arXiv:2304.02427v2 [math.QA] 3 Feb 2024

余根基为余中心阿贝尔劈裂扩张的 Hopf 代数

G. A. GARCÍA 和 M. MASTNAK

Abstract. 本文是全面描述一类 Hopf 代数的第一步。这类代数的余根基同构于一个半单 Hopf 代数 K_n, n ，其中 n 是一个奇正整数，并由余中心阿贝尔劈裂扩张得到。我们描述了简单 Yetter-Drinfeld 模，计算了融合规则，并确定了其中一些模对应的有限维 Nichols 代数。特别地，我们给出了 K_3 上简单模对应的有限维 Nichols 代数的描述。这包括一族依赖于三次单位根 $\{\mathfrak{B}_\xi\}$ 的 12 维 Nichols 代数。其中， $\mathfrak{B}_1$ 同构于著名的 Fomin-Kirillov 代数；作为分次代数， $\mathfrak{B}_\xi \simeq \mathfrak{B}_{\xi^2}$ 同构，但作为代数， $\mathfrak{B}_1$ 与 $\mathfrak{B}_\xi$ 不同构， $\xi \neq 1$。作为副产品，我们得到了新的 216 维 Hopf 代数。

1. Introduction

自 20 世纪 60 年代末至 70 年代初该理论诞生以来，对有限（Gelfand–Kirillov）维 Hopf代数进行分类一直是一项颇具挑战的问题。此后，只有少数一般性结果有助于确定 Hopf代数的结构。其中包括 Kac–Zhu 定理 [35] ，该定理指出，素数维 Hopf代数同构于群代数；Nichols–Zoeller [24] 定理则声称，有限维 Hopf代数在任意 Hopf 子代数上都是自由的；此外还有对（几乎所有）余根基为阿贝尔群的有限维尖点 Hopf代数的分类 [5]。最后这一结果的关键在于引入了一种通用方法，用于构造和分类余根基为 Hopf 子代数的 Hopf代数。这种方法称为提升法，对于分类有限（Gelfand–Kirillov）维尖点 Hopf代数尤其有用，因为这类代数的余根基是群代数；例如可参见 [5], [3], [10], [14], [15] 和 [17], 。后来，文献 [4]对这种方法进行了推广；在此，余根基被其生成的 Hopf 子代数所取代。借助这一方法，人们发现了新的 Hopf代数族，例如可参见 [2], [16],[13], [30], [31]。

近年来，完整分类结果的出现并不多见。原因之一可能在于缺少具有不同性质的例子，因为要得到一份完整的、在同构意义下的 Hopf代数清单，就必须了解所有可能的例子。另一方面，文献中可以找到对不同 Hopf代数族的描述。例如，非 pointed 但满足 Chevalley 性质的 Hopf代数，也就是说，其余根基是 Hopf 子代数，参见例如 [8], [11], [28], [32, 33, 34]。

为了理解具有 Chevalley 性质的非点和非余点霍普夫代数，我们在本文中开始研究余根基为半单 Hopf代数 $K_n := \Bbbk^{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n} \rtimes_\beta \Bbbk\mathbb{Z}_2$ 由双交叉积给出的霍普夫代数；这里 $n \in \mathbb{N}$ 为奇数且大于一。它也可以描述为阿贝尔扩张 $\Bbbk \to \Bbbk\mathbb{Z}_n \to K_n \to \Bbbk\mathbb{D}_n \to \Bbbk$，其中$\mathbb{D}_n$ 是阶为 $2n$ 的二面体群。尽管代数 K_n 具有显式且相当清晰的表示，但它们足够非平凡，可以通过在 K_n 上的 Yetter-Drinfeld 模范畴 ${}^{K_n}_{K_n}\mathcal{YD}$ 中 Nichols 代数的玻色化和提升过程，产生具有 Chevalley 性质的有限维霍普夫代数的新例子族。最

2020 *MSC:* 16T05 — *Keywords:* 霍普夫代数、阿贝尔扩张、Yetter-Drinfeld 模、融合规则、Nichols 代数。

有趣的例子是那些 Nichols 代数的生成元相对于 K_n 中的类群元不是齐次的，即编织向量空间的实现不是主实现。

作为提升方法的一部分，我们需要理解范畴 ${}^{K_n}_{K_n}\mathcal{YD}$。首先，我们描述这个半单范畴的单对象及其融合规则，见定理 4.4.13 和第 5.1 节第 1 小节。为了确定所有单对象，我们采用两种不同的方法。对于低维对象，例如一维或二维对象，我们改编 Wigner 和 Mackey 的“小群”方法，见 [27, 第 8.2] 小节。对于其余对象，我们考察 K_n 的简单余子模，也就是说，应用 Radford [26] 提供的一般方法。除了对我们的目标很重要之外，这一结果本身也很有意义，因为我们明确给出了相应的融合环，见定理 5.1.2。提升方法的另一个步骤是确定有限维 Nichols 代数。我们在第 6 节描述其中的一些。若干族 Yetter-Drinfeld 模对应于对角型编织向量空间，因此，其 Nichols 代数由 Heckenberger [19] 和 Angiono [12] 的研究确定。另一方面，有些 Yetter-Drinfeld 模对应于具有非主实现的 rack 型编织向量空间。此外，这些空间与二面体 rack 及常值余循环所关联的编织向量空间同构；也就是说，它们对应于二面体群 $\mathbb{D}_n$ 中某个对合的共轭类以及一个一维表示。特别地，对于 $n = 3$，会出现一族依赖于三次单位根的 12 维 Nichols 代数 $\{\mathfrak{B}_\xi\}$。代数 $\mathfrak{B}_1$ 与著名的 Fomin-Kirillov 代数同构；$\mathfrak{B}_\xi$ 和 $\mathfrak{B}_{\xi^2}$ 作为分次代数同构，但对于 $\xi \neq 1$，$\mathfrak{B}_1$ 与 $\mathfrak{B}_\xi$ 作为代数并不同构，见定理 6.3.17。本文最后介绍 $n = 3$ 时简单模上的有限维 Nichols 代数。由此，我们通过玻色化过程得到新的 216 维 Hopf 代数。

在未来的工作中，我们打算描述半单 Yetter-Drinfeld 模的所有有限维 Nichols 代数及其提升，以获得所有余根基同构于 K_n 的霍普夫代数。

本文组织如下。在第2节中，我们包含了本文所需的定义和基本事实；特别是，我们回顾了 Yetter-Drinfeld 模和 Nichols 代数的定义。在第3节中，我们明确描述了霍普夫代数族 K_n，而在第4节中，我们确定了 K_n 上的所有简单 Yetter-Drinfeld 模。由于该范畴是半单的，因为 K_n 是半单代数，这足以描述所有对象。在第5节中，我们计算 ${}^{K_n}_{K_n}\mathcal{YD}$ 的融合规则，并在第6节中确定与 ${}^{K_n}_{K_n}\mathcal{YD}$ 中某些模相关的 Nichols 代数。

Acknowledgements

这项工作部分得到了 CONICET、ANPCyT (PICT 2018-00858)、Secyt-UNLP（阿根廷）和 NSERC（加拿大）的支持。

2. Preliminaries

设 $n \in \mathbb{N}$，并设 $\Bbbk$ 是一个包含本原 n 次单位根的域。我们还假设 $\Bbbk$ 的特征为零，或不整除 $2n$。所有向量空间均视为定义在 $\Bbbk$ 上，且 $\otimes = \otimes_{\Bbbk}$。给定一个群 G，记其特征群为 G。对于 $m \in \mathbb{N}$，记模 m 的整数环为 $\mathbb{Z}_m$。我们研究定义在 $\Bbbk$ 上的 Hopf代数 H；按照惯例，分别用 Δ、S 和 ε 表示余乘法、反元和余单位。此外，余乘法和余模结构使用 Sweedler 记号表示，即对于所有 $h \in H$，$\Delta(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}$；对于左 H-余模 (V, δ) 和 $v \in V$，$\delta(v) = v_{(-1)} \otimes v_{(0)}$。Hopf代数 H 在自身上的（左）伴随作用，对所有 $h, x \in H$ 记为 $h \rightharpoonup x = h_{(1)} x S(h_{(2)})$。关于 Hopf代数，参见 [25]；关于 Nichols 代数，参见 [1], [20]。

2.1. Yetter-Drinfeld 模与 Nichols 代数。设 H 是一个 Hopf代数。 H 上的（左）Yetter-Drinfeld 模是一个左 H-模 $(V,\cdot)$ 和一个左 H-余模 (V,δ)，满足

$$\delta(h\cdot v)=h_{(1)}v_{(-1)}S(h_{(3)})\otimes h_{(2)}\cdot v_{(0)}\qquad \text{for all } h\in H, v\in V.$$

Yetter-Drinfeld 模连同左 H-模和左 H-余模的态射形成一个编织刚性张量范畴，记为 ${}^H_H\mathcal{YD}$。编织由 $c_{V,W}(v\otimes w)=v_{(-1)}\cdot w\otimes v_{(0)}$给出，对所有 $v\in V$, $w\in W$，其中 V, W 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的对象。Hopf代数 H 通过自身上的左伴随作用和由余乘法给出的余作用，是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的一个对象。

设 $V\in {}^H_H\mathcal{YD}$。则张量代数 $T(V)$ 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的分次编织霍普夫代数。 V 的 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(V)=\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{B}^n(V)$ 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中由商 $\mathfrak{B}(V)=T(V)/\mathcal{J}(V)$ 定义的分次编织霍普夫代数，其中 $\mathcal{J}(V)$ 是 $T(V)$ 的最大霍普夫理想，作为理想由次数大于或等于 2 的齐次元素生成。根据定义，我们有 $\mathfrak{B}^0(V)=\Bbbk$ 和 $\mathfrak{B}^1(V)=V$。实际上，可以从任何刚性编织向量空间 (V,c) 定义 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(V)$；结果表明 $\mathfrak{B}(V)$ 作为代数和余代数完全由编织确定。与编织向量空间 (V,c) 相关联的 Nichols 代数有几种等价定义，每种定义对特定目的特别有用。下面我们回顾与量子对称化子相关的定义，因为它至少能计算一些关系。

设 V b e 是一个向量空间，且 $c\in \mathrm{End}(V\otimes V)$ 是辫方程的一个解，其中 is

$$(c\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes c)(c\otimes \mathrm{id})=(\mathrm{id}\otimes c)(c\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes c)\qquad \text{in } \mathrm{End}(V\otimes V\otimes V).$$

设 $T(V)$ 和 $T^c(V)$ 分别是 V 的张量代数和余张量代数。二者都是编织双代数，并且存在唯一的双代数映射 $\mathsf{S}: T(V)\to T^c(V)$，使得 $\mathsf{S}|_V=\mathrm{id}_V$。像 $\mathrm{Im}\,\mathsf{S}\subseteq T^c(V)$ 是一个称为量子对称代数的编织双代数。如果编织是刚性的，那么 $\mathrm{Im}\,\mathsf{S}=\mathfrak{B}(V)$ 是一个 Nichols 代数。存在一种借助辫群的作用显式描述 S 的核的方法。

辫群

$$\mathbb{B}_n=\langle \tau_1,\dots,\tau_{n-1}|\ \tau_i\tau_j=\tau_j\tau_i,\ \tau_{i+1}\tau_i\tau_{i+1}=\tau_i\tau_{i+1}\tau_i,\ \text{for } 1\leq i\leq n-2 \text{ and } j\neq i\pm 1\rangle$$

通过 ρ_n 自然地作用于 $V^{\otimes n}$ 上： $\mathbb{B}_n\to GL(V^{\otimes n})$，其中 $\rho_n(\tau_i)=c_i=\mathrm{id}_{V^{\otimes i-1}}\otimes c\otimes \mathrm{id}_{V^{n-i-1}}: V^{\otimes n}\to V^{\otimes n}$。利用对称群 $\mathbb{S}_n$ 到 $\mathbb{B}_n$ 的 Matsumoto（集合论）截面:

$$M:\mathbb{S}_n\to\mathbb{B}_n,\qquad (i,i+1)\mapsto\tau_i,\qquad \text{for all } 1\leq i\leq n-1,$$

可以将量子对称化子 $QS_n: V^{\otimes n}\to V^{\otimes n}$ 定义为

$$QS_n=\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n}\rho_n(M(\sigma))\in\mathrm{End}(V^{\otimes n}).$$

例如 $QS_2=\mathrm{id}+c$，以及

$$QS_3=\mathrm{id}+c\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes c+(\mathrm{id}\otimes c)(c\otimes\mathrm{id})+(c\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes c)+(c\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes c)(c\otimes\mathrm{id})。$$

与 (V,c) 相关联的 Nichols 代数是张量代数 $T(V)$ 对齐次理想取商所得的代数

$$\mathcal{J}=\bigoplus_{n\geq 2}\mathcal{J}_n=\bigoplus_{n\geq 2}\mathrm{Ker}\,QS_n,$$

或者等价地， $\mathfrak{B}(V):=\mathfrak{B}(V,c)=\oplus_n\mathrm{Im}(QS_n)=\oplus_n T(V)/\mathcal{J}_n$。特别地， $\mathfrak{B}(V)$ 是一个分次代数。

如果 $W\subseteq V$ 是一个子空间，使得 $c(W\otimes W)\subseteq W\otimes W$，则可将 $\mathfrak{B}(W)$ 等同于 $\mathfrak{B}(V)$ 的一个子代数；最终属于不同的辫子刚性范畴。特别地，如果 $\dim\mathfrak{B}(W)=\infty$，则 $\dim\mathfrak{B}(V)=\infty$。因此，如果 V 包含一个非零元素 v 使得 $c(v\otimes v)=v\otimes v$，则 $\dim(V)=\infty$。关于 Nichols 代数的更多细节，我们参考 [1], [20] 。

3. The Hopf algebra K_n

我们固定群 N 和 Q 以及 Q 在 N 上由 $N\times Q\to N$，$(u,x)\mapsto u^x$ 给出的右作用。这转化为 $\Bbbk Q$ 在 $\Bbbk^N=(\Bbbk N)^*$ 上由 $({}^xf)(u)=f(u^x)$ 给出的左作用，对所有 $x\in Q$ 和 $f\in\Bbbk^N$。对于 $u\in N$，记 $p_u\in\Bbbk^N$ 为由 $p_u(v)=\delta_{u,v}$ 给出的映射。则 $\{p_u\}_{u\in N}$ 是 $\Bbbk N$ 的标准基的对偶基。然后 Q 在此基上的作用由 ${}^xp_u=p_{u^{x^{-1}}}$ 给出，对所有 $x\in Q,u\in N$。

3.1. Hopf代数 $\Bbbk^N\rtimes_\beta\Bbbk Q$。设 $\beta\colon Q\times N\times N\to\Bbbk^\times$ 是一个映射。对于 $x\in Q$，我们记作 $\beta_x(u,v)=\beta(x,u,v)$，从而可以将 $\beta_x\colon N\times N\to\Bbbk^\times$ 视为 $\Bbbk^{N\times N}$ 中的一个元素。显然，$\Bbbk Q$ 在 $\Bbbk^{N\times N}$ 上也有一个作用；为简便起见，对于所有 $x,y\in Q$ 和 $u,v\in N$，我们也将 $({}^x\beta_y)(u,v)=\beta_y(u^x,v^x)$ 记为简写形式。

定义 3.1.1. 若对于 $x,y\in Q$ 以及 $u,v,w\in N$，有以下关系，则称 β 为归一化2-余循环：

$$\begin{aligned}\beta(1_Q,u,v)&=1,\\ \beta(xy,u,v)&=\beta(x,u,v)\beta(y,u^x,v^x),\\ \beta(x,1_N,v)&=1=\beta(x,u,1_N),\\ \beta(x,v,w)\beta(x,u,vw)&=\beta(x,uv,w)\beta(x,u,v).\end{aligned}$$

简言之，β 可视为一个从 Q 到 $\mathrm{Map}(N\times N,\Bbbk^\times)$ 的归一化1-上循环，其对应于上文讨论的诱导作用（即 $\beta_1=\varepsilon$ 和 $\beta_{xy}=\beta_x{}^x\beta_y$）；并且对于每个固定的 x，β_x 都是 N 上关于平凡作用的取值于 $\Bbbk^\times$ 的归一化群 2- 上循环。我们主要关注这样一种特殊情形：对于每个 $x\in Q$，映射 β_x 都是双特征，即对于 $x\in Q$ 和 $u,v,w\in N$，有 $\beta_x(uv,w)=\beta_x(u,w)\beta_x(v,w)$，且 $\beta_x(u,vw)=\beta_x(u,v)\beta_x(u,w)$。

利用归一化2-上循环 β，我们可以在 $\Bbbk^N\otimes\Bbbk Q$ 上定义如下 Hopf代数结构。

定义 3.1.2. Hopf代数 $B=\Bbbk^N\rtimes_\beta\Bbbk Q$ 是以 $\{p_u\widehat{x}\colon u\in N,x\in Q\}$ 为基的向量空间，其乘法定义如下：

$$(p_u\widehat{x})(p_v\widehat{y})=\delta_{u,v^{x^{-1}}}p_u\widehat{xy}\qquad \textit{for all } x,y\in Q,u,v\in N.$$

余乘法定义如下：

$$\Delta(p_u\widehat{x})=\sum_{v,w\in N,vw=u}\beta_x(v,w)p_v\widehat{x}\otimes p_w\widehat{x};$$

特别地，$\Delta(\widehat{x})=\sum_{v,w\in N}\beta_x(v,w)p_v\widehat{x}\otimes p_w\widehat{x}$。余单位定义如下：

$$\varepsilon(p_u)=p_u(1)=\delta_{u,1}\qquad\textit{and}\qquad\varepsilon(\widehat{x})=1\qquad\textit{for all } u\in N,x\in Q.$$

反元定义如下：

$$\begin{aligned}S(p_u)&=p_{u^{-1}},\\ S(\widehat{x})&=\sum_{u\in N}\beta_x^{-1}(u,u^{-1})\widehat{x^{-1}}p_u=\sum_{u\in N}\beta_x^{-1}(u,u^{-1})p_{u^x}\widehat{x^{-1}}.\end{aligned}$$

在特殊情形下，如果每个 β_x 都是交替双特征标，则对所有 $x\in Q$，$S(\widehat{x})=x^{-1}$。

我们经常对 $f\in\Bbbk^N$ 和 $x\in Q$ 作如下识别：

$$\begin{aligned}1&=1_B=\widehat{1_Q},\\ f&=f\widehat{1_Q}=\sum_{u\in N}f(u)p_u\widehat{1_Q},\\ f\widehat{x}&=\sum_{u\in N}f(u)p_u\widehat{x},\\ \widehat{x}&=\varepsilon_N\widehat{x}=\sum_{u\in N}p_u\widehat{x}.\end{aligned}$$

考虑到这些识别， $\Bbbk^N$ 是 B 的子代数，并且对于 $f \in \Bbbk^N$、 $x \in Q$， $\widehat{x} f = ({}^x f)\widehat{x}$。

3.2. Hopf代数 K_n。假设 n 是奇数且大于 1，并且 m 整除 n。令 ξ 为固定的 m 次单位根。Hopf代数 $H_{m,\ n}$ 最初由 G. I. Kac[21] 描述，后来由 A. Masuoka [23] 重新研究。下面的表示取自 [22]。它们是上述构造的一个特例，其中

$$N = C_n \times C_n = \langle a, b : a^n, b^n \rangle, \qquad \text{and} \qquad Q = C_2 = \langle x : x^2 \rangle,$$

Q 在 N 上的作用由 $a^x = b$、 $b^x = a$ 给出，而余循环 β 是一个交替双特征标，由下式给出

$$\beta_x(a^i b^j, a^k b^\ell) = \xi^{i\ell - jk}. \tag{1}$$

若 $m = n$，则设 $K_n = H_{n,\ n}$。对于映射 $f \in \Bbbk^N$，记作 $f(i,j) = f(a^i b^j)$；对于映射 g: $\Bbbk^{N\times N} \simeq \Bbbk^N \otimes \Bbbk^N \to \Bbbk$，有时将 $g((i,j),(k,\ell)) = g(a^i b^j \otimes a^k b^\ell)$ 简写为 $g((i,j),(k,\ell)) = g(a^i b^j \otimes a^k b^\ell)$。

3.3. K_n的结构。设 $n > 1$ 为奇数， ξ 为固定的 1 的 n 次本原根。令$p_{i,\ j} = p_{a^i b^j}$和$f_{i,\ j} = p_{i,\ j}\widehat{x}$，其中所有 i、 $j \in \mathbb{Z}_n$均成立。则 $\{p_{i,j}, f_{i,j} :\ i,\ j \in \mathbb{Z}_n\}$是 K_n的一组基。相对于这组基，代数结构如下：

$$p_{ij}p_{ij} = p_{ij}, \qquad p_{ij}f_{ij} = f_{ij}, \qquad f_{ij}p_{ji} = f_{ij}, \qquad f_{ij}f_{ji} = p_{ij},$$

其中，其他任意两个基元素的乘积均为零。余代数结构如下：

$$\begin{aligned}
\Delta(p_{ij}) &= \sum_{i'+i''=i, j'+j''=j} p_{i'j'} \otimes p_{i''j''}, \qquad \varepsilon(p_{ij}) = \delta_{i,0}\delta_{j,0}, \\
\Delta(f_{ij}) &= \sum_{i'+i''=i, j'+j''=j} \xi^{i'j''-j'i''}\, f_{i'j'} \otimes f_{i''j''}, \qquad \varepsilon(f_{ij}) = \delta_{i,0}\delta_{j,0}, \\
\Delta(\widehat{x}) &= \sum_{i,j,k,\ell \in \mathbb{Z}_n} \xi^{i\ell - jk} p_{ij}\, \widehat{x} \otimes p_{k\ell}\widehat{x}, \qquad \varepsilon(\widehat{x}) = 1.
\end{aligned}$$

反元如下：

$$S(p_{ij}) = p_{-i,-j}, \qquad S(f_{ij}) = f_{-j,-i}, \qquad S(\widehat{x}) = \widehat{x^{-1}}.$$

4. Simple Yetter-Drinfeld modules

本节给出 Hopf代数 K_n上的所有简单 Yetter-Drinfeld 模。首先，我们调整 Wigner 和 Mackey 的“小群”方法，利用一维余模构造$B = \Bbbk^N \rtimes_\beta \Bbbk Q$ 上的简单 Yetter-Drinfeld 模。随后，我们通过矩阵余代数余作用构造简单对象。

4.1. Wigner 和 Mackey 的小群。下面我们介绍对 Wigner 和 Mackey 的“小群”方法的一种改编。该方法用于描述群 $A \rtimes H$ 与阿贝尔群 A 的半直积的不可约表示。以下内容取自 [27]的第 8.2 小节。请注意，在其证明中，无需 A 是一个群；稍作调整，几乎可以逐字沿用其中的论述和证明，以描述代数 $B = A \rtimes \Bbbk Q$ 的不可约表示，其中 Q 是作用于有限维交换半单代数 A上的有限群。利用这一作用， Q 也在左侧作用于 $X = \mathrm{Alg}(A, \Bbbk)$，其作用方式为（$q\chi$）（$a$） $= \chi$（$q^{-1} \cdot a$），对所有 $q \in Q$、 $a \in A$ 和 $\chi \in X$均成立。

令 $\chi_1, \dots, \chi_k$ 为 X/Q 的所有不同轨道的代表元。对于 $i = 1, \dots, k$，令 Q_i 为 χ_i 的稳定子群，即 $Q_i = \{q \in Q :\ q\chi_i = \chi_i\}$，并令 $B_i = A \rtimes \Bbbk Q_i$。对于 $i = 1, \dots, k$ 和 ρ: $Q_i \to \mathrm{GL}(U)$，令 $\chi_i \otimes \rho$: $B_i \to \mathrm{GL}(U)$ 表示由 $(\chi_i \otimes \rho)(a \rtimes q) = \chi_i(a)\rho(q)$（其中 $a \in A$ 和 $q \in Q_i$）给出的 B_i 的表示。最后，令 $\theta_{i,\rho}$: $B \to \mathrm{GL}(B \otimes_{B_i} U)$ 为诱导表示。

定理 4.1.1（参见 [27] 的命题 25）。

(1) 表示 $\theta_{i,\ \rho}$ 不可约，当且仅当 ρ 不可约。(2) 表示 $\theta_{i,\ \rho}$ 与 $\theta_{i',\ \rho'}$ 等价，当且仅当 $i = i'$，且 Q_i 的表示 ρ 与 ρ' 等价。(3) B 的每个不可约表示都等价于某个 $\theta_{i,\ \rho}$。

□

注 4.1.2. 如果不固定轨道的代表元，则可以用显然的方式描述$\theta_{\chi,\ \rho}$ 其中 $\chi \in$Alg$(A, \Bbbk)$，且 ρ 是 Stab$_{\mathcal{Q}}(\chi)$ 的一个不可约表示。于是，两个表示 $\theta_{\chi,\ \rho}$ 和 $\theta_{\chi',\ \rho'}$ 等价，当且仅当发生以下情况：

（1） χ 和 χ' 在 Q 的作用下具有相同的轨道。（2）若 $q \in Q$ 满足 $\chi' = q\chi$，则 qStab$_{\mathcal{Q}}(\chi)$ $q^{-1} =$ Stab$_{\mathcal{Q}}(\chi')$。通过这一识别，我们可以将 ρ' 视为 Stab$_{\mathcal{Q}}(\chi)$ 的一个表示；在此意义下，它应与 ρ等价。

注 4.1.3. 我们可以更明确地描述 $\theta_{i,\rho}$ 如下：设 $Q_i \leq Q$ 为 χ_i的稳定子群，设 U 为与 Q_i的一个不可约表示 ρ 相对应的单 $\Bbbk Q_i$-模。选取陪集 Q/Q_i的代表元 $q_j = q_{j,i}$, $j = 1, \dots, m$。那么，表示 $\theta_{i,\rho}$对应于单 B-模 $W = W_{i,\rho} = \bigoplus_{j=1}^{m} U_j$，其中 U_j 作为 $\Bbbk Q_i$-模时就是 U。A 在 U_j 上的作用由 $a \cdot u = \chi_i(q_j^{-1} \cdot a)u = \chi_i(q_j^{-1} a q_j)u$给出。$q \in Q$ 的作用如下：存在唯一的 $j \in \{1, \dots, m\}$ 和 $q' \in Q_i$ 使得 $q = q_j q'$。于是，对于 $u \in U_\ell$，有 $q \cdot u = \rho(q_\ell^{-1} q' q_\ell)u \in U_{j \triangleright \ell}$，其中 $j \triangleright \ell$ 是满足 $q_j q_\ell \in q_{j \triangleright \ell} Q_i$的唯一指标。

4.2. 由一维余模诱导的简单 Yetter-Drinfeld 模。设 $B = \Bbbk^N \rtimes_\beta \Bbbk Q$ 并进一步假设 β 是一个双特征。下面我们应用上文讨论的小$\widehat{\ }$群理论，来描述 ${}^N_B\mathcal{YD}$中的简单对象；${}^N_B\mathcal{YD}$是 ${}^B_B\mathcal{YD}$ 的子范畴，由$\widehat{\ }$那些余作用落在 $\Bbbk N \otimes V$内的 Yetter-Drinfeld 模 V组成。思路是在 $\Bbbk N$上定义一个简单的$\widehat{\ }B$-模，并赋予与之相容的齐次余作用。

考虑 Q 在 N $\widehat{\ }$上的作用 $\widehat{N}$ 定义为

$$x * (a, \chi) = (a^{x^{-1}}, \beta_x(-, a^{x^{-1}})\beta_x^{-1}(a^{x^{-1}}, -)({}^x\chi)) \qquad \text{for all } x \in Q, a \in N, \chi \in \widehat{N},$$

并设$(a_1, \chi_1) \dots, (a_k, \chi_k)$为该作用下不同轨道的一组固定代表。对于每个 $i = 1, \dots, k$，令 $Q_i =$ Stab$_{\mathcal{Q}}(a_i, \chi_i)$，并令 U为 Q_i的一个不可约表示。于是，诱导的 $\Bbbk Q$-模 $\Theta(U, a_i, \chi_i) = \Bbbk Q \otimes_{\Bbbk Q_i} U$如下成为 ${}^N_B\mathcal{YD}$中的一个元素：对所有$x, y \in Q$, $f \in \Bbbk^N$ 和 $u \in U$，定义

$$\begin{aligned} (f\widehat{x}) \cdot (y \otimes_{\Bbbk Q_i} u) &= f(a_i^{xy})(xy \otimes_{\Bbbk Q_i} u), \\ \delta(y \otimes_{\Bbbk Q_i} u) &= \beta_y(-, a_i^{y^{-1}})\beta_y^{-1}(a_i^{y^{-1}}, -)({}^y\chi_i) \otimes (y \otimes_{\Bbbk Q_i} u). \end{aligned}$$

特别地，对于所有 $u \in U$，有 $(f\widehat{x}) \cdot (1 \otimes_{\Bbbk Q_i} u) = f(a_i^x)(x \otimes_{\Bbbk Q_i} u)$ 和 $\delta(1 \otimes_{\Bbbk Q_i} u)$ $= \chi_i \otimes 1 \otimes_{\Bbbk Q_i} u$。注意，余作用的公式由相容条件推出，即 $\delta(y \otimes_{\Bbbk Q_i} u) =$$\delta(\widehat{y} \cdot (1 \otimes_{\Bbbk Q_i} u))$。

或者，选取陪集 Q/Q_i 的代表元 $x_1, \dots, x_m$。于是，作为 $\Bbbk Q_i$-模，$\Theta(U, a_i, \chi_i) = \bigoplus_{j=1}^{m} U_j$；而作为 $\Bbbk Q_i$-模，我们有每个 $U_j \simeq U$。下面明确描述其结构。对于每个 $j = 1, \dots, m$，令 $v_j = u_i^{x_j^{-1}}$，并令 $\theta_j = \beta_x(-, v_j)\beta_x^{-1}(v_j, -)({}^{x_j}\chi_i) \in \widehat{N}$。

- U_j 上的$\widehat{\ }\Bbbk N$-余作用随后由 $\delta(u) = \theta_j \otimes u$给出。
- B在 U_j上的作用如下：若 $f \in \Bbbk^N$，则 $f \cdot u = f(v_j)u$。若 $x \in Q$，令$k \in \{1, \dots, m\}$ 和 $y \in Q_i$ 为满足$xx_j = x_k y$的唯一元素；则 $\widehat{x} \cdot u$ 是 U_k中与 $y \cdot u$ 对应的元素。

于是，Yetter-Drinfeld 模 $\Theta(U, a_i, \chi_i)$是单模，因为根据小群构造，它们作为 B-模是单模。注意，该模的维数取决于 U 的维数以及 Q作用下轨道的大小。´

注 4.2.1. 若 β 是"部分平凡的"，则上述内容可作如下推广。令

$$R := \{t \in Q : \forall a, b \in N, \forall x \in Q, \beta_t(a, b) = 1, \beta_x(a^t, b) = \beta_x(a, b) = \beta_x(a, b^t)\};$$

即，R 由 Q 中满足 β_t 平凡的元素 t 构成，且 β_x 各分量上的作用 $\widehat{\ }$ 也都是平凡的。结果表明，R 是 Q 的正规子群，并且 $\Bbbk N \rtimes R \subseteq G(B)$。一般而言，该包含关系是严格的；在特殊情形下，若 β 平凡（这意味着 $R = Q$），或 β 非退化（即对每个 $a \neq 1_N$ 和每个 $x \neq 1_Q$，特征 $\beta_x(-, a)$、$\beta_x(a, -)$ 的核均为平凡群；因此 $R = 1$），则可得等式。定义 $\rightharpoonup Q$ 在 $N \times (N \rtimes R)$ 上的作用如下：

$$x * (a, \chi r) = (a^{x^{-1}}, \beta_x(-, a^{x^{-1}})\beta_x(a^{x^{-1}}, -)({}^x\chi)(xrx^{-1})).$$

设 $(a_1, \chi_1 r_1), \ldots, (a_k, \chi_k r_k)$ 是该作用下不同轨道的一组固定代表元。对每个 $i = 1, \ldots, k$，设 Q_i = 稳定子群 $Q(a_i, \chi_i r_i)$，并设 U 是 Q_i 的一个不可约表示。则诱导的 $\Bbbk Q$ 模 $\Theta(U, a_i, \xi_i) = \Bbbk Q \otimes_{\Bbbk Q_i} U$成为 B 上的 Yetter-Drinfeld 模，如下：

$$\begin{aligned}(f\widehat{x}) \cdot (y \otimes_{\Bbbk Q_i} u) &= f(a_i^{xy})(xy \otimes_{\Bbbk Q_i} u),\\ \delta(x \otimes_{\Bbbk Q_i} u) &= \beta_x(-, a_i^{x^{-1}})\beta_x^{-1}(a_i^{x^{-1}}, -)({}^x\chi_i)\widehat{xrx^{-1}} \otimes (x \otimes_{\Bbbk Q_i} u).\end{aligned}$$

4.3. K_n 上由一维子余模诱导的简单 Yetter-Drinfeld 模。这里我们将上述方法应用于 $B = K_n$ 的情形，以描述 ${}^N_{K_n}\mathcal{YD}$ 中所有简单 $\rightharpoonup$Yetter-Drinfeld 模。回顾 $N = \langle a, b : a^n, b^n \rangle \simeq C_n \times C_n$，$Q = C_2$和$\beta_x(a^i b^j, a^k b^\ell) = \xi^{i\ell - jk}$对所有 $i, j, k, \ell \in \mathbb{Z}_n$。

对于 $m, t \in \mathbb{Z}_n$，令 $\chi_{m,t} \in \widehat{N}$为 N上的特征，其定义为 $\chi_{m,t}(a^i b^j) = \xi^{mi+tj}$。注意，$x$ 在 $\chi_{m,t}$ 上的$\widehat{\ }$作用由 ${}^x\chi_{m,t} = \chi_{t,m}$ 给出，而 C_2 在 $N \times N$ 上的"扭曲"作用由以下内容给出

$$x * (a^i b^j, \chi_{m,t}) = (a^j b^i, \chi_{t+2i, m-2j}) \qquad \text{for all } i, j, m, t \in \mathbb{Z}_n.$$

Q 的作用下的轨道如下：

(1) Orbits of size one: $\{(a^i b^i, \chi_{m,m-2i})\}$ for $i, m \in \mathbb{Z}_n$.

（2）大小为二的轨道：

(a) $\{(a^i b^i, \chi_{m,t}), (a^i b^i, \chi_{t+2i,m-2i}\}$, where $i, m, t \in \mathbb{Z}_n$ and $t \neq m - 2i$.

(b) $\{(a^i b^j, \chi_{m,t}), (a^j b^i, \chi_{t+2i,m-2j})\}$, where $i, j, m, t \in \mathbb{Z}_n$ and $i \neq j$.

我们指出，在情形 (b) 中，不可能有 $(m, t) = (t + 2i, m - 2j$).

相应的简单 Yetter-Drinfeld 模如下：

$\rightharpoonup(V^\epsilon_{i,m})$。对于 $\epsilon = \pm 1$ 和 $i, m \in \mathbb{Z}_n$，对象 $V^\epsilon_{i,m} \in {}^N_{K_n}\mathcal{YD}$ 是由 $v \neq 0$ 生成的一维向量空间，其中

- ▷ the coaction is given by $\delta(v) = \chi_{m,m-2i} \otimes v$;
- ▷ the action of is given by $(f\widehat{x}^k) \cdot w = f(a^i b^i)\epsilon^k w$ for $f \in \Bbbk^N$ and $k = 0, 1$;
- ▷ the braiding is given by $c(v \otimes v) = \xi^{2i(m-i)}\, v \otimes v$.

在同构意义下，共有 $2n$ 个这样的模。

$(U_{i,j,m,t})$。对于 $i, j, m, t \in \mathbb{Z}_n$，对象$U_{i,j,m,t}$是由非零向量 u_1, u_2 张成的二维向量空间，其中

▷ 余作用由 $\delta(u_1) = \chi_{m,t} \otimes u_1$, $\delta(u_2) = \chi_{t+2i,m-2j} \otimes u_2$给出。
▷作用由 $f \cdot u_1 = f(a^i b^j) \cdot u_1$, $f \cdot u_2 = f(a^j b^i) \cdot u_2$给出，其中 $f \in \Bbbk^N$和
$x \cdot u_1 = u_2$, $x \cdot u_2 = u_1$。
▷ 编织由下式给出

$$c(u_1 \otimes u_1) = \xi^{mi+tj} u_1 \otimes u_1, \qquad c(u_1 \otimes u_2) = \xi^{it+mj} u_2 \otimes u_1,$$
$$c(u_2 \otimes u_1) = \xi^{it+mj+2(i^2-j^2)} u_1 \otimes u_2, \qquad c(u_2 \otimes u_2) = \xi^{mi+tj} u_2 \otimes u_2.$$

当且仅当 $(i', j', m', t') \in \{(i, j, m, t), (j, i, t + 2i, m - 2j)\}$ 时，这些模 $U_{i,j,m,t}$ 和 $U_{i',j',m',t'}$ 同构。注意，如果 $i \neq j$，则不可能同时满足$m = t + 2i$ 和 $t = m - 2j$。

当且仅当 $i = j$ 和 $t = -2i + m$ 时，这些模是可约的。如果出现这种情况，则有 $U_{i,i,m,-2i+m} \simeq V_i^+{}_{,m} \oplus V_i^-{}_{,m}$，其中同构由 $u_1 \mapsto v^+ + v^-$ 和 $u_2 \mapsto v^+ - v^-$给出，分别为 $v^\pm V_i^\pm{}_{,m}$的生成元。

Up to isomorphism that are $\frac{1}{2}n^3(n-1) + \frac{1}{2}n^2(n-1)$ such simple modules.

这些 简单 Yetter-Drinfeld 模的维数平方之和等于 t o

$$n^2 \cdot 1 + n^2 \cdot 1 + \frac{1}{2}n^2(n-1) \cdot 4 + \frac{1}{2}n^3(n-1) \cdot 4 = 2n^4 = \dim(B) \cdot \dim(\Bbbk \widehat{N}). \tag{2}$$

4.4. K_n 上具有矩阵余代数余作用的简单 Yetter-Drinfeld 模。对于 $i, j \in \mathbb{Z}_n$，我们在 K_n中定义以下元素

$$e_{ij} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \xi^{-2(i+j)k} f_{k+i-j,k-i+j}.$$

命题 4.4.1. 集合 $\{e_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_n}$ 线性无关。
证明。设 $\sum_{i,j} \lambda_{ij} e_{ij} = 0$。则对于固定的 $r, s \in \mathbb{Z}_n$，该和中 f_{rs} 的系数为

$$\sum_{2(i-j)=r-s} \lambda_{ij} \xi^{-(i+j)(r+s)}.$$

记 2^{-1} 为 $\mathbb{Z}_n$ 中 2 的乘法逆元（即 $2^{-1} = \frac{n+1}{2}$）。现在固定 $k, \ell \in \mathbb{Z}_n$，并令$r = 2^{-1}($ $2k - 2^{-1}\ell)$ 和 $s = -2^{-1}(2k + 2^{-1}\ell)$，使得 $r - s = 2k$ 和 $r + s = -2^{-1}\ell$。那么该系数变为

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}_n} \lambda_{i,i-k} \xi^{i\ell}.$$

由于元素 $\{f_{ij}\}_{i,\ j \in \mathbb{Z}_n}$ 线性无关，因此对于每个 $\ell \in \mathbb{Z}_n$，ξ^ℓ 都是多项式$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_{i,\ i-k} x^i$ 的一个根。这意味着 p 必须恒等于零，因此我们有 $\lambda_{i,\ i-k} = 0$，对所有 i, k 均成立。□

下面的命题给出了元素 $\{e_{ij}\}_{i,\ j \in \mathbb{Z}_n}$的余乘法；它们构成一个余矩阵基。

命题 4.4.2. 对所有 $i, j \in \mathbb{Z}_n$，有

$$\Delta(e_{ij}) = \sum_r e_{ir} \otimes e_{rj} \qquad and \qquad \varepsilon(e_{ij}) = \delta_{i,j}.$$

证明. 固定 $i, j \in \mathbb{Z}_n$。直接计算可得

$$\begin{aligned}\Delta(e_{ij}) &= \Delta\Big(\sum_k \xi^{-2(i+j)k} f_{k+i-j,k-i+j}\Big)\\ &= \sum_{k,\ell,m} \xi^{-2(i+j)k+\ell(k-i+j-m)-m(k+i-j-\ell)} f_{\ell,m} \otimes f_{k+i-j-\ell,k-i+j-m}.\end{aligned}$$

现在我们引入新变量 s、t、$r \in \mathbb{Z}_n$，并作如下变换

$$\ell = t + i - r, \qquad m = t - i + r, \qquad k = s + t.$$

由于

$$2t = \ell + m, \qquad 2r = m - \ell - 2i, \qquad 2s = 2k - \ell - m,$$

且 2 在 $\mathbb{Z}_n$ 中可逆，因此该变量替换是可逆的。在此变换下，上述和等于

$$\sum_{r,s,t} \xi^{-2(i+j)t-2(r+j)s} f_{t+i-r,t-i+r} \otimes f_{s+r-j,s-r+j} = \sum_e e_{ir} \otimes e_{rj}.$$

最后，$\varepsilon(e_{ij}) = \sum_k \xi^{-2(i+j)k} \varepsilon(f_{k+i-j,\ k-i+j}) = \sum_k \xi^{-2(i+j)k} \delta_{k,\ j-i} \delta_{k,\ i-j} = \delta_{i,\ j}$。 □

推论 4.4.3. 余代数 $\Bbbk^N \widehat{x}$ 同构于 $\mathcal{M}_n(\Bbbk)^*$，即维数为 n^2的简单矩阵余代数。□

以下技术引理将帮助我们描述元素 $\{e_{r0}\}_{r\in\mathbb{Z}_n}$ 的线性张成上的 K_n-模结构。由于它是 K_n 的余子代数，该结构由 K_n 对自身的伴随作用给出，即对于所有 y、$z \in K_n$，都有 $y \rightharpoonup z = y_{(1)} z S(y_{(2)})$。例如，经过简单验证可知，对于满足 i、$j \in \mathbb{Z}_n$ 的元素 f_{ij}，以及作为 $\Bbbk^N \subseteq K_n$ 中类群元的特征 $\chi \in \Bbbk^N$，我们有

$$\widehat{x} \rightharpoonup f_{ij} = \xi^{i^2-j^2} f_{ji}, \tag{3}$$

$$\chi \rightharpoonup f_{ij} = \chi(a^{i-j} b^{j-i}) f_{ij}, \tag{4}$$

引理 4.4.4。对于 p、q、$r \in \mathbb{Z}_n$，我们有

$$f_{pq} \rightharpoonup e_{r,0} = \begin{cases} e_{-r,0}, & p = -2r, q = 2r \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

证明。直接计算可得

$$f_{pq} \rightharpoonup f_{rs} = \begin{cases} \xi^{r^2-s^2} f_{sr}, & p = -r + s, q = r - s \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} f_{-2r,2r} \rightharpoonup e_{r0} = f_{-2r,2r} \rightharpoonup \sum_k \xi^{-2jk} f_{k+r,k-r} &= \sum_k \xi^{-2rk+(k+r)^2-(k-r)^2} f_{k-j,k+j} \\ &= \sum_k \xi^{2rk} f_{k-r,k+r} = e_{-r,0}. \end{aligned}$$

类似地，计算可得，对于 $(p、\ q) \neq (-2r、\ 2r)$，有 $f_{pq} \rightharpoonup e_{r,\ 0} = 0$。 □

引理 4.4.5。对于 m、t、i、$j \in \mathbb{Z}_n$，我们有

$$\chi_{m,t} \rightharpoonup e_{i,j} = \xi^{2(m-t)(i-j)} e_{i,j}.$$

特别地

$$\chi_{1,-1} \rightharpoonup e_{r,0} = \xi^{2r} e_{r,0}.$$

证明。由（4）可知，对于任意特征 $\chi \in \Bbbk^N$，有

$$\chi \rightharpoonup f_{rs} = \chi(r-s,-r+s)f_{rs}.$$

因此

$$\begin{aligned}\chi_{m,t} \rightharpoonup e_{ij} = \chi_{m,t} \rightharpoonup \sum_k \xi^{-2(i+j)k} f_{k+i-j,k-i+j} &= \sum_k \chi_{m,t}(2(i-j),-2(i-j))\xi^{-2(i+j)k} f_{k+i-j,k-i+j} \\ &= \xi^{2(m-t)(i-j)} e_{ij}.\end{aligned}$$

□

利用上述结果以及元素 $\{f_{ij}\}_{i,\ j\in\mathbb{Z}_n}$ 和特征 $\{\chi_{m,t}\}_{m,\ t\in\mathbb{Z}_n}$线性张成 K_n这一事实，我们得到 $W_0 = span\{e_{r0} : r \in \mathbb{Z}_n\}$ 的 Yetter-Drinfeld 模结构的描述。

推论 4.4.6. 余模 $W_0 = span\{e_{r0} :\ r \in \mathbb{Z}_n\}$ 在 K_n 的伴随作用下保持不变，即它是正则 Yetter-Drinfeld 模 K_n 的一个 Yetter-Drinfeld 子模。对于所有 $r \in \mathbb{Z}_n$，其结构由下式给出

▷ $\delta(e_{r0}) = \sum_k e_{rk} \otimes e_{k0}$;
▷ $\widehat{x} \rightharpoonup e_{r0} = e_{-r0}$ *and* $f \rightharpoonup e_{r0} = f(2r,-2r)e_{r0}$ *for all* $f \in \Bbbk^N$.

□

现在，对于 i、$m \in \mathbb{Z}_n$ 和 $\epsilon \in \{\pm 1\}$，我们定义 Yetter-Drinfeld 模

$$W^{\epsilon}_{i,m} := V^{\epsilon}_{i,m} \otimes W_0.$$

回顾 §4.3，$V_{i,\ m} = \Bbbk v$ 是 K_n 上的一维 Yetter-Drinfeld 模，其余作用为 $\delta(v) = \chi_{m,\ m-2i} \otimes v$，作用由 $f \cdot v = f(i,i)v$ 给出，其中 $f \in \Bbbk^N$ 和 $\widehat{x} \cdot v = \epsilon\, v$。注意，这意味着

$$f_{pq} \cdot v = \begin{cases} \epsilon\, v, & p = q = i \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们将 $W^{\epsilon}_{i,m}$ 以显然的方式视为 $V \otimes (\Bbbk^N \widehat{x})$ 的 Yetter-Drinfeld 子模。对于$w \in \Bbbk^N \widehat{x}$，简记为 $\widetilde{w} = v \otimes w$。$B$ 对 $V \otimes (\Bbbk^N \widehat{x})$ 的对角作用记作

$$y \cdot_{i^\epsilon} \widetilde{w} = (y_{(1)} \cdot v) \otimes (y_{(2)} \rightharpoonup w);$$

而 B-余作用记作

$$\delta_{i,m}(\widetilde{w}) = \chi_{m,m-2i} w_1 \otimes \widetilde{w_2}.$$

我们首先注意到

$$\delta_{i,m}(\widetilde{e_{r0}}) = \sum_k \chi_{m,m-2i} e_{rk} \otimes \widetilde{e_{k0}}.$$

下面我们计算作用 $\cdot_{i^\epsilon}$ 的详细公式。对于 $k \in \mathbb{Z}_n$，记 $w_k = \widetilde{e_{k\ ,0}} = v \otimes e_{k,0}$。特别地，$W^{\epsilon}_{i,\ m} = \Bbbk\{w_0, \dots, w_{n-1}\}$ 作为 $\Bbbk$-向量空间，而上述余作用写作

$$\delta_{i,m}(w_r) = \sum_k \chi_{m,m-2i}\, e_{rk} \otimes w_k. \tag{5}$$

引理 4.4.7。对于 p、q、$r \in \mathbb{Z}_n$，有

$$f_{pq} \cdot_{i^\epsilon} w_r = \begin{cases} \epsilon\, \xi^{4ir} w_{-r}, & p = i-2r, q = i+2r \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

证明。直接计算可得

$$f_{pq} \cdot_{i^\epsilon} \widetilde{e_{r0}} = \sum_{t,s} \xi^{t(q-s)-s(p-t)} (f_{ts} \cdot v) \otimes (f_{p-t,q-s} \rightharpoonup e_{r0}).$$

对于非零的加项，必须有 $t = s = i$, $p - t = -2r$, $q - s = 2r$ ，因此也有 $p = i - 2r$, $q = i + 2r$。由此立即可得结论。□

引理 4.4.8. 对于 $\ell, s, r \in \mathbb{Z}_n$ ，我们有

$$e_{\ell,s} \cdot_{i^\epsilon} w_r = \begin{cases} \epsilon\, \xi^{2i(r-\ell)} w_r, & s = \ell + 2r \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

证明。通过直接计算即可证明。事实上，

$$\begin{aligned} e_{\ell,s} \cdot_{i^\epsilon} \widetilde{e_{r0}} &= \sum_k \xi^{-k(\ell+s)} f_{k+\ell-s,k-\ell+s} \cdot_{i^\epsilon} \widetilde{e_{r0}} \\ &= \epsilon\, \xi^{-2i(\ell+r)+4ir} \widetilde{e_{-r,0}} \\ &= \begin{cases} \epsilon\, \xi^{2i(r-\ell)} \widetilde{e_{-r,0}}, & s = \ell + 2r, \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

第二个等式由以下事实得出：对于非零项，必须有 $k + \ell - s = i - 2r$,$k - \ell + s = i + 2r$ ，因此 $k = i$, $s = \ell + 2r$。□

下一个引理可通过直接计算得出。

引理 4.4.9. 对于特征 $\chi \in \Bbbk^N$，以及 $p, q, r \in \mathbb{Z}_n$，我们有

$$\begin{aligned} \chi \cdot_{i^\epsilon} \widetilde{f_{pq}} &= \chi(i + p - q, i - p + q) \widetilde{f_{pq}}, \\ \chi \cdot_{i^\epsilon} w_r &= \chi(i + 2r, i - 2r) w_r. \end{aligned}$$

□

定理 4.4.10. $2n$ Yetter-Drinfeld 模 $W^\epsilon_{i,m}$, $i, m \in \mathbb{Z}_n$ 两两不同构。对于所有 $r \in \mathbb{Z}_n$ ，它们的 Yetter-Drinfeld 模结构由下式给出

- ▷ $\delta_{i,m}(w_r) = \sum_k \chi_{m,m-2i}\, e_{rk} \otimes w_k$;
- ▷ $\widehat{x} \cdot_{i^\epsilon} w_r = \epsilon\, \xi^{4ir} w_{-r}$ *and* $f \cdot_{i^\epsilon} w_r = f(i + 2r, i - 2r) w_r$ *for all* $f \in \Bbbk^N$.

证明。注意到 ${W_i^{+1}}_{,m}$ 不可能与 ${W_{i'}^{-1}}_{,m'}$ 同构，因为 $\widehat{x}$ 在 ${W_i^{+1}}_{,m}$ 上的作用的行列式为 $(-1)^{(n-1)/2}$，而 $\widehat{x}$ 在 ${W_{i'}^{-1}}_{,m'}$ 上的作用的行列式为 $-(-1)^{(n-1)/2}$。事实上，在有序基 w_0, w_j, w_{-j}, $j = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$, $\widehat{x}$ 下，它是分块对角的：第一个块是 1×1 块 $[\epsilon]$，其余各块是 2×2 块 $\epsilon \begin{pmatrix} 0 & \xi^{-4jr} \\ \xi^{4jr} & 0 \end{pmatrix}$, $j = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$。

现在假设 $W^\epsilon_{i,m}$ 和 $W^\epsilon_{i',m'}$ 是同构的。我们首先注意到这意味着 $i = i'$因为 χ_1,1 通过分别乘以 ξ^{2i} 和 $\xi^{2i'}$ 作用于 $W^\epsilon_{i,m}$ 和 $W_{i',m'}$ 。现在假设F: $W^\epsilon_{i,m} \to W^\epsilon_{i,m'}$是 Yetter-Drinfeld 模的同构。注意 $\chi_{1,-1}$ 在这两个空间上的作用都有特征值 ξ^{2r} ，对应的一维特征空间由 w_r 张成。因此， F 必须保持这些特征空间，即我们必须有 $F(w_r) = \lambda_r w_r$ 对于非零标量 $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$。由于 F也是余模映射，我们必须有 $\delta_{i,m}(F(w_0))$ =(id $\otimes F)\delta_{i,m'}(w_0)$。这给出 $\lambda_0 \sum_k \chi_m$, ${}_{m-2i} e_{0k} \otimes w_k = \sum_k \chi_{m'}$,${}_{m'-2i} e_{0k} \otimes \lambda_k w_k$。由于$w_0, \ldots, w_{n-1}$是线性无关的，这特别意味着 χ_m, ${}_{m-2i} e_{00} = \chi_{m'}$,${}_{m'-2i} e_{00}$。该方程左边 f_1,1 的系数是 ξ^{2m-2i} ，右边对应的系数是 $\xi^{2m'-2i}$。因此 $m = m'$。□

推论 4.4.11. 每个在 K_n 上且余作用包含于 $\Bbbk^N \widehat{x}$ 中的简单 Yetter-Drinfeld 模，都同构于上文描述的某个 $W^\epsilon_{i,\ m}$ 。

证明. 如上所示，模 $W_{i,\ m}^{\epsilon}$ 两两不同构，而且显然是单的（它们甚至作为余模也是单的）。现在通过维数计数可得

$$\sum_{i,m,\epsilon} \dim(W_{i,m}^{\epsilon}) = 2n^2 \cdot n^2 = 2n^4 = \dim(K_n \otimes \Bbbk^N \widehat{x}).$$

□

命题 4.4.12。$W_{i,\ m}^{\epsilon}$ 上的编织由下式给出：

$$c_{i,m}^{\epsilon}(w_\ell \otimes w_r) = \epsilon\, \xi^{2i((m-i)-(r+\ell))} w_{-r} \otimes w_{\ell+2r}.$$

证明。将 §2.1 中的编织公式、余作用公式 (5) 以及引理 4.4.8 和 4.4.9 直接代入计算即可得出。确实，

$$\begin{aligned} c_{i,m}^{\epsilon}(w_\ell \otimes w_r) &= \sum_s ((\chi_{m,m-2i} e_{\ell,s}) \rightharpoonup_{i^\epsilon} w_r) \otimes w_s \\ &\overset{s=\ell+2r}{=} \left(\epsilon \xi^{2i(r-\ell)} \chi_{m,m-2i} \rightharpoonup_{i^\epsilon} w_{-r}\right) \otimes w_{\ell+2r} \\ &= \epsilon \xi^{2i(m-i-r-\ell)} w_{-r} \otimes w_{\ell+2r}. \end{aligned}$$

□

我们以对 ${}^{K_n}_{K_n}\mathcal{YD}$ 中所有单对象的分类结束本节。有关这些对象的结构和编织的明确描述，见 §4.3 和 §4.4。

定理 4.4.13。每个 K_n 上的简单 Yetter-Drinfeld 模 V 都同构于上文所述的某个模，即对于 $\epsilon = \pm 1$ 和 i、j、m、$t \in \mathbb{Z}_n$：

- 若 $\dim V = 1$，则 $V \simeq V_{i,\ m}^{\epsilon}$；
- 若 $\dim V = 2$，则 $V \simeq U_{i,\ j,\ m,\ t}$，其中 $i \neq j$ 或 $t \neq m - 2i$；
- 若 $\dim\ V = n$，则 $V \simeq W_{i,\ m}^{\epsilon}$。

证明。由第 §4.3 和 §4.4 小节可知，模 $V_{i,\ m}^{\epsilon}$, $U_{i,\ m,\ t}$, $U_{i,\ j,\ m,\ t}$ 和 $W_{i,\ m}^{\epsilon}$（其中 $\epsilon = \pm 1$, $i, j, m, t \in \mathbb{Z}_n$ 和 $i \neq j$, $t \neq m - 2i$）构成一族两两不同构的单模。然后，通过计算维数，由式 (2) 和推论 4.4.11 得到

$$\sum_{\epsilon,i,m \in \mathbb{Z}_n} (\dim V_{i,m}^{\epsilon})^2 + \sum_{\substack{i,m,t \in \mathbb{Z}_n \\ t \neq m-2i}} (\dim U_{i,i,m,t})^2 + \sum_{\substack{i,j,m,t \in \mathbb{Z}_n \\ i \neq j,\ t \neq m-2i}} (\dim U_{i,j,m,t})^2 + \sum_{\epsilon,i,m \in \mathbb{Z}_n} (\dim W_{i,m}^{\epsilon})^2 =$$

$$= 2n^2 \cdot 1 + \frac{1}{2} n^2 (n-1) \cdot 4 + \frac{1}{2} n^3 (n-1) \cdot 4 + 2n^2 \cdot n^2 = 4n^4 = \dim D(K_n).$$

因此，根据阿廷-韦德伯恩定理，这一族给出了 ${}^{K_n}_{K_n}\mathcal{YD}$ 中一组完备的两两不同构的单对象。□

5. The fusion ring of ${}^{K_n}_{K_n}\mathcal{YD}$

为方便读者，我们回顾前几节中的一些记号和结果。固定一个奇数本原整数 $n \geq 3$，并令 ξ 为一个本原 n 次单位根。Hopf代数$K_n = \Bbbk^N \rtimes_\beta \Bbbk Q$ 满足 $N = C_n \times C_n$, $Q = C_2$ 和 $\beta_x(a^i b^j, a^k b^\ell) = \xi^{i\ell - jk}$，对所有 $i, j, k, \ell \in \mathbb{Z}_n$ 均成立，其基为 $\mathcal{B} = \{p_{i,j} f_{i,j} \colon i, j \in \mathbb{Z}_n\}$，其中 $\{p_{i,j}\}$ 是 $\Bbbk^N$ 中基 $\{a^i b^j \colon i, j \in \mathbb{Z}_n\}$ 的对偶基，且 $\Bbbk N$ 和 $f_{i,\ j} = p_{i,\ j} \widehat{x}$。根据命题 4.4.2，子空间 $C = \Bbbk^N \widehat{x}$ 作为余代数同构于 $\mathcal{M}_n(\Bbbk)^*$；余矩阵基 $(e_{k\ell})_{k,\ \ell \in \mathbb{Z}_n}$ 为

$$e_{k,\ell} = \sum \xi^{-2s(k+\ell)} f_{s+k-\ell, s-k+\ell},$$

也就是说，$\Delta(e_{k,\ell}) = \sum_r e_{k,r} \otimes e_{r,\ell}$ 以及 $\varepsilon(e_{k,\ell}) = \delta_{k,\ell}$ 对所有 $k, \ell \in \mathbb{Z}_n$。

B 上的简单 Yetter-Drinfeld 模由以下几族给出，其中 $\epsilon = \pm 1$ 、i、 j、 m、 $t \in \mathbb{Z}_n$:

(V$^{\epsilon}_{i,\ m}$)。$V^{\epsilon}_{i,\ m} = \Bbbk\{v\}$ 其中作用由 $f \cdot v = f(i,i)v$, $\widehat{x} \cdot v = \epsilon v$ 给出，余作用由$\delta(v) = \chi_{m,\ -2i+m} \otimes v$ 给出。这些模均不可约且两两不同构。

(U$_{i,\ j,\ m,\ t}$)。$U_{i,\ j,\ m,\ t} = \Bbbk\{u_1, u_2\}$ 其中作用由 $f \cdot u_1 = f(i,j)u_1$, $f \cdot u_2 = f(j,i)u_2$,$\widehat{x} \cdot u_1 = u_2$, $\widehat{x} \cdot u_2 = u_1$ 给出，余作用由 $\delta(u_1) = \chi_{m,\ t} \otimes u_1$, $\delta(u_2) = \chi_{t+2i,\ m-2j} \otimes u_2$ 给出。

当且仅当 $(i', j', m', t') \in \{(i,j,m,t),\ (j,i,2i+t,-2i+m)\}$ 时，这两个模（例如 $U_{i,j,m,t}$ 和 $U_{i',j',m',t'}$）同构。我们还指出，若 $i \neq j$，则不可能同时满足 $m = t + 2i$ 和 $t = m - 2j$。当且仅当 $i = j$ 且 $t = m - 2i$ 时，这些模是可约的。若此情况成立，则 $U_{i,i,m,-2i+m} \simeq V^{+}_{i,m} \oplus V^{-}_{i,m}$。关于基 $\mathcal{B} = \{e_{ij}, f_{ij} \colon i,j \in \mathbb{Z}_n\}$ 的对偶作用由 $p_{a,b} * u_1 = \chi_{m,t}(a,b)u_1 = \xi^{ma+tb}u_1$,$p_{a,b} * u_2 = \chi_{t+2i,m-2j}(a,b)u_2 = \xi^{(2i+t)a+(-2j+m)b}u_2$ 给出；对于 $k = 1$，有 $f_{a,b} * u_k = 0$，2。

(W$_0$)。 $W_0 = \Bbbk\{w_0, \dots, w_{n-1}\}$ 其中，作用由 $f \cdot w_r = f(2r,-2r)w_r$, $\widehat{x} \cdot w_r = w_{-r}$ 给出，余作用由 $\delta(w_r) = \sum_k e_{rk} \otimes w_k$ 给出。

(W$^{\epsilon}_{i,\ m}$)。$W^{\epsilon}_{i,\ m} = V^{\epsilon}_{i,\ m} \otimes W_0$。若将 w_r 与 $v \otimes w_r$ 等同，则作用由 $f \cdot_{i^\epsilon} w_r = \chi(i+2r, i-2r)w_r$, $\widehat{x} \cdot_{i^\epsilon} w_r = \epsilon\, w_{-r}$ 给出，余作用由 $\delta^{\epsilon}_{i,\ m}(w_r) = \sum_k \chi_{m,\ m-2i} e_{rk} \otimes w_k$ 给出。这些模不可约且两两不同构。

5.1. 融合规则。下面我们计算 $\mathcal{YD}^{K_n}_{K_n}$ 的融合规则。由于 $W^{\epsilon}_{i,\ m} = V^{\epsilon}_{i,\ m} \otimes W_0$ 且该范畴是编织的，因此只需计算维数小于或等于二的单模与 W_0 之间的融合规则。

V$^{\epsilon_1}_{i_1,m_1}$ $\otimes$V$^{\epsilon_2}_{i_2,m_2}$：显然

$$V^{\epsilon_1}_{i_1,m_1} \otimes V^{\epsilon_2}_{i_2,m_2} \simeq V^{\epsilon_1\epsilon_2}_{i_1+i_2,m_1+m_2}.$$

U$_{i_1,j_1,m_1,t_1}$ $\otimes$ U$_{i_2,j_2,m_2,t_2}$：记第一个张量因子的生成元为 $u^{(1)}_1, u^{(1)}_2$，第二个张量因子的生成元为 $u^{(2)}_1, u^{(2)}_2$。该张量积作为 Yetter-Drinfeld 模分解为直和 $\Bbbk\{u^{(1)}_1 \otimes u^{(2)}_1, u^{(1)}_2 \otimes u^{(2)}_2\} \oplus \Bbbk\{u^{(1)}_1 \otimes u^{(2)}_2, u^{(1)}_2 \otimes u^{(2)}_1\}$。直接比较表明，第一个直和项同构于 $U_{i_1+i_2,j_1+j_2,m_1+m_2,t_1+t_1}$（通过由 $u^{(1)}_1 \otimes u^{(2)}_1 \mapsto u_1, u^{(1)}_2 \otimes u^{(2)}_2 \mapsto u_2$ 诱导的同构），第二个直和项同构于$U_{i_1+j_2,j_1+i_2,m_1+2i_2+t_2,t_1-2j_2+m_2}$（通过由 $u^{(1)}_1 \otimes u^{(2)}_2 \mapsto u_1, u^{(1)}_2 \otimes u^{(2)}_1 \mapsto u_2$ 诱导的同构）。总之，

$$U_{i_1,j_1,m_1,t_1} \otimes U_{i_2,j_2,m_2,t_2} \simeq U_{i_1+i_2,j_1+j_2,m_1+m_2,t_1+t_1} \oplus U_{i_1+j_2,j_1+i_2,m_1+2i_2+t_2,t_1-2j_2+m_2}.$$

V$^{\epsilon}_{i_1,\ m_1}$ $\otimes$U$_{i_2,\ j_2,m_2,t_2}$： 类似于上文，我们也可以看出

$$V^{\epsilon}_{i_1,m_1} \otimes U_{i_2,j_2,m_2,t_2} \simeq U_{i_1+i_2,i_1+j_2,m_1+m_2,-2i_1+m_1+t_2}.$$

该同构由 $v \otimes u_1 \mapsto u_1$ 和 $v \otimes u_2 \mapsto \epsilon u_2$给出。

W$_0$ $\otimes$W$_0$： 我们首先计算相对于基 $\mathcal{B}$ 的余作用的对偶作用。令$\langle -, - \rangle$ 表示相对于 $\mathcal{B}$ 的标准配对，即对于 $z = \sum_{a,b}(\lambda_{a,b}p_{ab} + \mu_{ab}f_{ab})$，我们有

满足 $\langle p_{ab}, z\rangle = \lambda_{ab}$ 和 $\langle f_{ab}, z\rangle = \mu_{ab}$。然后

$$\begin{aligned}\langle p_{ab}, e_{pk}e_{qm}\rangle &= \left\langle p_{ab}, \sum_{c,d} \xi^{-2c(p+k)-2d(q+m)} f_{c+p-k,c-p+k} f_{d+q-m,d-q+m} \right\rangle \\ &= \begin{cases} \xi^{-(a+b)(p+k+q+m)} & , \text{ if } 2(p-k)=a-b,\ 2(q-m)=-a+b \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \xi^{-2(a+b)(p+q)} & , \text{ if } k=p-\frac{a-b}{2}, m=q+\frac{a-b}{2} \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases}.\end{aligned}$$

通过观察可得第二个等式：当 $f_{c+p-k,\ c-p+k} f_{d+q-m,\ d-q+m}$ 为 $p_{c+p-k,\ c-p+k}$ 时，$c+p-k=d-q+m$ 且 $c-p+k=d+q-m$；否则为 0。因此 $f_{ab} * (w_p \otimes w_q) = 0$，并且

$$p_{ab} * (w_p \otimes w_q) = \xi^{-2(a+b)(p+q)} w_{p-\frac{a-b}{2}} \otimes w_{q+\frac{a-b}{2}}.$$

现在令 $v_j^{(k)} := w_{k+j} \otimes w_{k-j}$。那么，根据上述结果，我们有

$$p_{ab} * v_j^{(k)} = p_{ab} * (w_{k+j} \otimes w_{k-j}) = \xi^{2(a+b)(2k)} w_{k+j-\frac{a-b}{2}} \otimes w_{k-j+\frac{a-b}{2}} = \xi^{-4k(a+b)} v^{(k)}_{j-\frac{a-b}{2}}.$$

另请注意，

$$\chi \cdot v_j^{(k)} = \chi \cdot (w_{k+j} \otimes w_{k-j}) = \chi(4k,-4k) v_j^{(k)},$$

and

$$\begin{aligned}\widehat{x} \cdot v_j^{(k)} &= \widehat{x} \cdot (w_{k+j} \otimes w_{k-j}) = \sum_{a,b,c,d} \xi^{ad-bc} ((p_{ab}\widehat{x}) \cdot w_{k+j}) \otimes ((p_{cd}\widehat{x}) \cdot w_{k-j}) \\ &= \sum_{a,b,c,d} \xi^{ad-bc} (p_{ab} \cdot w_{-k-j}) \otimes (p_{cd} \cdot w_{-k+j}) = w_{-k-j} \otimes w_{-k+j} = v_{-j}^{(-k)}.\end{aligned}$$

最后一个等式是由以下观察得出的：为了得到非零项，我们需要满足 $a=-2(k+j)$ $b=2(k+j)$ $c=2(-k+j)$，且 $d=-2(-k+j)$。

现在我们引入这些元素

$$y_r^{(k)} = \sum_j \xi^{jr} v_j^{(k)} \qquad \text{for all } r,k \in \mathbb{Z}_n.$$

于是，以下等式成立

$$\begin{aligned}\widehat{x} \cdot y_r^{(k)} &= y_{-r}^{(-k)} \\ \chi \cdot y_r^{(k)} &= \chi(4k,-4k) y_r^{(k)} \\ f_{ab} * y_r^{(k)} &= 0 \\ p_{ab} * y_r^{(k)} &= \sum_j p_{ab} * (\xi^{jr} v_j^{(k)}) = \sum_j \xi^{jr-4k(a+b)} v^{(k)}_{j-\frac{a-b}{2}} \\ &= \sum_j \xi^{(j-\frac{a-b}{2})r} \xi^{(\frac{a-b}{2})r} \xi^{-4k(a+b)} v^{(k)}_{j-\frac{a-b}{2}} \\ &= \xi^{(\frac{a-b}{2})r-4k(a+b)} y_r^{(k)} \\ &= \xi^{(-4k+\frac{1}{2}r)a+(-4k-\frac{1}{2}r)b} y_r^{(k)}.\end{aligned}$$

由此可知，$\Bbbk y_0^{(0)}$ 和 $\Bbbk\{y_r^{(k)}, y_{-r}^{(-k)}\}$、$(r,k) \neq (0,0)$ 是K_n上的 Yetter-Drinfeld 模。此外，$\Bbbk y_0^{(0)} \simeq V_0^+{}_{,0}$和 $\Bbbk\{y_r^{(k)}, y_{-r}^{(-k)}\} \simeq U_{4k,-4k,-4k+\frac{1}{2}r,-4k-\frac{1}{2}r}$通过由 $y_r^{(k)} \mapsto u_1$, $y_{-r}^{(-k)} \mapsto u_2$ 给出的同构彼此同构（它也通过该同构与 $U_{-4k,4k,4k-\frac{1}{2}r,4k+\frac{1}{2}r}$同构，该同构

交换了 u_1和 u_2）。注意，由于 $(r,k) \neq (0,0)$，我们不能同时有 $4k=-4k$和$-4k+\frac{1}{2}r=-4k-\frac{1}{2}r$，因此这些 Yetter-Drinfeld 模是不可约的。记 $\mathcal{Z}_n$ 为 $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ 中由关系 $(r,k) \sim \pm(r,k)$ 给出的同构类集合。那么，

$$W_0 \otimes W_0 \simeq V_{0,0}^{+} \oplus \bigoplus_{\substack{[r,k]\in\mathcal{Z}_n \\ (r,k)\neq(0,0)}} U_{-4k,4k,4k-\frac{1}{2}r,4k+\frac{1}{2}r}$$

$U_{i,\ j,\ m,\ t} \otimes W_0$： 最后，我们分析$U_{i,\ j,\ m,\ t} \otimes W_0$的分解。我们将证明

$$U_{i,j,m,t} \otimes W_0 \simeq W^{+}_{\frac{i+j}{2},\frac{m+t}{2}+i} \oplus W^{-}_{\frac{i+j}{2},\frac{m+t}{2}+i}$$

通过给出一个显式同构

$$\varphi\colon U_{i',i',m',m'-2i'} \otimes W_0 \to U_{i,j,m,t} \otimes W_0,$$

其中

$$i' = \frac{i+j}{2} \qquad \text{and} \qquad m' = \frac{m+t+2i}{2}.$$

二维模$U_{i',\ i',\ m',\ m'-2i'}$不是单的；事实上，$U_{i',\ i',\ m',\ m'-2i'} \simeq V^{+}_{i',\ m'} \oplus V^{-}_{i',\ m'}$。于是可得

$$U_{i',j',m',t'} \otimes W_0 \simeq \left(V^{+}_{i',m'} \oplus V^{-}_{i',m'}\right) \otimes W_0 \simeq \left(V^{+}_{i',m'} \otimes W_0\right) \oplus \left(V^{-}_{i',m'} \otimes W_0\right) \simeq W^{+}_{i',m'} \oplus W^{-}_{i',m'}$$

令$D=\frac{i-j}{4}$和 $M=(m-t)\ -(m'-t')\ =m-t-i-j$。则此同构 φ 由下式给出

$$\begin{aligned} \varphi(u_1' \otimes w_r) &= \xi^{-rM} u_1 \otimes w_{r-D}, \qquad \forall\ r \in \mathbb{Z}_n, \\ \varphi(u_2' \otimes w_r) &= \xi^{rM-2D(i+j)} u_2 \otimes w_{r+D}. \end{aligned}$$

注记 5.1.1. 显然，$U_{i,j,m,t} \otimes W_0$ 作为 $\Bbbk^N\hat{x}$-余模与 $W_0 \oplus W_0$ 同构，因此根据定理 4.4.10，它作为 Yetter-Drinfeld 模必与某个 $W^{\epsilon_1}_{i_1,m_1} \oplus W^{\epsilon_2}_{i_2,m_2}$同构。随后可以用比下文稍简单的分析来证明 $\epsilon_1\epsilon_2=-1$,$i_1=i_2=\frac{i+j}{2}$, $m_1=m_2=\frac{m+t+2i}{2}$。

在证明 φ 是 Yetter-Drinfeld 模的同构之前，我们先更详细地分析 $U_{i,j,m,t} \otimes W_0$ 的结构。首先，我们计算与余作用对偶的作用 $*$。注意

$$\langle f_{pq} | e_{rs} \rangle = \begin{cases} \xi^{-(p+q)(r+s)} & ,\ \text{if } s = r - \frac{p-q}{2} \\ 0 & ,\ \text{otherwise} \end{cases};$$

因此，对于任意特征 χ，我们有

$$\langle f_{pq} | \chi\, e_{rs} \rangle = \begin{cases} \chi(p,q)\xi^{-(p+q)(r+s)} & ,\ \text{if } s = r - \frac{p-q}{2} \\ 0 & ,\ \text{otherwise} \end{cases}.$$

由于$\chi_{m,t}(\ p,q)\ =\xi^{mp+tq}=\xi^{(p+q)\frac{m+t}{2}+\ (p-q)\ \frac{m-t}{2}}$，$U_{i,\ j,\ m,\ t} \otimes W_0$中的对偶作用由以下公式给出 y

$$\begin{aligned} f_{pq} * (u_1 \otimes w_r) &= \sum_s \langle f_{pq} | \chi_{m,t}\, e_{rs} \rangle u_1 \otimes w_s \\ &= \chi_{m,t}(p,q)\xi^{-(p+q)(2r-\frac{p-q}{2})} u_1 \otimes w_{r-\frac{p-q}{2}} \\ &= \xi^{-(p+q)(2r-\frac{p-q}{2}-\frac{m+t}{2})+\frac{p-q}{2}(m-t)} u_1 \otimes w_{r-\frac{p-q}{2}}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} f_{pq} * (u_2 \otimes w_r) &= \sum_s \langle f_{pq} | \chi_{t+2i+m,m-2j}\, e_{rs} \rangle u_2 \otimes w_s \\ &= \chi_{t+2i,m-2j}(p,q)\, \xi^{-(p+q)(2r-\frac{p-q}{2})} u_2 \otimes w_{r-\frac{p-q}{2}} \\ &= \xi^{-(p+q)(2r-\frac{p-q}{2}-\frac{m+t}{2}-(i-j))+\frac{p-q}{2}(-m+t+2i+2j)} u_2 \otimes w_{r-\frac{p-q}{2}}, \end{aligned}$$

对所有 $p, q, r \in \mathbb{Z}_n$ 均成立。因此

$$\begin{aligned} f_{pq} * \varphi(u_1' \otimes w_r) &= \xi^{-Mr} f_{pq} * (u_1 \otimes w_{r-D}) \\ &= \xi^{-Mr-(p+q)(2(r-D)-\frac{p-q}{2}-\frac{m+t}{2})+\frac{p-q}{2}(m-t)} u_1 \otimes w_{r-D-\frac{p-q}{2}}. \end{aligned}$$

另一方面:

$$\begin{aligned} \varphi(f_{pq} *' (u_1' \otimes w_r)) &= \xi^{-(p+q)(2r-\frac{p-q}{2}-\frac{m'+t'}{2})+\frac{p-q}{2}(m'-t')} \varphi(u_1' \otimes w_{r-\frac{p-q}{2}}) \\ &= \xi^{-M(r-\frac{p-q}{2})-(p+q)(2r-\frac{p-q}{2}-\frac{m'+t'}{2})+\frac{p-q}{2}(m'-t')} u_1 \otimes w_{r-D-\frac{p-q}{2}}. \end{aligned}$$

观察到 $-2D - \frac{m+t}{2} = -\frac{m'+t'}{2}$ and$m - t = M + m' - t'$，可得这两个表达式相等。同样，我们还得到

$$\begin{aligned} f_{pq} * \varphi(u_2' \otimes w_r) &= \xi^{Mr-2D(i+j)} f_{pq} * (u_2 \otimes w_{r+D}) \\ &= \xi^{Mr-2D(i+j)-(p+q)(2(r+D)-\frac{p-q}{2}-\frac{m+t}{2}-(i-j))+\frac{p-q}{2}(-m+t+2i+2j)} u_2 \otimes w_{r+D-\frac{p-q}{2}}. \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \varphi(f_{pq} *' (u_2' \otimes w_r)) &= \xi^{-(p+q)(2r-\frac{p-q}{2}-\frac{m'+t'}{2}-(i'-j'))+\frac{p-q}{2}(m-t+2i+2j)} \varphi(u_2' \otimes w_{r-\frac{p-q}{2}}) \\ &= \xi^{M(r-\frac{p-q}{2})-2D(i+j)-(p+q)(2r-\frac{p-q}{2}-\frac{m'+t'}{2}-(i'-j'))+\frac{p-q}{2}(-m'+t'+2i'+2j')} u_2 \otimes w_{r+D-\frac{p-q}{2}}. \end{aligned}$$

注意到 $2D - \frac{m+t}{2} - (i-j) = -\frac{m'+t'}{2} = -\frac{m'+t'}{2} - (i'-j')$，且 $-m+t+2i+2j = -M - m' + t' + 2i' + 2j'$，可得这两个表达式相等。由于同构 φ 保留对偶作用，因此它是一个余模映射。

接下来我们讨论 $\widehat{x}$-作用。由于

$$\begin{aligned} \widehat{x} \cdot (u_1 \otimes w_r) &= \sum_{a,b,c,d} \xi^{ad-bc} p_{ab}\widehat{x} \cdot u_1 \otimes p_{cd}\widehat{x} \cdot w_r = \sum_{a,b,c,d} \xi^{ad-bc} p_{ab} \cdot u_2 \otimes p_{cd} \cdot w_{-r} \\ &= \xi^{2r(i+j)} u_2 \otimes w_{-r}, \qquad \text{and} \\ \widehat{x} \cdot (u_2 \otimes w_r) &= \sum_{a,b,c,d} \xi^{ad-bc} p_{ab}\widehat{x} \cdot u_2 \otimes p_{cd}\widehat{x} \cdot w_r = \sum_{a,b,c,d} \xi^{ad-bc} p_{ab} \cdot u_1 \otimes p_{cd} \cdot w_{-r} \\ &= \xi^{2r(i+j)} u_1 \otimes w_{-r}, \end{aligned}$$

我们有

$$\widehat{x} \cdot \varphi(u_1' \otimes w_r) = \xi^{-Mr} \widehat{x} \cdot (u_1 \otimes w_{r-D}) = \xi^{-Mr+2(r-D)(i+j)} u_2 \otimes w_{-r+D}$$

等于

$$\varphi(\widehat{x} \cdot' (u_1' \otimes w_r)) = \xi^{2r(i'+j')} \varphi(u_2' \otimes w_{-r}) = \xi^{M(-r)-2D(i+j)+2r(i'+j')} u_2 \otimes w_{-r+D},$$

作为 $i + j = i' + j'$。类似地,

$$\widehat{x} \cdot \varphi(u_2' \otimes w_r) = \xi^{Mr-2D(i+j)} \widehat{x} \cdot (u_2 \otimes w_{r+D}) = \xi^{Mr-2D(i+j)+2(r+D)(i+j)} u_1 \otimes w_{-r-D},$$

等于

$$\varphi(\widehat{x} \cdot' (u_2' \otimes w_r)) = \xi^{2r(i+j)}\varphi(u_1' \otimes w_{-r}) = \xi^{2r(i+j)-M(-r)}u_1 \otimes w_{-r-D}.$$

现在，我们通过以下计算完成证明：对于任意特征 $\chi \in \Bbbk^N$，有

$$\begin{aligned}
\chi \cdot \varphi(u_1' \otimes w_r) &= \xi^{-Mr}\chi \cdot (u_1 \otimes w_{r-D}) \\
&= \xi^{-Mr}\chi(i+2(r-D), j-2(r-D))u_1 \otimes w_{r-D} \\
&= \xi^{-Mr}\chi(i'+2r, i'-2r)u_1 \otimes w_{r-D} \\
&= \varphi(\chi \cdot' (u_1 \otimes w_r)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi \cdot \varphi(u_2' \otimes w_r) &= \xi^{Mr-2D(i+j)}\chi \cdot (u_2 \otimes w_{r+D}) \\
&= \xi^{Mr-2D(i+j)}\chi(j+2(r+D), i-2(r+D))u_2 \otimes w_{r+D} \\
&= \xi^{Mr-2D(i+j)}\chi(i'+2r, i'-2r)u_2 \otimes w_{r+D} \\
&= \varphi(\chi \cdot' (u_2 \otimes w_r)).
\end{aligned}$$

由于这些特征线性张成，$\Bbbk^N$, φ 是模映射。

我们以描述 ${}^{K_n}_{K_n}\mathcal{YD}$ 的融合环结束本节。

定理 5.1.2。${}^{K_n}_{K_n}\mathcal{YD}$ 的融合环 $\mathcal{F}$ 是由元素 $v^{\epsilon}_{i,\ m}$, $u_{i,\ j,\ m,\ t}$, $w^{\epsilon}_{i,\ m}$ 生成的交换环，其中 $\epsilon = \pm 1$, $i, j, m, t \in \mathbb{Z}_n$ 以及当 $i = j$ 时的 $t \neq m - 2i$ 满足以下关系：（令 $w^{+}_{0,\ 0} = w_0$）

$$\begin{aligned}
v^{\epsilon_1}_{i_1,m_1}v^{\epsilon_2}_{i_2,m_2} &= v^{\epsilon_1\epsilon_2}_{i_1+i_2,m_1+m_2}, \\
v^{\epsilon}_{i,m}w_0 &= w^{\epsilon}_{i,m}, \\
v^{\epsilon}_{i_1,m_1}u_{i_2,j_2,m_2,t_2} &= u_{i_1+i_2,i_1+j_2,m_1+m_2,-2i_1+m_1+t_2}, \\
u_{i_1,j_1,m_1,t_1}u_{i_2,j_2,m_2,t_2} &= u_{i_1+i_2,j_1+j_2,m_1+m_2,t_1+t_1} + u_{i_1+j_2,j_1+i_2,m_1+2i_2+t_2,t_1-2j_2+m_2}, \\
u_{i,j,m,t}w_0 &= w^{+}_{\frac{i+j}{2},\frac{2i+m+t}{2}} + w^{-}_{\frac{i+j}{2},\frac{2i+m+t}{2}}, \\
w_0 \otimes w_0 &= v^{+}_{0,0} + \sum_{\substack{[r,k]\in\mathcal{Z}_n \\ (r,k)\neq(0,0)}} u_{-4k,4k,4k-\frac{1}{2}r,4k+\frac{1}{2}r},
\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{Z}_n$ 是 $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ 中由关系 $(r,k) \sim \pm(r,k)$ 给出的同构类集合。 □

6. Nichols algebras

在最后一节中，我们计算了与 ${}^{K_n}_{K_n}\mathcal{YD}$ 中某些模相关的 Nichols 代数。Yetter-Drinfeld 模族 $\{V^{\epsilon}_{i,m}\}_{\epsilon,\ i,\ m}$ 和 $\{U_{i,j,m,t}\}_{i,\ j,\ m,\ t\in\mathbb{Z}_n}$ 由对角型编织向量空间构成，因此，根据 Heckenberger [19] 和 Angiono [12]的研究，它们的 Nichols 代数可以得到完整描述。另一方面，编织向量空间 $W^{\epsilon}_{i,\ m}$ 属于 rack 型，并且同构于与二面体 rack 和常值余循环相关的编织向量空间，也就是说，它们对应于二面体群 $\mathbb{D}_n$ 中的一个对合的共轭类，以及一个一维表示。对于 $n = 3$ 这一特定情形，我们确定了所有建立在单模之上的有限维 Nichols 代数。在此，著名的 Fomin-Kirillov 代数 $\mathcal{E}_3$ 作为建立在 K_3 之上的 Nichols 代数出现。本节还给出了建立在单模之上的有限维 Nichols 代数的表示，其中包括一个 12 维 Nichols 代数，它与 $\mathcal{E}_3$不同构。由此，我们通过玻色化得到了新的 216 维 Hopf 代数。

6.1. 一维模 V_i^ϵ的m直和的 Nichols 代数。

对于 i、$m \in \mathbb{Z}_n$ 和 $\epsilon = \pm 1$，Yetter-Drinfeld 模 V_i^ϵ、m 是由一个元素 v_i 生成的一维向量空间：$= v_i^\epsilon$、m。其结构和编织由第4.3小节条目（$\mathbf{V_i^\epsilon}$、$\mathbf{m}$）给出。根据定义，我们得到以下命题。

命题6.1.1. 设 i、$m \in \mathbb{Z}_n$ 和 $\epsilon = \pm 1$，并令 $\ell = \text{ord}\left(\xi^{i(m-i)}\right)$。则

$$\mathfrak{B}(V_{i,m}^\epsilon) \simeq \begin{cases} \Bbbk[v_i] & \text{if } \ell = 1; \\ \Bbbk[v_i]/(v_i^\ell) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

□

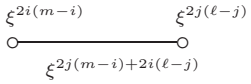
一个 Yetter-Drinfeld 模 $V = \bigoplus_{(\epsilon,i,m)\in I} V_{i,m}^\epsilon$，由有限多个一维单模的直和给出，是一个对角型编织向量空间，其基为 $\{v_{i,m}^\epsilon\}_{(\epsilon,i,m)\in I}$。编织由下式给出：

$$c(v_{i,m}^\epsilon \otimes v_{j,\ell}^\eta) = \xi^{2j(m-i)} v_{j,\ell}^\eta \otimes v_{i,m}^\epsilon$$

对于 I 中的所有三元组 (ϵ, i, m) 和 (η, j, ℓ)。在情形 $V = V_{i,m}^\epsilon \oplus V_{j,\ell}^\eta$ 下，编织矩阵为

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \xi^{2i(m-i)} & \xi^{2j(m-i)} \\ \xi^{2i(\ell-j)} & \xi^{2j(\ell-j)} \end{pmatrix}.$$

由于 n 是奇数，根据 [20，定理15.3.3]，我们有：$\mathfrak{B}(V)$ 是有限维的，当且仅当$i(m-i) \neq 0 \neq j(\ell-j) \in \mathbb{Z}_n$，且广义Dynkin图



同构于 [20, 表 15.1] 中第 1、2、4、6、7、11、12 或 17 行之一。例如，若 $\xi^{2j(m-i)+2i(\ell-j)} = 1$，即 $j(m-i) = -i(\ell-j) \in \mathbb{Z}_n$，则该图同构于第 1 行中的图。在此情形下，顶点之间没有边，且 Nichols 代数同构于量子线性空间

$$\mathfrak{B}(V) \simeq \Bbbk\{x_i, x_j \ : \ x_i^{n_i}, x_j^{n_j}, x_i x_j - \xi^{2j(m-i)} x_j x_i\},$$

其中 $n_i = \text{ord}\left(\xi^{i(m-i)}\right)$ 且 $n_j = \text{ord}\left(\xi^{j(\ell-j)}\right)$。这里我们写 $x_i = v_{i,m}^\epsilon$ 和 $x_j = v_{j,\ell}^\eta$ 以简化表述。

另一方面，若 $i(m-i) = j(\ell-j)$ 且$-i(m-i) = jm + i\ell - 2ij$ 在 $\mathbb{Z}_n$ 中，则该图同构于第 2 行中的图。在此情形下，编织为 Cartan 型 A_2。如上所述，写 $x_i = v_{i,m}^\epsilon$ 和 $x_j = v_{j,\ell}^\eta$。设 $\text{ad}(x)(y) = [x, y]_c = xy - m \circ c(x \otimes y)$ 对于 $x, y \in T(V)$，并记$x_{ij} = \text{ad}(x_i)(x_j)$。则，

$$\mathfrak{B}(V) \simeq \Bbbk\{x_i, x_j \ : \ x_i^N, x_j^N, x_{ij}^N, \text{ad}^2(x_i)(x_j), \text{ad}^2(x_j)(x_i)\} \simeq u_{\xi^{i(m-i)}}(\mathfrak{sl}_3)^+, \tag{6}$$

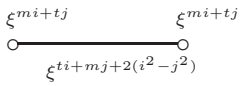
其中 $N = \text{ord}\left(\xi^{i(m-i)}\right)$。

正如从上面的例子可以推知，Nichols 代数的表示取决于 $\mathbb{Z}_n$ 中的算术性质。只要有耐心并付出努力，就可以通过分析 [19] 中 Heckenberger 的算术根系列表，并依据 [12] 中 Angiono 的结果计算表示，为固定的 n 和给定的秩，得到有限维 Nichols 代数的完整列表。

6.2. 二维模$U_{i,\ j,\ m,\ t}$之和的 Nichols 代数。

对于 i、 j、 m、 $t\in\mathbb{Z}_n$，Yetter-Drinfeld 模$U_{i,\ j,\ m,\ t}$是由元素 u_1、 u_2张成的二维向量空间。它们的结构和编织见第4.3小节第（Ui, j, m, t）项。特别地，编织向量空间$U_{i,\ j,\ m,\ t}$ 均为对角型；编织矩阵及相应的广义Dynkin图如下:

$$\mathfrak{q}=\begin{pmatrix}\xi^{mi+tj} & \xi^{ti+mj}\\ \xi^{ti+mj+2(i^2-j^2)} & \xi^{mi+tj}\end{pmatrix}$$



那么，当且仅当 $\mathfrak{B}(U_{i,\ j,\ m,\ t})$是有限维的，且 $mi+tj\neq 0$ 和 $(i+j)(m+t)=2(j^2-i^2)$属于 $\mathbb{Z}_n$时，情况才成立，因为上图必须与 [20, 表 15 第 2 行中的图同构1]。在这种情况下，编织向量空间属于 Cartan 型 A_2，其表示由式 (6) 给出。下面陈述该结果。

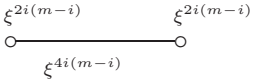
命题 6.2.1. 设 $i,j,m,t\in\mathbb{Z}_n$。那么，当且仅当 $\mathfrak{B}(U_{i,\ j,\ m,\ t})$是有限维的，且 $mi+tj\neq 0$ 和 $(i+j)(m+t)=2(j^2-i^2)$属于 $\mathbb{Z}_n$时，条件成立。在这种情况下，

$$\mathfrak{B}(U_{i,j,m,t})\simeq\Bbbk\{x_i,x_j\ :\ x_i^N,\ x_j^N,\ x_{ij}^N,\ \mathrm{ad}^2(x_i)(x_j),\ \mathrm{ad}^2(x_j)(x_i)\}\simeq u_q(\mathfrak{sl}_3)^+,$$

其中 $N=\mathsf{ord}\left(\xi^{mi+tj}\right)$ and $q=\xi^{\frac{mi+tj}{2}}$。

□

注 6.2.2. 若 $i=j$ and $t=m-2i$，则$U_{i,\ i,\ m,\ m-2i}\simeq V_i^+{}_{,\ m}\oplus V_i^-{}_{,\ m}$且广义Dynkin图等于



那么 $\mathfrak{B}(V_i^+{}_{,\ m}\oplus V_i^-{}_{,\ m})$是有限维的，当且仅当 $i(m-i)\neq 0$且 $6i(m-i)=0$属于 $\mathbb{Z}_n$。在这种情形下， $\mathfrak{B}(V_i^+{}_{,\ m}\oplus V_i^-{}_{,\ m})\simeq u_{\xi^{i(m-i)}}(\mathfrak{sl}_3)^+$。

现在我们分析由有限个单二维模的和所给出的编织向量空间的 Nichols 代数。

定理 6.2.3. 设 I 是$\mathbb{Z}_n^4$ 的有限子集，且$V=\oplus_{(i,j,m,t)\in I}U_{i,\ j,\ m,\ t}$ 是由单二维模的直和所给出的编织向量空间。那么 $\mathfrak{B}(V)$是有限的，当且仅当

（a） $mi+tj\neq 0$和 $(i+j)\ (m+t)\ =2\ (j^2-i^2)$ 在 $\mathbb{Z}_n$中对所有（i， j， m， t）$\in I$均成立，

（b） $0=mk+t\ell+pi+sj$和 $0=pj+si+tk+2ik+m\ell-2j\ell$在 $\mathbb{Z}_n$中对所有（i， j， m， t），（k，ℓ， p， s）$\in I$均成立。在这种情形下， $\mathfrak{B}\ (V)$是由同构于$u_q\ (\mathfrak{sl}_3)^{\ +}$和$q=\xi^{\frac{mi+tj}{2}}$的 Nichols 代数组成的编织张量积，对所有（i， j， m， t）$\in I$均成立。

证明。假设 dim $\mathfrak{B}\ (V)$有限。那么，对于每个（i， j， m， t）$\in I$，dim $\mathfrak{B}\ (U_{i,\ j,\ m,\ t})$必定有限。因此，由命题 6.2.1 可知，对于所有（i， j， m， t）$\in I$，必须有 $mi+tj\neq 0$ 以及（$i+j$）（$m+t$）$=2\ (j^2-i^2)$ 在 $\mathbb{Z}_n$中；这给出了（a）中的条件。现在取 V中的两个直和项$U_{i,\ j,\ m,\ t}$和$U_{k,\ \ell,\ p,\ s}$，它们的基分别为 $\{u_1,u_2\}$ 和 $\{u_1',u_2'\}$。由于$U_{i,\ j,\ m,\ t}\oplus U_{k,\ \ell,\ p,\ s}$上的编织属于对角型，要分析该直和上 Nichols 代数的维数，必须检查这两个模的 A_2型图示是否连通。为此，我们计算这些基向量之间的编织。例如，

$$c(u_1\otimes u_1')=\chi_{m,t}\cdot u_1'\otimes u_1=\chi_{m,t}(a^kb^\ell)\,u_1'\otimes u_1=\xi^{mk+t\ell}\,u_1'\otimes u_1,$$
$$c(u_1'\otimes u_1)=\chi_{p,s}\cdot u_1\otimes u_1'=\chi_{p,s}(a^ib^j)\,u_1'\otimes u_1=\xi^{pi+sj}\,u_1'\otimes u_1.$$

那么，当且仅当$0\neq mk+t\ell+pi+sj\in\mathbb{Z}_n$时，对应于 u_1 的顶点与对应于 u_1' 的顶点相连。对元素 u_2 和 u_2 进行相同的计算可得

$$c(u_2\otimes u_2')=\chi_{t+2i,m-2j}\cdot u_2'\otimes u_2=\chi_{t+2i,m-2j}(a^\ell b^k)\,u_2'\otimes u_2=\xi^{\ell(t+2i)+k(m-2j)}\,u_2'\otimes u_2,$$
$$c(u_2'\otimes u_2)=\chi_{s+2k,p-2\ell}\cdot u_2\otimes u_2'=\chi_{s+2k,p-2\ell}(a^jb^i)\,u_2'\otimes u_2=\xi^{j(s+2k)+i(p-2\ell)}\,u_2'\otimes u_2.$$

因此，当且仅当$0 \neq \ell(t+2i) + k(m-2j) + j(s+2k) + i(p-2\ell) = \ell t + km + js + ip \in \mathbb{Z}_n$时，对应于 u_2 的顶点与对应于 u_2' 的顶点相连；这与对应于 u_1 和u_1'的顶点所满足的条件完全相同。因此，当且仅当 u_2 与 u_2'相连时， u_1 与u_1' 相连。由于 [19, 表 3] 中不存在正方形，必有$0 = \ell t + km + js + ip \in \mathbb{Z}_n$，这就是关于$(b)$的第一个条件。第二个条件可由分析顶点 u_1 和 u_2'之间，以及 u_2 和 u_1'之间的连接关系得出。与上文一样，前一对顶点相连当且仅当后一对相连。因此，两种 A_2型图都必须是不相连的。由于这对每一对模都成立，可得对应于 V的广义Dynkin图是对应于各个直和项U_i、$_j$、$_m$、$_t$的所有广义Dynkin图的并。因此，Nichols 代数 $\mathfrak{B}(V)$同构于Nichols 代数 $\mathfrak{B}(U_{i,j,m,t})$的辫张量积，即 $\mathfrak{B}(V) \simeq \underline{\bigotimes}_{(i,j,m,t)\in I} \mathfrak{B}(U_{i,j,m,t})$。该命题的最后一个断言由命题 6.2.1 得出。□

6.3. n 维模 $W_{i,m}^{\epsilon}$的 Nichols 代数。

对于 i、$m \in \mathbb{Z}_n$和 $\epsilon \in \{\pm 1\}$，令 $W_{i,m}^{\epsilon} = \Bbbk\{w_0, \dots, w_{n-1}\}$ 为具有第 4.4 小节条目（$\mathbf{W}_{\mathbf{i,m}}^{\boldsymbol{\epsilon}}$）所述结构的编织向量空间。特别地，编织由下式给出

$$c_{i,m}^{\epsilon}(w_\ell \otimes w_r) = \epsilon\, \xi^{2i(m-i-r-\ell)}\, w_{-r} \otimes w_{\ell+2r} \qquad \text{for all } r, \ell \in \mathbb{Z}_n. \tag{7}$$

由 §2.1 和命题 4.4.12 可立即得出，只要 $i = 0$ 或$i = m$，$\dim \mathfrak{B}(W_{i\,m,}^{+1})$ 就是无限的，因为在这种情形下 $c_{i}^{+}{}_{,m}(w_0 \otimes w_0) = w_0 \otimes w_0$。

对于其余情形，我们将运用与辫方程的集合论解相关联的编织向量空间理论。详细论述见 [9]。

6.3.1. 辫方程的集合论解。设 X 是一个非空集合，且 $s\colon X \times X \to X \times X$ 是一个双射。若满足以下条件，我们称 s 为辫方程的集合论解（简称解）：

$$(s \times \mathrm{id})(\mathrm{id} \times s)(s \times \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \times s)(s \times \mathrm{id})(\mathrm{id} \times s)$$

作为 $X \times X \times X$ 上的映射。显然，恒等映射和交换映射 $\tau\colon X \times X \to X \times X$, $\tau(x,y) = (y,x)$ 对所有 x, $y \in X$ 都是解。编织集是一个二元组 (X, s)，其中 X 是一个非空集合，且 s 是一个解。若 (X, s) 是编织集，则辫群 $\mathbb{B}_n$ 在 X^n 上有一个作用：标准生成元 σ_i 通过对 $i, i+1$ 个分量施加 s 来作用。

设 (X, s) 是一个编织集，并设 $f, g\colon X \to \mathrm{Fun}(X, X)$ 定义如下：

$$s(x,y) = (g_x(y), f_y(x)) \qquad \text{for all } x, y \in X.$$

若 f 和 g 的像都是双射，则称该解（或编织集）是非退化的。在我们的情形中，编织 $c_{i,m}^{\epsilon}$ 与集合论解 $(\mathbb{Z}_n, s)$ 相关，其中

$$s : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n, \qquad s(\ell, r) = (-r, \ell + 2r) \qquad \text{for all } \ell, r \in \mathbb{Z}_n \tag{8}$$

这里，对于所有 $\ell, r \in \mathbb{Z}_n$， $g_\ell(r) = -r$ 和 $f_r(\ell) = \ell + 2r$。由于假设 n 为奇数，编织集 $(\mathbb{Z}_n, s)$ 是非退化的。

编织 $c_{i,m}^{\epsilon}$ 中出现的标量 $F_{m,i,\ell,r}^{\epsilon} = \epsilon\, \xi^{2i(m-i-r-\ell)}$ 通过一个类似于 2-余循环的概念加以编码。设 X 为有限集， $s\colon X \times X \to X \times X$ 为一个双射， $F\colon X \times X \to \mathbb{C}^\times$ 为一个函数。记 $\mathbb{C}X$ 为以 X 为基的向量空间，并定义 $s^F\colon \mathbb{C}X \otimes \mathbb{C}X \to \mathbb{C}X \otimes \mathbb{C}X$ 为

$$s^F(x \otimes y) = F_{x,y}\, s(x,y) = F_{x,y}\, g_x(y) \otimes f_y(x) \tag{9}$$

引理 6.3.1. [9, 引理 5.7] s^F 是辫方程的一个解，当且仅当 (X, s) 是一个编织集，且

$$F_{x,y} F_{f_y(x),z} F_{g_x(y),g_{f_y(x)}(z)} = F_{y,z} F_{x,g_y(z)} F_{f_{g_y(z)}(x),f_z(y)} \qquad \textit{for all } x, y, z \in X. \tag{10}$$

□

定义 6.3.2. [9, 定义 5.8] 设 (X, s) 是一个非退化解，且 $F\colon X\times X\to\mathbb{C}^\times$ 是满足 (10) 的函数。我们称编织向量空间 $(\mathbb{C}X, s^F)$ 为集合论型。

由上面的引理直接可知，对于所有 i、$m\in\mathbb{Z}_n$ 和 $\epsilon\in\{\pm 1\}$，由 $F^\epsilon_{i,\ m}\colon \mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n\to\mathbb{C}^\times$ 给出的函数 $F^\epsilon_{i,\ m,\ \ell,\ r}=\epsilon\xi^{2i(m-i-\ell-r)}$ 满足 (10)；也可以直接验证。总之，我们的编织向量空间 $(W^\epsilon_{i,\ m},\ c^\epsilon_{i,\ m})$ 是集合论型的，其解为 $(\mathbb{Z}_n,\ s)$，其中对于所有 ℓ、$r\in\mathbb{Z}_n$，$s(\ell,\ r)=(-r,\ \ell+2r)$。

6.3.2. 拉克。任何集合论解都可以用拉克来描述。拉克是一个对 $(X,\ \triangleright)$，其中 X 是一个非空集合，且 $\triangleright\colon X\times X\to X$ 是一个函数，使得对于所有 $x\in X$，$x\triangleright -\colon X\to X$ 都是双射，并且对于所有 x、y、$z\in X$，$x\triangleright(y\triangleright z)=(x\triangleright y)\triangleright(x\triangleright z)$。拉克的典型例子是群 G 中共轭类的并集，其中映射 $\triangleright$ 由共轭作用给出，即 $x\triangleright y=xyx^{-1}$。例如，对于 $G=\mathbb{D}_n=\langle g、\ h\mid g^2=1=h^n、\ ghg=h^{n-1}\rangle$，阶为 $2n$ 的二面体群中，对合 gh 的共轭类 $\mathcal{O}_{gh}$ 是一个拉克，其中 $\mathcal{O}_{gh}=\{g^{2i+1}h\colon\ 0\le i\le n-1\}$ 且

$$(g^{2j+1}h)\triangleright(g^{2i+1}h)=(g^{2j+1}h)(g^{2i+1}h)(g^{2j+1}h)^{-1}=g^{2(2j-i)+1}h$$

当 n 为奇数时，此拉克的大小为 n；当 n 为偶数时，大小为 $\frac{n}{2}$。用拉克的术语来说，我们可以用更简单的方式描述 $\mathcal{O}_{gh}$：对所有 $0\le i\le n-1$，写作 $g^{2i+1}h=x_i$。于是

$$\mathcal{O}_{gh}=:\ \mathcal{D}_n=\{x_i\ :\ 0\le i\le n-1\}\qquad\text{and}\qquad x_j\triangleright x_i=x_{2j-i}\quad\text{for all } 0\le i,j\le n-1. \tag{11}$$

拉克可导出辫方程的集合论解。设 X 是一个非空集合，并设 $\triangleright\colon\ X\times X\to X$ 是一个函数。设 $c\colon X\times X\to X\times X$ 是由下式给出的函数：对所有 x、$y\in X$，$c(x,y)=(x\triangleright y,x)$。那么，当且仅当 $(X,\triangleright)$ 是一个拉克时，c 才是一个解。

对于任意满足 $s(x,y)=(g_x(y)\ f_y(x))$（其中 x、$y\in X$）的非退化编织集 (X,s)，都可以构造一个拉克 $(X,\triangleright)$，由此得到另一个解，称为 s 的导出解。

命题 6.3.3. 设 s 是一个非退化解，并定义

$$x\triangleright y=f_x(g_{f_y^{-1}(x)}(y))$$

若 $c\colon X\times X\to X\times X$ 由 $c(x,y)=(x\triangleright y,x)$ 给出，则 c 是一个解；称其为 s 的导出解。此外，解 s 和 c 等价，并且 $(X,\triangleright)$ 是一个拉克。□

任意拉克及其上的一个 2-余循环都会给出一个编织向量空间。设 $(X,\triangleright)$ 是一个拉克，$q\colon X\times X\to\mathbb{C}^\times$ 是一个函数，记 $q_{xy}:=q(x,y)$，对所有满足下式的 $i,j\in X$

$$q_{x,y\triangleright z}q_{y,z}=q_{x\triangleright y,x\triangleright z}q_{x,z}\qquad\text{for all } x,y,z\in X \tag{12}$$

则以 X 的元素为基的向量空间 $V=\mathbb{C}X$ 是一个编织向量空间，其编织 $c^q\colon\mathbb{C}X\otimes\mathbb{C}X\to\mathbb{C}X\otimes\mathbb{C}X$ 定义为

$$c^q(x\otimes y)=q_{x,y}\,x\triangleright y\otimes x\qquad\text{for all } x,y\in X.$$

我们将这个编织向量空间记为 $(\mathbb{C}X,c^q)$，并将相应的 Nichols 代数记为 $\mathfrak{B}(X,c^q)$。满足 (12) 的函数 $q\colon X\times X\to\mathbb{C}^\times$ 称为拉克二余循环。

6.3.3. 编织向量空间之间的 t-等价。编织向量空间之间存在一种弱于同构的关系，但它足以用于处理 Nichols 代数。

定义 6.3.4. [9, 定义 5.10] 如果存在一族线性同构 $U^n\colon V^{\otimes n}\to W^{\otimes n}$，使其对所有 $n\ge 2$ 都交织相应的辫群 $\mathbb{B}_n$ 表示，则称两个编织向量空间 (V,c) 和 (W,d) t-等价。这族 $(U^n)_{n\ge 2}$ 称为一个 t-等价。

注 6.3.5. [9, 例 5.11] 设 $(\mathbb{C}X, s^F)$ 是一个集合论型编织向量空间，(X, c) 是其导出解。对所有 $x, y \in X$，令 $q_{xy} = F_{f_y^{-1}(x)\, y}$。如果对所有$x, y, z \in X$，都有 $q_{f_z(x)\, f_z(y)} = q_{xy}$，则编织向量空间 $(\mathbb{C}X, s^F)$ 和 $(\mathbb{C}X, c^q)$ t- 等价。

在我们的例子中，编织向量空间 $(W_{i,\ m},\ c^{\epsilon}_{i,\ m})$ 可以用集合论解 $(\mathbb{Z}_n,\ s^F)$ 描述，其中 $s(w_\ell, w_r) = (w_{-r},\ w_{\ell+2r})$，且 $F = F^{\epsilon}_{i,\ m,\ \ell,\ r} = \epsilon\, \xi^{2i(m-i-\ell-r)}$。特别地，对所有 $\ell,\ r \in \mathbb{Z}_n$，$g_\ell(r) = -r$，且 $f_r(\ell) = \ell + 2r$。相应的导出解具有拉克结构$\ell \triangleright r = 2\ell - r$，因为

$$\ell \triangleright r = f_\ell(g_{f_r^{-1}(\ell)}(r)) = f_\ell(-r) = -r + 2\ell \qquad \text{for all } \ell, r \in \mathbb{Z}_n.$$

因此，$(\mathbb{Z}_n,\ \triangleright) = \mathcal{D}_h$ 是二面体 rack。关于余循环，我们有 $q_{\ell,\ r} = \epsilon\, \xi^{2i(m-i-(\ell-r))}$ ：

$$q_{\ell,r} = F_{f_r^{-1}(\ell),r} = F_{\ell-2r,r} = \epsilon\, \xi^{2i(m-i-(\ell-2r+r))} = \epsilon\, \xi^{2i(m-i-(\ell-r))}.$$

总之，$(W^{\epsilon}_{i,\ m},\ c^{\epsilon}_{i,\ m})$ 与编织向量空间 $(\mathbb{C}\mathcal{D}_n,\ d^{\epsilon}_{i,\ m})$ t-等价，其中 $\mathbb{C}\mathcal{D}_n = \mathbb{C}\{x_\ell : 0 \le \ell \le n-1\}$，且编织 $c^q = d^{\epsilon}_{i,\ m}$ 由下式给出

$$d^{\epsilon}_{i,m}(x_\ell \otimes x_r) = \epsilon\, \xi^{2i(m-i-(\ell-r))} x_{2\ell-r} \otimes x_\ell \qquad \text{for all } \ell, r \in \mathbb{Z}_n.$$

引理 6.3.6. [9, 引理 6.1] 若 (V, c) 和 (W, d) 是 t-等价的编织向量空间，则相应的 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(V)$ 和 $\mathfrak{B}(W)$ 作为分次向量空间同构。特别地，一个有限维（分别具有有限 GK 维数）当且仅当另一个也如此。□

作为上述引理的推论，我们有如下结果：

推论 6.3.7. Nichols 代数 $\mathfrak{B}(W^{\epsilon}_{i,m}, c^{\epsilon}_{i,m})$ 与 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(\mathcal{D}_n, d^{\epsilon}_{i,m})$ 作为分次向量空间同构。□

作为上述推论的结果，$\mathfrak{B}(W^{\epsilon}_{i,m}, c^{\epsilon}_{i,m})$ 与 $\mathfrak{B}(\mathcal{D}_n, d^{\epsilon}_{i,m})$ 具有相同的（Gelfand-Kirillov）维数。若 n 是素数，这些维数可由 Heckenberger、Mehir 和 Vendramin 的一项近期结果确定。以下定理是 [HMV，定理 1.6] 的直接推论。

定理 6.3.8. 设 n 是奇素数。那么 $\mathfrak{B}(\mathcal{D}_n, d^{\epsilon}_{i,\ m})$ 是有限维的，当且仅当 $n = 3$，并且存在 $\mathbb{C}\mathcal{D}_n$ 的一组基 $\{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}_n}$，使得 $d^{\epsilon}_{i,\ m}(y_\ell \otimes y_r) = -y_{2\ell-r} \otimes y_r$. □

注 6.3.9. 对于 $i = 0$，所有编织向量空间 $(\mathcal{D}_n, d^{\epsilon}_{0,\ m})$ 都相同。为简便起见，对于参数 $i = 0$ 和 $\epsilon = -1$ 对应的编织，我们记作 $d_0 = d^{-}_{0,\ m}$。

注 6.3.10. 编织向量空间 $(\mathbb{C}\mathcal{D}_n, d_0)$ 可以实现为二面体群 $\mathbb{D}_n$ 上的 Yetter-Drinfeld 模。编织由下式给出

$$d_0(x_\ell \otimes x_r) = -x_{2\ell-r} \otimes x_\ell \qquad \text{for all } \ell, r \in \mathbb{Z}_n.$$

相应对象用群论术语表示为单 Yetter-Drinfeld 模 $M(\mathcal{O}_g, \mathrm{sgn})$，它对应于 g 的共轭类 $\mathcal{O}_g$，其中心化子 $C_{\mathbb{D}_n}(g)$ 的特征 $= \langle g \rangle$ 由符号表示给出，即 $\mathrm{sgn}(g) = -1$。总之，$\mathfrak{B}(W^{-}_{0,\ m}, c^{\epsilon}_{0,\ m})$ 作为分次向量空间同构于 $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_g, \mathrm{sgn})$。

关于 $\mathbb{D}_n$ 的 Nichols 代数已得到深入研究，除可能存在的例外情况外，它们都是无限维的。以下定理推广了 [6, 定理 3.1] 的结果。

定理 6.3.11. [10, 定理 4.8], [HMV，定理 1.6]。假设 $n \ge 5$ 为奇数。$\mathbb{D}_n$ 上的所有 Nichols 代数都是无限维的，可能的例外是 $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_g, \mathrm{sgn})$（在同构意义下），此时 n不是素数。□

当 $n=3$ 和 $\epsilon=-1$时的 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(W_{i^-,m}^-, c_{i^-,m}^-)$。

注意，对于 $n=3$，有 $\mathbb{D}_3=\mathbb{S}_3$。由于 $\mathbb{S}_3$ 上所有有限维 Nichols 代数均已为人所知，借助 M. Gra˜na [18] 对低维 Nichols 代数的描述，我们可以刻画 K_3 上所有有限维 Nichols 代数。

情形 $i=0$: 与编织向量空间 $(\mathbb{C}\mathcal{D}_3, d_0)$ 相关联的 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(\mathcal{D}_3, d_0)$ 同构于著名的 Fomin-Kirillov 代数 $\mathcal{E}_3$。事实上，$\mathbb{C}\mathcal{D}_3=\{x_0,x_1,x_2\}$ 且

$$d_0(x_i\otimes x_j)=-x_k\otimes x_j \qquad \text{for } i,j,k \text{ all distinct.}$$

其 Nichols 代数的维数为 12，最高次数为 4，希尔伯特级数为 $\mathcal{H}(t)=t^4+3t^3+4t^2+3t+1$。它是由元素 x_0,x_1,x_2 生成、满足以下关系的二次代数

$$\begin{aligned} x_i^2&=0 \quad \text{for all } i\\ x_0x_1+x_1x_2+x_2x_0&=0\\ x_0x_2+x_2x_1+x_1x_0&=0 \end{aligned} \tag{13}$$

根据前面的讨论，我们知道 $\mathfrak{B}(W_{0^-,\,m}^-, c_{0^-,\,m}^-)$ 与 $\mathcal{E}_3$ t-等价。下面的定理表明，它们实际上是同构的。

定理 6.3.12. 设 $m\in\mathbb{Z}_3$。则 $\mathfrak{B}(W_{0^-,\,m}^-, c_{0^-,\,m}^-)\simeq\mathcal{E}_3$；特别地，它具有表示式 (13)，也具有以下作为由元素 w_0,w_1,w_2 生成并满足下列关系的代数的表示式

$$\begin{aligned} w_0^2=0,\qquad w_1w_2=0,\qquad w_2w_1=0,\\ w_0w_1+w_1w_0+w_2^2=0,\\ w_0w_2+w_2w_0+w_1^2=0. \end{aligned} \tag{14}$$

证明。根据上面的注记，这些编织向量空间是 t-等价的。这里我们进一步证明，$(W_{0^-,\,m}^-, c_{0^-,\,m}^-)$ 与 $(\mathbb{C}\mathcal{D}_3, d_0)$ 作为编织向量空间同构。事实上，该同构由以下线性映射给出

$$\varphi:\mathbb{C}\mathcal{D}_3\to W_{0,m}^-,\qquad \varphi(x_k)=w_0+\xi^k w_1+\xi^{2k}w_2,\qquad \text{for all } 0\le k\le 2, \tag{15}$$

它是编织向量空间之间的态射，因为

$$\begin{aligned} c_{0,m}^-(\varphi(x_\ell)\otimes\varphi(x_r)) &= c_{0,m}^-\big((w_0+\xi^\ell w_1+\xi^{2\ell}w_2)\otimes(w_0+\xi^r w_1+\xi^{2r}w_2)\big)\\ &= c_{0,m}^-(w_0\otimes w_0)+\xi^r c_{0,m}^-(w_0\otimes w_1)+\xi^{2r}c_{0,m}^-(w_0\otimes w_2)+\\ &\quad+\xi^\ell c_{0,m}^-(w_1\otimes w_0)+\xi^{\ell+r}c_{0,m}^-(w_1\otimes w_1)+\xi^{\ell+2r}c_{0,m}^-(w_1\otimes w_2)+\\ &\quad+\xi^{2\ell}c_{0,m}^-(w_2\otimes w_0)+\xi^{2\ell+r}c_{0,m}^-(w_2\otimes w_1)+\xi^{2\ell+2r}c_{0,m}^-(w_2\otimes w_2)\\ &= -w_0\otimes w_0-\xi^r w_2\otimes w_2-\xi^{2r}w_1\otimes w_1+\\ &\quad-\xi^\ell w_0\otimes w_1-\xi^{\ell+r}w_2\otimes w_0-\xi^{\ell+2r}w_1\otimes w_2+\\ &\quad-\xi^{2\ell}w_0\otimes w_2-\xi^{2\ell+r}w_2\otimes w_1-\xi^{2\ell+2r}w_1\otimes w_0\\ &= -w_0\otimes\varphi(x_\ell)-\xi^{\ell+r}w_2\otimes\varphi(x_\ell)-\xi^{2\ell+2r}w_1\otimes\varphi(x_\ell)\\ &= -\varphi(x_{-r+2\ell})\otimes\varphi(x_\ell)=(\varphi\otimes\varphi)(-x_{2\ell-r}\otimes x_\ell)=(\varphi\otimes\varphi)d_0(x_\ell\otimes x_r) \end{aligned}$$

对所有 $\ell,r,m\in\mathbb{Z}_3$ 均成立。

ˆ 现在考虑二次近似 $\mathfrak{B}_2(W_{0^-,\,m}^-, c_{0^-,\,m}^-)=T(W_{0^-,\,m}^-, c_{0^-,\,m}^-)/\mathcal{J}_2$。它是由满足以下关系的元素 $\{w_0,w_1,w_2\}$ 所呈示的二次代数:

$$\begin{aligned} w_0^2=0,\qquad w_1w_2=0,\qquad w_2w_1=0,\\ w_0w_1+w_1w_0+w_2^2=0\\ w_0w_2+w_2w_0+w_1^2=0 \end{aligned}$$

利用二次关系可以证明，$\hat{\mathfrak{B}}_2(W_0^-,\ m)$ 的 4 次齐次分量由元素 $w_0w_1w_0w_2$ 线性张成，而该代数在 5 次时为零。$\hat{}$ 因此，根据 [9, 定理 6.4],，有 $\mathfrak{B}_2(W_0^-,\ m) = \mathfrak{B}(W_0^-,\ m)$，从而得到这个 Nichols 代数的另一种表示。□

情形 $i = m$：设 $d_i = d^-_{i\ ,i}$ 为 $i \in \mathbb{Z}_3$。则 $(\mathbb{C}\mathcal{D}_3, d_i)$ 的编织为

$$d_i(x_\ell \otimes x_r) = -\xi^{-2i(\ell-r)} x_{2\ell-r} \otimes x_\ell \qquad \text{for all } \ell, r \in \mathbb{Z}_3.$$

根据 [18, 引理 3.8], ，我们有 $(\mathbb{C}\mathcal{D}_3, d_i)$ 是群型的，且通过基变换$y_k = \xi^{-ik}x_k$ 可得

$$d_i(y_\ell \otimes y_r) = -y_{2\ell-r} \otimes y_\ell \qquad \text{for all } \ell, r \in \mathbb{Z}_3.$$

事实上，

$$\begin{aligned} d_i(y_\ell \otimes y_r) &= \xi^{-i(\ell+r)} d_i(x_\ell \otimes x_r) = -\xi^{-i(\ell+r)}\xi^{-2i(\ell-r)} x_{2\ell-r} \otimes x_\ell = -\xi^{-i\ell}\xi^{-i(2\ell-r)} x_{2\ell-r} \otimes x_\ell \\ &= -y_{2\ell-r} \otimes y_\ell \end{aligned}$$

因此，所有满足 $i \in \mathbb{Z}_3$ 的辫向量空间 $(W^-_{i\,i,}, c^-_{i\ ,i})$ 都与 $(\mathbb{C}\mathcal{D}_3, d_0)$ t-等价。由此可得，对于所有 $i \in \mathbb{Z}_3$，$\dim \mathfrak{B}(W^-_{i\,i,}, c^-_{i\ ,i}) = 12$。

基于上述事实，我们引入以下概念。

定义 6.3.13. 若两个集合论型编织向量空间 $(\mathbb{C}X, s^F)$ 和 $(\mathbb{C}X, s^G)$ 所对应的导出解的编织向量空间是扭曲等价的，则称它们扭曲等价，见 [7], [29]。具体而言，记 $s(x, y) = (g_x(y)\ f_y(x))$，并对所有 $x, y \in X$定义 $x \triangleright y = f_x(g_{f_y^{-1}(x)}(y))$。若存在映射 $\varphi\colon X \times X \to \mathbb{C}^\times$，使得 $(\mathbb{C}X, s^F)$ 和 $(\mathbb{C}X, s^G)$ 扭曲等价，则

$$\varphi(x, z)\varphi(x \triangleright y, x \triangleright z)\varphi(x \triangleright (y \triangleright z), x)\varphi(y \triangleright z, y) = \varphi(y, z)\varphi(x, y \triangleright z)\varphi(x \triangleright (y \triangleright z), x \triangleright y)\varphi(x \triangleright z, x)$$

对所有 $x, y, z \in X$ 以及

$$\varphi(x, y)F_{f_y^{-1}(x),y} = \varphi(x \triangleright y, x)G_{f_y^{-1}(x),y} \qquad \textit{for all } x, y \in X.$$

在这种情况下，记作 $G = F^\varphi$。可以将上面的等式用双射 $f, g\colon X \to \mathrm{Fun}(X, X)$ 表示，并将 x 替换为 $f_y(x)$，得到

$$\varphi(f_y(x), y)F_{x,y} = \varphi(f_x(g_x(y)), x)G_{x,y} \qquad \textit{for all } x, y \in X. \tag{16}$$

根据定义 6.3.6 引理及 [7], 中的结果，我们有如下结论：若 $(\mathbb{C}X, s^F)$ 和 $(\mathbb{C}X, s^G)$ 作为编织向量空间扭曲等价，则它们的 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(\mathbb{C}X, s^F)$ 和 $\mathfrak{B}(\mathbb{C}X, s^G)$ 作为分次向量空间同构。

在我们的例子中，取 $(W^-_{k\ ,k}, c^-_{k\ ,k}) = (\mathbb{C}X, s^F)$ 和 $(W^-_{i\,i,}, c^-_{i\ ,i}) = (\mathbb{C}X, s^G)$，我们有 $X = \mathbb{Z}_3, g_\ell(r) = -r$, $f_r(\ell) = \ell + 2r$, $F = F^-_{k\ ,k,\ell,r} = -\xi^{-2k(\ell+r)}$, $G = F^-_{i\,i\,,,\ell,r} = -\xi^{-2i(\ell+r)}$，对所有 ℓ 都成立，且 (16) 写作

$$\xi^{-2k(\ell+r)}\varphi(\ell + 2r, r) = \xi^{-2i(\ell+r)}\varphi(-r + 2\ell, \ell) \qquad \text{for all } x, y \in X. \tag{17}$$

映射 $\varphi_{i,k}: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{C}^\times$ 由 $\varphi_{i,k}(\ell, r)$ 给出，显然满足 (17) 以及上述余循环条件。因此，对于所有$i \in \mathbb{Z}_3$，编织向量空间 $(W_{i\,i,}^-, c_{i\,,i}^-)$ 都是扭曲等价的。特别地，相应的 Nichols 代数作为分次向量空间同构，并且我们得到 $\mathfrak{B}(W_{1}^-,1)$ 和 $\mathfrak{B}(W_{2}^-,2)$ 的最高次数均为 4。

定理6.3.14。采用上述记号，代数 $\mathfrak{B}(W_{1}^-,\ 1)$ 和 $\mathfrak{B}(W_{2}^-,\ 2)$ 有如下表现

$$\mathfrak{B}(W_{1,1}^-) = \Bbbk\{w_0, w_1, w_2 \ :\ w_0^2,\ w_1w_2,\ w_2w_1,\ \xi^2w_0w_2 + w_2w_0 + \xi w_1^2,\ \xi^2w_0w_1 + \xi w_1w_0 + w_2^2\},$$
$$\mathfrak{B}(W_{2,2}^-) = \Bbbk\{w_0, w_1, w_2 \ :\ w_0^2,\ w_1w_2,\ w_2w_1,\ \xi w_0w_2 + w_2w_0 + \xi^2 w_1^2,\ \xi w_0w_1 + \xi^2 w_1w_0 + w_2^2\}.$$

此外，这些分次代数彼此同构。

证明。计算与编织向量空间 $W_{i}^-,\ i$ （ $i = 1,\ 2$）相关的量子对称化子的二次次数核，得到相应 Nichols 代数的二次近似 $\mathfrak{B}_2(W_{i\,i,}^-) = T(W_{i\,i,}^-)/\mathcal{J}_2$的如下表现：

$$\hat{\mathfrak{B}}_2(W_{1,1}^-) = \Bbbk\{w_0, w_1, w_2 \ :\ w_0^2,\ w_1w_2,\ w_2w_1,\ \xi^2w_0w_2 + w_2w_0 + \xi w_1^2,\ \xi^2w_0w_1 + \xi w_1w_0 + w_2^2\}$$
$$\hat{\mathfrak{B}}_2(W_{2,2}^-) = \Bbbk\{w_0, w_1, w_2 \ :\ w_0^2,\ w_1w_2,\ w_2w_1,\ \xi w_0w_2 + w_2w_0 + \xi^2 w_1^2,\ \xi w_0w_1 + \xi^2 w_1w_0 + w_2^2\}$$

与定理 6.3.12 的证明类似，利用二次关系可快速验证，两个 $\mathfrak{B}_2(W_{i\,i,}^-)$ 的四次齐次分量均由元素 $w_0w_1w_0w_2$^ 线性张成，且这些代数在五次处消失。于是由 $[9, \text{定理 } 6.4]$, 可知， $\mathfrak{B}_2(W_{i\,i,}^-) = \mathfrak{B}(W_{i\,i,}^-)$，从而得到这两个 Nichols 代数的表现。

有一种方法可以从上述表现中消去参数 ξ。在 W_{i}^- 中进行基变换，i 该基变换由 (15) 中的线性变换给出

$$x_k = w_0 + \xi^k w_1 + \xi^{2k} w_2, \qquad \text{for all } 0 \le k \le 2,$$

可得到编织的另一种表达式：

$$c_{i,i}^-(x_\ell \otimes x_r) := -x_{2\ell - r + i} \otimes x_{\ell + i} \qquad \text{for } i, \ell, r \in \mathbb{Z}_3,$$

因此也得到 Nichols 代数的另一种表现：

$$\mathfrak{B}(W_{1,1}^-) = \Bbbk\{x_0, x_1, x_2 \ :\ x_0x_1,\ x_1x_2,\ x_2x_0,\ x_0x_2 + x_2x_1 + x_1x_0,\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2\},$$
$$\mathfrak{B}(W_{2,2}^-) = \Bbbk\{x_0, x_1, x_2 \ :\ x_0x_2,\ x_1x_0,\ x_2x_1,\ x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0,\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2\}.$$

采用这些表现，显然，发送 $x_k \mapsto x_{-k}$ 的线性映射 φ 互换了 $\mathfrak{B}(W_{1}^-,1)$ 和 $\mathfrak{B}(W_{2}^-,2)$ 的表现。事实上，这是一个辫向量空间同态$\varphi: W_{1}^-,_1 \to W_{2}^-,2$，因为 $(\varphi \otimes \varphi)c_{1}^-,1(x_\ell \otimes x_r) = -\varphi(x_{2(\ell+r)+1}) \otimes \varphi(x_{\ell+1}) = -x_{\ell+r+2} \otimes x_{2\ell+2} = c_{2}^-,2(x_{2\ell} \otimes x_{2r}) = c_{2}^-,2\big(\varphi(x_\ell) \otimes \varphi(x_r)\big)$。因此，$\mathfrak{B}(W_{1}^-,1)$ 和 $\mathfrak{B}(W_{2}^-,2)$ 作为分次代数是同构的，尽管它们作为 ${}^{K_3}_{K_3}\mathcal{YD}$ 中的对象并不同构。□

注 6.3.15. 使用 Majid-Radford 积或玻色化，可以考虑 Hopf代数 $\mathcal{E}_3\#K_3$, $\mathfrak{B}(W_{1}^-,1)\#K_3$和 $\mathfrak{B}(W_{2}^-,2)\#K_3$。这些是 216 维、非点态、非半单的 Hopf代数，其余根基与 K_3 同构。据我们所知，文献中尚未讨论过这些 Hopf代数。注意，利用 Nichols 代数的表示以及 K_3 的表示，可以通过生成元和关系得到并表示这些 Hopf代数。

备注 6.3.16。注意， $\mathfrak{B}(W_{0}^-,m)$、 $\mathfrak{B}(W_{1}^-,1)$ 和 $\mathfrak{B}(W_{2}^-,2)$ 之间唯一的区别是三次单位根的选择。从编织和表现的描述中可以清楚地看出这一点。事实上，若我们写作 $\mathfrak{B}_{\xi^k} = \Bbbk\{w_0, w_1, w_2 : \ w_0^2,\ w_1w_2,\ w_2w_1,\ \xi^{2k}w_0w_2 + w_2w_0 + \xi^k w_1^2,\ \xi^{2k}w_0w_1 + \xi^k w_1w_0 + w_2^2\}$，则 $\mathfrak{B}_\xi = \mathfrak{B}(W_{1}^-,1)$、 $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}(W_{0}^-,m)$ 和 $\mathfrak{B}(W_{2}^-,2) = \mathfrak{B}_{\xi^2}$。

我们知道，对于所有 $i \in \mathbb{Z}_3$，辫向量空间 $(W_{i\,i,}^{-}, c_{i\,,i}^{-})$ 都是 t-等价的；特别地，相应的 Nichols 代数作为分次向量空间彼此同构。然而，根据下述定理，Nichols 代数 $\mathfrak{B}_1$ and $\mathfrak{B}_\xi$ 并不作为代数彼此同构。

定理 6.3.17. $\mathfrak{B}_1$ 和 $\mathfrak{B}_\xi$ 作为代数不同构。

证明. 我们首先证明， $\mathfrak{B}_1$ 由三个生成元 a、b、c 生成，并且满足 $a^2 = b^2 = c^2 = 0$。直接进行简单计算可知， $a = w_0$、$b = w_0 + \xi w_1 + \xi^2 w_2$、$c = w_0 + \xi^2 w_1 + \xi w_2$ 是这样的生成元。

现在证明，对于 $\mathfrak{B}_\xi$，这种情况不会发生；也就是说，不存在由满足 $a^2 = b^2 = c^2 = 0$ 的元素 a、b、c 生成的 $\mathfrak{B}_\xi$。反设这样的 a、b、c 存在。将次数为 ℓ 的元素 $x \in \mathfrak{B}_\xi$ 的齐次分量记为 x_ℓ。由于 $\mathfrak{B}_\xi$ 是分次代数，且 $(\mathfrak{B}_\xi)_0 = \Bbbk$，我们得出

(1) $a_0 = b_0 = c_0 = 0$、(2) $a_1^2 = b_1^2 = c_1^2 = 0$、(3) a_1、b_1、c_1 必须张成 $V = (\mathfrak{B}_\xi)_{1,}$，而且由于 V 是 3 维的，这意味着 a_1、b_1、c_1 必须线性无关。

我们将证明，满足 $x^2 = 0$ 的 $x \in V$ 只有 w_0 的倍数，从而得出矛盾。现在假设 $x = \lambda_0 w_0 + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in V$ 满足 $x^2 = 0$ 属于 $\mathfrak{B}_\xi$。简单计算可知，这意味着元素

$$y = \lambda_0\lambda_1(w_0w_1 + w_1w_0) + \lambda_2^2 w_2^2 + \lambda_0\lambda_2(w_0w_2 + w_2w_0) + \lambda_1^2 w_1^2 \in T(V)$$

必须是元素的线性组合

$$r_1 = \xi w_0w_2 + \xi^2 w_2w_0 + w_1^2,$$
$$r_2 = \xi^2 w_0w_1 + \xi w_1w_0 + w_2^2$$

在 $T(V)$ 中。比较 w_1^2 和 w_2^2 的系数可知，这只有在下列条件成立时才可能：

$$y = \lambda_1^2 r_1 + \lambda_2^2 r_2.$$

但这样一来，我们就必须有 $\lambda_0\lambda_2 = \xi^2\lambda_1^2 = \xi\lambda_1^2$、$\lambda_0\lambda_1 = \xi\lambda_2^2 = \xi^2\lambda_2^2$，因此也有 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$。

□

情形 $i \neq 0$, $i \neq m$：由推论 6.3.7，我们知道 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(W_{i,m}^{\epsilon}, c_{i,m}^{\epsilon})$ 作为分次向量空间同构于 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(\mathcal{D}_3, d_{i,m}^{\epsilon})$。后者是有限维的当且仅当存在 $\mathbb{C}\mathcal{D}_3$ 的一个基 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}_3}$ 使得 $d_{i,m}^{\epsilon}(y_\ell \otimes y_r) = -y_{2\ell-r} \otimes y_r$，由定理 6.3.8。这只能在 $i = 0$ 或 $i = m$ 时发生。

References

[1] Andruskiewitsch, N.《Nichols 代数导论》。载于《数学与物理学中的量子化、几何与非交换结构》。数学物理研究丛书，Springer；Alexander Cardona、Pedro Morales、Hern´an Ocampo、Sylvie Paycha、Andr´es Reyes 编。第 135–195 页（2017）。[2] Andruskiewitsch, N.; Angiono, I. 关于基本 Hopf 代数上的 Nichols 代数。 *Math. Z.* **296** (2020 4, 1429 3 1469), no. - – .[3] Andruskiewitsch, N.; Angiono, I.; Heckenberger, I. 关于具有有限 Gelfand-Kirillov 维数的无限秩 Nichols 代数。 *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl.* **31** (2020), no. 1, 81–101。[4] Andruskiewitsch, N.; Cuadra, J. 关于（余-Frobenius）Hopf 代数的结构。 *J. Noncommut. Geom.* **7** (2013), no. 1, 83–104。[5] Andruskiewitsch, N.; Schneider, H-J. 关于有限维带点 Hopf 代数的分类。

Ann. of ( ) ( ), *Math.* 2 **171** 2010 1, 375 417
no. – .[6] Andruskiewitsch, N.; Fantino, F. 关于与交错群和二面体群相关的带点 Hopf 代数。*Rev. Union Mat. Argent.* **48** (2007), 57–71。[7] Andruskiewitsch, N.; Fantino, F.; Garc´ıa, G. A.; Vendramin, L. 关于与单拉克相关的 Nichols 代数。 *Contemp. Math.* **537** (2011), 31–56。

[8] Andruskiewitsch, N.; Galindo, C.; M¨uller, M. 具有对偶 Chevalley 性质的有限维 Hopf 代数实例。 *Publ. Mat.*, 61(2) (2017), 445–474。[9] Andruskiewitsch, N.; Gra˜na, M. 从拉克到带点 Hopf 代数。 *Adv. Math.* **178** (2003), no. 2, 177–243。[10] Andruskiewitsch, N.; Heckenberger, I.; Schneider, H.-J. 半单 Yetter-Drinfeld 模的 Nichols 代数。 *Amer. J. Math.* **132** 6 (2010), 1493–1547。[11] Andruskiewitsch, N.; Vay, C. 对称群中三字母对偶群代数上的有限维 Hopf 代数。 *Comm. Algebra*, 39(12) (2011), 4507–4517。[12] Angiono, I. 对角型 Nichols 代数的生成元和关系表现，以及根系上的凸序。 *J. Europ. Math. Soc.* **17** (2015), 2643–2671。[13] Bagio, D.; Garc´ıa, G. A.; Giraldi, J.M.J.; M´arquez, O. 对偶 Radford 代数上的有限维 Nichols 代数。 *J. Algebra Appl.* **20** (1) (2021), 论文编号 2140001，共 39 页。[14] Fantino, F.; Garc´ 2011 1, ıa, 69 91 G. A. 关于二面体群上的带点 Hopf 代数。 *Pacific J. Math.* **252** ( ), no. – .[15] Garc´ıa G. A.; Garc´ıa Iglesias, A. 关于 $\mathbb{S}_4$ 上的有限维带点 Hopf 代数。 *Israel J. Math.* **183** (2011), 417–444。[16] Garc´ıa, G. A.; Giraldi, J. M. J. 关于量子子群上的 Hopf 代数。 *J. Pure Appl. Algebra* **223** (2019) 738–768。[17] Garc´ *J. Algebra* ıa **397** 2014 379 406 Iglesias, A.; Vay, C. 关于仿射拉克上的有限维带点或余带点 Hopf 代数。( ), – .[18] Gra˜na, M. 关于低维 Nichols 代数。《Hopf 代数理论新趋势》（La Falda，1999），111–134, *Contemp. Math.* **267** 2000 , Amer. Math. Soc.，Providence，RI，。[19] Heckenberger, I. 算术根系的分类。 *Adv. Math.* **220** (2009), no. 1, 59–124。[HMV] Heckenberger, I.; Mehir, E.; Vendramin, L.; 关于素数维且具有有限维 Nichols 代数的群上的简单 Yetter-Drinfeld 模。预印本：https://arxiv.org/abs/2306.02989。[20] Heckenberger, I.; Schneider, H-J. Hopf 代数与根系。 *Mathematical Surveys and Monographs*，247。American Mathematical Society，Providence，RI, 2020。xix+582 页。[21] Kac, G.I. 群到环群的扩张。 *Mat. Sb.* **5** (1968), 451–474。[22] Mastnak, M. 由群的半直积产生的 Hopf 代数扩张。 *J. Algebra* **251** (2002), 413–434。[23] Masuoka, A. 若干 Hopf 代数扩张群的计算。 *J. Algebra* **191** (1997), 568–588。[24] Nichols, W. D.; Zoeller, M. B. Hopf 代数自由性定理。 *Amer. J. Math.* **111** (1989), no. 2, 381–385。[25] Radford D. E. Hopf 代数， *Series on Knots and Everything* **49**，World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.，Hackensack，NJ，2012。[26] Radford D. E. 关于由有限维 Hopf 代数的量子双表示导出的定向量子代数。 *J. Algebra* **270** (2003), no. 2, 670–695。[27] Serre J. P. 有限群的线性表示。由 Leonard L. Scott 根据法文第二版译出。 *Graduate Texts in Mathematics*，第 42 卷。Springer-Verlag，New York-Heidelberg，1977。x +170 页。[28] Shi, Y. Kac-Paljutkin 代数 H_8 上的有限维 Hopf 代数。 *Rev. Un. Mat. Argentina* **60** (2019), no. 1, 265–298。[29] Vendramin, L. 与对称群的换位元素相关的 Nichols 代数是扭曲等价的。*Proc. Amer. Math. Soc.* **140** (2012), no. 11, 3715–3723。[30] Xiong, R. 关于唯一一个不具有对偶 Chevalley 性质的 12 维 Hopf 代数上的 Hopf 代数。*Comm. Algebra* **47** (2019), no. 4, 1516–1540。[31] Xiong, R.; Hu, N. 对偶 Radford 代数上有限维 Hopf 代数的分类。 *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **28** 2022 5, 633 688 ( ), no. – .[32] Zheng, Y.; Gao, Y.; Hu, N.; Shi, Y. 关于 Hopf 代数 $H_{b^*_1}$ Kashina 上有限维 Hopf 代数的若干分类问题。 *Comm. Algebra* **51** (2023), no. 1, 350–371。[33] Zheng, Y.; Gao, Y.; Hu, N. Kashina 的 Hopf 代数 $H_{b:1}$ *J. Algebra* 上 **567** 2021 613 659 的有限维 Hopf 代数。( ), – .[34] Zheng, Y.; Gao, Y.; Hu, N. 关于 Kashina 的 Hopf 代数 $H_{d:-1\ 1}$ *J. Pure* 上 *Appl. Algebra* **225** 2021 4, 106527, 37 的有限维 Hopf 代数。( ), no. 论文编号 页数。[35] Zhu, Y. 素数维 Hopf 代数， *Int. Math. Res. Not.* **1** (1994), 53–59。

CMaLP Departamento de Matemática Facultad de Ciencias Exactas Universidad Nacional de La , Plata. CIC-CONICET. (1900) La Plata Argentina.

, , ,*Email address*: ggarcia@mate.unlp.edu.arDepartment of Mathematics and Computing Science, Saint Mary's University, 923 Robie St, Hali-fax, Nova Scotia, Canada B3N 1Z9*Email address*: mmastnak@cs.smu.ca