涡对与自由表面的相互作用。初始条件为具有高斯涡量分布的涡对；为满足边界条件并与数值方法相容，必须谨慎选择该分布。Shariff 等人（1994）采用有限差分方法，基于先前开发的方法 [13], 研究涡环的三维不稳定性；这些方法同样要求初始条件与边界条件相容。Bergdorf 等人（2007）采用涡方法模拟湍流涡环的演化与衰减，并使用高斯初始涡量分布，以确保速度场无散度。这些研究采用了基于网格的方法和涡方法，均要求指定与边界条件及整体质量守恒相一致的初始速度场和涡量场。Swearingen 等人（1995）和 Smith 等人（2001）采用了其他生成涡环的方法：他们利用脉冲体力生成层流涡环，以研究涡环与自由表面的相互作用。此外，还采用体力通过反馈方案施加无滑移边界

条件 [14]。然而，Swearingen 等人（1995）和 Smith 等人（2001）的研究并未探讨涡环生成过程的具体细节。例如，我们希望了解产生给定强度涡环所需脉冲力的时空结构。本研究聚焦于层流涡环的生成，旨在结合解析方法和采用伪谱方法的直接数值模拟来探讨这一问题。 与指定初始条件的方法相比，利用脉冲体力生成涡环等相干涡结构具有一些优势。其中一项优势是，施加脉冲力可以在初始静止的流体中激发涡环；涡环生成后，流场会自动满足边界条件且无散度。与其他方法相比，这可能更接近实验中涡环的实际生成方式，因此能够对生成过程进行研究。我们将证明，可以根据体力的具体特性先验地准确预测涡环的强度。值得注意的是，此类体力可在实验中通过导电流体中的洛伦兹力产生，用于控制壁面湍流 [15,16] 。尽管以这种方式产生的力并非脉冲力，但似乎没有理由认为无法以这种方式产生洛伦兹力。本文其余部分安排如下：*2.* 控制方程与力场描述，*3.* 量纲分析以及环量和动能的演化，*4.* 数值方法，*5.* 数值模拟结果，*6.* 脉冲体力生成的层流涡环环量模型及其与数值模拟的比较，以及 *7.* 总结与讨论。第 2 节和第 3 节介绍一般运动方程、脉冲体力的时空特性，以及描述环量和动能演化的一般方程。

第 4 节介绍数值方法，第 5 节展示流场的可视化结果，以及环量、核心半径和动能的时间演化结果。第 6 节介绍可用于预测脉冲体力产生的涡环环量的解析模型。将这些模型与数值模拟进行比较后发现，尽管涡环的发展具有非线性，只考虑涡量扩散也能准确预测涡环环量。

2. 控制方程与力场描述 d

本文研究不可压缩牛顿流体的运动，其运动由以下动量方程和连续性方程描述：

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = -\rho^{-1}\boldsymbol{\nabla}\mathrm{p} + \nu\nabla^{\mathbf{2}}\mathbf{V} + \mathbf{f}, \quad (1)$$

and

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V} = 0, \quad (2)$$

其中，$D/Dt = \partial/\partial t + \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{V}$ 表示物质导数，t 表示时间，$\boldsymbol{V} = (u, v, w) = (u_1, u_2, u_3)$表示流体速度，其分量沿$x$、$y$、$z$ 方向，或沿x_1、x_2、x_3 方向；p 表示压力，$\boldsymbol{f}$ 表示单位质量体积力，ρ 表示密度，ν 表示运动黏度。本文将右手x、y、z坐标系与流向、垂直方向（或壁面法向）和展向这三种称谓交替使用。

本文关注一种体力 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) = (f_x, f_y, f_z)$，它具有以下特性：（1）它具有脉冲性，即作用时间相较于其他流动时间尺度较短；（2）它必须能够产生流体力矩；（3）它应作用于空间中的局部区域。局部 是指其尺寸相较于计算域较小；在物理实验中，则是指其尺寸相较于实验设施较小。体力的物理实例包括

由重力或电磁场引起的体力（Crawford and Karniadakis (1997) and Breuer et al. (2004)），以及由聚合物效应引起的体力 [17,18]。

图1展示了力场的一个垂直（$y-z$）平面，该力场仅存在于空间域中心的圆柱区域内。此力场具有所需的性质，并将在本文中使用；它仅沿 x 方向作用，因此 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)=(f_x,$ 0,0)。力的空间分布由下式描述：

$$f_x \quad = \quad A(t)g_r(r)g_x(x), \tag{3}$$

其中

$$g_r=\frac{1}{2}(1+\tanh(\beta[R-r]), \tag{4}$$

and

$$g_x=\frac{1}{2}(1+\tanh\big(\beta\big[l_f/2-|x-x_0|\big]\big). \tag{5}$$

在这些表达式中，使用双曲正切函数，并通过渐消参数 β使力场边缘平滑。在这些表达式中，R 和$l_f/2$定义圆柱区域的名义半径和长度，$r=\sqrt{(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$，以及 x_0，y_0 和 z_0 定义力场中心的位置。在此处描述的所有情形中，x_0，y_0和z_0 表示空间域的中心。通过函数 $A(t)$控制力的开启和关闭，~~该函数定义如下：~~

$$A(t)=\begin{cases}F_0, & 0\le t\le\tau\\ 0, & t>\tau\end{cases}, \tag{6}$$

其中F_0 是时间无关的力幅值，而τ 是力的时间持续时间。在图2中，力场的几何形状以示意图形式显示在水平$(x-z)$平面中。将表明此处定义的力场可以生成沿x -方向传播的涡环。

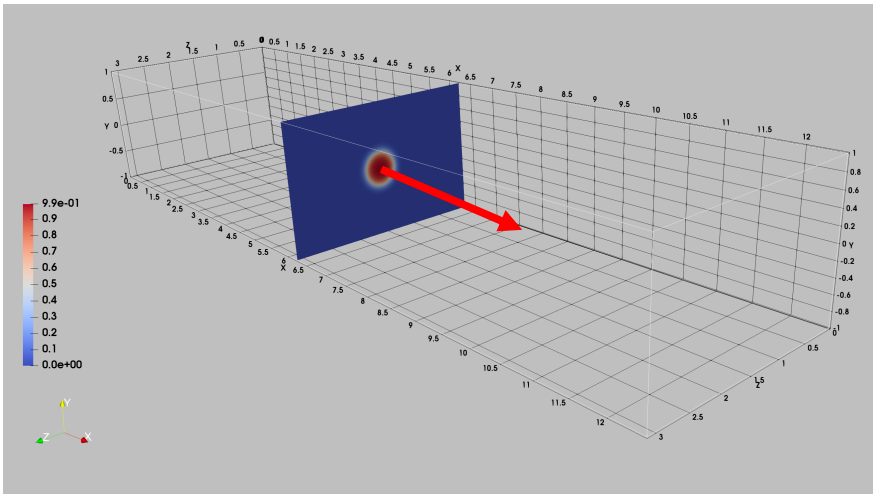

图1：在 $y-z$ 平面中 x-分量的体力用于生成涡环，其横截面如图所示。力存在于由方程（3-6）描述的圆柱区域内。色条对应 x-分量的力 f_x，其无量纲化所用的量为 F_0（见方程6）。箭头表示力沿 x 正方向作用。此处 x、y、和 z 坐标的单位为厘米。x 和 z 方向上的计算域长度分别为 $l_x = 4\pi$ 厘米和 $l_z = \pi$ 厘米，而 y 方向上的半高为 $l_y = 1$ 厘米。以 l_y 无量纲化后的计算域尺寸为

$L_x = 4\pi$、 $L_y = 2$ 和 $L_z = \pi$。分别使用 $128 \times 65 \times 128$ 个网格节点计算该力在 x、y 和 z 方向上的分布。在此报告的所有模拟中，定义力作用区域的圆柱区域长度和半径为 l_f。厘米，

$= 2R = 0.5$ x_0 y_0 z_0

并施加该力，使其中心与计算域的中心（、、）重合。此外，用于定义体力的渐消参数设为 $\beta = 15cm^{-1}$，使力场边缘相当陡峭。整个计算域如图所示。

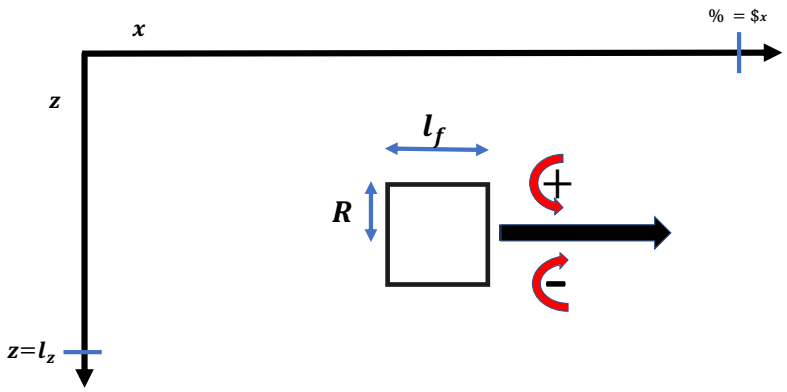

图2：示意图（未按比例绘制），显示圆柱体力作用的 $x-z$ 平面内的区域，f_x。图中显示中心（$y = 0$）平面。圆柱区域的长度和半径分别为 l_f 和 R。计算盒的中心位于计算域的正中心（x_0，y_0，和 z_0）。向右的箭头表示力的作用方向，红色箭头表示涡环的旋转方向。y坐标轴垂直于纸面并指向外侧。

3. 量纲分析以及环量和动能的演变

3.1 量纲分析

通过进行量纲分析，可以全面描述本文所研究的问题。为此，将问题分为两个时间段很有帮助：生成阶段（T1），其中$0 \le t \le \tau$；以及衰减阶段（T2），其中$t > \tau$。在 T1 中，体力作用于流体并生成涡环；在 T2 中，涡环的动能耗散。在以下分析中，我们将涡环的环量Γ 作为因变量，其中 $\Gamma = \oint \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ 是沿适当定义的闭合曲线对速度进行线积分所得。选择涡环环量作为因变量，是基于 Glezer（1981，1988）的研究；他发现Γ/ν 对于表征涡环强度十分重要，例如可用于判断涡环是否保持层流。因此，T1 中涡环环量的适当描述形式为：

$$\Gamma = A\Upsilon F_0, l_f, \beta, R, \nu, t\text{a}。 \qquad (7)$$

如果我们选择一个速度尺度$v^* = \sqrt{F_0 l_f}$ 和一个时间尺度 $\tau^* = l_{f2}\ \nu$那么方程（7）可以写成无量纲形式：

$$\Gamma/\nu = B\left(Re_f, t^*, \frac{R}{l_f}, \beta R\right) \ , \qquad (8)$$

其中$Re_f = {}^{v^*}_{l_f \nu}$是基于体力幅值定义的雷诺数，而$t^* = {}^{t}_{\nu\, l_{f2}}$是无量纲时间。我们还注意到，$\Gamma/\nu$ 有时也称为涡环雷诺数，Re_Γ [11]。在 T2 中，必须将体力的持续时间τ 纳入分析，从而得到：

$$\Gamma/\nu = B\left(Re_f, t^*, t_{Ro}, \frac{R}{l_f}, \beta R\right) \ , \qquad (9)$$

其中$t_{Ro} = {}^{\tau}{}_{\nu_lf^2}$，它称为 Roshko 数 [19]。

3.2 涡量与环量的产生

应当区分体力产生涡量的物理过程与实验中通常产生涡量的方式。如前所述，实验中通常利用活塞驱动流体通过圆柱管来产生涡环。管内流体的运动会在圆柱内表面产生涡量，这些涡量随后被卷入离开管口的涡环中。相比之下，当空间紧凑体积力作用于流体时，所产生的涡量会在形成的瞬间立即扩散到流体内部。阅读下文时应牢记这一差异。

通过考察不可压缩流体的涡量演化方程，可以理解如何利用体力产生涡量 $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$，该流体具有恒定密度，其方程为：

$$\frac{D\boldsymbol{\Omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{V} + \nu\nabla^2\boldsymbol{\Omega} \ + \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{f} \ , \qquad (10)$$

其中，左侧的项是涡量的物质导数；右侧第一项表示速度梯度引起的涡量拉伸与倾斜，第二项表示黏度引起的涡量扩散，第三项表示单位质量体积力产生的涡量，$\boldsymbol{f}$。方程（7）与体力方程的定义（3-6）结合，可用于确定在时间 $t = 0$ 涡量变化率的表达式，假设流体初始时处于静止状态（见附录A）。由此得到：

$$\left.\frac{\partial \Omega_y}{\partial t}\right|_{t=0} = \ \frac{\partial f_x}{\partial z} \ , \ \ and \ \ \left.\frac{\partial \Omega_z}{\partial t}\right|_{t=0} = \ -\frac{\partial f_x}{\partial y} \ . \qquad (11)$$

这表明，力场会产生展向（Ω_z）和垂直（Ω_y）涡量。为了确定环周围的环量，方便起见，可在水平（$x-z$ ）平面上对涡量垂直分量进行积分。根据方程（8），该涡量分量的来源是$\partial f/\partial \overline{x}_z$，如图3所示。我们还注意到，由于涡线不能在流体中终止，垂直和展向涡量分量的产生必然形成环形涡线，从而构成涡环。

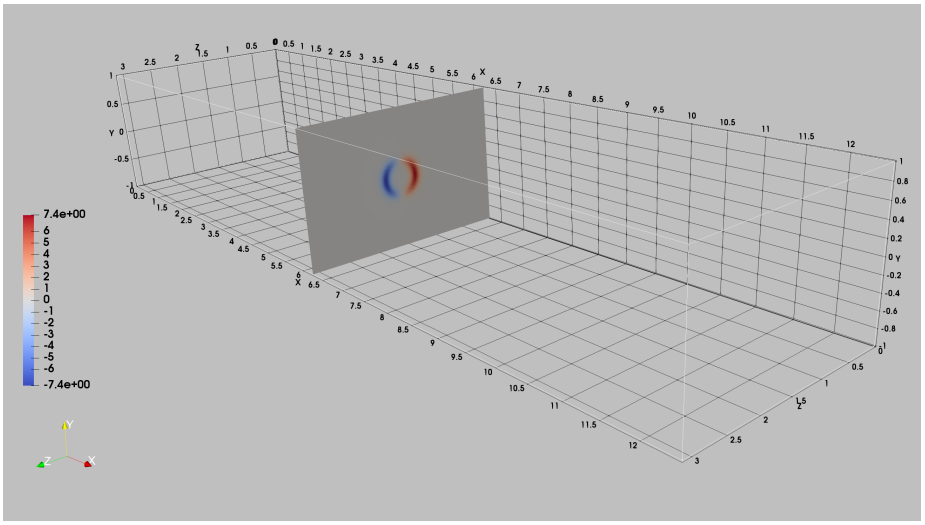

图 3：展示了源所在的横截面 $y-z$ 平面，其中显示了竖直方向的（y）涡量。色标对应于$\partial f/\partial \overline{x}_z$，并以 F_0/l_y 进行无量纲化。可以看到，该源由正、负新月形区域组成，这些区域源自力场的圆柱几何。

为定义本问题中的环量，我们注意到，我们主要关注关于平面 $z=l_z/2$ 对称的层流涡环，以及关于中心平面 $y=0$ 对称的层流涡环，其中 l_x，$2l_y$，和 l_z 分别表示图1所示 x、y 和 z 方向上的计算域长度。这些对称性由力场施加于流场。我们还注意到，除非这些涡环变得不稳定，否则它们必须始终保持这些对称性

由此便得到如下环量定义，该定义基于斯托克斯定理：

$$\Gamma = \overline{\Omega_y(x,0,z,t)} \equiv \int_0^{l_z/2} \int_0^{l_x} \Omega_y(x,0,z,t)dxdz \ , \qquad (12)$$

其中，$\Omega_y(x,0,z)$ 是中心平面上的涡量垂直分量，带横线的符号定义为对由区域 $0 \le z \le l_z/2$ 和 $0 \le x \le l_x$ 给出的半平面进行积分。首先对以旋转形式写出的动量方程取旋度，可推导出环量演化方程，由此得到涡量垂直分量的下列方程：

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} + \nu\nabla^2\Omega_y + \frac{\partial f_x}{\partial z}, \qquad (13)$$

其中，$H_x = v\Omega_z - w\Omega_y$，且 $H_z = u\Omega_y - v\Omega_x$。接下来，利用所有流动对称性对方程 (10) 应用带横线的运算，并考虑 $(x-z)$ 平面上的周期性边界条件；本研究中的所有模拟均采用这些边界条件。由此得到环量演化方程（见附录 B）：

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = D + L + \overline{\frac{\partial f_x(x,0,z)}{\partial z}} \ , \qquad (14)$$

其中，$D = \nu(\overline{\Omega_y})_{yy}\big|_{y=0}$ 表示涡量垂直分量的黏性扩散，而$L = \nu \int^{x} \left[\frac{\partial \Omega_y}{\partial z} \Big|_{z=L_z/2} l0 - \frac{\partial \Omega_y}{\partial z} \Big|_{z=0} \right] \Big|_{y=0} dx$ 表示垂直涡量净侧向通量。需要注意的是，当流体黏度为零且渐消参数为$\beta \to \infty$时，可根据方程 (12) 对方程 (14) 进行空间积分，并在区间（$0 \le t \le \tau$）内进行时间积分，得到：

$$\Gamma = F_0 l_f \tau \quad . \qquad (15)$$

方程 (15) 给出的表达式表示可能达到的最大环量，我们称之为无黏环量极限。在此极限下，只要力持续作用，环量就会随时间线性增加。对于具有黏度的流体，由于预计D和L 均为负值，根据方程 (14)，环量随时间的增长速度应低于线性增长。因此，涡环雷诺数永远不会超过$Re_\Gamma = F_0 l_f \tau/\nu$。

3.3 体积平均动能的演化

除环量外，单位质量的体积平均动能定义为 $K = \frac{1}{V}\int k \, \mathrm{dv} \equiv < k >$，其中 $k = \frac{u_i u_i}{2}$ 其中积分在整个流体体积上进行，V，是衡量流动动力学的一个特别有用的指标，因为其演化方程具有简单的物理解释。因此，我们将用它来概括流动的整体情况。由方程 (1) 可得 k 的演化方程（见附录 E）：

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\partial_j\left(k u_j\right) + \rho^{-1}\partial_j\left(p u_j\right) + \nu\partial_j\partial_j \mathrm{k} - \nu\partial_j u_i \partial_j u_i + f_j u_j \quad . \qquad (16)$$

对方程 (7) 进行体积平均并应用所有边界条件，可得到 K 的演化方程，如下所示:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -\epsilon + < f_j u_j > . \qquad (17)$$

其中，动能耗散由 $\epsilon = \nu < \partial_j u_i \partial_j u_i >$ 给出，而 $<f_j u_j>$ 可识别为施加的体力对流体所做的功。根据方程 (17)，在体力关闭的瞬间，动能必须衰减（$\frac{\partial K}{\partial t} < 0$），因为耗散严格为正。

4. 数值方法

为确定上述类型的脉冲体力在多大程度上能够生成具有所需特性的涡环，我们进行了一系列直接数值模拟。为此，使用伪谱方法 [17,18] 求解方程 (1,2)，计算采用通道几何，其中所有场变量在水平方向（$x-z$）平面上展开为傅里叶模态，在垂直方向上展开为切比雪夫模态。谱方法具有指数收敛性 [20]，并已成功用于模拟充分发展的湍流 [21,22]。计算域长度分别为 $L_x=4\pi$、$L_y=2$ 和 $L_z=\pi$，对应 x、y 和 z 方向；这些长度均以通道半高 l_y 无量纲化。在这些模拟中，涡环将沿 $x-$ 正方向运动，因为体力始终沿正方向作用，如图1所示。$128\times65\times128$ 个网格节点分别分布在 x、y 和 z 方向。按实际物理尺寸计算，x 和 z 方向上的计算域长度分别为 $l_x=4\pi$ cm 和 $l_z=\pi$ cm，而在 y 方向上，半高为 $l_y=1$ cm。相应的网格节点间距分别为 $\Delta x=9.82\times10^{-4}$ m 和 $\Delta z=2.45\times10^{-4}$ m。在 y 方向上，切比雪夫多项式的使用导致网格不均匀。计算域边界处的网格分辨率最低，为 $\Delta y=1.2\times10^{-5}$ m；在计算域中心，分辨率为 $\Delta y=4.91\times10^{-4}$ m。因此，三个方向上的网格分辨率均达到亚毫米级。所有模拟中，流体初始时均静止，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t=0)=\boldsymbol{0}$。在通道顶部和底部壁面上，对速度场施加了无剪切条件 $\partial u_1/\partial x_2=\partial u_3/\partial x_2=u_2=0$，并对垂直涡量施加了 $\partial\Omega_2/\partial x_2=0$。本文报告的所有模拟中，定义体力的圆柱区域的长度和半径均为 $l_f=2R=0.5$ cm，而体力

施加时，其中心与计算域的中心（x_0, y_0, z_0）重合。此外，用于定义体力的渐消参数设为 $\beta = 15\ cm^{-1}$，这使力场边缘相当陡峭（见图 1–3）。此外，体力作用的时间步长为 $\Delta t = 10^{-4}\ s,$，作用时长为 $\tau = 0.2\ s$，每次模拟的持续时间为 2.0 s。本文使用的所有相关符号均列于附录C的表 1 中。

进行了 12 次模拟，其中改变了力幅值 F_0 和运动黏度 ν。选取了三种运动黏度（$\nu = 10^{-2}, 10^{-1}, 10^{0}$，单位为 cm^2/s），以获得基于力的雷诺数 Re_f，其范围跨越两个数量级，从 3.535 到 353.5。采用这组参数时，对于每种黏度，基于环量定义的最大无黏涡环雷诺数为 $Re_\Gamma = 10^3$。所有运行的参数均列于附录 D 的表 2 中。

5. 数值模拟结果

本研究的主要目标之一是建立模型，用于预测由脉冲体力生成的层流涡环周围的环量。环量可用于确定涡环雷诺数，Re_Γ 进而可用于预测涡环最终是否可能转变为湍流。虽然涡环转变为湍流的雷诺数并无明确定义，但 Glezer（1988）汇编的数据表明，当 $Re_\Gamma \gtrsim 10^4$ 或略低于此值时，会形成湍流环。为推动此类模型的建立，首先考察直接模拟的结果很有帮助。为此，我们展示二维和三维流场可视化、环量与流场动能的时间演化，以及等效涡环核心半径的演化。

5.1 二维和三维流动可视化

图4展示了在$x-z$ 平面、计算域中心（$y=0$）处，$\nu = 10^{-2}\ cm^2{-}s^{-1}$, 和$F_0 = 99.95\ cm-s^{-2}$情况下垂直涡量的演化。图中展示了四个时刻的图像。图4(A)和图4(B)取自T1，此时体力作用于流体；图4(C)和图4(D)取自T2，此时力不再作用。图4(A)展示了经过一个时间步后的垂直涡量场；需要回想的是，流体初始时处于静止状态。这里可以清楚地看到，涡量由两片片层组成，呈现为红色的正值线和蓝色的负值线。这些片层沿x方向，长度为l_f，即图1所示圆柱形力场的线性尺度；每片距位于$z = L_z/2$处的中心线$R/2$。这样的涡片是力场作用所产生剪切流的自然结果。图4(B)中，涡片在横向上逐渐增厚，涡量也变得更加集中，形状更像一个环。图4(C)中，力已停止作用于流体，涡量进一步集中为正、负两个核心。最后，在图4(D)中，虽然仍能看到这些核心，但与图4(C)相比，涡旋强度有所减弱，涡量场显然正在横向扩散。图5给出了与图4相同情况的一组三维图像序列。每幅图中都显示了涡量大小的一个等值面，以及选取的速度矢量。由于存在y 和z 方向的涡量分量，因此形成了环状等值面。

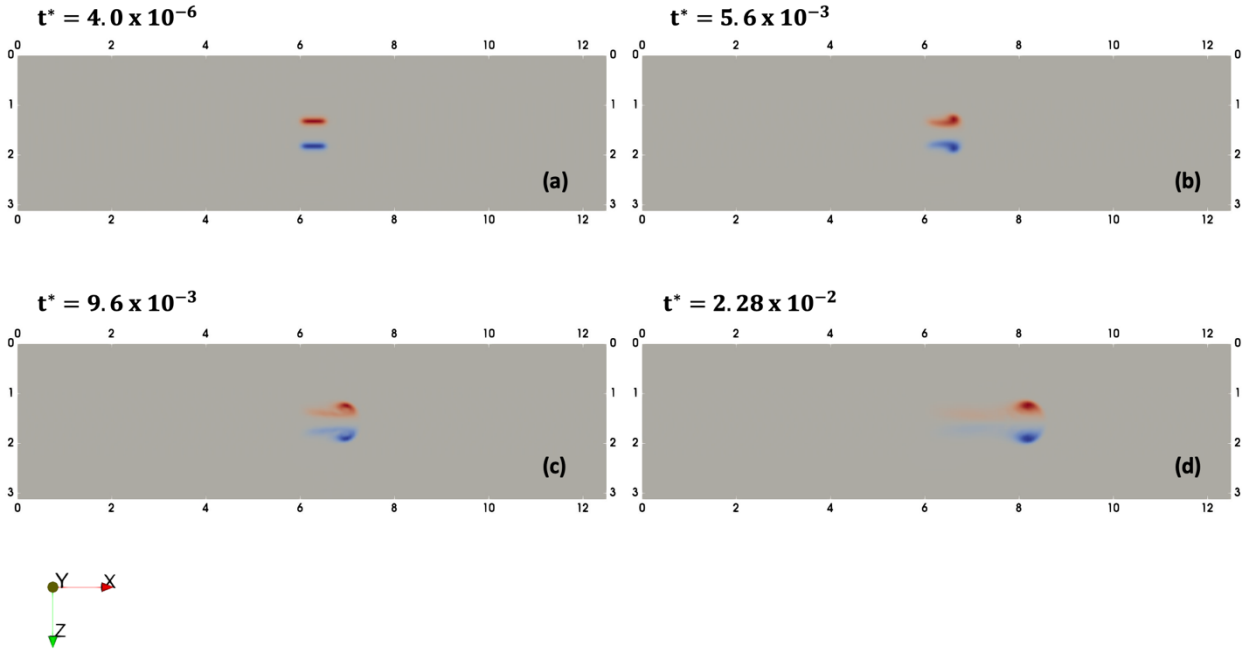

图4：$\nu = 10^{-2}\ cm^2/s$且$F_0 = 99.95\ cm/s^2$时，垂直涡量演化的二维快照序列（红色=正值，蓝色=负值）。s^{-1}中的最大垂直涡量；(A) 7.4×10^{-2}, (B) 8.4×10^{1}，(C) 9.7×10^{1} 和(D) 6.1×10^{1}。需要注意的是，T1约在$t^* = 8.0 \times 10^{-3}$结束。可视化显示的是计算域中心处的$x - z$ 平面（$y = 0$）。图中展示了整个水平面。完整序列的动画见 https://youtu.be/JOJy44cHrvk。

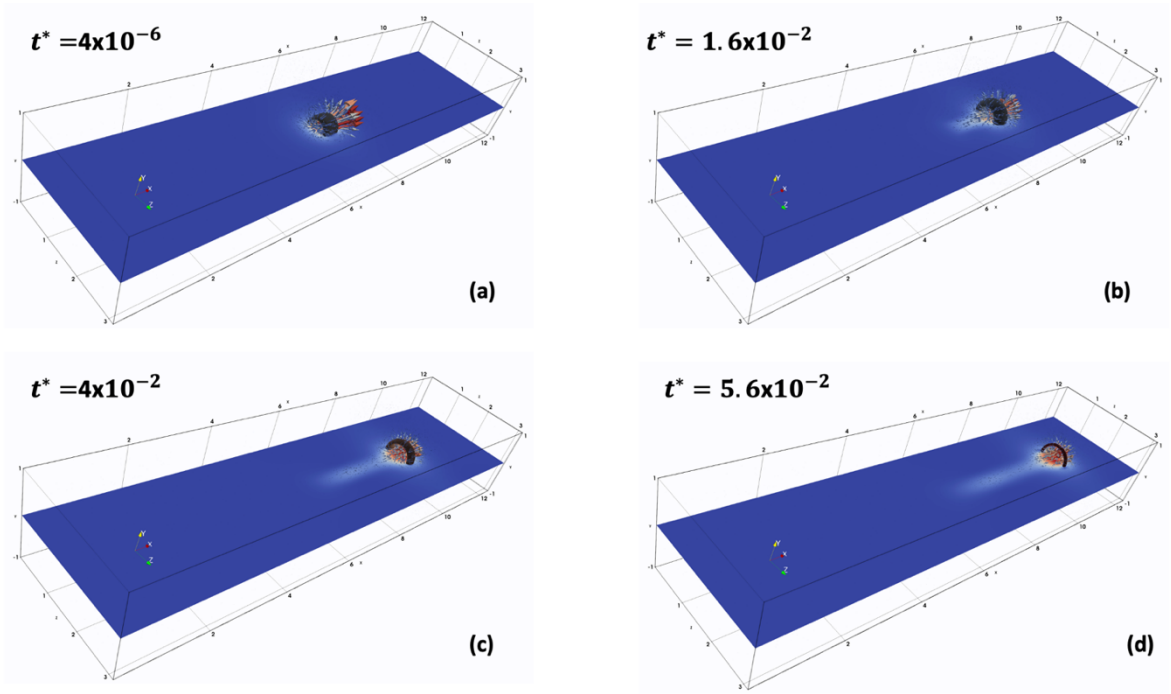

图5：所示情况的涡量大小和速度矢量场三维快照序列图4。涡量大小的等值面，取值为s^{-1}；(A) 3.74×10^{-2}, (B) 30，(C) 30 和(D) 30。完整序列的动画见https://youtu.be/lfxnsm6rVmI。

5.2 环量、等效核心半径和动能的演化

图6展示了与图（4）和图（5）的可视化结果相对应的环量在整个时间演化过程中的变化（区域 T1 和 T2）。每条曲线对应不同的力幅值。 显然，在力作用期间，环量随时间近似线性增加，而在力撤除后则开始衰减。此外，最大环量似乎随 F_0 近似线性增加。这些结果似乎与无黏性结果 $\Gamma = F_0 l_f t$ 一致，表明黏度足够低，可以采用这种近似。根据方程（8），无黏性结果可写成如下无量纲形式：

$$\Gamma/\nu = Re_f^2 t^* \quad , \qquad (18)$$

其中，假设方程（18）在短时间尺度内有效，此时黏度的影响可以忽略不计。

这表明，一般而言，$\Gamma/\nu = Re_f^2 T(t^*)$在更长的时间尺度和更高的流体黏度下应当仍然成立；此外，$\Gamma^* = T(t^*)$，其中$\Gamma^* = Re_\Gamma Re_f^{-2}$。为确定这一标度关系是否有效，我们在图（7）中展示了所有模拟的Γ^* 与t^* 的关系。结果表明，在很大程度上，$\Gamma^* \sim T(t^*)$，尽管在 t^* 较高时可以看出与该标度关系存在一些偏差。在此背景下，值得注意的是，尽管Re_f相差两个数量级，这种环量与时间的标度关系仍能实现极佳的数据坍缩。从图（7）还可以清楚看出，对于较大的t^*，Γ^* 并不遵循方程（18），这表明涡环环量演化的完整模型必须纳入黏度的影响。

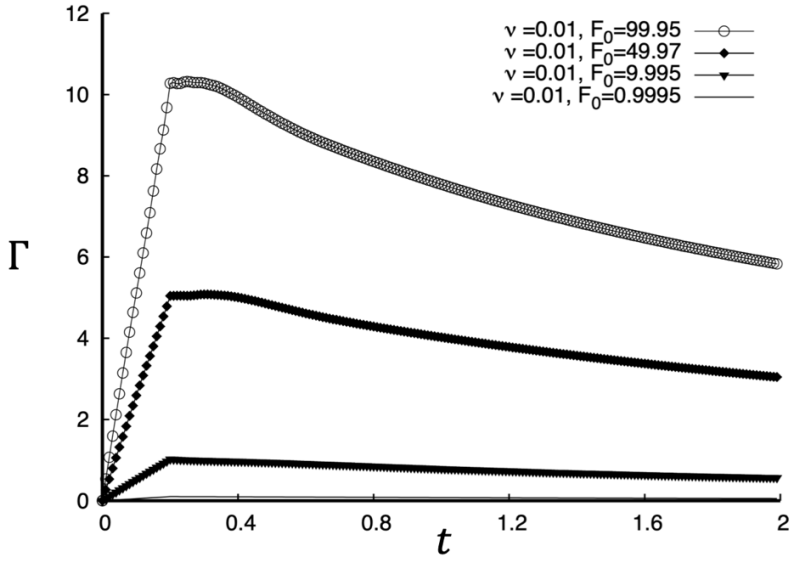

图6：环量，Γ，在cm^2/s条件下随时间（秒）的变化，适用于$\nu = 10^{-2}\ cm^2/s$的情况，并显示各种F_0值在图中。力的作用在时间区间$0 \le t \le 0。2s$。

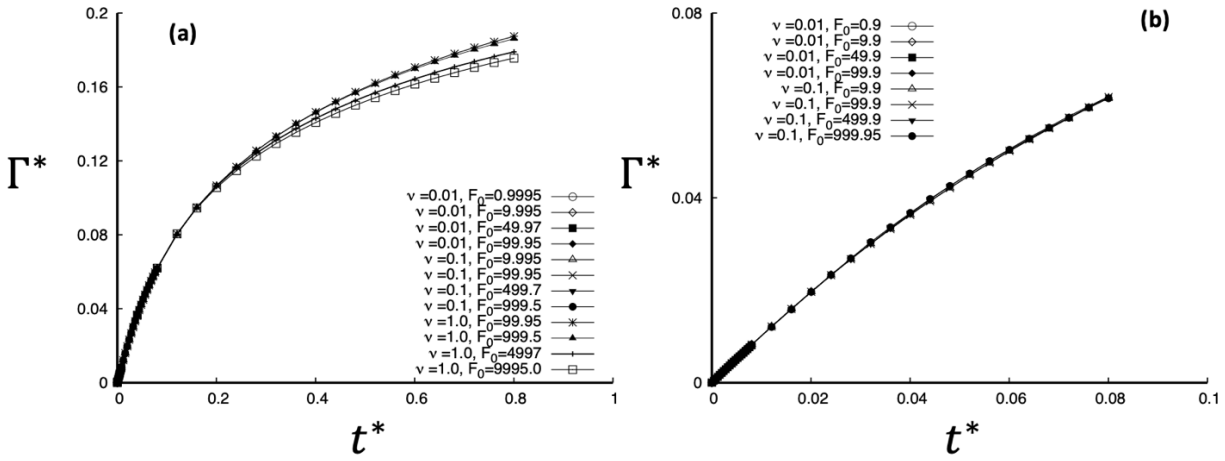

图7：无量纲环量，$\Gamma^* = Re_\Gamma Re_f^{-2}$，随无量纲时间，$t^* = \nu\, l_f^2$ 在 T1 中。（A）所有情况，（B）情况$\nu = 10^{-2}\ cm^2/s$和$\nu = 10^{-1}\ cm^2/s$适用于所有F_0值。

为总体了解涡环核心的大小，定义等效核心半径等效核心半径R_c如下：

$$R_c = \sqrt{\Gamma/(\pi\Omega_m)} \quad , \tag{19}$$

其中，Γ 是由方程（12）定义的总流体环量，Ω_m 是确定环量所在的 $x-z$ 平面内的最大垂直涡量。下文将其称为核心半径。可以将其理解为一个圆的半径：该圆包含全部总流体环量，且具有均匀涡量Ω_m。图8A展示了最低黏度情况下核心半径在整个模拟过程中的演变。总体而言，核心半径随时间增大。然而，在区域T1（t~0.2s）接近结束时，可以观察到核心半径发生振荡，尤其是在力幅值最高时。这些振荡似乎对应于每个涡环形成早期阶段的涡量合并和剪切层失稳（见图4）。图8B展示了区域T1内三种不同黏度下，按体力半径$R^* = R_c/R$归一化的核心半径随t^* 的变化。特别值得注意的是，核心半径约等于体力半径R^*~1时所对应的时间。从这些结果可以看出，流体黏度越大，这一时刻出现得越晚。这一观察结果对于建立能够考虑黏性扩散的模型十分重要。

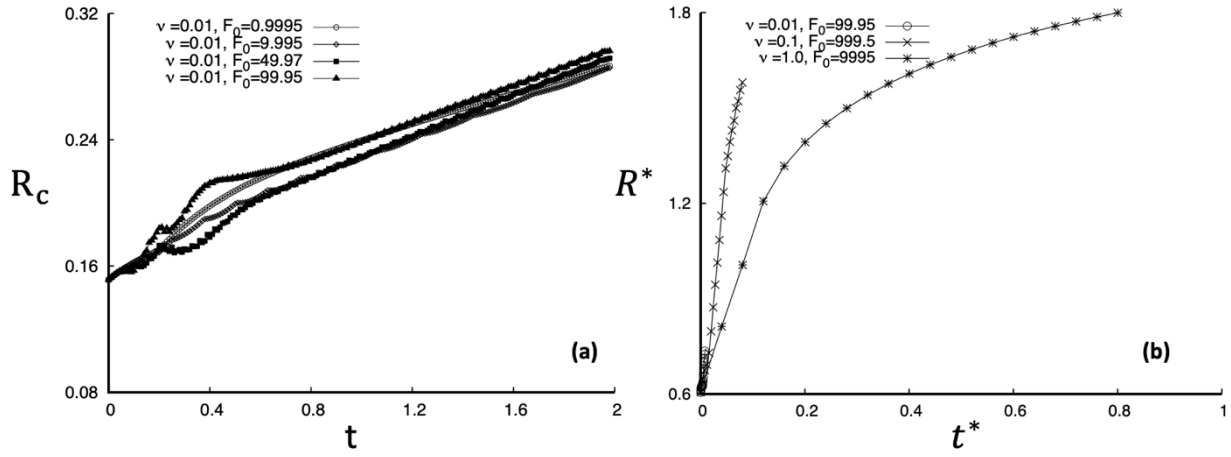

图 8：(A) 等效核心半径 (R_c，单位为厘米) 随时间（秒）的变化，对应图中所示的情况。展示了 T1 和 T2。力在 $t = 0$ 时关闭。$2s$。(B) 无量纲等效核心半径 ($R^* = \frac{R_c}{R}$) 随 t^* 的变化，对应图中 T1 的所有情况。

体积平均动能 K的结果见图9。图9(A)展示了T1和T2内动能的完整演变过程，其中K的变化率在体力于$t = 0$关闭的瞬间由正转负。2 s这与方程（17）的预测一致。虽然这里只展示了两种情况，但所有情况下均观察到了这一现象。为大致了解流场中的速度分布，图9(B)展示了T1中典型情况下无量纲速度 $K^* = \sqrt{K/F_0 l_f}$的演变。对于这些典型情况，$K^* \lesssim 8 \times 10^{-2}$, 这表明流场动能集中在与涡环相关的一个小区域内，因为$\sqrt{K}$ 可估算整个计算域内流速的平均大小，而$\sqrt{F_0 l_f}$ 则可估算涡环附近的最大流速。

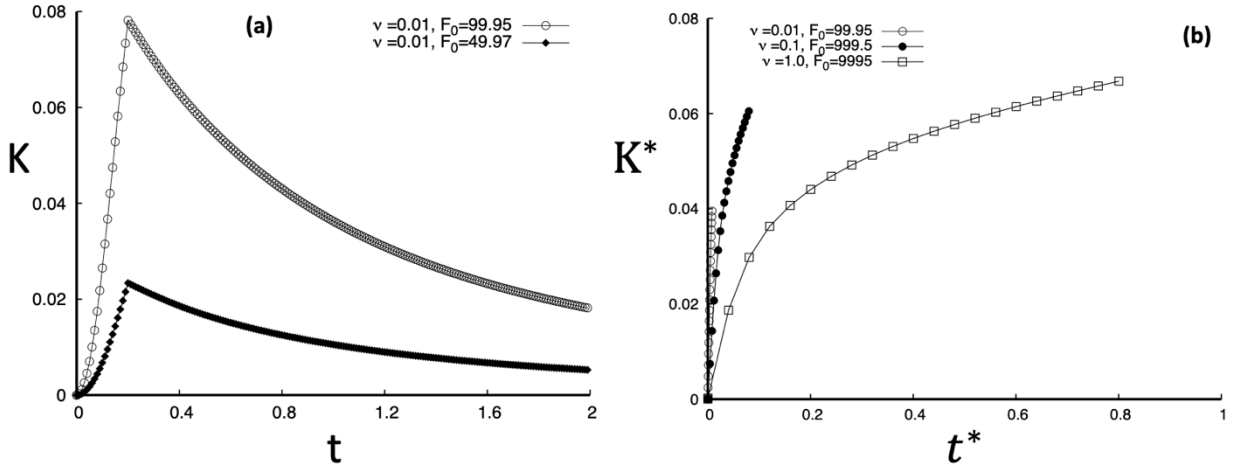

图 9：（A）图中所示 T1 和cm^2/s^2T2 两种情形下，单位质量动能（K，单位为 秒）随时间的变化。（B）$K^* = \sqrt{K}$ $_{F_0 l_f}$ 与 t^* 之间的关系，针对 T1 中的三种情形。

6. 脉冲体力生成的层流涡环环量模型及其与数值模拟的比较

6.1 涡量模型问题

本研究的一个目标是建立一种模型，用于估算脉冲力生成的层流涡环的环量。最简单的模型应考虑方程 (14) 所描述的黏性扩散，而忽略非线性。通过将该模型的结果与直接数值模拟（DNS）进行比较，确定这一近似的准确程度。为此，我们考虑以下标量φ模型方程，其中该标量表示本问题中的垂直涡量：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nu \nabla^2 \varphi \; + \; S \, , \qquad (20)$$

其中源项 S 表示由体力产生涡量的速率。通过应用边界条件 $\lim_{x,y,z\to\pm\infty} \varphi = 0$ 以及初始

条件 $\varphi(t=0)=0$。方程 (20) 在给定的边界和初始条件下的精确解可通过傅里叶变换方法 [23] 得到，如下所示：

$$\varphi=\int_0^t\iiint_{-\infty}^{+\infty}(\pi\sigma)^{-3/2}\ S(\varepsilon,\eta,\gamma)e^{\frac{-(x-\varepsilon)^2}{\sigma}}e^{\frac{-(y-\eta)^2}{\sigma}}e^{\frac{-(z-\gamma)^2}{\sigma}}\ d\varepsilon d\eta d\gamma d\bar{t}\quad(21)$$

其中 $\sigma=4\nu(t-\bar{t}\,)$，且在 T1 期间，$S(\varepsilon,\eta,\gamma)$ 不随时间变化，这与数值模拟中使用的涡量源一致。因此，方程 (21) 给出的解仅在力作用的时间段内有效。

第 2 节描述了实际的力场。根据该描述，一个可合理近似 S 且能够求得精确积分的形式如下：

$$S=X(\varepsilon)Y(\eta)Z(\gamma)\quad,\qquad(22)$$

其中，$X(\varepsilon)$ 和 $Y(\eta)$ 除了在区域 $-l_f/2\le\varepsilon\le-l_f/2$ ，$-R\le\eta\le R$ 内均为零；在该区域内，$X(\varepsilon)=Y(\eta)=1$。函数 $Z(\gamma)$ 表示为：

$$Z(\gamma)=F_0[\delta(\gamma-R)-\delta(\gamma+R)\,]\ ,\quad(23)$$

其中，狄拉克 δ 函数源于对不连续力场模型求导。例如，当渐消参数 $\beta\to\infty$ 趋于无穷大时，就会出现这种情况。我们将此模型称为薄层模型，因为垂直分量涡量的涡量源仅存在于一个矩形区域，即薄层内。这是对实际涡量源的一种近似（见图 3）；实际情况比薄层模型所暗示的稍复杂，因为力本身存在于圆柱区域内。尽管如此，后文将表明，采用该模型所得的涡环环量与实际涡量源得到的结果较为吻合。

6.2. 薄层模型得到的涡量和环量解

这里我们关注中心平面上的垂直涡量，$\varphi_0=\varphi(y=0)$，因为根据方程（12），它将决定环量。将源项的方程

（22、23）代入方程（21）并进行相应的积分，可得 φ_0 的以下结果：

$$\varphi_0 = F_0 \int_0^t (\pi\sigma)^{-3/2} f(x)\, h(\sigma) g(z)\, d\bar{t}\,, \tag{24}$$

其中

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi\sigma}}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x + l_f/2}{\sqrt{\sigma}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - l_f/2}{\sqrt{\sigma}}\right)\right], \tag{25}$$

$$g(z) = e^{\frac{-(z-R)^2}{\sigma}} - e^{\frac{-(z+R)^2}{\sigma}} \quad , \tag{26}$$

and

$$h(\sigma) = \sqrt{\pi\sigma}\operatorname{erf}\left(\frac{R}{\sqrt{\sigma}}\right). \tag{27}$$

环量 Γ 的求法如下：

$$\Gamma = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \varphi_0 dx dz \quad . \tag{28}$$

代入方程 (24) 至方程 (28) 并进行积分，得到：

$$\Gamma = F_0 l_f \int_0^t \left(\operatorname{erf}\left(\frac{R}{\sqrt{\sigma}}\right)\right)^2 d\bar{t} \quad . \tag{29}$$

方程 (29) 中的积分无法用已知函数表示。然而，通过考察误差函数的自变量 $R/\sqrt{\sigma}$，可以对环量的性质有所了解；该自变量可解释为力半径与黏性层厚度 $\delta_v \sim \sqrt{4\nu t}$ 之比。根据误差函数的渐近行为，$\lim_{\zeta\to\infty}\operatorname{erf}(\zeta) = 1$，可得：

$$\lim_{R \gg \delta_v} \Gamma = F_0 l_f t \quad . \tag{30}$$

这表明，当黏性层尚未充分发展时，环量随时间线性增长，这与方程（15）给出的无黏性结果一致。在这种情况下，环量的大小仅取决于力幅值与力的

纵向（x）范围。在下一节中，我们将直接模拟的结果与无黏性结果和薄层模型进行比较。我们还将使用精确的涡量源 $\partial\overline{f}^{x}/\partial z$，将这些结果与扩散方程（20）的谱精度解进行比较，其中 f_x 由方程（3-5）定义。

6.3 无黏、薄层和扩散模型与直接数值模拟的比较图（10）将直接数值模拟（DNS）得到的涡环雷诺数在 T1 中的时间演化结果，Re_Γ，与三种黏度下的无黏模型、薄层模型和扩散模型进行比较。薄层模型的结果通过对方程（28）进行数值积分得到。扩散模型的结果则来自对用于被动标量的线性扩散方程[方程（20）] 的谱精度求解；该被动标量为φ，其源项为S，与生成涡环时使用的源项相同。在该模型中，$\partial\varphi/\partial x_2 = 0$计算域顶部和底部壁面采用无通量条件；该计算域与涡环模拟所用的计算域相同。请注意，该条件与涡环模拟中施加于垂直涡量的边界条件一致，但扩散模型中没有流动。

应该强调的是，直接数值模拟包含完整的非线性运动方程，这些方程自然包含方程(10)中所体现的涡伸展、倾斜和涡量平流。此外，重要的是要重申，无黏模型仅在 $t \ll R^2/4\nu$ 或无量纲形式为$t^* \ll R^2/4l_f^2$时才应准确。然而，我们可以使用薄层模型（方程(28)）作为指导，更准确地估计黏性扩散开始影响环量的时间。这可以通过设置$erf^2(q) = 0.95$ 来完成，从中我们得到 $t^*_{inv} = R^2/4q^2l_f^2 = 2.5 \times 10^{-2}$，我们称之为无黏性时间。

对于图(10a)中所示的最低黏度情况，显然所有三个模型都与直接数值模拟吻合良好。事实上，所有模型都预测了本质上的无黏行为，因为这种情况下的最大时间远小于t^*_{inv}。对于图10(b)中所示的中间黏度，扩散模型在整个时间间隔内与直接数值模拟显示出极好的一致性。薄层模型清楚地表现出黏性扩散的影响，并与直接数值模拟显示出合理的一致性，而无黏模型与数值模拟的偏差最大。对于图10(c)中所示的最高黏度，扩散模型和薄层模型再次与直接数值模拟显示出良好的一致性。总之，我们注意到在所有$t^* < t^*_{inv}$ 的情况下，无黏模型与直接数值模拟吻合良好。此外，我们发现当 $t^* > t^*_{inv}$ 时，黏性扩散的影响变得明显，对于薄层模型和扩散模型以及直接数值模拟都是如此。

扩散模型与直接数值模拟结果高度吻合，这表明对于本研究考察的雷诺数范围 Re_f，仅黏性扩散就足以解释脉冲体力所产生的层流涡环的演化。此外，薄层模型虽然不如扩散模型精确，但也能以合理的精度预测涡环环量。仅凭纯扩散模型就能准确预测环量的演化，这一点还需要进一步解释。以兰姆–奥辛涡 [24] 这类纯二维涡为例。由于流动是二维的，且不存在涡量源，尽管涡量会在涡所在平面内扩散，环量仍随时间保持不变。然而，在本研究对层流涡环所做的模拟中，由于涡环具有三维几何结构，不能忽略横向和竖向扩散。事实上，薄层模型预测，对于 $t^* > t^*_{inv}$，黏性扩散对于预测环量的演化十分重要。

此外，这些结果表明，就环量而言，与涡伸展和倾斜相关的非线性效应显然可以忽略，因为扩散模型并未考虑这些效应。

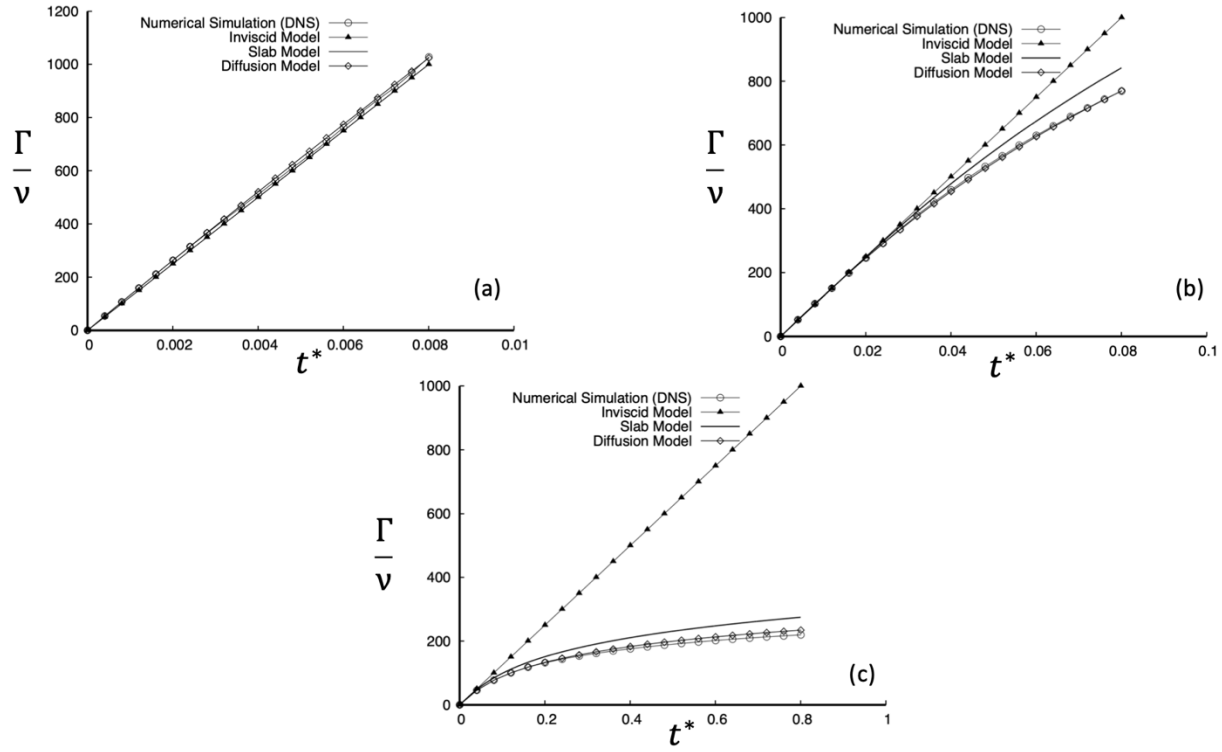

图10：直接数值模拟、无黏模型、薄层模型和扩散模型在 T1 中的涡环雷诺数 $Re_\Gamma=\Gamma/\nu$ 与 t^* 的关系。(A) $\nu = 10^{-2}\ cm^2/s$ 与 $F_0 = 99.95 cm/s^2$。(B) $\nu = 10^{-1}\ cm^2/s$ 与 $F_0 = 999.95\ cm/s^2$。(C) $\nu = 1.0\ cm^2/s$ 与 $F_0 = 9999.5\ cm/s^2$。注意，当 $t^* < t^*_{inv}$ 时，在 $t^*_{inv} = 2.5 \times 10^{-2}$，的情况下，黏性扩散对薄层模型和扩散模型以及直接数值模拟的影响可以忽略不计。

6.4 涡量横向扩散示意图

我们已经证明，基于涡量扩散的模型能够准确预测环量在短时间尺度和长时间尺度下的演化。这些模型同时考虑了垂直扩散和横向扩散。为了定性地理解这一点，可以单独考察横向扩散的影响，从而深入了解比值 R/δ_ν（力半径与黏性扩散长度尺度之比）的物理意义。为此，我们在图11中给出一幅示意图，展示横向扩散的时间演化（z）

时间段 T1 内垂直涡量的扩散。图11(A)显示了体力开始作用后立即出现的正（红色）和负（蓝色）垂直涡量区域。此时，黏性扩散长度尺度与 R 相比小到可以忽略。模拟结果中也出现了几乎完全相同的图像，如图4(A)所示。在图11(B)所示的中间时刻，扩散长度尺度开始显现，因为可以看到涡量从正（红色）和负（蓝色）区域向外扩散。这里需要指出，正涡量沿正、负 z方向扩散，负涡量区域也同样如此。图11(C)显示，在时刻 $t \sim R^2/4\nu$，涡量已扩散至尺度 $\delta_\nu \sim R$ 。此时，作为计算环量区域的上半平面失去正涡量并获得负涡量。涡量穿过对称面的这一净负通量导致环量增长率降低，这与薄层模型的预测一致。还应注意，此处未示出的垂直涡量扩散也会导致环量增长率降低。

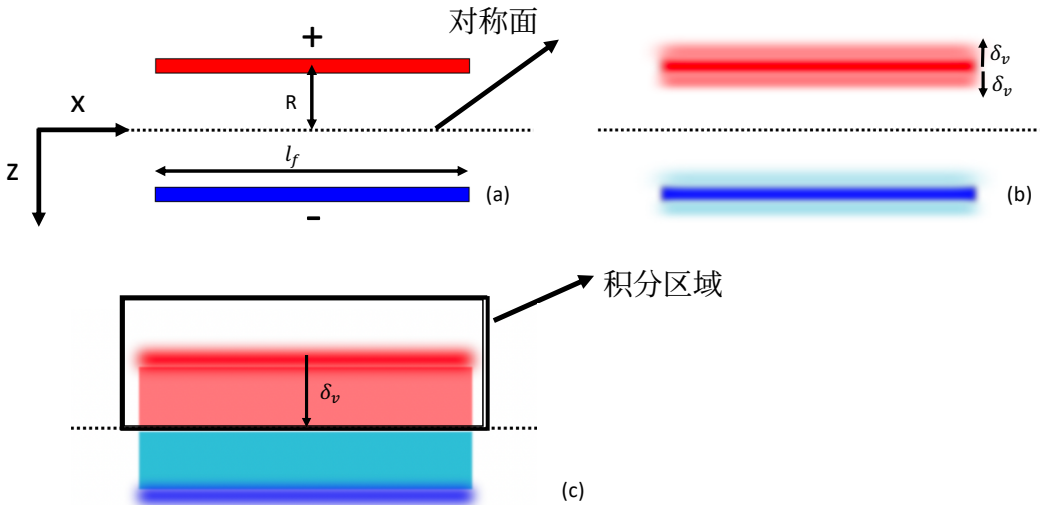

图11：T1中垂直涡量横向扩散的示意图。(A) 力作用于流体后立即形成的正（红色）和负（蓝色）垂直涡量层的表示。这对应于图4(a)所示的涡量场。(B) 显示稍后时刻的涡量，可见其从红色区域沿正负z方向扩散。黏性层厚度为δ_v。(C) 显示时间为$t \sim R^2/4\nu$时的涡量。此处显示涡量从红色层沿正z方向扩散。黏性层厚度已到达对称面，使其厚度约等于力半径$\delta_v \sim R$。环量通过对所示积分区域内的垂直涡量进行积分来确定。

7. 总结与讨论

涡环可通过多种实验方法生成，其中最新的方法采用活塞驱动系统 [3]。与这些实验方法不同，我们探讨了利用脉冲体力生成涡环的可能性。我们的主要目标是深入理解涡环生成过程，并据此建立模型，以预测通过这种方式生成的层流涡环的强度。我们发现，

通过直接数值模拟，我们发现，只要恰当选择力的幅值、持续时间和几何形状，就能轻易生成层流涡环。特别是，作用于圆柱区域内的力（其形状与实验中使用的活塞相似）能够生成形状和强度符合预期的涡环。此外，通过将模拟结果与解析模型进行比较，我们表明，尽管非线性对涡环的发展至关重要，但仅考虑涡量扩散也能准确预测层流涡环的强度。

本工作的主要结果可由 $Re_\Gamma = Re_f^2 T(t^*)$ 概括：对于由脉冲体力生成的层流涡环，涡环雷诺数等于基于力的雷诺数的平方与黏度相关的无量纲时间函数的乘积。模拟表明，在 Re_f 跨越两个数量级的范围内，该结果都准确成立。此外，这一结果也与基于涡量源近似的解析模型（薄层模型）以及采用精确涡量源求解扩散方程得到的谱精度解相符。模型和模拟还表明，当 $t^* \ll R^2/4l_f^2$（即力的作用时间足够短，使得涡量扩散可以忽略不计）时，$\Gamma/\nu = Re_f^2 t^*$。我们还强调，涡环显然是一种三维涡结构，因此，在 $t^* > t_{inv}^*$ 时，必须同时考虑涡量的横向和竖向扩散，才能准确预测涡环环量，其中 $t_{inv}^* = R^2/4q^2 l_f^2$。这与二维涡旋的情况不同。

还应重申，与其他方法相比，使用脉冲体力生成环等相干涡可能具有优势。以这种方式在初始静止的流体中生成的流动将自动满足边界条件，且无散。此外，尽管本研究聚焦于层流环，我们预计相同的方法

可用于生成湍流环 [11]。最简单的方法是在无黏流态下生成一个环，使力作用时间为 $\tau \sim R^2/4\nu$ 。通过选择适当的力幅值，这将产生一个自由传播的环，其雷诺数足够大，达到 $Re_\Gamma \sim F_0 l_f \tau/\nu$ ，从而形成湍流环。最后，本研究尚未解决脉冲体力能否通过实验方式产生这一问题，例如利用洛伦兹力。这将有助于进一步验证本研究所呈现的结果。

致谢：

本研究得到了美国国家科学基金会的资助，资助号为 1904953 和 1905288。模拟在 ARGO 上进行，ARGO 是乔治梅森大学研究计算办公室提供的研究计算集群。R.K. 还获得了美国国家科学基金会研究生研究奖学金的额外支持，资助号为 DGE 2137420。

数据可用性声明：

支持本研究结果的数据可应合理要求向通讯作者索取。

参考文献

1. Shariff, K., 和 Leonard, A., (1992). 涡环, Annu. Rev. Fluid Mech., 24: 235-27 9.

2. Rogers, W. B. (1858). 在特定排放条件下空气和液体形成旋转环的过程. Am. J. Sci. Arts (Second Ser.) 26: 347-394.

3. Glezer, A., (1981). 湍流涡环的实验研究, 博士论文, 加州理工学院.

4. Glezer, A., (1988). 涡环的形成, Phys. Fluids, 31:3532-3542.

5. Glezer, A., and Coles, D., (1990). 湍流涡环的实验研究, J. Fluid Mech., 211:243-283.

6. Weigand, A., and Gharib, M., (1994). 湍流涡环的衰减， Phys. Fluids, 6: 3806-3808.

7. Gharib, M., Rambod, E., and Shariff, K., (1988). 涡环形成的通用时间尺度，J. Fluid

375. 10. Swearingen, J. D., Crouch, J. D., and Handler, R. A., (1995). 涡环撞击固体边界的动力学与稳定性，J. Fluid Mech. 297: 1–28. 11. Bergdorf, M., Koumoutasakos, P., and Leonard, A., (2007). 涡环的直接数值模拟 $Re_\Gamma = 7500$，J. Fluid Mech., 581:495–505. 12. Smith, G.B., Volino, R.J., Handler, R.A., and Leighton, R.I. (2001). 涡对撞击自由表面时的热特征，J. Fluid Mech., 444: 49–78. 13. Verzicco, R., and Orlandi, P. (1996). 用于柱坐标下三维不可压缩流动的有限差分格式，J. Comp. Physics, 123: 402–414. 14. Goldstein, D., Handler, R., and Sirovich, L., (1993). 用外力场模拟无滑移流动边界，J. Comp. Phys., 105:354-366. 15. Crawford, C.H., and Karniadakis, G., (1997). EMHD控制壁面湍流的雷诺应力分析。第一部分：流向强迫，Phys. Fluids, 9:788-806. 16. Breuer, K.S., Park, J., and Henoch, C., (2004). 利用洛伦兹力驱动和控制湍流槽道流，Phys. Fluids, 16:897-907. 17. Handler, R.A., Blaisten-Barojas, E., Ligrani, P.M., Dong, P., and Paige, M. (2020). 初始静止的有限可伸展非线性 Peterlin 流体中的涡生成。Engineering Reports. 2020:2:e12135. 18. Handler, R.A.; Buckingham, M.J. (2021). 黏弹性聚合物流体中涡波的数值模拟与线性化理论，Fluids, 6, 325. https://doi.org/10.3390/fluids609032519. Roshko, A. (1952). 涡街湍流尾流的发展（博士论文），加利福尼亚理工学院。doi:10.7907/4WDN-9807. 20. Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A., and Zang, T.A. (1987). 流体动力学中的谱方法，Springer-Verlag, Berlin. 21. Sureshkumar, R., Beris, A.N., and Handler, R.A. (1997). 聚合物溶液湍流槽道流的直接数值模拟，Phys. Fluids 9: 743–755。

22. Handler, R. A., Saylor, J. R., Leighton, R. I., Rovelstad, A. L.（1999）。充分发展湍流明渠流中剪切自由边界处被动标量的输运，Phys. Fluids，11：2607-2625。

23. Weinberger, H.F.，（1965）。偏微分方程入门，John Wiley。

24. Oseen, C. W.（1912）。黏性流体中的涡旋运动。Ark. Mat. Astro. Fys., 7, 14–26.

Ap附录 A：涡量初始变化率 y

此处进一步说明方程 (8) 的推导，该方程将涡量的初始变化率与体力场的空间梯度联系起来。所有未在本附录中明确给出的符号定义，请参阅正文或附录 B 的表 1。这里假设流体初始时刻处于静止状态（$\boldsymbol{V} = 0$ 时间 $t = 0$ 处），因此涡量$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}$ 在 $t = 0$时也为零。

为方便起见，我们将涡量演化方程改写如下：

$$\frac{D\boldsymbol{\Omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{V} + \nu\nabla^2\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{f} \ , \qquad \text{(A1)}$$

方程 (A1) 左端的第一项表示涡量的物质导数，采用笛卡尔坐标系下的指标记法，可写为：

$$\frac{D\Omega_m}{Dt} = \frac{\partial\Omega_m}{\partial t} + V_i\partial_i\Omega_m \ , \qquad \text{(A2)}$$

其中 $\partial_i = \partial/\partial x_i$ ，重复指标表示求和。在 $t = 0$ 处对方程 (A2) 求值，并使用上述假设 (1)，可得：

$$\left.\frac{D\,\Omega_m}{Dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial\,\Omega_m}{\partial t}\right|_{t=0} . \qquad \text{(A3)}$$

方程 (A2) 右端的第二项为零，因为流体初始时处于静止状态；出于同样的原因，方程 (A1) 右端的第一项和第二项也为零。因此，方程 (A1) 可化简为：

$$\frac{\partial \Omega_m}{\partial t} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\epsilon_{mij}\,, \qquad (A4)$$

在 $t = 0$。然而，由于我们考虑的力场只有一个非零分量，使得$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) = (f_1, 0,0)$，方程 (A4) 变为：

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\,, and\ \frac{\partial \Omega_3}{\partial t} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\ , \qquad (A5)$$

在 $t = 0$处。这与方程 (8) 完全对应，因为下标 (1, 2, 3) 分别对应坐标 x、 y 和 z。我们注意到，方程 (A5) 表明，尽管初始涡量为零，但由于体力的作用，涡量的初始变化率并非零。

附录 B：环量演化方程

此处进一步详述方程 (12) 的推导，该方程描述了层流涡环环量的演化。垂直涡量 Ω_y满足：

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} + \nu\nabla^2\Omega_y + \frac{\partial f_x}{\partial z}\,, \qquad (B1)$$

其中 $H_x = v\Omega_z - w\Omega_y$，且 $H_z = u\Omega_y - v\Omega_x$。为得到所需的环量演化方程，其定义如下：

$$\Gamma = \overline{\Omega_y(x, 0, z)} \equiv \int_0^{l_z/2}\int_0^{l_x}\Omega_y(x, 0, z, t)dxdz\ , \qquad (B2)$$

其中 $\Omega_y(x, 0, z)$ 是中心平面上的涡量垂直分量，我们对方程 (B1) 施加上划线运算，得到：

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \left.\overline{\frac{\partial \mathrm{H}_x}{\partial z}}\right|_{y=0} - \left.\overline{\frac{\partial H_z}{\partial x}}\right|_{y=0} + \nu\left[\left.\overline{\frac{\partial^2\Omega_y}{\partial x^2}}\right|_{y=0} + \left.\overline{\frac{\partial^2\Omega_y}{\partial y^2}}\right|_{y=0} + \left.\overline{\frac{\partial^2\Omega_y}{\partial z^2}}\right|_{y=0}\right] + \overline{\frac{\partial f_x(x, 0, z, t)}{\partial z}}\ . \qquad (B3)$$

在我们的模拟中，所有场变量都在水平方向（$x - z$）上展开为傅里叶模态，因此在这两个方向上满足周期性边界条件。由此立即得到：

$$\left.\overline{\frac{\partial H_z}{\partial x}}\right|_{y=0} = \left.\overline{\frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial x^2}}\right|_{y=0} = 0\,. \tag{B4}$$

Fu此外，方程（B3）右端的第一项可写为 :

$$\left.\overline{\frac{\partial \mathrm{H}_x}{\partial z}}\right|_{y=0} = \int_0^{l_x}[v\left(x,0,\frac{l_z}{2}\right)\Omega_z\left(x,0,\frac{l_z}{2}\right) - w\left(x,0,\frac{l_z}{2}\right)\Omega_y\left(x,0,\frac{l_z}{2}\right) - v(x,0,0)\Omega_z(x,0,0) + w(x,0,0)\Omega_y(x,0,0)]\mathrm{dx}\quad .$$

(B5)

然而，由于体力的对称性使层流涡环也呈对称分布，速度的垂直和展向分量 $v\left(x、0、t\frac{z}{2}\right)$, $w\left(x、0、t\frac{z}{2}\right)$、$v(x、0、0)$、$w(x、0、0)$ 均为 ___零，因此可得 $\left.\frac{\partial \mathrm{H}_x}{\partial}z\right|_{y=0} = 0$。对剩余的黏性项应用上划线运算，得到 $D = \nu(\overline{\Omega_y})_{yy}\big|_{y=0}$，它表示垂直涡量的垂直（$y$）扩散；而 $L = \nu\int^x \left[\left.\frac{\partial \Omega_y}{\partial}z\right|_{z=L_z/2\,l0} - \left.\frac{\partial \Omega_y}{\partial}z\right|_{z=0}\right]\Big|_{y=0} dx$ 表示垂直涡量净侧向通量。因此，得到描述环量演化的方程：

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = D + L + \overline{\frac{\partial f_x(x,0,z,t)}{\partial z}}\ . \tag{B5}$$

方程（B6）对应于方程（12）。需要注意的是，方程（B6）中的项 D 和 L 不包含环量 Γ，而是包含垂直涡量及其导数。因此，尽管方程（B6）表面上是线性的，环量演化方程仍可能通过方程（B1）给出的垂直涡量非线性演化方程而具有非线性。

方程 (B6) 右侧的第三项是环量的来源。为了解这一项的性质，我们发现 $\int^z{}^2\int^x{}^{\partial}{}_f \frac{x}{\partial}{}_{zl0l/0}\,dxdz = 0.4994$，采用 $128 \times 65 \times 128$网格、渐消参数 $\beta = 15\ cm^{-1}$，$l_f = 2R = 0.5\ cm$ 和 $F_0 = 1$。这与将力描述为以下形式所得的结果几乎完全相同：$f_x = 1$ 对于 $-l_f/2 \le x \le$

$-l_f/2 \ and - R \le z \le R$ ，并且 0 否则。这意味着，力场可以准确地建模为具有尖锐空间截断的形式（例如，其取值要么为 0，要么为 1）。力 及其展向导数 $\partial f \partial^{\overline{x}}{}_z$ 分别如图 1 和图 3 所示。

附录C：符号表

表1：本表列出了本文中所有相关符号。每个符号均附有定义，随后标明该符号是有量纲的（例如，厘米、秒）还是无量纲的。

符号	定义	单位
x, y, z	坐标：涡环沿 x方向运动，z垂直于 这一方向，而y为垂直 方向（见图1）	有量纲
x_1, x_2, x_3	对应的脚本坐标 到 x, y, z	有量纲
$\boldsymbol{x}$	位置向量	有量纲
l_x, l_y, l_z	计算域的长度 x 、 y 和z方向上的计算域 方向。l_y 是 计算域在 y- 方向	有量纲
L_x, L_y, L_z	计算域长度 使用 l_y 无量纲化。注意 该定义得出 $L_y = 2$.	无量纲
t	Time	有量纲
$\boldsymbol{V}, V_i$	速度及其分量 速度	有量纲
$\boldsymbol{\Omega}, \Omega_i$	涡量及其 涡量	有量纲
u, v, w	速度分量（沿 x、 y和z 方向）	有量纲
u_1、 u_2、 u_3	脚本化的 速度	有量纲
$\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$	涡量分量 x、 y和z 方向	有量纲
Γ	环量	有量纲
p	压力	有量纲
ρ	密度	有量纲

$\boldsymbol{f}$	体力	有量纲
f_x, f_y, f_z	体力在以下方向上的分量 x、y和z 方向	有量纲
f_1, f_2, f_3	带脚标的体力分量 力	有量纲
F_0	体力大小	有量纲
τ	物体的持续时间 力	有量纲
x_0, y_0, z_0	计算域中心坐标的 计算域以及……的坐标 体的中心的 力	有量纲
$A(t)$	用于定义……的函数 体力的时间演化 力	有量纲
r	用于定义 体力的径向坐标	有量纲
g_r, g_x	用于描述的空间函数 体力	有量纲
R	体力半径	有量纲
l_f	体力长度	有量纲
β	渐消参数	有量纲
H_x, H_z	演化方程中的非线性项 垂直涡量方程	有量纲
D, L	方程中的黏性扩散项 ……的演化方程 环量	无量纲
φ	标量场	有量纲
φ_0	……中的中心平面上的标量场 薄层模型	有量纲
S	标量场的源	有量纲
σ	黏性衰减函数，在 扩散模型	有量纲
ν	运动黏度	有量纲
Re_f	基于力的雷诺数	无量纲
t^*	基于黏性的时间尺度	无量纲
$t^*_{“\nu}$	无黏时间尺度	无量纲
Re_Γ	涡环雷诺数	无量纲
t_{Ro}	Roshko数	无量纲
k	单位质量动能	有量纲
K	体积平均动能 单位质量	有量纲
K^*	无量纲速度尺度	无量纲
R^*	无量纲当量 涡核半径	无量纲

R_c	等效核心半径	有量纲
ϵ	体积平均动能耗散的 动能	有量纲
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	计算网格分辨率	有量纲
Ω_m	水平面内最大垂直涡量 水平面	有量纲
δ_v	黏性层厚度	有量纲
Γ^*	无量纲环量	无量纲
$\varepsilon, \eta, \gamma$	积分变量	有量纲
$f, g,$ h	薄层模型中使用的函数	有量纲

附录 D：模拟参数

表 2：此表列出了所有模拟中使用的参数。对于每次运行，均列出力幅值、F_0、运动黏度、ν以及基于力的雷诺数$Re_f = {}^{v^*}{}_{lf}\ \nu$。此处$v^* = \sqrt{F_0 l_f}$，而$l_f$是体力所占圆柱区域的长度。

运行编号	$F_0(cm/s^2)$	$\nu(cm^2/s)$	Re_f
运行 1	0.9995	0.01	35.346
运行 2	9.995	0.01	111.775
运行 3	49.975	0.01	249.937
运行 4	99.95	0.01	353.465
运行 5	9.995	0.1	11.1775
运行 6	99.95	0.1	35.346
运行 7	499.75	0.1	79.037
运行 8	999.5	0.1	111.775
运行 9	99.95	1.0	3.5346
运行 10	999.5	1.0	11.1775
运行 11	4997.5	1.0	24.9937
运行 12	9995	1.0	35.3465

附录 E：动能演化方程

下面推导由方程（17）给出的体积平均动能演化方程。将速度 **V** 与方程（1）作点积，并利用不可压缩性 $\boldsymbol{\nabla \cdot V = 0}$，得到：

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\partial_j\left(ku_j\right) + \rho^{-1}\partial_j\left(pu_j\right) + \nu\partial_j\partial_j\mathrm{k} - \nu\partial_j u_i\partial_j u_i + f_j u_j \quad , \tag{E1}$$

其中 $k = \frac{u_i \overline{u_i}}{2}$。对整个流体体积 V 对方程 (E1) 取平均，得到：

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -< \partial_j\left(ku_j\right) > + \rho^{-1} < \partial_j\left(pu_j\right) > + \nu < \partial_j\partial_j\mathrm{k} > - \epsilon + < f_j u_j >, \tag{E2}$$

其中，单位质量的体积平均动能为 $K = < k >$，耗散为$\epsilon = \nu < \partial_j u_i \partial_j u_i >$。在水平（$x - z$）平面采用周期性边界条件，并在上、下计算域边界采用无剪切条件后，方程 (E2) 右端的前三项被消去。因此，体积平均动能 K 的最终方程为：

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -\epsilon + < f_j u_j >, \tag{E3}$$

这就是正文中的方程 (17)。