arXiv:2304.02453v3 [math.AG] 5 Oct 2024

射影空间中的超平面可容许旗的模空间

GEORGE COOPER

Abstract. 我们证明，存在准射影粗模空间，它们以射影自同构为等价关系，对固定射影空间 $\mathbb{P}(V)$ 中某些子概形的完全旗进行参数化。这些被参数化的子概形旗，是通过将 $\mathbb{P}(V)$ 中维数为 n 的非退化子簇与长度为 n 的 $\mathbb{P}(V)$ 线性子空间旗相交而得到的。旗中每个正维分量都必须是非奇异且非退化的，而维数为 0 的分量则必须满足 Chow稳定性条件。这些模空间利用非约化几何不变理论构造，所涉及的群作用具有分次幺幂根基，并采用了 Hoskins 和 Jackson 提出的非约化分阶段商类比方法。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 5 3. 超平面可容许旗的模空间 10 4. 非约化几何不变理论 13 5. 主要结果的证明 17 6. 主要结果的推广 24 参考文献 26

1. Introduction

本文利用非约化几何不变理论构造准射影粗模空间，用以参数化固定射影空间 $X^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset X^n$ 中某些类别的、随变化的子概形旗 $\mathbb{P}(V)$，并将射影自同构群 $PGL(V)$ 的作用视为等价关系。

模问题长期以来在代数几何中发挥着重要作用，目前相当一部分研究致力于考察射影概形及其衍生对象的模空间。在过去数十年间，构造概形论模空间的主要方法一直是采用 Mumford 的（约化）几何不变理论（ GIT ），其发展见 [23]。射影概形的经典 GIT 模空间实例包括射影空间中的非奇异超曲面 [24],稳定曲线 [14] [22], 一般型典范极化曲面 [13] 以及任意维数、具有典范奇点的典范极化簇 [32]。这些构造中的前三种都利用希尔伯特–芒福德判据来确立 GIT稳定性。然而，在处理高维概形时，往往需要采用其他方法来构造模空间，无论是否涉及 GIT；其中一个问题是，目前尚不清楚如何直接运用希尔伯特–芒福德判据，检验射影空间中维数为 $\dim X \geq 3$ 的子概形 X 的 GIT稳定性，即使 X 是光滑的也是如此（Viehweg 的构造依赖于确立深刻的正性结果，从而直接生成他所考察的希尔伯特概形上线性化的非零不变截面）。

与概形模问题相关的是概形旗的模问题，例如带有一个除子的概形对。本文的主要结果是，非约化几何不变理论给出了非空的准射影粗模空间的构造实例，这些空间是概形旗的模空间；具体而言，当这些概形是射影空间 $\mathbb{P}(V)$ 的子概形，且旗 $\underline{X}$: $X^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset X^n$ 是通过与一个 n 维代数簇相交

$X^n \subset \mathbb{P}(V)$，以及一个线性子空间旗 $\underline{Z}$：$Z^0 \subset \cdots \subset Z^n = \mathbb{P}(V)$，其中 $Z^i \subset \mathbb{P}(V)$ 的余维为 $n-i$ 时；在此，旗 $\underline{X}$ 和 $\underline{Z}$ 分别允许在 $\mathbb{P}(V)$ 和 V 中变化。

结果概述。我们感兴趣的对象称为 $\mathbb{P}(V)$ 中子概形的（完备）超平面可容许旗，[1] 它们是满足以下条件的旗：$X^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset X^n$ 其中 X^n 是 $\mathbb{P}(V)$ 中的一个 n 维子概形；并且每个 X^i 都是一个 i 维子概形，由 X^n 与余维为 i 的线性子空间 $\mathbb{P}(Z^i) \subset \mathbb{P}(V)$ 相交得到，且满足 $Z^0 \subset Z^1 \subset \cdots \subset Z^n = V$。该旗的次数由子概形 $X^i \subset \mathbb{P}(V)$ 的共同次数给出，而其希尔伯特型由 X^i 的 Hilbert 多项式给出。如果每个 $X^i \subset \mathbb{P}(Z^i)$ 都是非退化的（即不包含于 $\mathbb{P}(Z^i)$ 中的某个超平面），则称该旗为非退化旗；如果 X^0 是既约点的不交并，且其余的 X^i 是光滑连通代数簇，则称该旗为非奇异旗；如果 X^0 是 $\mathbb{P}(Z^0)$ 中一个 乔稳定的零维子概形，则称该旗为稳定旗（更多详情见第 3.1 节）。给定任意非奇异非退化子簇 $X^n \subset \mathbb{P}(V)$，只要 X^n 的次数足够大，那么它与按适当维数选取的一般线性子空间旗 $\mathbb{P}(Z^0) \subset \cdots \subset \mathbb{P}(Z^n) = \mathbb{P}(V)$ 的交便是一个非退化、非奇异且稳定的超平面可容许旗（参见定义 3.1 后的讨论）。

我们的主要结果是：存在拟射粗模空间，用于参数化$\mathbb{P}(V)$的非退化、非奇异且稳定的超平面可容许子概形旗：

定理 1.1. 设 n, d 为正整数，V 为有限维复向量空间。假设 $n+1 <$维数 V 且 $d >$维数 $V-n$，其中 $d \notin \left\{ \frac{\dim V - n - 1 + i}{n+1-i} \colon i = 1, \ldots, n \right\}$。设 $\underline{\Phi} = (\Phi_0, \ldots, \Phi_n)$ 为 $\mathbb{P}(V)$ 中子概形的 Hilbert 多项式组，其中对每个 i，$\Phi_i(t) = \frac{d}{i!}\, t^i + O(t^{i-1})$。设 $\mathcal{F}^{\mathbb{P}(V)}{}_{n,\, d,\, \underline{\Phi}}$ 为模函子，它参数化 $\mathbb{P}(V)$ 中长度为 n、次数为 d 、Hilbert 型为 $\underline{\Phi}$ 的非退化、非奇异且稳定的完整超平面可容许子概形旗族的等价类（参见定义 3.4）。

于是，存在一个准射影粗模空间 $M^{\mathbb{P}(V)}{}_{n,d,\underline{\Phi}}$，对应于模函子 $\mathcal{F}^{\mathbb{P}(V)}{}_{n,d,\underline{\Phi}}$。

在第 6 节中，我们简要指出，定理 1.1 可以通过几种方式加以推广，包括为 X^0 中的点引入权重，或者改为考虑形如 $X^k \subset \cdots \subset X^n$ 的非退化且非奇异的超平面可容许旗，其中还要求 $X^k \subset \mathbb{P}(Z^k)$ 是 GIT稳定的。

主要结果证明概要。定理 1.1 的证明如下。为了定义超平面可容许旗的族，我们将线性子空间旗 $\mathbb{P}(Z^0) \subset \cdots \subset \mathbb{P}(Z^n)$ 记录为模问题对象的一部分，然后再施加两个旗射影等价的等价关系。因此，我们考虑 $SL(V)$ 在乘积上的对角作用

$$\mathcal{S} := \prod_{i=0}^{n} \mathrm{Hilb}(\mathbb{P}(V), \Phi_i) \times \prod_{j=0}^{n} \mathrm{Gr}_j(V),$$

其中，$\mathrm{Gr}_j(V)$ 是 V 中余维为 $n-j$ 的线性子空间所构成的格拉斯曼流形（见第3.2节）。存在一个 $SL(V)$-不变的局部闭子概形 $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$，其闭点对应于 $\mathbb{P}(V)$ 的长度为 n 的子概形构成的非退化、非奇异且稳定的超平面可容许旗，并附带闭嵌入 $X^i \subset \mathbb{P}(V)$ 以及子空间 $Z^i \subset V$ 的数据。模空间 $M^{\mathbb{P}(V)}{}_{n,\, d,\, \underline{\Phi}}$ 由 $\mathcal{S}'$ 关于 $SL(V)$ 的几何商给出。

先验地，这是约化GIT中的一个问题。然而，由于每个子簇$X^i \subset \mathbb{P}(V)$（$i < n$）都是退化的，希尔伯特点 $[X^i \subset \mathbb{P}(V)] \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{P}(V)\ \Phi_i)$

[1]这里的术语受到 [17] 的启发。我们感兴趣的超平面可容许旗，是 Lazarsfeld–Mustaţ˘a 意义下的可容许旗，但我们允许零维部分包含多个点，而非仅一个点。

是不稳定的。子簇 $X^n \subset \mathbb{P}(V)$是非退化的；然而，除 $\mathbb{P}^{d-g}$ [8]中次数为 d 、亏格为 g 的曲线这一情形外，在更高维数下，对于Hilb($\mathbb{P}(V)$ Φ_n)上的希尔伯特线性化或Chow线性化，目前尚无完整的代数分类来说明何时 $X^n \subset \mathbb{P}(V)$具有稳定或不稳定的希尔伯特点。第三，子空间旗 $Z^0 \subset \cdots \subset Z^{n-1} \subset Z^n = V$定义了 $\prod_{j=0}^{n} \mathrm{Gr}_j(V)$中的一个 $SL(V)$-不稳定点；若L_{Gr_i} 是Pic($\mathrm{Gr}_i(V)$)的丰生成元$\cong \mathbb{Z}$ （对于 $i < n$），那么对于任意一组权w_0,... , $w_{n-1} \in \mathbb{Z}^{>0}$，相对于丰线性化$\boxtimes_{j=0}^{n-1} L^{w_j}{}_{\mathrm{Gr}_j}$，该子空间旗在 $\prod_{j=0}^{n-1} \mathrm{Gr}_j(V)$上的对角 $SL(V)$-作用下均为GIT 不稳定（由[10, 定理 11.1] 结合 $W = \mathbb{P}(Z^{n-1})$即可得出）。

为解决这些问题，我们转而考察抛物子群 $P \subset SL(V)$ 对固定子空间旗 $Z^0 \subset Z^1 \subset \cdots \subset Z^n = V$ （其中 $\operatorname{codim} Z^i = n - i$）的保持作用，从而得到一个局部闭子概形 $\mathcal{S}'_0 \subset \mathcal{S}'$ with$\mathcal{S}' \cong SL(V) \times^P \mathcal{S}'_0$，并使用 NRGIT 构造 $\mathcal{S}'_0$ 对 P 的几何商；这一由 P 得到的商与 $\mathcal{S}'$ 对 $SL(V)$ 的几何商相同。我们不再直接应用 $\hat{}U$-定理一次性构造该商，而是采用 Hoskins–Jackson [16] 提出的非约化几何不变理论分阶段取商程序。我们直接应用分阶段取商程序 $\hat{}$，逐步验证每个阶段均可应用 U-定理，因为这样比判断文献所述的分阶段取商假设是否成立更为直接。

我们的分阶段商方法有两个关键特点。首先，由于所涉及的所有分次一参数子群都只有两个不同的权，因此相对容易核查，在每个阶段应用 U-定理所需的权条件和稳定子条件对于我们关注的对象均成立。关键观察是，在任意一个此类分次一参数子群作用下，$X^k \subset \mathbb{P}(Z^k)$ 的平坦极限就是 X^k 本身，或者是 J 与一个补线性子空间的连接；该补线性子空间相对于 $\mathbb{P}(Z^j) \subset \mathbb{P}(Z^k)$，其中 $j < k$ （参见引理 2.8 和 5.2）。这些连接的几何性质使我们能够验证所需的幺幂稳定子条件成立。由于我们选择在希尔伯特概形 Hilb($\mathbb{P}(V)$ Φ_i) 上使用 Chow 线性化，因此可以显式计算 J 关于任意此类分次一参数子群的希尔伯特–芒福德权重（参见引理 2.10）；这使我们能够验证分次一参数子群的权所需满足的极小性条件（参见引理 5.4）。

其次，由于我们处理的是完全旗 $X^0 \subset \cdots \subset X^n$，因此只需考虑 $\mathbb{P}(V)$中零维子概形的（约化）GIT稳定性；这一问题在经典理论中已有充分研究。

注。若进一步要求顶维子簇$X^n \subset \mathbb{P}(V)$是GIT稳定的（相对于 Chow 线性化或希尔伯特线性化），则可利用约化GIT构造超平面旗 $X^0 \subset \cdots \subset X^n \subset \mathbb{P}(V)$的粗模空间，并运用 5.1 确保：当$[X^n \subset \mathbb{P}(V)] \in$ Hilb($\mathbb{P}(V)$ Φ_n)为GIT稳定时， $\mathcal{S}$ 中的点即为 $SL(V)$-稳定。若 $X^n \subset \mathbb{P}(V)$是次数为 $d > 2$的光滑超曲面，则经典理论已知，对应的 $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}(V)\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(d))$ 中的点是GIT稳定的。Donaldson 的一项结果 [11], 提供了另一类丰富的GIT稳定子簇：若(X, L)是自同构群离散的光滑极化流形，且在 $c_1(L)$中存在常数量曲率度量，则(X, L)渐近 Chow 稳定（即对所有$k \gg 0$， $X \subset \mathbb{P}(H^0(X, L^k)^\vee)$均为 Chow 稳定）。根据 Yau 的工作 [33] （以及 Aubin[3]在典范极化情形下独立得到的结果），这包括典范极化的光滑代数簇以及任意极化的光滑 Calabi–Yau 代数簇。更一般地，Viehweg [32] 证明，任何具有典范奇点的典范极化代数簇都是渐近稳定的（相对于由 Hodge 丛的变体所导出的线性化）；这一结果推广了此前关于曲线 [24] [22] 和曲面 [13]的结果。Morrison [20]和 Miranda [19]的工作还给出了射影空间中其他 Chow 稳定子簇的例子。

与先前工作的关系。如上所述，本文的结果在很大程度上依赖于 Hoskins–Jackson 的非约化分阶段商构造 [16]。Ross [28] 和 Ross–Thomas [29] 关于极化射影簇的希尔伯特–芒福德判据的研究，也在一定程度上启发了本工作。具有两个不同权的一参数子群

这些概念在后续这些著作中占据重要地位，并用于为极化簇定义斜率稳定性的概念，这与射影概形上相干层的 Gieseker 稳定性类似（反过来，正如 [28,第 3 节2]中所解释的，Gieseker 稳定性由具有两个不同权的一参数子群支配）。Ross 和 Ross–Thomas 证明，K 稳定的极化簇是斜率稳定的，而渐近 Chow 稳定的极化簇是 Chow-斜率稳定的；他们还利用斜率稳定性，为光滑曲线的渐近 Chow/K 稳定性给出了几何证明。

[28] [29] 与本文的关系如下。若 $X \subset \mathbb{P}(V)$ 是一个非退化子簇，且 λ 是 $GL(V)$ 的一个一参数子群，具有两个不同的权（例如，在非约化的分阶段商中所考虑的分次一参数子群 λ_i 的提升 $\lambda^{[i]}$），则 λ 在 $X \subset \mathbb{P}(V)$ 上的作用定义了 $(\mathcal{X}, \mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)\times\mathbb{A}^1}(1)|_{\mathcal{X}})$ 的一个测试构型 $(X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$，其中心纤维由 X 在 λ 作用下的平坦极限 $X_0 \subset \mathbb{P}(V)$ 给出。正如 [29,第 8] 页以及定理 2.9], 证明的 [22, 第 3 节所解释的，对 $\lambda(\mathbb{G}_m)$ 作用重新缩放后，测试构型 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ 被一个总空间为 $\mathrm{Bl}_{\mathcal{I}}(X \times \mathbb{A}^1)$ 的测试构型等变支配，其中 $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X[t]$ 是形如 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_Z + (t)$ 的理想，$Z \subset X$是 λ的排斥不动点轨迹。爆破 $\mathrm{Bl}_{\mathcal{I}}(X \times \mathbb{A}^1)$ 与 $Z \subset X$的法锥变形的总空间一致。极化代数簇 (X', L') 的斜率稳定性（分别为 Chow-斜率稳定性）概念，源于将 K 稳定性（分别为 Chow 稳定性）限制在由子概形 $Z' \subset X'$的法锥变形所产生的测试构型上；当 L' 非常 ample 且没有高阶上同调时，因而$X' \subset \mathbb{P}(H^0(X', L')^\vee)$，根据 [29, 命题 3.7]，由 $Z' \subset X'$ 的法锥变形给出的 (X', L') 的测试构型确定了 $GL(H^0($ $X', L'))$ 的一个具有两个不同权的一参数子群。

在适当的情况下（参见引理 2.8 的证明），可以利用法锥变形的几何性质，完全确定平坦极限 X_0：它是排斥轨迹 Z 与一个补线性子空间的连接。进而，这种连接的齐次理想形式简单，因此可以根据 Z 的次数和维数，轻松计算 $H^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(k))$的 $\lambda(\mathbb{G}_m)$-权（其中带有 $k \gg 0$）（参见引理 2.10 的证明）；相比 loc. cit. 第 4 节中的计算，这些计算更为直接（后者适用于一般的法锥变形）。

动机。本文的动机源于一项尝试：利用 GIT 构造非空的稳定映射粗模空间，其映射到变化的目标子簇 X，其中 X可以在固定的射影空间 $\mathbb{P}(V)$内变化，而对可逆层 $\mathcal{O}_X(1)$ $= \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)|_X$除其振幅性之外不附加任何条件；并且，$X$ 中的像曲线对应于 X 与线性子空间 L 的交，该子空间属于 $\mathbb{P}(V)$且具有适当的余维（其选取应使得至少在 X 光滑且非退化时，X 与此类一般 L 的交是一条光滑曲线）。这一目标又源于一个更广泛的目标：构造代数簇及其与曲线之间态射的模空间；而这又是更宏大目标的一部分，即通过引入适当的附加结构，寻求基于 GIT 的新方法来构造和研究射影簇的模空间。

该构造尝试在 Baldwin–Swinarski [4] GIT 构造的稳定映射$\overline{M}_{g,\ n}(\mathbb{P}(V)\ \beta)$粗模空间中附加一个希尔伯特概形因子，用于参数化子概形 $X \subset \mathbb{P}(V)$；随后尝试对扩大的参数空间上 $SL(V)$ 的对角作用构造几何 GIT 商。其设想是借助 Baldwin–Swinarski 构造来证明所需模空间的存在，而无需完整实施希尔伯特–芒福德判据，以处理 $SL(V)$ 在 $\mathrm{Hilb}(\mathbb{P}(V))$ 上的作用。这个所需模空间的存在性与参数化部分旗 $X^1 \subset X^n$ of $\mathbb{P}(V)$ 的粗模空间的存在性密切相关。在 $n = 2$ 的情形下，只要假设 $X^1 \subset \mathbb{P}(Z^1)$ 是亏格为 g且次数为 $d > 2(2g - 2)$ 的非退化曲线，就可以构造一个粗模空间（见第 6.2 节）。然而，可以证明，当 $n \geq 3$ 时，在所得的 NRGIT 设置中，所关注的抛物群作用的非常稳定轨迹（参见第 4 节）为空，因此定理 4.3 不再适用。

记号与约定。我们采用以下记号与约定：

- 本文始终在复数域 $\mathbb{C}$ 上进行。术语“点”始终指 $\mathbb{C}$-点。

- 代数簇是有限型的整分离概形。
- 粗模空间一词应从集合值模函子的角度来理解，而非代数栈（参见定义 3.5）。

- 若 $\mathcal{E}$ 是有限秩局部自由的 $\mathcal{O}_T$-模，则记 $\mathbb{P}_T(\mathcal{E}) := \mathrm{Proj}_T(\mathrm{Sym}^\bullet(\mathcal{E}^\vee))$.
  射影空间 $\mathbb{P}(V)$ 中给定一组点 S，其线性包记作$\langle S\rangle$。若 $X \subset \mathbb{P}(V)$ 是 $\mathbb{P}(V)$ 的闭子概形，且其理想层为 $\mathcal{I}_X$，则定义$\mathbb{I}(X) := \bigoplus_{d\geq 0} H^0(\mathbb{P}(V)\ \mathcal{I}_X(d))$（若要强调包含 X 的射影空间 $\mathbb{P}(V)$，我们也使用记号 $\mathbb{I}_{\mathbb{P}(V)}(X)$）。$\mathbb{P}T_pX$ 表示 $X \subset \mathbb{P}(V)$ 在点 $p \in X$ 处的射影切空间。
- 如果闭子概形 X 不包含在 $\mathbb{P}(V)$ 中的任何超平面内，则称其为非退化；换言之，若 $H^0(\mathbb{P}(V)\ \mathcal{I}_X(1)) = 0$，则称其为非退化，否则称为退化。

- 若 G 是作用于准射影概形 Y 上的代数群，且 $H \subset G$ 是一个子群，则 $G \times^H Y$ 表示博雷尔构造，即 H通过 $h \cdot (g, y) = (gh^{-1}, hy)$ 作用于 $G \times Y$所得的几何商。[2]

- 在约化GIT中，我们对希尔伯特–芒福德判据采用以下符号约定。设 X 是由约化群 G 作用的射影概形，设 $\mathcal{L}$ 是此作用的丰线性化，设 λ 是 G 的一个一参数子群，并设 $x \in X$，其极限为 $x_0 = \lim_{t\to 0} \lambda(t) \cdot x$。希尔伯特–芒福德权重$\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda)$是 $\lambda(\mathbb{G}_m)$ 对纤维 $\mathcal{L}^\vee|_{x_0}$的作用之权；对于 G的所有非平凡一参数子群 λ，若$\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda) > (\geq) 0$，则称 x 为（半）稳定。

致谢。本文内容构成作者在牛津大学哲学博士论文的一章。作者感谢其导师 Frances Kirwan、Jason Lotay 和 Alexander Ritter 在本项目期间持续的指导和鼓励。作者还感谢论文审查人 Ruadhai Dervan 和 Dominic Joyce 对本工作的更正和评论。作者还感谢 Eloise Hamilton、Victoria Hoskins 和 Josh Jackson 的多次有益交谈和建议。

作者得到了英国研究与创新署（工程与自然科学研究委员会）博士奖学金（EP/V520202/1）的资助。

2. Preliminaries

2.1. 关于几何商的引理。这里我们给出本文所需的一些关于几何商的初等结果。

引理 2.1. 设 $q: X \to X/G$ 为约化代数群 G 在有限型概形 X 上作用的几何商。设 $Z \subset X$ 为 X 的 G-不变局部闭子概形。则 q 限制给出几何 H-商 $q|_Z: Z \to q(Z) \subset X/G$，其中 $q(Z)$ 是 X/G 的局部闭子概形。

证明。设 $\overline{Z}$ 是 X 中 Z 的闭包；由于 Z 在 X 中是局部闭的，因此 Z 在 $\overline{Z}$ 中是开集。由于 q 是一个良商，因此 $q(\overline{Z})$ 在 X/G 中是闭的；此外，$q(\overline{Z})$ 从 $\overline{Z}$ 继承了规范的概形结构（若 $\overline{Z} \subset X$ 局部同构于 $\mathrm{Spec}\ A/I \subset \mathrm{Spec}\, A$，则 $q(\overline{Z}) \subset X/G$ 局部同构于 $\mathrm{Spec}(A/I)^G = \mathrm{Spec}\, A^G/I^G \subset \mathrm{Spec}\ A^G$）。因此，限制 $q|_{\overline{Z}}: \overline{Z} \to q(\overline{Z})$ 是一个几何 G-商。

由于 q 是满射，等式 $q(Z) = q(\overline{Z}) \setminus q(\overline{Z} \setminus Z)$ 成立，因此 $q(Z)$ 在 $q(\overline{Z})$ 中是开集。由于态射是几何商这一性质在底空间上是局部的，q 限制为一个几何商 $Z \to q(Z)$。□

引理 2.2. 设 $q: X \to X/H$ 是代数群 H（不假设其为约化群）在有限型概形 X 上的 Zariski 局部平凡商。设 $Z \subset X$ 是 X 的一个 H-不变局部闭子概形。则集合论像 $q(Z)$ 上存在唯一的概形结构，并存在一个局部闭浸入 $q(Z) \to X/H$，使得 $Z \cong q(Z) \times_{X/H} X$ 作为概形相等，且 $q|_Z: Z \to q(Z)$ 是一个局部平凡商。

[2]根据 [26, 定理 4.19] $G \times^H Y$ 是一个概形。

证明。再次考虑闭包 $\overline{Z}$。像 $q(\overline{Z})$ 在 X/H 中是闭的；我们赋予 $q(\overline{Z})$ 概形论像的概形结构。在仿射开集 $\operatorname{Spec} A \subset X/H$ 上，若 q 是平凡的，则有 $q^{-1}(\operatorname{Spec} A) = \operatorname{Spec} A \times H$，其中 H 在第一因子上平凡作用，在第二因子上按乘法作用。将 $q(\overline{Z}) \cap \operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} A/I$ 写作 $I \subset A$ 的一个理想，由于 $\overline{Z}$ 是 H-不变的，我们有 $\overline{Z} = q^{-1}(q(\overline{Z})) = \operatorname{Spec} A/I \times H$，而 $q|_{\overline{Z}}$ 是投影 $\operatorname{Spec}(A/I) \times H \to \operatorname{Spec}(A/I)$。因此，$q|_{\overline{Z}} \colon \overline{Z} \to q(\overline{Z})$ 是一个局部平凡的 H-商，并且 $\overline{Z} \cong q(\overline{Z}) \times_{X/H} X$ 作为概形相等。限制到开子概形 $Z \subset \overline{Z}$ 后，以 Z 替代 $\overline{Z}$，同样的结论仍然成立，因为 $q(Z)$ 在 $q(\overline{Z})$ 中是开集。

概形结构的唯一性源于这样一个事实：局部平凡商是范畴商，而范畴商在唯一同构意义下是唯一的。□

引理 2.3. 设 G 是作用于准射影概形 X 和Y上的线性代数群。设 $H \subset G$ 是点 $y_0 \in Y$的稳定子，并设 $Z = X \times \{y_0\} \subset X \times Y$。那么映射 $\sigma_Z \colon\ G \times Z \to GZ$，$(g, z) \mapsto gz$ 下降为一个同构 $G \times^H Z \cong GZ$。

证明。轨道映射$\sigma_{y_0} \colon\ G = G \times \{y_0\} \to Gy_0$ 是忠实平坦的（参见 [18, 命题 7.4]），因此是一个主 H-丛（相对于 fppf 拓扑）。由于图

$$\begin{array}{ccc} G \times Z & \xrightarrow{\mathrm{id}_G \times \mathrm{pr}_Y} & G \times \{y_0\} \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_Z} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{y_0}} \\ GZ & \xrightarrow[\mathrm{pr}_Y]{} & Gy_0 \end{array}$$

是笛卡尔的，σ_Z 也是一个主 H-丛，因此特别是一个几何 H-商。于是引理由几何商的唯一性得出。□

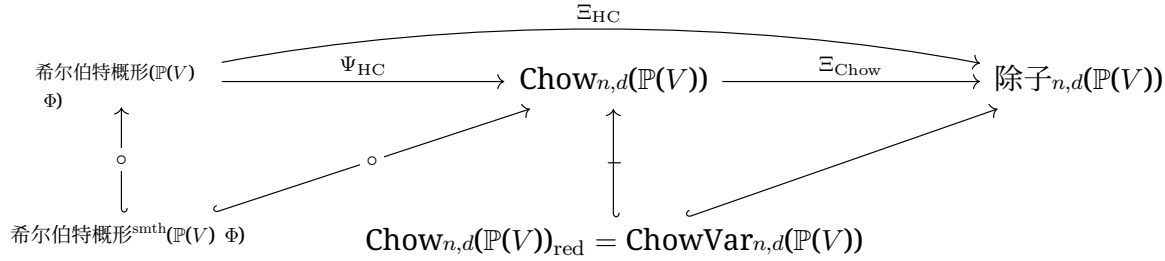
2.2. 希尔伯特概形上的 Chow 线性化。设 $\mathrm{Hilb}(\mathbb{P}(V)\ \Phi)$ 是参数化具有 Hilbert 多项式 Φ 的 $\mathbb{P}(V)$ 子概形的希尔伯特概形，其中

$$\Phi(t) = \frac{d}{n!}t^n + O(t^{n-1}).$$

令 $\mathrm{Chow}_{n,d}(\mathbb{P}(V))$ 为 Ang´eniol [1] Chow 概形，它参数化 $\mathbb{P}(V)$ 中维数为 n 且次数为 d 的循环族。Chow 概形具有以下性质（参见 [1, 第 6-7] 节以及 [30, 第 IV 篇、第 9、16 节和 17]）：

(i) 存在一个自然的 proper $GL(V)$-equivariant 态射 $\Psi_{\mathrm{HC}} \colon \mathrm{Hilb}(\mathbb{P}(V)\ \Phi) \to \mathrm{Chow}_{n,d}(\mathbb{P}(V))$，称为 Hilbert–Chow 态射。将 Ψ_{HC} 限制到参数化 $\mathbb{P}(V)$ 中非奇异闭子概形的开子概形 $\mathrm{Hilb}^{\mathrm{smth}}(\mathbb{P}(V)\ \Phi)$ 上，得到一个开浸入。(ii) 在参数化等维且既约子概形的轨迹上，Ψ_{HC} 是局部浸入。(iii) 其底层既约概形 $\mathrm{Chow}_{n,d}(\mathbb{P}(V))_{\mathrm{red}}$ 即 Chow 簇，由 Chow 和 Van der Waerden 在 [9] 中引入。(iv) 令 $\mathrm{Div}_{n,d}(\mathbb{P}(V))$ 为 $\mathbb{P}(V^\vee)^{\times(n+1)}$ 中多次数为 d 的除子的射影空间。则存在一个自然的 $GL(V)$-equivariant 态射 $\Xi_{\mathrm{Chow}} \colon \mathrm{Chow}_{n,d}(\mathbb{P}(V)) \to \mathrm{Div}_{n,d}(\mathbb{P}(V))$，其在 $\mathrm{Chow}_{n,d}(\mathbb{P}(V))_{\mathrm{red}}$ 上的限制是一个闭浸入；复合映射 $\Xi_{\mathrm{HC}} = \Xi_{\mathrm{Chow}} \circ \Psi_{\mathrm{HC}}$ 将子簇 $X \subset \mathbb{P}(V)$ 映至其 Chow 形式 Ξ_X。特别地，Ξ_{Chow} 是一个有限态射，因此 $\mathcal{L}_{\mathrm{Chow}} = \mathcal{L}_{\mathrm{Chow}_{n,d}(\mathbb{P}(V))} := \Xi_{\mathrm{Chow}}^* \mathcal{O}_{\mathrm{Div}_{n,d}(\mathbb{P}(V))}(1)$ 是 $GL(V)$ 对射影概形 $\mathrm{Chow}_{n,d}(\mathbb{P}(V))$ 作用的丰线性化，称为 Chow 线性化。(v) 由于子簇 $X \subset \mathbb{P}(V)$ 的 Chow 形式 Ξ_X 唯一确定 X，纤维 $\Xi^{-1}\mathrm{HC}(\Xi_X)$ 和 $\Xi^{-1}\mathrm{Chow}(\Xi_X)$ 中所有点的底层既约概形均为 X。

这些性质总结在下图中:



设 $\lambda\colon \mathbb{G}_m \to SL(V)$ 是一个一参数子群， $X \subset \mathbb{P}(V)$ 是在 λ 的作用下固定的子簇。令 $S(X) = \mathrm{Sym}^\bullet(V^\vee)/\mathbb{I}(X) = \bigoplus_m S(X)_m$ 为 X 的齐次坐标环。令 $w([X]_m, \lambda)$ 为向量空间 $S(X)_m$ 的 λ-权。[3]

命题 2.4（[22], 命题 2.11）。当 m 足够大时， $w([X]_m, \lambda)$ 可表示为如下形式的多项式: $-a_X{}_{(n+1)!}m^{n+1} + O(m^n)$。~~$\Psi_{\mathrm{HC}}(X)$~~ 的希尔伯特–芒福德权重为

$$\mu^{\mathcal{L}_{\mathrm{Chow}}}(\Psi_{\mathrm{HC}}(X), \lambda) = \mu^{\mathcal{O}_{\mathrm{Div}_{n,d}(\mathbb{P}(V))}(1)}(\Xi_{\mathrm{HC}}(X), \lambda) = a_X.$$

当 $\mathrm{Hilb}(\mathbb{P}(V)\ d)$ 是 $\mathbb{P}(V)$ 中长度为 d 的子概形的希尔伯特概形时，Ξ_{HC} 可经由自然态射分解

$$\Xi_{\mathrm{HC}} : \mathrm{Hilb}(\mathbb{P}(V), d) \to \mathrm{Sym}^d(\mathbb{P}(V)) = \prod_d \mathbb{P}(V)/\mathfrak{S}_d,$$

并且，该映射限制为开浸入，其定义域为参数化 $\mathbb{P}(V)$ 中 d 个互不相交、无序的既约点的开子概形。

命题 2.5。固定一个直和分解 $V = W \oplus W'$，从而可将 $SL(W)$ 视为 $SL(V)$ 的子群，其中规定 $SL(W)$ 在 W' 中的向量上作用平凡。设 $Y \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{P}(V)\ d)$ 对应于一组互不相同的无序点 $\Xi_{\mathrm{HC}}(Y) = \{p_1, \ldots, p_d\}$，且每个 $p_i \in \mathbb{P}(W)$。那么， $\Psi_{\mathrm{HC}}(Y) \in \mathrm{Chow}_{0,d}(\mathbb{P}(V))$ 关于 Chow 线性化是 $SL(W)$-(半)稳定的，当且仅当对所有真线性子空间 $Z \subset \mathbb{P}(W)$,

$$\frac{\#(Y \cap Z)}{d} < (\leq)\ \frac{\dim Z + 1}{\dim W}. \tag{2.1}$$

证明。存在一个 $SL(W)$-等变闭浸入，将 Chow 概形

$$\mathrm{Chow}_{0,d}(\mathbb{P}(W)) \hookrightarrow \mathrm{Chow}_{0,d}(\mathbb{P}(V)),$$

在此闭浸入下，$\mathrm{Chow}_{0,d}(\mathbb{P}(V))$ 上的 Chow 线性化拉回为 $\mathrm{Chow}_{0,d}(\mathbb{P}(W))$ 上的 Chow 线性化。因此，我们可以转而考察 $\mathrm{Chow}_{0,d}(\mathbb{P}(W))$ 上的 $SL(W)$-作用。结论由 [21, 命题 7.27] 得出。□

当 λ 是 $SL(V)$的一个具有两个不同权的一参数子群，且 $Y \subset \mathbb{P}(V)$是完全包含在单个权子空间中的闭子簇时，可以非常直接地计算Y 的Chow权重。

引理2.6. 设给定一个分解 $V = U \oplus W$，并令 $Y \subset \mathbb{P}(W)$为维数 r 、次数为 d的闭子簇。令 $\lambda\colon \mathbb{G}_m \to SL(V)$为如下定义的一参数子群：每个 $u \in U$ 的权为 a ，每个 $w \in W$ 的权为 b，其中a 维数$U + b$维数$W = 0$，且 a和 b均非零。那么，点 $\Psi_{\mathrm{HC}}(Y)$的希尔伯特–芒福德权重（其中 Y被视为 $\mathbb{P}(V)$的闭子簇）等于 $bd(r+1)$。

证明。分别为 $U^\vee$ 和 $W^\vee$ 选取基 $x_1, \ldots, x_n$ 和 $y_1, \ldots, y_m$，并令 $I_Y = \mathbb{I}_{\mathbb{P}(W)}(Y) \subset \mathrm{Sym}^\bullet W^\vee = \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]$。 $Y \subset \mathbb{P}(V)$ 的齐次理想为

$$\mathbb{I}_{\mathbb{P}(V)}(Y) = (I_Y, x_1, \ldots, x_n) \cdot R \subset R := \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m],$$

[3] ~~若 $W = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} W_i$ 是有限维 $\mathbb{G}_m$-表示 W的权空间分解，则 W的权由 $\sum_i i$ 维数 W_i给出。~~

因此，对所有充分大的 k，我们有

$$H^0(Y,\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)|_Y)=\frac{R_k}{\mathbb{I}_{\mathbb{P}(V)}(Y)_k}=\frac{\mathbb{C}[y_1,\dots,y_m]_k}{(I_Y)_k},\quad h^0(Y,\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)|_Y)=\frac{d}{r!}k^r+O(k^{r-1}).$$

$\mathbb{C}[y_1,\dots,y_m]_k/(I_Y)_k$ 中的所有元素的权均为 $-kb$，因此对于所有足够大的 k sufficiently larg e

$$w([Y]_k,\lambda)=-kbh^0(Y,\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)|_Y)=\frac{-bd(r+1)}{(r+1)!}k^{r+1}+O(k^r).$$

应用命题 2.4 即完成引理的证明。 □

2.3. 线性子空间与平坦极限的簇的联接。我们回顾子簇 $Y\subset\mathbb{P}(V)$ 与线性子空间 $L\subset\mathbb{P}(V)$ 的联接的定义。

定义 2.7. 设 $Y\subset\mathbb{P}(V)$ 为一个子簇，$L\subset\mathbb{P}(V)$ 为一个满足性质 $Y\cap L=\emptyset$ 的线性子空间。Y 与 L 的连接是 $\mathbb{P}(V)$ 的子簇，由所有连接 Y 中的点与 L 中的点的直线构成:

$$J(Y,L)=\bigcup_{\substack{y\in Y\\ q\in L}}\langle y,q\rangle.$$

假设 Y 包含于线性子空间 $L'=\mathbb{P}(W)\subset\mathbb{P}(V)$ 中，且该子空间与 L 不相交，并满足 $\mathbb{P}(V)=\langle L,L'\rangle$。以下事实均为标准结果。

(i) 理想 $S=\mathrm{Sym}^\bullet(V^\vee)$ 满足等式 $\mathbb{I}_{\mathbb{P}(V)}(J(Y,L))=\mathbb{I}_{\mathbb{P}(W)}(Y)\cdot S$。(ii) 对每个 $q\in L$，$\mathbb{P}T_qJ(Y,L)=\mathbb{P}(V)$。(iii) 假设 $p\in J(Y,L)\setminus L$ 位于连接 $y\in Y$ 与 $q\in L$ 的直线上。则 $\mathbb{P}T_pJ(Y,L)=\langle L,\mathbb{P}T_yY\rangle$。若 $y\in Y$ 是非奇异点，则 $\dim\mathbb{P}T_pJ(Y,L)=\dim{}_yY+\dim L+1$。

设 $X\subset\mathbb{P}(V)$ 是一个闭子簇，并设 $V=U\oplus W$ 对于非零子空间 $U,W\subset V$。假设 X 不包含于所有 $\mathbb{P}(W)$ 中。定义 $GL(V)$ 的一参数子群 λ，规定所有向量 $u\in U$ 的权为 a，所有向量 $w\in W$ 的权为 b，其中 $a<b$。令 $Y=X\cap\mathbb{P}(W)$，并令 $X_0=\lim_{t\to0}\lambda(t)\cdot X$ 为 X 在 λ 作用下的平坦极限。

引理 2.8. 在上述情形下，进一步假设有理映射 $\mathrm{pr}^{\mathbb{P}(U)}:X\dashrightarrow\mathbb{P}(U)$ 是支配的，Y 是既约的，并且闭浸入 $Y\hookrightarrow X$ 是正则的。那么平坦极限 X_0 由连接 $J(Y,\mathbb{P}(U))$ 给出。

为证明引理 2.8，我们需要以下引理。

引理 2.9. 设 $f\colon Y\to Z$ 是概形之间的一个态射，且这些概形在 $\mathbb{A}^1$ 上平坦。设 $f_0\colon Y_0\to Z_0$ 是 f 沿 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}\xrightarrow{0}\mathbb{A}^1$ 的基变换。那么概形 $\mathrm{im}(f_0)=\mathrm{im}(f)_0$，相等，其中 im 表示概形论像。

证明. 我们有一个概形浸入 $\mathrm{im}(f_0)\subset\mathrm{im}(f)_0$，，并断言它是一个同构。不失一般性，可假设 $Y=\mathrm{Spec}\,A$ 和 $Z=\mathrm{Spec}\,B$ 是仿射的，其中 f 对应于一个 $\mathbb{C}[t]$-代数同态 $\psi:B\to A$。由于 $\mathrm{im}(\psi)\subset A$ 不含 t-挠元，因此 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{C}[t]}(\mathrm{im}(\psi)\ \mathbb{C}[t]/t)=0$。因此，对短正合列 $0\to\ker\psi\to B\to\mathrm{im}(\psi)\to0$ 应用 $-\otimes_{\mathbb{C}[t]}\mathbb{C}[t]/t$，得到短正合列

$$0\to\frac{\ker\psi}{t\ker\psi}\to\frac{B}{tB}\to\frac{\mathrm{im}(\psi)}{t\ \mathrm{im}(\psi)}\to0.$$

In t urn，因此存在一个单态射 $\ker\ \psi/t\ker\ \psi\hookrightarrow\ker\ \overline{\psi}\subset B/tB$。这诱导出一个满射 n

$$\frac{B/tB}{\ker\overline{\psi}}\twoheadrightarrow\frac{B/tB}{\ker\psi/t\ker\psi}=\frac{\mathrm{im}(\psi)}{t\ \mathrm{im}(\psi)}=\frac{B/\ker\psi}{t(B/\ker\psi)}.$$

由此可知，存在一个闭浸入 $\mathrm{im}(f)_0\hookrightarrow\mathrm{im}(f_0)$，根据构造，它是 $\mathrm{im}(f_0)\subset\mathrm{im}(f)_0$ 的逆映射。 □

引理 2.8 的证明。考虑有理映射

$$\Lambda' : X \times \mathbb{A}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}(V) \times \mathbb{A}^1, \quad ([u+w], t) \mapsto ([u + t^{b-a}w], t),$$

and 令 $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{X\times\mathbb{A}^1} = \mathcal{O}_X[t]$ 表示 Λ'的基 locus 的理想层。爆破 $\mathcal{I}$, 我们有一个图

$$\begin{array}{ccc} B = \mathrm{Bl}_{\mathcal{I}}(X \times \mathbb{A}^1) & & \\ \downarrow & \searrow^{\Lambda} & \\ X \times \mathbb{A}^1 & \xrightarrow[\Lambda']{} & \mathbb{P}(V) \times \mathbb{A}^1 \end{array}$$

由于 $X \times \mathbb{A}^1$ 在 $\mathbb{A}^1$上是平坦的， B 也如此（参见 [12, 附录 B6.7]）。根据 [22,引理 2.13], , 概形论像 $\mathrm{im}(\Lambda) \subset \mathbb{P}(V) \times \mathbb{A}^1$ 在 $\mathbb{A}^1$上是平坦的，而平坦极限 X_0 由 $\mathrm{im}(\Lambda)$在 $0 \in \mathbb{A}^1$上的纤维给出。根据引理 2.9，这与 B_0的概形论像一致。

不失一般性，我们可以假设 $b - a = 1$ （对 λ的权重新缩放不会改变其作为 $\mathbb{P}(V)$ 的子概形的平坦极限，只会改变其上诱导的 $\lambda(\mathbb{G}_m)$-作用）。我们有如下等式

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_Y + (t)$$

$\mathcal{O}_X[t]$的理想，其中 $\mathcal{I}_Y$是 $Y \subset X$的理想层。因此， $B = \mathrm{Bl}_{\mathcal{I}}(X \times \mathbb{A}^1)$ $=\mathrm{Bl}_{Y\times 0}(X \times \mathbb{A}^1)$ 是 $Y \subset X$ 的法锥变形的全空间（参见 [12, 第 5] 章）。 B 在 $0 \in \mathbb{A}^1$ 上的纤维为

$$B_0 = \mathrm{Bl}_Y X \cup_{E_Y X} \mathbb{P}_Y(N_{Y\subset X} \oplus \mathcal{O}_Y),$$

注意，由于 $Y \subset X$ 是正则浸入，正规锥 $C_{Y\subset X} = N_{Y\subset X}$ 与正规丛重合，且是一个（几何）向量丛。这里， $\mathrm{Bl}_Y X$ 与 $\mathbb{P}_Y(N_{Y\subset X} \oplus \mathcal{O}_Y)$分别沿例外因子 $E_Y X$ 和无穷远截面相交。由于 X 和 Y是既约的，概形 B_0 也是既约的，因此 X_0 也必定既约（因为既约概形的概形论像是既约的）。换言之， X_0 上的概形结构与底层空间 $|X_0|$上的约化诱导概形结构一致。

另一方面，由于 Λ_0 是 $Y \subset B_0$上的恒等映射，由于 Λ_0 关于 X_0 和 $\mathbb{P}_Y($ $N_{Y\subset X} \oplus \mathcal{O}_Y)$上的 $\mathbb{G}_m$-作用等变，并且由于 Λ_0 与 $\mathrm{Bl}_Y X \setminus E_Y X = X \setminus Y$上的支配态射 $\mathrm{pr}^{\mathbb{P}(U)}$重合，我们必有 $|X_0| = |J(Y, \mathbb{P}(U))|$。因此，作为 $\mathbb{P}(V)$的子概形，有 $X_0 = J($ $Y, \mathbb{P}(U))$，引理得证。□

引理 2.10. 设 $V = U \oplus W$，并设 $Y \subset \mathbb{P}(W)$ 是一个维数为r、次数为 d的闭子簇。令 $J = J(Y, \mathbb{P}($ $U))$ 为 $\mathbb{P}(V)$ 中 Y与 $\mathbb{P}(U)$ 的连接。

令 $\lambda\colon \mathbb{G}_m \to SL(V)$ 为如下定义的一参数子群：每个 $u \in U$ 的权为 a ，每个 $w \in W$的权为 b，其中 $a\dim U + b\dim W = 0$，且 a和 b均非零。若 $\dim Y = \dim \mathbb{P}(U)$，则进一步假设 $a + bd \neq 0$。点 $\Psi_{\mathrm{HC}}(J)$ 关于 λ 的希尔伯特–芒福德权重等于

$$\begin{cases} a(\dim \mathbb{P}(U) + 1) & \text{if } \dim Y < \dim \mathbb{P}(U), \\ bd(\dim Y + 1) & \text{if } \dim Y > \dim \mathbb{P}(U), \\ (a + bd)(\dim Y + 1) & \text{if } \dim Y = \dim \mathbb{P}(U). \end{cases}$$

证明。可以使用 [29, 定理4.8] 来证明这一结论，不过我们选择直接计算希尔伯特–芒福德权重，尽管计算过程与之相似。与引理2.6的证明相同，取 $U^\vee$和 $W^\vee$的基 $x_1, \ldots, x_n$ 以及 $y_1, \ldots, y_m$。令$I_Y = \mathbb{I}_{\mathbb{P}(W)}(Y) \subset \mathrm{Sym}^\bullet W^\vee = \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]$，并设

$$I_J := \mathbb{I}_{\mathbb{P}(V)}(J) = I_Y \cdot R \subset R := \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m].$$

对于所有充分大的 k s，我们有

$$H^0(J, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)|_J) = \frac{R_k}{(I_J)_k} \cong \bigoplus_{i+j=k} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_i \otimes_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]_j}{(I_Y)_j} \tag{2.2}$$

$\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]_i$ 中的元素都具有权 $-ia$，而 $\mathbb{C}[y_1,\dots,y_m]_j/(I_Y)_j$ 中的元素都具有权 $-jb$。因此，根据公式（2.2），我们有

$$\begin{aligned} w([J]_k,\lambda) &= -\sum_{i=0}^{k}\left(ia\binom{n+i-1}{i}+(k-i)b\psi_Y(k-i)\right)\\ &= -\sum_{i=1}^{k} i\left(a\binom{n+i-1}{i}+b\psi_Y(i)\right), \end{aligned}$$

其中 $\psi_Y(i) := \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[y_1,\dots,y_m]_i/(I_Y)_i)$。对于所有充分大的 k，我们有

$$\psi_Y(k) = h^0(Y,\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(k)|_Y) = \frac{d}{r!}k^r + O(k^{r-1}).$$

因此，对于 $k \gg 0$,

$$\begin{aligned} w([J]_k,\lambda) &= -\sum_{i=1}^{k} i\left(a\binom{n+i-1}{i}+b\left(\frac{d}{r!}i^r+O(i^{r-1})\right)\right)+O(1)\\ &= -\sum_{i=1}^{k} ia\binom{n+i-1}{i} - b\frac{d}{r!(r+2)}k^{r+2}+O(k^{r+1})\\ &= \frac{-bd(r+1)}{(r+2)!}k^{r+2} - \sum_{i=1}^{k} ia\binom{n+i-1}{i}+O(k^{r+1}), \end{aligned}$$

其中第二行用到了 $\sum_{i=1}^{k} i^p = \frac{k^{p+1}}{p+1}+O(k^p)$。另一方面，我们有$\sum_{i=1}^{k} ia\binom{n+i-1}{i} = \frac{an}{n+1()!}k^{n+1}+O(k^n)$。由命题 2.4 即得引理。□

3. Moduli of Hyperplanar Admissible Flags

3.1. 模函子。固定一个有限维向量空间 V 以及正整数$d, n > 0$。

定义 3.1. $\underline{X}$($\underline{Z}$) 的子概形构成的超平面可容许旗（长度为 n、次数为 d）是一个闭子概形 $X^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset X^{n-1} \subset X^n$ 的元组 $\underline{X} = (X^0, X^1, \dots, X^n)$，并配有一个线性子空间$Z^0 \subset Z^1 \subset \cdots \subset Z^{n-1} \subset Z^n = V$的元组 $\underline{Z} = (Z^0, Z^1, \dots, Z^n)$，满足：

(i) 对所有 $i = 0,1,\dots,n$，维数为 $X^i = i$；(ii) 对每个 $i = 0, 1, \dots, n$，余维数为 $_V\, Z^i = n - i$；以及 (iii) 对每个 $i = 0, 1, \dots, n$，$X^i = X^n \cap \mathbb{P}(Z^i)$。[4]

旗 $(\underline{X}, \underline{Z})$ 是非退化的，如果每个 X^i 都不包含在 Z^i 的某个真线性子空间中。旗 $(\underline{X}, \underline{Z})$ 是非奇异的，如果 X^1、.....、X^n 各自都是非奇异的连通射影簇，且 X^0 是 d 个既约点的不交并。旗 $(\underline{X}, \underline{Z})$ 是稳定的，如果 $X^0 \subset \mathbb{P}(Z^0)$ 是 Chow 稳定的；具体而言，对于每个真线性子空间 $Z \subset \mathbb{P}(Z^0)$，不等式 2.1 严格成立，其中 W 取为 Z^0，Y 取为 X^0。

注：如果 $(\underline{X}, \underline{Z})$ 是非退化的，那么可以通过取 X^i 在 $\mathbb{P}(V)$ 中的线性包，从 $\underline{X}$ 恢复线性子空间 Z^i。

只有当 $\mathbb{P}(V)$ 的维数 $\dim \geq n$ 时，长度为 n 的 $\mathbb{P}(V)$ 子概形的超平面可容许旗才有意义；如果 $n = \dim \mathbb{P}(V)$，那么唯一的可能性是由线性子空间组成的完全旗，而这些旗彼此射影等价。因此，每当讨论 $\mathbb{P}(V)$ 子概形的长度为 n 的超平面可容许旗时，我们都假设 $n + 1 < \dim V$。存在次数为 d 的非退化、非奇异且稳定的超平面可容许旗的一个必要条件是 $d > \dim Z^0 = \dim V - n$。事实上，如果 Chow 稳定构型 $X^0 \subset \mathbb{P}(Z^0)$ 中的 k 个点的射影线性张成的维数为 $\ell \leq k-1$，则不等式 2.1 蕴含 $d > \frac{k}{\ell+1}\dim Z^0$。

另一方面，如果 $d >$ 维数 Z^0 那么通过将一条次数为 d 的非退化曲线 $X^1 \subset \mathbb{P}(Z^1)$ 与一个一般的相交而得到的一般点构型 $X^0 \subset \mathbb{P}(Z^0)$

[4]特别地，对于所有 $i = 0$, ..., n, $\deg X^i = d$。

超平面 $\mathbb{P}(Z^0) \subset \mathbb{P}(Z^1)$ 将是乔稳定的，因为这样的一般交将满足性质： X^0 的任何大小为维数 $\mathbb{P}(Z^0)$ 的子集在 $\mathbb{P}(Z^0)$ 中张成一个超平面，这由 [2, 第三章，§1] 的所谓一般位置定理得出。对于这样的次数，非退化、非奇异且稳定的超平面容许旗的模的非平凡性则由 Bertini 定理以及不可约非退化射影子簇的一般超平面截影的非退化性所蕴含（参见 [15, 命题 18.10]）。

定义 3.2. 旗 $(\underline{X}, \underline{Z})$ 的希尔伯特型 $\underline{\Phi} = (\Phi_0, \dots, \Phi_n)$ 是一个元组，其各项为 X^i 的 Hilbert 多项式：

$$\Phi_i(t) = \chi(X^i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(t)|_{X^i}).$$

为了定义模函子，我们需要明确超平面可容许旗的族指什么，以及何时认为两个族等价。

定义 3.3. 设 S 是一个概形。 S 上的子概形 $\mathbb{P}(V)$ 的超平面可容许旗族 $(\underline{\mathcal{X}}, \underline{\mathcal{Z}}, L)$（长度为 n、次数为 d 、希尔伯特型为 $\underline{\Phi}$）由以下数据给出：

(1) S 上的可逆层 L，(2) 一个闭子概形元组 $\underline{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}^0, \dots, \mathcal{X}^n)$，它们是关于 S 平坦且有限表示的，以及 (3) 一个子丛元组 $\underline{\mathcal{Z}} = (\mathcal{Z}^0, \dots, \mathcal{Z}^n)$ $\mathcal{Z}^0 \subset \cdots \subset \mathcal{Z}^n = V \otimes L$,

使得以下性质成立：

(i) 每个 $\mathcal{Z}^i$ 的余秩为 $n - i$；(ii) 对每个几何点 $s \in S$，纤维 $(\underline{\mathcal{X}}, \underline{\mathcal{Z}})_s = (\underline{\mathcal{X}}_s, \underline{\mathcal{Z}}|_s)$ 是 $\mathbb{P}(V \otimes L|_s) \cong \mathbb{P}(V)$ 中长度为 n、次数为 d 且希尔伯特型为 $\underline{\Phi}$ 的子概形所构成的超平面可容许旗，如定义 3.1 所述。

若对每个几何点 $s \in S$，旗 $(\underline{\mathcal{X}}, \underline{\mathcal{Z}})_s$ 都是非退化的（分别地，非奇异的、稳定的），则称族 $(\underline{\mathcal{X}}, \underline{\mathcal{Z}}, L)$ 是非退化的（分别地，非奇异的、稳定的）。

定义 3.4. 设 $(\underline{\mathcal{X}}, \underline{\mathcal{Z}}, L)$ 和 $(\underline{\mathcal{X}}', \underline{\mathcal{Z}}', L')$ 是共同底概形 S 上 $\mathbb{P}(V)$ 的子概形所构成的超平面可容许旗的族。若存在可逆层的同构 $\phi\colon L \to L'$，以及一个元素 $g \in GL(V)$，使得：则称这两个族（射影）等价。

(i) $g \otimes \phi : V \otimes L \xrightarrow{\sim} V \otimes L'$ *sends* $\mathcal{Z}^i$ *to* $(\mathcal{Z}^i)'$ *for all* $i = 0, \dots, n$, *and*
(ii) $\mathbb{P}_S(g \otimes \phi) : \mathbb{P}_S(V \otimes L) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_S(V \otimes L')$ *sends* $\mathcal{X}^i$ *to* $(\mathcal{X}^i)'$ *for all* $i = 0, \dots, n$.

给定一个概形态射 $T \to S$，由 S 参数化的超平面可容许旗族 $(\underline{\mathcal{X}}, \underline{\mathcal{Z}}, L)$ 的拉回，是由 T 参数化的超平面可容许旗族；并且， S 上射影等价的族拉回后仍是 T 上射影等价的族。因此，存在一个良定义的模函子

$$\mathcal{F}^{\mathbb{P}(V)}_{n,d,\underline{\Phi}} : \mathbf{Sch}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$$

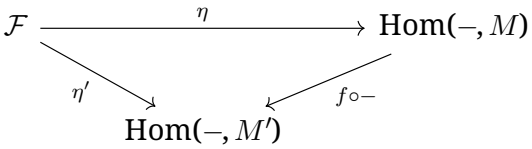
它将概形 S 关联到如下集合：由 S 参数化的、由 $\mathbb{P}(V)$ 的长度为 n、次数为 d 、希尔伯特型为 $\underline{\Phi}$ 的子概形构成的非退化、非奇异且稳定的超平面可容许旗族的所有等价类。

注。假设 $(\underline{X}, \underline{Z})$、$(\underline{X}', \underline{Z}')$ 是 $\mathbb{P}(V)$ 的子概形的非退化超平面可容许旗，且闭嵌入 X^n、$(X')^n \subset \mathbb{P}(V)$ 是线性正规，即 $H^1(\mathbb{P}(V)\ \mathcal{I}_{X^n}(1)) = H^1(\mathbb{P}(V)\, \mathcal{I}_{(X')^n}(1)) = 0$，因此限制映射 $V^\vee \to H^0(X^n, \mathcal{O}_{X^n}(1))$ 和 $V^\vee \to H^0((X')^n, \mathcal{O}_{X'^n}(1))$ 均为同构。则存在一个极化簇的同构 $(X^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)|_{X^n}) \cong ((X')^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)|_{(X')^n})$，将每个 X^i 映至 $(X')^i$，当且仅当 $(\underline{X}, \underline{Z})$ 和 $(\underline{X}', \underline{Z}')$ 射影等价。事实上，任何这样的同构 $(X^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)|_{X^n}) \cong ((X')^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)|_{(X')^n})$ 都会通过考察全局截面上诱导的同构，导出底层射影空间 $\mathbb{P}(V)$ 的自同构。

3.2. 局部泛性质。我们回顾模空间理论中的以下术语。

定义 3.5. 设 $\mathcal{F}\colon \mathrm{Sch}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ 是一个模函子。

(1) 若 S 是一个概形，且 $Y \in \mathcal{F}(S)$，则称 Y 对于 $\mathcal{F}$ 具有局部泛性质；若对任意概形 S'、任意对象 $Y' \in \mathcal{F}(S')$ 以及任意点 $s' \in S'$，都存在 s' 的一个开邻域 $U \subset S'$ 和一个态射 $f : U \to S$，使得 $f^*Y \cong Y'|_U$。(2) 若一对 (M, η) 由概形 M 和自然变换 $\eta : \mathcal{F} \to \mathrm{Hom}(-, M)$ 构成，则称其代表 $\mathcal{F}$；若对任意概形 M' 和任意自然变换 $\eta' : \mathcal{F} \to \mathrm{Hom}(-, M')$，都存在唯一的概形态射 $f : M \to M'$，使图



交换。若进一步，$\eta_{\mathbb{C}} : \mathcal{F}(\mathrm{Spec}\ \mathbb{C}) \to M(\mathbb{C})$ 是双射，则 (M, η) 称为 $\mathcal{F}$ 的粗模空间。

命题 3.6（[25], 命题 2.13）。设 $\mathcal{F} : \mathrm{Sch}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ 是一个模函子。假设 $Y \in \mathcal{F}(S)$ 对于 $\mathcal{F}$ 具有局部泛性质，并进一步假设存在一个代数群 H 作用于 S，使得对于任意两个点 $s, t \in S$,$Y_s \cong Y_t$ 当且仅当 s 和 t 属于同一个 H- 轨道。

(1) 概形 M 代表 $\mathcal{F}$ 当且仅当 M 是 S 关于 H 的范畴商。(2) S 关于 H 的范畴商 M 是 $\mathcal{F}$ 的粗模空间，当且仅当M 是轨道空间。

设 n, d 为正整数，V 为维数为 $\dim V > n+1$ 的复向量空间。现在我们给出一个具有模函子 $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\mathbb{P}(V)}{}_{n,d,\underline{\Phi}}$ 局部泛性质的族。设 $\mathcal{H}_i = \mathrm{Hilb}(\mathbb{P}(V)\ \Phi_i)$ 为以 Φ_i 为 Hilbert 多项式、参数化 $\mathbb{P}(V)$ 的闭子概形的希尔伯特概形，并设 $\mathrm{Gr}_i = \mathrm{Gr}_i(V)$ 为参数化 V 的余维为 $n-i$ 的子空间的 Grassmannian。令

$$\mathcal{S} := \prod_{i=0}^{n} \mathcal{H}_i \times \prod_{j=0}^{n} \mathrm{Gr}_j.$$

我们赋予 $\mathcal{S}$ 由 $\mathcal{H}_i$ 和 Gr^j 上自然的 $GL(V)$ 作用所诱导的 $GL(V)$ 对角作用。在 $\mathcal{H}$ 上有以下泛对象：

(i) 对每个 $i = 0, \ldots, n$，都有有限表示的 $\mathcal{S}$-平坦闭子概形 $\mathcal{Y}^i \subset \mathbb{P}(V) \times \mathcal{S}$，其中 $\mathcal{Y}^i$ 对应于 $\mathcal{H}_i$ 上的泛族。(ii) 对每个 $j = 0, \ldots, n$，都有余秩为 $n-j$ 的子丛 $\mathcal{W}^j \subset V \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$，其中 $\mathcal{W}^j$ 对应于 Gr^j 上的泛子丛。

引理 3.7. 存在一个局部闭的、$GL(V)$-不变子概形 $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$，具有如下泛性质：设 S 是一个概形，且 $S \to \mathcal{S}$ 是一个态射，对应于闭子概形 $\mathcal{Y}^i_S \subset \mathbb{P}(V) \times S$ 和局部自由子层 $\mathcal{W}^j_S \subset V \otimes \mathcal{O}_S$。那么，当且仅当对每个几何点 $s \in S$ 都有以下性质时，$S \to \mathcal{S}$ 经由 $\mathcal{S}'$ 分解：

(1) $\mathcal{Y}^0_s \subset \cdots \subset \mathcal{Y}^n_s$作为 $\mathbb{P}(V)$的子概形，且 $\mathcal{W}^0_s \subset \cdots \subset \mathcal{W}^n_s = V$作为$V$的子空间；(2) 对所有 $i = 0, \ldots, n$，$\mathcal{Y}^i_s = \mathcal{Y}^n_s \cap \mathbb{P}(\mathcal{W}^i_s)$；(3) 对所有 $i = 0, \ldots, n$，$\dim\ \mathcal{Y}^i_s = i$；(4) 对所有 $i = 0, \ldots, n$，$\deg\ \mathcal{Y}^i_s = d$；(5) 对每个 $i = 1, \ldots, n$，$\mathcal{Y}^i_s \subset \mathbb{P}(\mathcal{W}^i_s)$是非退化、非奇异的连通射影子簇；以及(6) $\mathcal{Y}^0_s \subset \mathbb{P}(\mathcal{W}^0_s)$是非退化的，$\mathcal{Y}^0_s$ 是 d 个互不相交的既约点的并，且$\mathcal{Y}^0_s$ 是乔稳定的。

证明。前两个条件是关联对应；这些条件在 $\mathcal{S}$中刻画出一个闭子概形。先施加前两个条件后，其余条件在平坦族中全都是开条件，因此在该闭子概形中定义了一个开子概形 $\mathcal{S}'$ 。□

令 $(\underline{\mathcal{Y}}', \underline{\mathcal{W}}')$ 为 $(\underline{\mathcal{Y}}, \underline{\mathcal{W}})$ 在 $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ 上的限制。注意，$(\underline{\mathcal{Y}}', \underline{\mathcal{W}}', \mathcal{O}_{\mathcal{S}'})$ 是一个由 $\mathcal{S}'$ 上长度为 n、次数为 d、希尔伯特型为 $\underline{\Phi}$ 的 $\mathbb{P}(V)$ 的子概形所构成的非退化、非奇异且稳定的超平面可容许旗族。

引理 3.8. 族 $(\underline{\mathcal{Y}}', \underline{\mathcal{W}}', \mathcal{O}_{\mathcal{H}'})$ 对模函子 $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\mathbb{P}(V)}{}_{n,d,\underline{\Phi}}$ 具有局部泛性质。

证明。给定概形 S 上的一个族 $(\underline{\mathcal{X}}, \underline{\mathcal{Z}}, L)$ 以及一点 $s \in S$，通过取 s 的一个开邻域 $U \subset S$，使得 L 平凡，我们不妨假设 $L = \mathcal{O}_S$。于是由引理 3.7 以及概形 $\mathcal{H}_i$ 和 Gr$_j$ 的泛性质可得结论。□

推论 3.9. 模函子 $\mathcal{F}$ 可被核心表示，当且仅当存在 $\mathcal{S}'$ 在 $SL(V)$ 下的范畴商 $q : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}' /\!\!/ SL(V)$；并且 $\mathcal{F}$ 存在粗模空间，当且仅当 q 是轨道空间态射。

证明. 若 s_0、 s_1 是 $\mathcal{S}'$ 的点，且 $(\underline{\mathcal{Y}}_0, \underline{\mathcal{W}}_0)$、$(\underline{\mathcal{Y}}_1, \underline{\mathcal{W}}_1)$分别是泛族 $(\underline{\mathcal{Y}}, \underline{\mathcal{W}})$在 s_0和 s_1上的限制，那么旗 $(\underline{\mathcal{Y}}_0, \underline{\mathcal{W}}_0)$与 $(\underline{\mathcal{Y}}_1, \underline{\mathcal{W}}_1)$等价，当且仅当 s_0 和 s_1 位于 $\mathcal{S}'$中同一个 $SL(V)$-轨道内。由此根据命题 3.6 即得结果。□

4. Non-Reductive Geometric Invariant Theory

ˆ4.1. U定理。这里我们概述本文所用的非约化GIT（NRGIT）工具。设 $H = U \rtimes L$ 是一个线性代数群，其幺幂根基为 U，且 L 是一个约化李维子群。我们关注具有（内部）分次幺幂根基的群 H。

定义 4.1. 幺幂根基 U of H 的（内部分次）是一个一参数子群 $\lambda : \mathbb{G}_m \to Z(L)$，使得在共轭作用下，$\lambda(\mathbb{G}_m)$ 在 Lie$\,U$ 上以严格正权作用。若 λ 是一个分次一参数子群的选取，我们记

$$\hat{U} := U \rtimes \lambda(\mathbb{G}_m) \quad and \quad \overline{L} := L/\lambda(\mathbb{G}_m).$$

固定幺幂根基的一个内部分次 $\lambda : \mathbb{G}_m \to Z(L)$。设 Y 是一个受 H 作用的射影概形，且 $\mathcal{L}$ 是此作用的一个丰线性化。设 $\omega_{\min} = \omega_0 < \omega_1 < \cdots < \omega_{\max}$ 是 $\lambda(\mathbb{G}_m)$ 在 $\mathcal{L}^\vee$ 的纤维上的权，这些纤维位于不动点轨迹 $Y^{\lambda(\mathbb{G}_m)}$ 的连通分支中各点上；此处的不动点轨迹对应于 $\lambda(\mathbb{G}_m)$ 在 Y 上的作用。为简单起见，我们假设存在一个稠密开子概形 $Y^\circ \subset Y$，使得对于所有点 $y \in Y^\circ$，$\lambda(\mathbb{G}_m)$ 在 $\mathcal{L}^\vee|_{p(y)}$ 上以权 ω 作用，其中 $p(y) = \lim_{t\to 0} \lambda(t) \cdot y$；注意，这意味着 $\omega = \omega_{\min}$。

选取一个正整数 N，使得 $\mathcal{L}^N$ 是非常 ample，从而存在一个闭浸入 $Y \subset \mathbb{P}(W)$，其中 $W = H^0(Y, \mathcal{L}^N)^\vee$。令 $W_{\min}$为 W中权为$N\omega_{\min}$的权子空间。我们引入以下轨迹:

(i) λ-最小权子空间是 Y的闭子概形

$$Z_{\min} = Z(Y, \lambda)_{\min} := Y \cap \mathbb{P}(W_{\min}).$$

概形 $Z_{\min}$ 带有一个自然的 L-作用。 $Z_{\min}$ 的闭点集合由 $\{y \in Y^{\lambda(\mathbb{G}_m)}$ 给出： $\lambda(\mathbb{G}_m)$以权 $N\omega_{\min}\}$作用于 $\mathcal{L}^\vee|_y$。

(ii) λ-吸引开集是开的 Białynicki-Birula 分层

$$Y_{\min} = Y(\lambda)_{\min} = \left\{ y \in Y : \lim_{t\to 0} \lambda(t) \cdot y \in Z_{\min} \right\}.$$

它自然地带有 H的作用。

(iii) λ-收缩映射是态射 $p = p_\lambda$： $Y_{\min} \to Z_{\min}$ （在闭点上）由$p(y) = \lim_{t\to 0} \lambda(t) \cdot y$给出。该态射关于商$H \to L$ 是等变的（参见 [7, 引理 4.16]）；特别地， $UZ_{\min}$ 中的任意点都由 p固定。

(iv) U-非常稳定轨迹[5] 是 Y 的开子概形，其点集为

$$Y_{\min}^{U-vs} := \{y \in Y_{\min} : \mathrm{Stab}_U(p(y)) = \{e\}\}.$$

(v) H-非常稳定轨迹是 Y 的开子概形，其点集为

$$Y_{\min}^{H-vs} := \{y \in Y_{\min}^{U-vs} : p(y) \in Z_{\min}^{\overline{L}-s}\} \setminus UZ_{\min}.$$

注记。由维数半连续性可知， $Y_{\min}^{U-vs}$ 在 $Y_{\min}$ 中是开集，其中涉及 U-稳定子的维数。反过来， [7, 定理 4.21 的证明（第 21] 页）中给出的同一论证表明， $\{z \in Z_{\min}$ 的 U-扫掠集：$\dim \mathrm{Stab}_U(z) = 0\}$ 在 $Y^{U-vs}{}_{\text{最小}}$ 中是闭集，因此 $Y^{H-vs}{}_{\text{最小}}$ 是 $Y_{\min}$ 的开子概形。 $Y^{U-vs}{}_{\text{最小}}$ 在 U 的作用下不变，而 $Y_{\min}^{H-vs}$ 在 H 的作用下不变。

我们还引入适配线性化这一概念。

定义 4.2. 若丰线性化 $\mathcal{L}$ 在 Y 上满足 $\omega_{\min} = \omega_0 < 0 < \omega_1 < \cdots < \omega_{\max}$，则称其对于 $\hat{}$ $U \subset H$ 的作用是适配的。

注意，适配线性化的任意正整数次幂仍是适配的。此外，概形 $Y_{\min}^{U-vs}$and $Y_{\min}^{H-vs}$仅取决于 $\mathcal{L}$ ，而不取决于非常 ample 线性化$\mathcal{L}^N$。因此，在尝试构造概形 $Y^{U-vs}{}_{\min}$ 和 $Y^{H-vs}{}_{\min}$ 的商时，假设 $\mathcal{L}$ 本身非常 ample 且满足 $N = 1$，并不会造成任何损失。

TNRGIT 的 $\hat{U}$-定理版本中，我们将用到以下结果 t.

定理 4.3。设 $H = U \rtimes L$ 是一个带有内部分次 $\lambda\colon \mathbb{G}_m \to Z(L)$ 的线性代数群。设 Y 是一个受 H 作用的射影概形，并设 $\mathcal{L}$ 是 Y上的一个非常 ample 适配线性化。假设存在一个稠密开子概形 $Y^\circ \subset Y$，使得对于所有点 $y \in Y^\circ$， $\lambda(\mathbb{G}_m)$ 都以相同的权 ω作用于 $\mathcal{L}^\vee|_{p(y)}$。此外，假设$Y_{\min}^{U-vs}$非空。

(1) 存在一个局部平凡的 U-商 $q_U\colon Y^{U-vs}{}_{\text{最小}} \to Y^{U-vs}{}_{\text{最小}}/U$。此外，存在一个正整数 $m > 0$ ，使得 $Y_{\min}^{U-vs}/U$ 可以嵌入到 $\mathbb{P}((H^0(Y, \mathcal{L}^m)^U)^\vee)$ 中，且该嵌入是局部闭浸入，并且 q_U由线性投影 $\mathbb{P}(H^0(Y, \mathcal{L}^m)^\vee) \dashrightarrow \mathbb{P}((H^0(Y, \mathcal{L}^m)^U)^\vee)$ 导出。

(2) 进一步假设 非空。固定这样一个整数 m，记 Q 为 $Y^{U-vs}{}_{\text{最小}}/U$ 在 $\mathbb{P}((H^0(Y, \mathcal{L}^m)^U)^\vee)$ 中的闭包。则存在一个映射

$$q : Y_{\min}^{U-vs} \xrightarrow{q_U} Y_{\min}^{U-vs}/U \dashrightarrow^{q_L} Q /\!\!/ L$$

满足以下性质：

(a) 轨迹 $Y_{\min}^{H-vs}$包含于 q 的定义域中，且限制 $q : Y_{\min}^{H-vs} \to q(Y_{\min}^{H-vs})$ 是一个几何 H-商。(b) 存在一个整数 $M \geq m$ ，以及一个将 $q(Y_{\min}^{H-vs})$ 嵌入 $\mathbb{P}((H^0(Y, \mathcal{L}^M)^H)^\vee)$ 的局部闭浸入，使得 q由线性投影$\mathbb{P}(H^0(Y, \mathcal{L}^M)^\vee) \dashrightarrow \mathbb{P}((H^0(Y, \mathcal{L}^M)^H)^\vee)$ 导出。

注记. 由引理 2.1 和 2.2 可知，若 Z 是 $Y_{\min}^{H-vs}$ 的任意 H-不变局部闭子概形，则 q 限制后给出一个几何 H-商 $Z \to q(Z)$，其中 $q(Z) = Z/H$ 是 $q(Y) = Y_{\min}^{H-vs}/H$ 的一个局部闭子概形。

定理 4.3 的证明. 该定理可利用 [27], 中给出的结果推导出来，不过我们将给出另一种证明。

我们首先对 U 取商。设 $W = H^0(Y, \mathcal{L})^\vee$。由于 $Y \subset \mathbb{P}(W)$ 不包含在任何真线性子空间中，因此 $\lambda(\mathbb{G}_m)$ 在 $\mathbb{P}(W)^{\lambda(\mathbb{G}_m)}$ 中各点上 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1)$ 的纤维上的作用的最小权也等于 ω，故有概形等式 $Y^{U-vs}{}_{\min} = Y \cap \mathbb{P}(W)_{\min}^{U-vs}$。根据 [7, 命题 4.26], ，存在一个局部平凡的 U-商 $\mathbb{P}(W)_{\min}^{U-vs} \to \mathbb{P}(W)_{\min}^{U-vs}/U$，它由限制一个包络

[5]注意，这里的术语并非标准术语，例如在 [5] [6] [7] [16] 中并未出现。我们希望强调的是，我们只考虑其 $\lambda(\mathbb{G}_m)$-极限具有平凡 U-稳定子的点，而不要求 $Z_{\min}$ 或 $Z^{\overline{L}-s}{}_{\min}$ 中的所有点都具有平凡 U-稳定子。

商映射得到。此外，根据 [5, 命题 3.1.19] 的证明，存在一个正整数 $m > 0$，使得对 m 的所有正整数倍数 m'，$\mathbb{P}(W)^{U-vs}_{\min}/U$ 都存在到 $\mathbb{P}((H^0(\mathbb{P}(W)\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(m'))^U)^\vee)$ 的局部闭浸入；其复合映射 $\mathbb{P}(W)^{U-vs}_{\min} \to \mathbb{P}(W)^{U-vs}_{\min}/U \to \mathbb{P}((H^0(\mathbb{P}(W)\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(m'))^U)^\vee)$ 是通过限制由包含关系$H^0(\mathbb{P}(W)\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(m'))^U \subset H^0(\mathbb{P}(W)\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(m')$ 所对应的射影空间之间的有理映射而得到的态射。

由引理 2.2，该商限制后给出一个局部平凡商 $q_U\colon Y^{U-vs}_{\min} \to Y^{U-vs}\mathrm{min}/U$，其中 $Y^{U-vs}\mathrm{min}/U$是 $\mathbb{P}(W)^{U-vs}_{\min}/U$ 的一个闭子概形。必要时将 m替换为更大的倍数后（使自然映射 $\mathrm{Sym}^m H^0(Y,\mathcal{L}) \to H^0(Y,\mathcal{L}^m)$ 满射），闭浸入 $Y \to \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}(W)\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(m))^\vee)$ 经由 $\mathbb{P}(H^0(Y,\mathcal{L}^m)^\vee)$ 分解。此外，复合映射 $H^0(\mathbb{P}(W)\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(m))^U \hookrightarrow H^0(\mathbb{P}(W)\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(m)) \to H^0(Y,\mathcal{L}^m)$ 经由子空间 $H^0(Y,\mathcal{L}^m)^U \subset H^0(Y,\mathcal{L}^m)$ 分解。由此可知，复合映射 $Y^{U-vs}\mathrm{min}/U \to \mathbb{P}(W)^{U-vs}_{\min}/U \to \mathbb{P}((H^0(\mathbb{P}(W)\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(m))^U)^\vee)$ 经由射影空间 $\mathbb{P}((H^0(Y,\mathcal{L}^m)^U)^\vee)$ 分解，因此 q_U适合放入如下形式的图中

$$\begin{array}{ccc} Y^{U-vs}_{\min} & \longrightarrow & \mathbb{P}(H^0(Y,\mathcal{L}^m)^\vee) \\ \downarrow{\scriptstyle q_U} & & \downarrow{\scriptstyle H^0(Y,\mathcal{L}^m)^U \subset H^0(Y,\mathcal{L}^m)} \\ Y^{U-vs}_{\min}/U & \longrightarrow & \mathbb{P}((H^0(Y,\mathcal{L}^m)^U)^\vee) \end{array}$$

其水平箭头由局部闭浸入给出。至此，定理第一部分的证明完成。

现在，定理第二部分的证明归结为对 L 的剩余作用应用约化GIT。令 Q 为 $Y^{U-vs}_{\min}/U$ 在 $\mathbb{P}((H^0(Y,\mathcal{L}^m)^U)^\vee)$ 中的闭包，并赋予 Q 由 $\mathbb{P}((H^0(Y,\mathcal{L}^m)^U)^\vee)$ 的 $\mathcal{O}(1)$ 经限制得到的非常 ample 线性化 $\mathcal{L}_Q$。取足够大的 $s > 0$，使得有限生成分次代数 $R(Q,\mathcal{L}_Q^s)^L = \bigoplus_{d\geq 0} H^0(Q,\mathcal{L}_Q^{sd})^L$ 由次数 1 的元素生成，并且自然态射

$$\mathrm{Sym}^r H^0(Y,\mathcal{L}^m)^U \longrightarrow H^0(Q,\mathcal{L}_Q^r) \longrightarrow 0$$

对所有 $r \geq s$ 都是满射。根据约化GIT的标准结果，映射

$$q_L : Q \dashrightarrow Q /\!\!/ L = \mathrm{Proj} R(Q,\mathcal{L}_Q^s)^L \subset \mathbb{P}((H^0(Q,\mathcal{L}_Q^s)^L)^\vee)$$

由包含 $R(Q,\mathcal{L}_Q^s)^L \subset R(Q,\mathcal{L}_Q^s)$ 诱导的映射限制后给出开稳定轨迹 $Q^{L-s}(\mathcal{L}_Q)$ 的几何 L-商。如有必要增大 s，上述态射便导出满射 $H^0(Y,\mathcal{L}^{rm})^U \to H^0(Q,\mathcal{L}_Q^r)$。由于对约化群 L 取不变量是正合的，因而诱导出满射 $(H^0(Y,\mathcal{L}^{rm})^U)^L = H^0(Y,\mathcal{L}^{rm})^H \to H^0(Q,\mathcal{L}_Q^r)^L$，故有一个闭浸入 $\mathbb{P}((H^0(Q,\mathcal{L}_Q^s)^L)^\vee) \to \mathbb{P}((H^0(Y,\mathcal{L}^{sm})^H)^\vee)$，使得复合映射 $Q /\!\!/ L \to \mathbb{P}((H^0(Y,\mathcal{L}^{sm})^H)^\vee)$ 纳入下图：

$$\begin{array}{ccc} Y^{U-vs}_{\min} & \longrightarrow & \mathbb{P}(H^0(Y,\mathcal{L}^{sm})^\vee) \\ \downarrow{\scriptstyle q_U} & & \\ Y^{U-vs}_{\min}/U & & \downarrow{\scriptstyle H^0(\mathcal{L}^{sm})^H \subset H^0(\mathcal{L}^{sm})} \\ \downarrow{\scriptstyle q_L} & & \\ Q /\!\!/ \lambda(\mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \mathbb{P}((H^0(Y,\mathcal{L}^{sm})^H)^\vee) \end{array}$$

鉴于引理 2.1 和 2.2，尚需证明局部闭子概形$q_U(Y^{H-vs_{\text{最小}}})$包含于 Q 的开稳定轨迹 $Q^{L-s}(\mathcal{L}_Q)$中；也就是说，对于每个点

$y \in Y^{H-vs}$至少，点 $q_U(y)$ 关于 Q 上剩余 L-作用及线性化 $\mathcal{L}_Q$ 是稳定的。但这由 [16, 定理 2.28] 的第一条断言即可推出。□

4.2. $SL(V)$ 的抛物子群。这里介绍在对抛物子群$P \subset SL(V)$ 在射影概形 Y 上的作用进行分阶段取商程序时所需的记号。

设 $\lambda\colon \mathbb{G}_m \to SL(V)$ 是一个一参数子群。固定基 $\{v_1, \dots, v_N\}$，使其对角化 $\lambda(\mathbb{G}_m)$ 的作用，其权为 $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_N$。令 $\ell = \ell(\lambda)$ 为 λ 的不同权的个数，令 $\beta_1 > \cdots > \beta_\ell$ 为这些不同的权，并设权 β_i 出现 m_i 次。

Let

$$P = P(\lambda) = \left\{ g \in SL(V) : \lim_{t\to 0} \lambda(t) g \lambda(t)^{-1} \text{ exists in } SL(V) \right\} = U \rtimes L$$

为与 λ 相关联的 $SL(V)$ 的抛物子群，其幺幂根基为 $U = U(\lambda)$，Levi 因子为 $L = L(\lambda)$。如 [16, 第 4.2], 节所述，群 P、U 和 L 可以用分块上三角矩阵（相对于基 $\{v_1, \dots, v_N\}$ 定义）明确描述如下：

$$\text{(i) } P = \left\{ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,\ell-1} & A_{1,\ell} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2,\ell-1} & A_{2,\ell} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{\ell-1,\ell-1} & A_{\ell-1,\ell} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{\ell,\ell} \end{pmatrix} \in SL(V) : A_{ij} \in \mathbb{C}^{m_i \times m_j} \right\}.$$

(ii) $L = \{A \in P : $对所有 $1 \leq i < j \leq \ell$，$A_{ij} = 0$ 由 P 中所有分块对角矩阵组成。

(iii) L 的中心 $T = Z(L)$ 为

$$T = \left\{ \operatorname{diag}(t_1 I_{m_1}, \dots, t_\ell I_{m_\ell}) : t_i \in \mathbb{G}_m,\ \prod_{i=1}^{\ell} t_i = 1 \right\} \cong \mathbb{G}_m^{\ell-1}.$$

(iv) L 的半单部分为

$$R = \{\operatorname{diag}(A_{11}, \dots, A_{\ell,\ell}) \in L : \text{each } A_{ii} \in SL(m_i, \mathbb{C})\}.$$

(v) 对所有 $1 \leq i \leq \ell\}$，$U = \{A \in P\colon A_{ii} = I_{m_i}$。

ˆ 一参数子群 λ 为幺幂根基 U 定级。设 $H := U \rtimes R \subset P$ 且 $H := H \rtimes T = U \rtimes (R \times T)$。存在满射 $R \to L/T$ 和 $H \to P/T$，二者的核均为有限核。由于 GIT稳定性不受有限群作用的影响，通过作用 ˆ 由 P 取商，等价于通过 H 的作用取商。

根据 [16, 定义 4.6], ，我们引入以下记号。

(vi) For each $1 \leq i < \ell$, set $m_{>i} = \sum_{j>i} m_j$, $m_{\leq i} = \sum_{j\leq i} m_j$,

$$\beta_{>i} = \frac{\sum_{j>i} \beta_j m_j}{m_{>i}} \quad \text{and} \quad \beta_{\leq i} = \frac{\sum_{j\leq i} \beta_j m_j}{m_{\leq i}}.$$

我们通过设定来定义 $T = Z(L)$的1PS $\lambda^{(i)}$ 和 $\lambda^{[i]}$

$$\lambda^{(i)}(t) := \operatorname{diag}(t^{\beta_1} I_{m_1}, \dots, t^{\beta_i} I_{m_i}, t^{\beta_{>i}} I_{m_{>i}}), \quad \lambda^{[i]}(t) = \operatorname{diag}(t^{\beta_{\leq i}} I_{m_{\leq i}}, t^{\beta_{>i}} I_{m_{>i}}).$$

(vii) 令 $U^{[i]}$ 为抛物子群 $P^{[i]} := P(\lambda^{[i]}) \supset P$的幺幂根基：

$$U^{[i]} = \{A \in U : \text{for all } p < q, A_{pq} = 0 \text{ if } q \leq i \text{ or } p > i\}.$$

它按1PS $\lambda^{[i]}$ 分级，并且是 P中的正规子群。

(viii) 令 $U^{(i)}$ 为抛物子群 $P(\lambda^{(i)}) \supset P$的幺幂根基；它按1PS $\lambda^{(i)}$ 分级，并且是 P中的正规子群。

(ix) 令 $P_{(i)} := U^{(i)} \rtimes L^{(i)} \subset P$，其中

$$L^{(i)} = \begin{cases} \{A \in L : A_{jj} = I_{m_j} \text{ if } j > i\} & \text{if } i < \ell - 1, \\ L & \text{if } i = \ell - 1. \end{cases}$$

我们将连续商记为 $L_i := L^{(i)}/L^{(i-1)}$, $U_i := U_{(i)}/U^{(i-1)}$和$P_i := P_{(i)}/P^{(i-1)}$。

(x) 令 $H^{(i)} := U^{(i)} \rtimes R^{(i)} \subset P_{(i)}$，其中

$$R^{(i)} = \begin{cases} \{A \in R : A_{jj} = I_{m_j} \text{ if } j > i\} & \text{if } i < \ell - 1, \\ R & \text{if } i = \ell - 1. \end{cases}$$

令 $R_i := R^{(i)}/R^{(i-1)}$ 和 $H_i := H^{(i)}/H^{(i-1)} = U_i \rtimes R_i$。

(xi) 令 $T^{(i)} = \prod_{j \le i} \lambda^{(j)}(\mathbb{G}_m) = \prod_{j \le i} \lambda^{[j]}(\mathbb{G}_m) \subset T$，并设 $\hat{}H^{(i)} := H^{(i)} \rtimes T_{(i)}$。

(xii) 对每个 $j \le i$，令 $\lambda_j^{[i]}$ 为由以下复合给出的长度为 2 的一参数子群

$$\lambda_j^{[i]} : \mathbb{G}_m \xrightarrow{\lambda^{[i]}} P \longrightarrow P/P^{(j-1)},$$

注意，对所有 i，$\lambda^{[i]} = \lambda_1^{[i]}$。

（xiii）作为上述内容的一个特例，对每个 i，令 $\lambda_i = \lambda_i^{[i]}$。相应的抛物 $P(\lambda_i)$ 的幺幂根基同构于 U_i，且 λ_i 对 U_i 分级。令 $\hat{}H_i := \hat{}H^{(i)}/\hat{}H^{(i-1)} \cong H_i \rtimes \lambda_i(\mathbb{G}_m) = U_i \rtimes (R_i \times \lambda_i(\mathbb{G}_m))$。

$\hat{}$设 $\mathcal{Q}_i$ 是一个由 H_i 作用的射影概形，并带有非常 ample 线性化 $\mathcal{L}_i$。$\hat{}$群 H_i 的特征群是一维的，由一个与对 H_i 的幺幂根基 U_i 作分级的一参数子群 $\lambda_i = \lambda_i^{[i]}$ 对偶的特征 χ_i 生成；将 $\mathcal{L}_i$ 按 χ_i 的某个倍数 $\epsilon_i\chi_i$ 扭曲，相当于将 $\lambda_i(\mathbb{G}_m)$-权各自平移 ϵ_i。因此，$\hat{}$通过对适当的 ϵ_i 按 $\epsilon_i\chi_i$ 扭曲，我们总能确保非常 ample H_i- 线性化是适配的；请注意，按这样的特征扭曲不会影响 $\mathcal{Q}_i$ 中哪些点属于轨迹 $\mathcal{Q}_i(\lambda_i)_{\min}$ 或 $Z(\mathcal{Q}_i, \lambda_i)_{\min}$。

5. Proof of the Main Result

我们现在准备开始定理 1.1 的证明。设 n, d 为正整数，设 V 为维数为 $n+1 < \dim V$ 的复向量空间。另外假设 $d > \dim V - n$ 且 $d \notin \left\{\frac{\dim V - n - 1 + i}{n+1-i} : i = 1, \dots, n\right\}$。设 $\underline{\Phi} = (\Phi_0, \dots, \Phi_n)$ 为 $\mathbb{P}(V)$ 的子概形的希尔伯特多项式元组，其中 $\Phi_i(t) = \frac{d}{i!}t^i + O(t^{i-1})$ 对每个 $i = 0, 1, \dots, n$。

5.1. 约化为抛物作用。如第3.2节所述，我们希望构造群 $G = SL(V)$ 在子概形 $\mathcal{S}' \subset \prod_{i=0}^n \mathcal{H}_i \times \prod_{j=0}^n \mathrm{Gr}_j$ 上的作用的范畴商。固定一个分解

$$V = W \oplus \mathbb{C}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}v_n$$

其中 $W \subset V$是余维为 n的子空间。对每个 $i = 0, 1, \dots, n$，令 $Z^i = W \oplus \bigoplus_{j \le i} \mathbb{C}v_j$。令 p_0为 $\prod_{i=0}^n \mathrm{Gr}_i$ 中对应于（$Z^0, \dots, Z^n$）的点，并令 $P = \mathrm{Stab}_G(p_0)$ 为保持旗 $Z^0 \subset \cdots \subset Z^n$的 G 抛物子群。按照~~~

5.2. 抛物作用的线性化。此后，我们将 $\mathcal{S}_0'$ 视为 $\mathcal{H}$ 的一个局部闭 P-不变子概形，其定义方式显而易见：$=\prod_{i=0}^n \mathcal{H}_i$。对于每个 $i=0,\ldots,n$，令

$$\Psi_i : \mathrm{Hilb}(\mathbb{P}(V),\Phi_i) \to \mathrm{Ch}_i := \mathrm{Chow}_{i,d}(\mathbb{P}(V))$$

为相应的 Hilbert–Chow 态射（参见第 2.2 节）。令

$$\Psi = \prod_{i=0}^n \Psi_i : \mathcal{H} \to \mathrm{Ch} := \prod_{i=0}^n \mathrm{Ch}_i$$

为 Ψ_i的乘积。给定一个正整数元组 $\underline{a}=(a_0,\ldots,a_n)$，令 $\mathcal{L}^{\underline{a}}{}_{\mathrm{Ch}} := \boxtimes_{i=0}^n \mathcal{L}^{a_i}{}_{\mathrm{Ch}_i}$，其中 $\mathcal{L}_{\mathrm{Ch}_i}$ 是 Chow 概形 Ch_i上的 Chow 线性化。

沿用第 4.2 节的记号，我们有 $R_1 = R^{(1)} = SL(W)$。我们选取 $\underline{a}$ 为形式 $\underline{a}=(a_0 m, m,\ldots,m)$，其中整数 $m>0$ 和 $a_0>0$充分大；选取 m使得每个 $\mathcal{L}^m_{\mathrm{Ch}_i}$ 都非常 ample，并根据以下结果选取 a_0'（其中约化群 K 取为 $R^{(1)}=SL(W)$）：

引理 5.1. 设约化群 K 作用于射影概形的乘积 $\prod_{i=0}^n Y_i$上，其中每个 Y_i 都配有一个非常 ample 的 K-线性化 $\mathcal{L}_i$。那么存在一个正整数 $a'>0$，使得对于所有 $a_0>a'$，对每个点 $p=(p_0,\ldots,p_n)\in\prod_{i=0}^n Y_i$，若 p_0相对于线性化 $\mathcal{L}_0$ 是 K-稳定的，则 p 相对于线性化 $\mathcal{L}_0^{a_0}\boxtimes\mathcal{L}_1\boxtimes\cdots\boxtimes\mathcal{L}_n$是 K-稳定的。

证明。通过利用每个 $\mathcal{L}_i$ 将 Y_i 嵌入射影空间，我们可以假设每个 Y_i 都是一个射影空间 $\mathbb{P}(W_i)$。引理现在可由 [31, 命题 1.7.3.1] 轻易推出。□

5.3. 上层稳定子与权。固定整数 $\beta_1>0>\beta_2>\cdots>\beta_{n+1}$，使得$\beta_1$ 维数 $W+\sum_{i=2}^{n+1}\beta_i=0$。[7] 定义一个一参数子群 $\lambda:\ \mathbb{G}_m\to SL(V)$，令

$$\lambda(t)\cdot v = \begin{cases} t^{\beta_1} v & \text{if } v\in W,\\ t^{\beta_{i+1}} v & \text{if } v=v_i.\end{cases}$$

注意，$P=P(\lambda)$，并且 λ 对抛物子群 P的幺幂根基进行分级。利用这个 λ，按照第 4.2 节定义一参数子群 $\lambda^{[1]}$、.....、$\lambda^{[n]}$ 等。一参数子群 $\lambda^{[i]}$ 的权空间分解为 $V=Z^{i-1}\oplus V^{i-1}$，其中 $V^j=\bigoplus_{k>j}\mathbb{C}v_k$；$Z^{i-1}$ 中的向量具有 $\lambda^{[i]}$-权$\beta_{\le i}$，而 V^{i-1} 中的向量具有 $\lambda^{[i]}$-权 $\beta_{>i}$。

固定 p $\mathcal{S}_0'$ 中的一个点，它对应于一个超平面可容许旗 $(X^0,X^1,\ldots,X^n)$，其中 $X^i=X^n\cap\mathbb{P}(Z^i)$ 且 $\langle X^i\rangle=\mathbb{P}(Z^i)=\mathbb{P}\left(W\oplus\bigoplus_{j\le i}\mathbb{C}v_j\right)$ 对所有 i 均成立。我们引入以下记号：对所有 $1\le i\le j\le n$，令 $V^{ij}=\bigoplus_{k=i}^j\mathbb{C}v_k$。我们还设 $p^{[i]}(x):=\lim_{t\to0}\lambda^{[i]}(t)\cdot x$，其中 $x\in\mathcal{H}$ 是一个点。

引理 5.2. 以下陈述成立：

(1) For each $i=1,\ldots,n$, the point $p^{[i]}(p)\in\mathcal{H}$ is given by the flag

$$p^{[i]}(p)=(X^0,\ldots,X^{i-1},J(X^{i-1},\mathbb{P}(V^{ii})),J(X^{i-1},\mathbb{P}(V^{i,i+1})),\ldots,J(X^{i-1},\mathbb{P}(V^{in}))).$$

(2) For all $j\le i$ we have $p^{[j]}(p^{[i]}(p))=p^{[j]}(p)$.

证明. $\lambda^{[i]}$ 逐点固定子概形 $X^0,\ldots,X^{i-1}$。另一方面，由于每个$X^j\subset\mathbb{P}(Z^j)$ 都是非退化的，对每个 $j\ge i$，投影 $X^j\dashrightarrow\mathbb{P}(V^{ij})$ 都是支配的。由引理 2.8 即得第一个断言。对于第二个断言，注意到$Z^{j-1}\cap V^{ik}=0$ 对所有 $k\ge i$ 均成立，因此

$$J(X^{i-1},\mathbb{P}(V^{ik}))\cap\mathbb{P}(Z^{j-1})=X^{i-1}\cap\mathbb{P}(Z^{j-1})=X^{j-1}.$$

于是，第二个断言可由再次应用引理 2.8 得出。□

引理 5.3. 对所有 $i=1,\ldots,n$，我们有 $\mathrm{Stab}_{U^{[i]}}(p^{[i]}(p))=\{e\}$。

[7] 在本文中，β_i 的具体选取并不重要；重要的是它们满足给定的约束。

证明。若 $k \geq i$，那么，由幂幺群 $U^{[i]}$ 诱导且保持 $J(X^{i-1}, \mathbb{P}(V^{i,k}))$ 的 $\mathbb{P}(V)$ 的任意射影自同构都必须保持 $\mathbb{P}(V^{i,k})$；这一点可通过考察射影切空间的维数看出：$\mathbb{P}(V^{i,k})$ 中各点的射影切空间等于整个 $\mathbb{P}(V)$，而 $J(X^{i-1}, \mathbb{P}(V^{i,k}))$ 中不在 $\mathbb{P}(V^{i,k})$ 上的点，其射影切空间的维数为 $(i-1)+(k-i)+1 = k <$ 维数 $\mathbb{P}(V)$。

因此，$u = (A_{pq})_{p,q=1}^{n+1} \in \mathrm{Stab}_{U^{[i]}}(p^{[i]}(p))$ 的任意元素都必须保持 $\mathbb{P}(V^{i,i}) \ldots, \mathbb{P}(V^{i,n})$ 中的每一个不变。这意味着，如果 $p \neq q$，那么只要 $p \leq i$ 且 $q > i$，就有 $A_{pq} = 0$。另一方面，$u \in U^{[i]}$，因此对于 $p \neq q$，若 $q \leq i$ 或 $p > i$，则有 $A_{pq} = 0$。因此，$u = e$ 必须是单位矩阵。□

引理 5.4. 对于每个 $i = 1, \ldots, n$，希尔伯特–芒福德权重 $\mu^{\mathcal{L}_{\mathrm{Ch}}^a}(\Psi(p), \lambda^{[i]})$ 对所有点 $p \in \mathcal{S}_0'$ 都相同。

证明. 首先，由于 $d >$ 维数 $V -$ 维数 W，由于 $\beta_2, \ldots, \beta_{n+1} < 0$，且由于 $d \notin \left\{ \text{维数} \frac{W+i-1}{n+1-i} : i = 1, \ldots, n \right\}$，那么对于每个 $i = 1, \ldots, n$，我们有

$$\beta_{>i} + d\beta_{\leq i} = \left(\frac{1}{n+1-i} - \frac{d}{\dim W + i - 1} \right) (\beta_{i+1} + \cdots + \beta_{n+1}) \neq 0.$$

因此，引理 2.10 适用。

取 $W^\vee$ 的一组基 $y_1, \ldots, y_M$，并令 $x_i \in V^\vee$ 与 v_i 对偶。按照第 4.2 节，写作 $\lambda^{[i]}(t) = \mathrm{diag}(t^{\beta_{\leq i}} I_{m_{\leq i}}, t^{\beta_{>i}} I_{m_{>i}})$。对于一个点 $p \in \mathcal{S}_0'$，相差一个正的标量倍数，我们有

$$\mu^{\mathcal{L}_{\mathrm{Ch}}^a}(\Psi(p), \lambda^{[i]}) = a_0 \mu^{\mathcal{L}_{\mathrm{Ch}_1}}(\Psi_0(X^0), \lambda^{[i]}) + \sum_{j=1}^{i-1} \mu^{\mathcal{L}_{\mathrm{Ch}_j}}(\Psi_j(X^j), \lambda^{[i]}) + \sum_{j=i}^{n} \mu^{\mathcal{L}_{\mathrm{Ch}_j}}(\Psi_j(J(X^{i-1}, \mathbb{P}(V^{ij}))), \lambda^{[i]}).$$

来自 X^j（其中 $j < i$）的贡献 $\mu^{\mathcal{L}_{\mathrm{Ch}_j}}(\Psi_j(X^j), \lambda^{[i]})$ 等于 $\beta_{\leq i} d(j+1)$，由引理2.6可知。对于来自连接 $J_j = J(X^{i-1}, \mathbb{P}(V^{ij}))$（其中$j \geq i$）的贡献，$J_j \subset \mathbb{P}(V)$ 的齐次理想由下式给出

$$\mathbb{I}_{\mathbb{P}(V)}(J_j) = \langle \mathbb{I}_{\mathbb{P}(Z_j)}(J_j), x_{j+1}, \ldots, x_n \rangle,$$

因此，$J_j \subset \mathbb{P}(V)$ 的齐次坐标环与 $J_j \subset \mathbb{P}(Z^j)$ 的齐次坐标环相同。应用引理 2.10 可得

$$\mu^{\mathcal{L}_{\mathrm{Ch}_j}}(\Psi_j(J_j), \lambda^{[i]}) = \begin{cases} \beta_{>i}(j-i+1) & \text{if } j > 2i-1, \\ \beta_{\leq i} di & \text{if } j < 2i-1, \\ i(\beta_{>i} + d\beta_{\leq i}) & \text{if } j = 2i-1. \end{cases}$$

现在可以清楚地看出，$\mu^{\mathcal{L}_{\mathrm{Ch}}^a}(\Psi(p), \lambda^{[i]})$ 的所得表达式对所有点$p \in \mathcal{S}_0'$都相同。□

5.4. 分阶段取商程序。现在我们按照 [16, 构造 4.20]，分阶段构造 $\mathcal{S}_0'$ 的商。经过第 i阶段后，我们将已对群 $\hat{}H^{(i)} = H^{(i)} \rtimes T^{(i)}$取商；从第 $i-1$ 阶段进入第 i 阶段时，则通过对群 $H_i = H_i \rtimes \lambda_i(\mathbb{G}_m)$的 $\hat{}$ 作用取商。经过 n 个阶段后，我们将得到对第 5.1 节中抛物群 $\hat{}H^{(n)} = P$的作用的商。

构造 5.5。基础步骤：由于 Ψ 限制在 $\mathcal{S}_0' \xrightarrow{\simeq} \Psi(\mathcal{S}_0')$上是一个同构，我们可以将 $\mathcal{S}_0' \subset$ 视为 Ch。设 $\mathcal{Q}_1$ 为通过取$\mathcal{S}_0'$ 在 Ch 中的闭包而得到的射影概形。对于某个 $s_0 > 0$，$GL(V)$-线性化$\mathcal{L}^{s_0 a}_{\mathrm{Ch}}$ 是非常 ample；令 $\mathcal{L}_1$ 为该线性化在 $\mathcal{Q}_1$上的限制，并用适当的特征 $\epsilon_1 \chi_1$ 对其进行扭曲（以确保相应的 $\hat{}H_1$-线性化是适配的）。

假设我们可以应用定理 4.3，则存在一个闭浸入 $\mathcal{Q}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}((H^0(\mathcal{Q}_1, \mathcal{L}_1^{s_1}))^{\vee})$，其中某个整数为 $s_1 > 0$，且该商由投影 $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{Q}_1, \mathcal{L}_1^{s_1})^{\vee}) \dashrightarrow$ 所诱导

$\mathbb{P}((H^0(\mathcal{Q}_1,\mathcal{L}_1^{s_1})^{\vee}H_1)^{\vee})$。令 $\mathcal{Q}_2$ 为 $(\mathcal{Q}_1)^{H_1-vs}_{\text{最小}}/^{\wedge}H_1$ 在 $\mathbb{P}((H^0(\mathcal{Q}_1,\mathcal{L}_1^{s_1})^{\vee}H_1)^{\vee})$ 中的闭包，并令 $\mathcal{L}_2$ 为 $\mathcal{O}(1)$ 在 $\mathbb{P}((H^0(\mathcal{Q}_1,\mathcal{L}_1^{s_1})^{H_1})^{\vee})$ 上限制到 $\mathcal{Q}_2$ 后再经过适当特征 $\epsilon_2\chi_2$ 扭曲所得，以确保适配性；则 $\mathcal{L}_2$ 是 $P/^{\wedge}H^{(1)}$ 的剩余作用下的非常 ample 线性化。

归纳步骤：假设 $i \leq n-1$，并假设我们已经构造了如下形式的连续商q_j

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{Q}_j)^{\hat{H}_j-vs}_{\min} & \xrightarrow{\quad q_j \quad} & (\mathcal{Q}_j)^{H_j-vs}_{\min}/^{\wedge}H_j \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{Q}_j & \dashrightarrow^{q_j} & \mathcal{Q}_{j+1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{P}(H^0(\mathcal{Q}_j,\mathcal{L}_j^{s_j})^{\vee}) & \underset{H^0(\mathcal{Q}_j,\mathcal{L}_j^{s_j})^{\hat{H}_j}\subset H^0(\mathcal{Q}_j,\mathcal{L}_j^{s_j})}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}((H^0(\mathcal{Q}_j,\mathcal{L}_j^{s_j})^{\hat{H}_j})^{\vee})
\end{array}$$

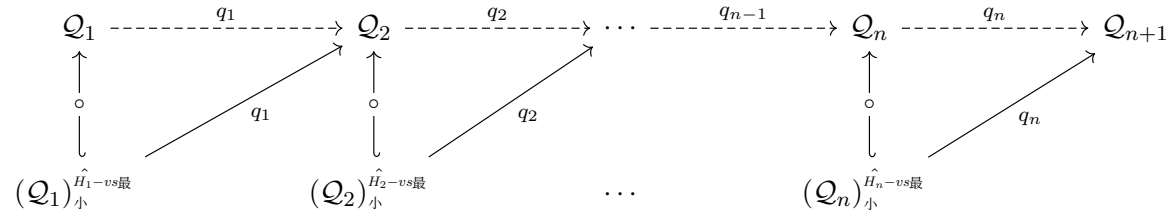
对于每个 $j=1$、.....、i，其中顶部水平箭头是一个几何 H_j-商，其中$^{\wedge}\mathcal{Q}_{j+1}$是局部闭子概形 $(\mathcal{Q}_j)^{H_j-vs}{}_{\min}/^{\wedge}H_j \subset \mathbb{P}((H^0(\mathcal{Q}_j,\mathcal{L}_j^{s_j})^{\wedge H_j})^{\vee})$的闭包，并且每个 $\mathcal{Q}_j$ 都赋有非常 ample 线性化 $\mathcal{L}_j$；该线性化通过将 $\mathbb{P}((H^0(\mathcal{Q}_{j-1},\mathcal{L}_{j-1}^{s_{j-1}})^{H_{j-1}})^{\vee})$ 的 $\mathcal{O}(1)$ 限制到 $\mathcal{Q}_j$，再用 H_j 的适当特征 $^{\wedge}\epsilon_j\chi_j$ 进行扭曲而得到，以确保适配性。

射影概形 $\mathcal{Q}_{i+1}$ 上的非常 ample 可逆层 $\mathcal{L}_{i+1}$ 带有针对 $P/^{\wedge}H^{(i)}$的剩余作用的线性化，特别是针对$^{\wedge}H_{i+1}$的线性化。通过用形式为 $\epsilon_{i+1}\chi_{i+1}$的 H_{i+1} 特征$^{\wedge}{}^{\wedge}$扭曲 $\mathcal{L}_{i+1}$，我们可以确保该 H_{i+1}-线性化是适配的。再次假设可以应用定理 4.3，我们得到如下形式的图（其中 $s_{i+1}>0$为某个整数）：

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{Q}_{i+1})^{\hat{H}_{i+1}-vs\text{分}}_{\text{钟}} & \xrightarrow{\quad q_{i+1} \quad} & (\mathcal{Q}_{i+1})^{H_{i+1}-vs}_{\min}/^{\wedge}H_{i+1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{Q}_{i+1} & \dashrightarrow^{q_{i+1}} & \mathcal{Q}_{i+2} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{P}(H^0(\mathcal{Q}_{i+1},\mathcal{L}_{i+1}^{s_{i+1}})^{\vee}) & \underset{H^0(\mathcal{Q}_{i+1},\mathcal{L}_{i+1}^{s_{i+1}})^{\hat{H}_{i+1}}\subset H^0(\mathcal{Q}_{i+1},\mathcal{L}}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}((H^0(\mathcal{Q}_{i+1},\mathcal{L}_{i+1}^{s_{i+1}})^{\hat{H}_{i+1}})^{\vee})
\end{array}$$

$^{\wedge}$其中，顶部的水平箭头是一个几何 H_{i+1}-商，且 $\mathcal{Q}_{i+2}$ 是局部闭子概形 $(\mathcal{Q}_{i+1})^{H_{i+1}-vs}{}_{\min}/^{\wedge}H_{i+1} \subset \mathbb{P}((H^0(\mathcal{Q}_{i+1},\mathcal{L}_{i+1}^{s_{i+1}})^{\wedge H_{i+1}})^{\vee})$ 的闭包。通过$^{\wedge}$将 $\mathcal{L}_{i+2}$ 定义为 $\mathbb{P}((H^0(\mathcal{Q}_{i+1},\mathcal{L}_{i+1}^{s_{i+1}})^{H_{i+1}})^{\vee})$ 的 $\mathcal{O}(1)$ 在 $\mathcal{Q}_{i+2}$ 上的限制，并将其按适当的特征 $\epsilon_{i+2}\chi_{i+2}$ 扭曲以确保适配性，构造 5.5 的归纳步骤便完成了。 ■

假设定理 4.3 在每个阶段都可以应用，经过 n 个阶段后，构造 5.5 终止，并得到如下形式的图：



其中，对每个 i，限制 $q_i : (\mathcal{Q}_i)^{H_i-vs\text{ 最小}} \to q_i((\mathcal{Q}_i)^{H_i-vs\text{ 最小}}) = (\mathcal{Q}_i)^{H_i-vs\text{ 最小}}/H_i$ 是一个几何 H_i-商。若对每个 $i = 1, \ldots..., n$，定义

$$q_{(i)} := q_i \circ q_{i-1} \circ \cdots \circ q_1 : \mathcal{Q}_1 \dashrightarrow \mathcal{Q}_{i+1},$$

并且若通过设定 $\mathcal{Q}_{(1)} := (\mathcal{Q}_1)^{H_1-vs\text{ 最小}}$，对 $i = 1, \ldots..., n$ 归纳定义开子概形 $\mathcal{Q}_{(i)} \subset \mathcal{Q}_1$，并对 $i > 1$ 设定

$$\mathcal{Q}_{(i)} := \mathcal{Q}_{(i-1)} \cap q_{(i-1)}^{-1}((\mathcal{Q}_i)^{\hat{H}_i-vs}_{\min}),$$

于是，对每个 i，态射 $q_{(i)} : \mathcal{Q}_{(i)} \to q_{(i)}(\mathcal{Q}_{(i)}) = \mathcal{Q}_{(i)}/H^{(i)} \subset \mathcal{Q}_{i+1}$ 都是定义良好的几何 $H^{(i)}$-商。

5.5. 参数空间包含在商的定义域中。假设我们可以完整地实施构造 5.5，从而存在一个几何 P-商 $\mathcal{Q}_{(n)}/P$。为了证明 $\mathcal{S}_0'$ 存在几何 P-商，只需证明 $\mathcal{S}_0'$ 是 $\mathcal{Q}_{(n)}$ 的一个开子概形。我们将通过归纳论证证明，对于每个 $i = 1$，都有 $\mathcal{S}_0'$ 是 $\mathcal{Q}_{(i)}$ 的一个开子概形，....., n。

固定 $\mathcal{S}_0'$ 中对应于超平面可容许旗 flag $(X^0, X^1, \ldots, X^n)$ 的一个点 p，其中 $X^i = X^n \cap \mathbb{P}(Z^i)$ 且 $\langle X^i \rangle = \mathbb{P}(Z^i) = \mathbb{P}\left(W \oplus \bigoplus_{j \le i} \mathbb{C}v_j\right)$ 对所有 i 均成立。令 $x = \Psi(p) \in \mathcal{Q}_1$。

我们引入以下记号：

(i) 如上，令 $\mathcal{Q}_{(1)} := (\mathcal{Q}_1)^{H_1-vs\text{ 最小}}$。(ii) 对所有 $i = 1, \ldots, n$，令 $\mathcal{Q}_1^{[i]} := \mathcal{Q}_1(\lambda^{[i]})_{\min}$，并令 $Z_1^{[i]} := Z(\mathcal{Q}_1, \lambda^{[i]})_{\min}$。(iii) 将 $p^{[i]}$ 记为 $\lambda^{[i]}$-收缩映射 $p^{[i]} : \mathcal{Q}_1^{[i]} \to Z_1^{[i]}$。

引理 5.6. 以下陈述成立：

(1) 点 x 属于 $\mathcal{Q}_{(1)}$，且对所有 $i \ge 1$，都有 $x \in \mathcal{Q}_1^{[i]}$；(2) 对所有 $i > 1$，都有 $p^{[i]}(x) \in \mathcal{Q}_{(1)}$；(3) 对所有 $i \ge 1$，都有 $p^{[i]}(x) \in Z_1^{[i]}$。

特别地，对于由 L_1 线性化的作用 $H_1 \circlearrowright \mathcal{Q}_1$，定理 4.3 适用。

证明。我们先考虑第三个陈述。由引理 5.4 可知，相对于线性化 L_1 和一参数子群 $\lambda^{[i]}$，$p^{[i]}(x)$ 的 Hilbert–Mumford 权在稠密开子概形 $\mathcal{S}_0' \equiv \Psi(\mathcal{S}_0') \subset \mathcal{Q}_1$ 上保持不变。这个共同的权必定是最小权，因此 $p^{[i]}(x) \in Z_1^{[i]}$，如所述。

现在我们来证明点 $x, p^{[2]}(x) \ldots, p^{[n]}(x)$ 属于 $\mathcal{Q}_{(1)} = (\mathcal{Q}_1)^{H_1-vs\text{ 最小}}$；为此需要对所有元素 $y \in \{x, p^{[2]}(x) \ldots, p^{[n]}(x)\}$ 证明以下结论：

(i) $y \in \mathcal{Q}_1^{[1]} = \mathcal{Q}_1(\lambda^{[1]})_{\min}$，即 $p^{[1]}(y)$ 具有最小 $\lambda^{[1]}$-权。(ii) $p^{[1]}(y)$ 的 $U^{[1]}$-稳定子是平凡的，并且在 $Z_1^{[1]}$ 上受 $R_1 = R^{(1)} = SL(W)$ 作用时是稳定的。(iii) y 不包含在 $Z_1^{[1]}$ 的 $U^{[1]}$-扫掠中。

然而，由引理 5.2，对于所有这样的点 y，我们有

$$p^{[1]}(y) = p^{[1]}(x) = \Psi(X^0, J(X^0, \mathbb{P}(V^{1,1})), \ldots, J(X^0, \mathbb{P}(V^{1,n}))).$$

我们已经证明该点具有最小的 $\lambda^{[1]}$-权，因此每个这样的点 y 都在 $\mathcal{Q}_1^{[1]}$ 中。由引理 5.1，$X^0 \subset \mathbb{P}(Z^0)$ 的乔稳定性连同命题 2.5 蕴含点 $p^{[1]}(x)$ 关于 $\mathcal{L}_1$ 是 $SL(W)$-稳定的。引理 5.3 蕴含 $\mathrm{Stab}_{U^{[1]}}(p^{[1]}(x))$ 是平凡的。最后，$U^{[1]}Z_1^{[1]}$ 中的点被收缩映射 $p^{[1]}$ 固定，而没有点 $y \in \{x, p^{[2]}(x) \dots, p^{[n]}(x)\}$ 被 $p^{[1]}$ 固定，因为对应于这样点 y 的旗的 1 维分量（即 X^1）与 $p^{[1]}(y)$ 的不相符。因此每个这样的点 y 不能位于 $U^{[1]}Z_1^{[1]}$ 中。这就完成了引理的证明。□

现在我们考虑构造 5.5 的归纳步骤。设 $1 \leq i < \ell - 1 = n$，并假设我们已构造出形如 q_j 的连续商

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{Q}_j)^{\hat{H}_j\text{-}vs\text{-}\mathrm{极}}_{\text{小}} & \xrightarrow{\quad q_j \quad} & (\mathcal{Q}_j)^{H_j\text{-}vs\ \text{最}}_{\text{小}}/\hat{H}_j \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{Q}_j & \xrightarrow{\quad q_j \quad} & \mathcal{Q}_{j+1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{P}(H^0(\mathcal{Q}_j, \mathcal{L}_j^{s_j})^\vee) & \xrightarrow[H^0(\mathcal{Q}_j, \mathcal{L}_j^{s_j})^{\hat{H}_j} \subset H^0(\mathcal{Q}_j, \mathcal{L}_j^{s_j})]{} & \mathbb{P}((H^0(\mathcal{Q}_j, \mathcal{L}_j^{s_j})^{\hat{H}_j})^\vee)
\end{array}$$

对于每个 $j = 1, \dots, i$，其中顶部水平箭头是一个几何 H_j-商，且其中$\mathcal{Q}_{j+1}$ 是局部闭子概形的闭包

$$(\mathcal{Q}_j)^{\hat{H}_j\text{-}vs}_{\min}/\hat{H}_j \subset \mathbb{P}((H^0(\mathcal{Q}_j, \mathcal{L}_j^{s_j})^{\hat{H}_j})^\vee),$$

并且每个 $\mathcal{Q}_j$ 均赋予非常 ample 线性化 $\mathcal{L}_j$，该线性化通过将$\hat{}\ \mathbb{P}((H^0(\mathcal{Q}_{j-1}, \mathcal{L}_{j-1}^{s_{j-1}})^{H_{j-1}})^\vee)$ 的 $\mathcal{O}(1)$ 限制到 $\mathcal{Q}_j$ 上，再通过 H_j 的适当特征 $\hat{}\epsilon_j\chi_j$ 进行扭曲而得到，以确保适配性。

如构造 5.5 所示，射影概形$\mathcal{Q}_{i+1}$ 上的非常 ample 可逆层 $\mathcal{L}_{i+1}$ 带有关于 $P/\hat{}H^{(i)}$ 的剩余作用的线性化，特别是关于 $\hat{}\ H_{i+1}$ 的线性化。如有必要，通过用形如 $\epsilon_{i+1}\chi_{i+1}$ 的 H_{i+1} 的特征对 $\mathcal{L}_{i+1}$ 进行 $\hat{}$ 扭曲，我们可以假设该 H_{i+1}-线性化是适配的。

对于归纳步骤，我们需要证明定理 4.3 可以应用于 H_{i+1} 的这一 $\hat{}$ 线性化作用。为此，我们引入以下记号：

(i) 对于 $j = 1, \dots, i$，令

$$q_{(j)} := q_j \circ q_{j-1} \circ \cdots \circ q_1 : \mathcal{Q}_1 \dashrightarrow \mathcal{Q}_{j+1}.$$

(ii) 我们归纳地定义开子概形 $\mathcal{Q}_{(j)} \subset \mathcal{Q}_1$，其中 $j = 1, \dots, i+1$，令$\hat{}\mathcal{Q}_{(1)} := (\mathcal{Q}_1)^{H_1\text{-}vs}_{\min}$（同前），并令 $j > 1$

$$\mathcal{Q}_{(j)} := \mathcal{Q}_{(j-1)} \cap q_{(j-1)}^{-1}((\mathcal{Q}_j)^{\hat{H}_j\text{-}vs}_{\min}),$$

从而对于每个 j，态射 $q_{(j)} : \mathcal{Q}_{(j)} \to q_{(j)}(\mathcal{Q}_{(j)}) = \mathcal{Q}_{(j)}/\hat{}H^{(j)} \subset \mathcal{Q}_{j+1}$ 是一个定义良好的几何 $\hat{}H^{(j)}$-商。

(iii) 对于所有 $k = 1, \dots, i+1$ 以及所有 $k \leq j < \ell = n+1$，令 $\mathcal{Q}_k^{[j]} = \mathcal{Q}_k(\lambda_k^{[j]})_{\min}$，令$Z_k^{[j]} = Z(\mathcal{Q}_k, \lambda_k^{[j]})_{\min}$，并令 $p_k^{[j]} : \mathcal{Q}_k^{[j]} \to Z_k^{[j]}$ 为 $\lambda_k^{[j]}$ 下的收缩映射。作为上述情形的特例，我们继续用 $p^{[j]} = p_1^{[j]}$ 表示 $\mathcal{Q}_1$ 上的 $\lambda_1^{[j]} = \lambda^{[j]}$ 收缩映射。

(iv) 令 $\mathcal{Q}_{(0)} := \mathcal{Q}_1$，并令 $q_{(0)} := \mathrm{id}_{\mathcal{Q}_1}$。

引理 5.7. 对于每个 $j = 0, 1, \dots, i$，以下陈述成立：

(1) $x \in \mathcal{Q}_{(j+1)}$，且对所有 $k \geq j+1$，都有 $q_{(j)}(x) \in \mathcal{Q}_{j+1}^{[k]}$；

(2) 对所有 $j+1 < k \leq n$，都有 $p^{[k]}(x) = p_1^{[k]}(x) \in \mathcal{Q}_{(j+1)}$；以及 (3) 对所有 $j+1 \leq k \leq n$，$q_{(j)}(p^{[k]}(x)) \in Z_{j+1}^{[k]}$。

证明。我们对 j 作归纳法，注意到基础情形即为引理 5.6。假设对于每个 $j = 0, \ldots, r-1$（其中 $r \leq i$），引理 5.7 的断言均成立。首先证明，对于每个 $k \geq r+1$，点 $q_{(r)}(p^{[k]}(x)) = p_{r+1}^{[k]}(q_{(r)}(x))$ 都包含于 $Z_{r+1}^{[k]}$ 中。对于每个 $k \geq r+1$，由归纳假设可知 $q_{(r-1)}(p^{[k]}(x)) = p_r^{[k]}(q_{(r-1)}(x)) \in Z_r^{[k]} \cap (\mathcal{Q}_r)^{H_r - vs}\min$。特别地，我们有 $Z_r^{[k]} \cap (\mathcal{Q}_r)^{H_r - vs}\min \neq \emptyset$。根据构造 5.5，映射 $q_r : \mathcal{Q}_r \dashrightarrow \mathcal{Q}_{r+1}$ 由与包含映射 $B := H^0(\mathcal{Q}_r, \mathcal{L}_r^{s_r}) \subset A := H^0(\mathcal{Q}_r, \mathcal{L}_r^{s_r})$ 相对应的投影给出，而 $\mathcal{L}_{r+1}$ 与特征 $-\epsilon_{r+1}\chi_{r+1}$ 的扭曲经 q_r 拉回后得到 $\mathcal{L}_r^{s_r}$。因此，[16, 引理 5.4] 的证明中给出的论证同样适用于映射 $q_r : \mathcal{Q}_r \dashrightarrow \mathcal{Q}_{r+1}$。也就是说，$Z_r^{[k]} \cap (\mathcal{Q}_r)^{H_r - vs}\min \neq \emptyset$ 意味着 $\lambda_r^{[k]}(\mathbb{G}_m)$ 在 A 和 B 上作用时的最大权相同，因此我们可以为 A 选取一组基 $\mathcal{B}_A$，其形式为

$$\mathcal{B}_A = \{\alpha_\iota, \alpha'_\kappa, \beta_\mu, \beta'_\nu\},$$

其中，α_ι、α'_κ 是 B 的一组基，而 α_ι、β_μ 是 A 中 $\lambda_r^{[k]}(\mathbb{G}_m)$ 的极大权重空间的一组基。相对于这组基，态射 q_r 对应于投影到 α_ι、α'_κ 坐标，而 $\mathcal{Q}_r$ 上的收缩映射 $p_r^{[k]}$ 对应于投影到 α_ι、β_μ 坐标。令 $z := q_{(r-1)}(p^{[k]}(x))$，由于 $z \in Z_r^{[k]}$，z 的所有 α'_κ、β'_ν 坐标均为零；又由于 $z \in (\mathcal{Q}_r)^{H_r - vs}\min$，$z$ 至少有一个 α_ι 坐标非零。将 q_r 应用于 z（即投影到 α_ι 坐标），可得点 $q_r(z) = q_{(r)}(p^{[k]}(x)) \in \mathcal{Q}_{r+1}$ 被 $\lambda_{r+1}^{[k]}$ 固定，且其所有坐标都属于极大权重空间，因此 $z \in Z_{r+1}^{[k]}$。因此，对于所有 $k \geq r+1$，

$$p_{r+1}^{[k]}(q_{(r)}(x)) = q_{(r)}(p^{[k]}(x)) = q_r(q_{(r-1)}(p^{[k]}(x))) \in Z_{r+1}^{[k]}.$$

因此，这意味着对于所有 $k \geq r+1$，$q_{(r)}(x) \in \mathcal{Q}_{r+1}^{[k]}$。

现在我们来证明，点 $x, p^{[r+2]}(x) \ldots, p^{[n]}(x)$ 位于 $\mathcal{Q}_{(r+1)}$ 中，也就是说，它们在 $q_{(r)}$ 下的像属于 $(\mathcal{Q}_{r+1})^{H_{r+1} - vs}\min$。注意，$H_{r+1}$ 的 Levi 子群 R_{r+1} 的半单部分 R_{r+1} 是平凡的，因此 R_{r+1}-稳定性是空泛的。因此，只需对任意点 $y \in \{q_{(r)}(x) q_{(r)}(p^{[r+2]}(x)) \ldots, q_{(r)}(p^{[n]}(x))\}$ 证明以下结论：

(i) $p_{r+1}^{[r+1]}(y) \in Z_{r+1}^{[r+1]}$。(ii) $p_{r+1}^{[r+1]}(y)$ 具有平凡的 U_{r+1}-稳定子。(iii) y 不包含在 $Z_{r+1}^{[r+1]}$ 的 U_{r+1}-扫掠中。

由引理 5.2 可知，对于所有这类点 y

$$p_{r+1}^{[r+1]}(y) = p_{r+1}^{[r+1]}(q_{(r)}(x)) = q_{(r)}(p^{[r+1]}(x)),$$

它由该构形的 $H^{(r)}$-轨道表示

$$p^{[r+1]}(p) = (X^0, \ldots, X^r, J(X^r, \mathbb{P}(V^{r+1,r+1})), \ldots, J(X^r, \mathbb{P}(V^{r+1,n}))).$$

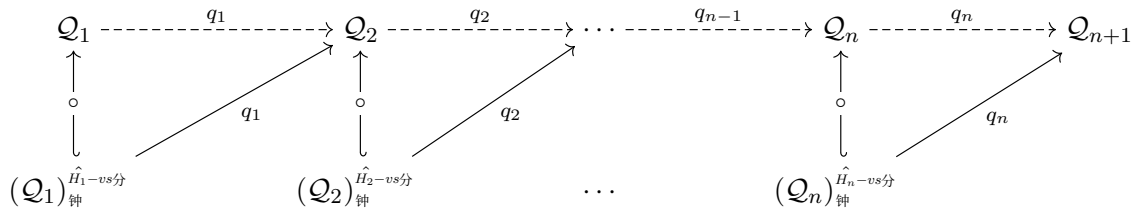
由 $\mathbb{P}(V)$ 的子概形构成。我们已经证明 $q_{(r)}(p^{[r+1]}(x))$ 属于 $Z_{r+1}^{[r+1]}$。结合引理 5.3 与 [16, 引理 5.12],, $\mathrm{Stab}_{U^{[r+1]}}(p^{[r+1]}(p))$ 的平凡性意味着 $q_{(r)}(p^{[r+1]}(x))$ 具有平凡的 U_{r+1}-稳定子。$q_{(r)}(\mathcal{Q}_{(r)}) \cap U_{r+1} Z_{r+1}^{[r+1]}$ 中的任意点在收缩映射 $p_{r+1}^{[r+1]}$ 下都是固定的。然而，y 中的点都不被 $p_{r+1}^{[r+1]}$ 固定，因为它们均由构形表示，其维数 $(r+1)$ 分量是非奇异代数簇 X^{r+1}；而 $p_{r+1}^{[r+1]}(y)$ 则由维数 $(r+1)$ 中的奇异代数簇 $J(X^r, \mathbb{P}(V^{r+1,\ r+1}))$ 表示。

因此，这些点无一能属于 $U_{r+1} Z_{r+1}^{[r+1]}$。由此可知，每个 $y \in \{q_{(r)}(x) q_{(r)}(p^{[r+2]}(x)) \ldots, q_{(r)}(p^{[n]}(x))\}$ 都属于 $(\mathcal{Q}_{r+1})^{H_{r+1} - vs}$ 最小。至此，归纳步骤完成，进而引理的证明也告结束。□

推论 5.8。对于由 $\mathcal{L}_{i+1}$ 线性化的作用 $H_{i+1} \circlearrowright \mathcal{Q}_{i+1}$，定理 4.3 适用。证明：这立即由引理 5.7 得出。□

对 i 进行归纳可知，构造 5.5 可以完整地完成，从而得到一个如下形式的图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Q}_1 \arrow[r, dashed, "q_1"] & \mathcal{Q}_2 \arrow[r, dashed, "q_2"] & \cdots \arrow[r, dashed, "q_{n-1}"] & \mathcal{Q}_n \arrow[r, dashed, "q_n"] & \mathcal{Q}_{n+1} \\
(\mathcal{Q}_1)^{\hat{H}_1-vs分}_{钟} \arrow[u, hook, "\circ"] \arrow[ur, "q_1"'] & (\mathcal{Q}_2)^{\hat{H}_2-vs分}_{钟} \arrow[u, hook, "\circ"] \arrow[ur, "q_2"'] & \cdots & (\mathcal{Q}_n)^{\hat{H}_n-vs分}_{钟} \arrow[u, hook, "\circ"] \arrow[ur, "q_n"'] &
\end{tikzcd}$$



其中，对于每个 i，限制态射 $q_i : (\mathcal{Q}_i)^{H_i-vs}{}_{\min} \to q_i((\mathcal{Q}_i)^{H_i-vs}{}_{\min}) = (\mathcal{Q}_i)^{H_i-vs}{}_{\min}/\hat{H}_i$ 是一个几何 H_i-商。与

$$q_{(n)} := q_n \circ q_{n-1} \circ \cdots \circ q_1 : \mathcal{Q}_1 \dashrightarrow \mathcal{Q}_{n+1}$$

and

$$\mathcal{Q}_{(n)} := \mathcal{Q}_{(n-1)} \cap q_{(n-1)}^{-1}((\mathcal{Q}_n)^{\hat{H}_n-vs}_{\min}),$$

态射 $q_{(n)}$： $\mathcal{Q}_{(n)} \to q_{(n)}(\mathcal{Q}_{(n)}) \subset \mathcal{Q}_{n+1}$ 是 $\mathcal{Q}_{(n)}$ 的一个定义良好的几何 $\hat{H}^{(n)}$-商。若 x 是 $\mathcal{S}'_0 \equiv \Psi(\mathcal{S}'_0)$ 的一个点，通过反复应用引理 5.7，可得 $x \in \mathcal{Q}_{(n)}$。

5.6. 完成证明。通过将所有内容结合起来，我们完成定理 1.1 的证明。

定理 1.1 的证明。根据推论 3.9，模函子 $\mathcal{F}^{\mathbb{P}(V)}{}_{n,\ d,\ \underline{\Phi}}$ 存在粗模空间，当且仅当概形 $\mathcal{S}'$ 存在关于 $SL(V)$ 作用的范畴商，且该商是轨道空间态射。根据第 5.1 节，这等价于 $\mathcal{S}'_0 \equiv \Psi(\mathcal{S}'_0)$ 存在关于 P 作用的范畴商，且该商是轨道空间态射。

概形 $\mathcal{Q}_{(n)}$。然而，根据第 4.2 节的记号，存在满射 $R \to \widehat{L/T}$ 和 $H \to P/T$，且二者的核均为有限核。这些有限核的剩余作用并不构成问题，因为有限群在准射影概形上的作用总是存在准射影几何商（例如参见 [31, 注记 2.1.1 之后的段落1]）。因此，概形 $\mathcal{Q}_{(n)}$存在准射影几何 P-商。

存在 $\Psi(\mathcal{S}'_0) \subset \mathcal{Q}_{(n)}$ 作为 $\mathcal{Q}_{(1)}$ 的开子概形的包含关系。随后可通过限制几何 P-商 $q_{(n)}$： $\mathcal{Q}_{(n)} \to q_{(n)}(\mathcal{Q}_{(n)}) \subset \mathcal{Q}_{n+1}$，得到 $\mathcal{S}'_0$ 的几何 P-商；具体而言，对 U_i-商（它们都是 Zariski 局部平凡的）应用引理 2.2，并对 $\lambda_i(\mathbb{G}_m)$ 及 $R_1 = SL(W)$ 的商（它们均具有几何商的性质）应用引理 2.1。特别地， $\mathcal{S}'_0 \equiv \Psi(\mathcal{S}'_0)$ 存在一个关于 P 作用的范畴商，且该商是一个轨道空间态射。定理 1.1 的证明至此完成。□

6. 扩展主要结果

最后，我们简要讨论定理 1.1 可以通过几种方式加以扩展。

6.1. 点的加权。上文给出的构造将 X^0 视为线性子空间 $Z^0 \subset \mathbb{P}(V)$ 中无序的一组点。我们可以考虑一种修改后的设定，将 X^0 改为 Z^0 中有序的 d 个点，只需用 d 重积 $\mathbb{P}(V)^{\times d}$ 替换希尔伯特概形 Hilb($\mathbb{P}(V)$ d)（它由 $\mathbb{P}(V)$ 中长度为 d 的零维子概形组成）即可。我们可以不采用 Chow 线性化 $\mathcal{L}_{\mathrm{Ch}_0}$，而改用线性化

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(\underline{w}) := \boxtimes_{i=1}^{d} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(w_i), \quad \underline{w} = (w_1, \ldots, w_d) \in (\mathbb{Z}^{>0})^d.$$

关于给定分解 $V = W \oplus W'$ 所产生的 $SL(W)$ 诱导作用，由 [10, 定理 11.1] 可知，如果 $p = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{P}(W)^{\times n} \subset \mathbb{P}(V)^{\times n}$

那么， p 关于线性化 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(\underline{w})$ 是 $SL(W)$-(半)稳定的，当且仅当对于所有真线性子空间 $Z \subset \mathbb{P}(W)$，

$$\frac{\sum_{p_i \in Z} w_i}{\sum_{i=1}^{d} w_i} < (\leq) \frac{\dim Z + 1}{\dim W} \tag{6.1}$$

应用与证明定理 1.1 时所用的相同分阶段取商构造，并采用这一修改后的设置，可得到（对于每个 $\underline{w} \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^d$）一个粗模空间，其参数化对象为所有非退化、非奇异且稳定的超平面可容许旗 $(\underline{X}, \underline{Z})$，以及对 X^0 中各点的标记；相应的稳定性概念由如下严格条件给出：带标记的点在 $X^0 \subset \mathbb{P}(Z^0)$ 中满足不等式 6.1。

6.2. 省略这些点。定理 1.1 的另一种变体可通过参数化如下形式的旗来构造：

$$X^1 \subset \cdots \subset X^{n-1} \subset X^n, \quad Z^1 \subset \cdots \subset Z^{n-1} \subset Z^n = V \tag{6.2}$$

其中 $X^1 \subset \mathbb{P}(Z^1)$ 是一条光滑、非退化、连通的射影曲线，现在还要求它相对于 Hilb($\mathbb{P}(Z^1)$ Φ_1) 上的 Chow 线性化是 GIT稳定的（其余所有子簇 $X^i \subset \mathbb{P}(Z^i)$ 均为非退化、光滑且连通的）。与上文一样，该构造沿用与证明定理 1.1 时所用的分阶段取商构造非常相似的思路；要取商的轨迹 $\mathcal{S}'$ 是 $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i \times \prod_{j=1}^{n} \mathrm{Gr}^j$ 中以类似方式定义的局部闭子概形，而群 P 取为保持旗 $Z^1 \subset \cdots \subset Z^n = V$ 的 $SL(V)$ 的抛物子群。在分阶段取商程序的基础步骤中（参见引理 5.6），利用 $X^1 \subset \mathbb{P}(Z^1)$ 的 GIT稳定性来论证点 $p^{[1]}(y)$、$y \in \{x, p^{[2]}(x) \ldots\ldots p^{[n-1]}(x)\}$ 均相对于约化线性代数群 R_1 稳定；除此之外，分阶段取商构造与上一节相同。

根据 [8], 的结果，已知若 $g \geq 2$ 且 $d > 2(2g-2)$，则 $\mathbb{P}^{d-g}$ 中次数为 d 、亏格为 g 的光滑非退化连通射影曲线是 Chow 稳定的；特别地，相应曲线希尔伯特概形中的 Chow 稳定轨迹非空。要求 X^1 的次数和亏格满足这些约束，也就对能够纳入形如 (6.2) 的旗中的高维 X^i 施加了限制。事实上，固定 $k \in \{2, \ldots, n\}$ 后，由 Hirzebruch–Riemann–Roch 定理（应用于 [12, 例 18.3.5]）可知，若 $H \subset X^k$ 是超平面类，则

$$\begin{aligned} 1 - g &= \chi(X^1, \mathcal{O}_{X^1}) \\ &= \int_{X^k} \left(\prod_{i=1}^{k-1} (1 - \exp(-H)) \cap \mathrm{Td}(X^k) \right) \\ &= \int_{X^k} \left(H^{k-1} \cdot \left(-\frac{K_{X^k}}{2} \right) - \frac{k-1}{2} H^k \right) \\ &= -\frac{k-1}{2} \cdot d - \frac{K_{X^k} \cdot X^1}{2}. \end{aligned}$$

这里 $\mathrm{Td}(X^k) = 1 - \frac{1}{2} K_{X^k} + \cdots$ 是 X^k 的托德类。不等式 $d > 2(2g-2)$ 意味着，若 $g \geq 2$ ，则

$$K_{X^k} \cdot X^1 < -(2k-3)(2g-2) \leq 0.$$

特别地，每个典范除子 K_{X^k} 都不可能是数值有效或数值平凡的。

基于与情形 $k = 1$ 中基本相同的理由，也可以得到定理 1.1 的一个变体，为每个 $k \geq 1$ 构造一个粗模空间，用以参数化如下形式的旗的射影等价类

$$X^k \subset \cdots \subset X^{n-1} \subset X^n, \quad Z^k \subset \cdots \subset Z^{n-1} \subset Z^n = V$$

其中，此时的 $X^k \subset \mathbb{P}(Z^k)$ 是 $\mathbb{P}(Z^k)$ 中光滑、非退化的 Chow 稳定子簇。

References

[1] Angéniol, B. *Familles de Cycles Algébriques – Schéma de Chow*, 第 896 *Lecture Notes in Math-* 卷。Springer。 *ematics* 1981
[2] Arbarello, E. Cornalba M. Griffiths P. and Harris J. *Geometry of Algebraic Curves:* , , , , , , 。 *Volume I*
数学科学基础丛书（数学综合研究系列）。Springer，1985年。[3] Aubin, T. ´紧致凯勒流形上的 Monge–Amp ` ´ ¨ ´ *Bull. Sci.* ère 型方程。, *Math. 102* 1 1978 63 95
（），–。[4] Baldwin, E., and Swinarski, D. 稳定映射模空间的几何不变理论构造。 *Int. Math. Res. Not. 2008*（2008年）。[5] Bérczi, G., Doran, B., Hawes, T., and Kirwan, F. 通过线性代数群作用构造代数簇的商。在 *Handbook of Group Actions, Volume IV*、L. Ji、A. Papadopoulos 和 S.-T. Yau 编， *Advanced Lectures in Mathematics* 第 41 卷。波士顿国际出版社，2018年，第 331–446 页。[6] Bérczi, G., Doran, B., Hawes, T., and Kirwan, F. 分次幂幺群的不变理论及其应用。 *Journal of Topology 11*, 3（2018年），826–855。[7] Bérczi, G., and Kirwan *arXiv*, F. 非约化商的 *preprint arXiv:1909.11495* 2019
矩映射与上同调。（）。[8] Bini, G., Felici, F., Melo, M., and Viviani,
F. *Geometric Invariant Theory for Polarized Curves*。数学讲义 2122。Springer，2014年。[9] Chow, W.-L., and Van der Waerden, B. 论代数几何。IX: ¨关于代数簇的伴随形式与代数系统。 *Mathematische Annalen* *113* 1 1937 692 704 ，（），–。
[10] Dolgachev, I. *Lectures on Invariant Theory*, 第 296 *London Mathematical Society Lecture Note* 卷。剑桥大学出 *Series* 2003
版社，。[11] Donaldson, S. 数量曲率与射影嵌入，I。 *J. Diff. Geom. 59*，3（2001年），479–522。[12] Fulton,
W. *Intersection Theory*，第 3 版。数学及其边界领域成果丛书。Springer，2013年。[13] Gieseker, D. 一般型曲面的全局模空间。 *Inventiones Mathematicae 43*（1977年），233–282。[14] Gieseker,
D. *Lectures on Moduli of Curves*。塔塔基础研究所数学与物理讲义。Springer-Verlag，1982年。[15] Harris,
J. *Algebraic Geometry: A First Course*， *Graduate Texts in Mathematics*第 133 卷。Springer科学与商业传媒，1992年。[16] Hoskins, V., and Jackson, J. 抛物子群的商与不稳定对象的模空间。
arXiv preprint arXiv:2111.07429（2021年）。[17] Lazarsfeld, R., and Mustat,ă, M. 与线性系相关的凸体。
Annales Scientifiquesde l'École Normale Supérieure 42，5（2009年），783–835。[18] Milne,
J. *Algebraic Groups: The Theory of Group Schemes of Finite Type over a Field*,
*Cambridge Studies in Advanced Mathematics*第 170 卷。剑桥大学出版社，2017年。[19] Miranda, R. P1 上魏尔斯特拉斯纤维化的模。 *Math. Ann. 255*（1981年），379–394。[20] Morrison, I. 单值曲面的射影稳定性。 *Inv. Math. 56*，3（1980年），269–304。[21] Mukai, S. *An Introduction to Invariants and Moduli*，第 81 *Cambridge Studies in Advanced* 卷。剑桥大学出 *Mathematics* 2003
版社，。[22] Mumford, D. 射影簇的稳定性。 *L'Enseignement Mathématique 23*（1977年）。[23] Mumford, D., Fogarty and Kirwan 34 *Ergebnisse der*, J., *Mathematik und ihrer Grenzgebiete (A Series of Modern Surveys in Mathematics)* 1994
F. *Geometric Invariant Theory*，第 卷。Springer，。[24] Mumford, D., Fogarty, J., and Kirwan,
F. *Geometric Invariant Theory*，第三版。数学及其边界领域成果丛书。Springer-Verlag，1994年。[25] Newstead,
P. *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*。Narosa出版社，2012年。[26] Popov, V., and Vinberg, E. 不变理论。在 *Algebraic Geometry IV: Linear Algebraic Groups*, *Invariant Theory* 1994, 123 278 、A. Parshin 和 I. Shafarevich 编。Springer，第 – 页。[27] Qiao,
Y. *Blow-Ups in Non-Reductive GIT and Moduli Spaces of Unstable Vector Bundles over Curves*。哲学博士论文，牛津大学，2022年。[28] Ross, J. *Instability of Polarised Algebraic Varieties*。博士论文，帝国理工学院、伦敦大学，2003年。[29] Ross, J., and Thomas, R. 关于射影簇稳定性的 Hiobert Mumford 判据研究。 *J. Alg. Geom 16*，2（2007年），201–255。[30] Rydh, D. *Families of Cycles and the Chow Scheme*。博士论文，斯德哥尔摩皇家理工学院，2008年。[31] Schmitt, A. *Geometric Invariant Theory and Decorated Principal Bundles*，第 11 *Zürich Lectures* 卷。欧洲数学会，。 *in Advanced Mathematics* 2008
[32] Viehweg, E. *Quasi-Projective Moduli for Polarized Manifolds*，第 30 *Ergebnisse der Mathematik* 卷。Springer，。 *und ihrer Grenzgebiete* 1995
[33] Yau, S.-T. 关于紧致 K¨ahler 流形的里奇曲率与复 Monge–Amp´ère 方程，I。 *Comm. Pure App. Math. 31*，3（1978年），339–411。

Centro di Ricerca Ennio De Giorgi, Collegio Puteano, Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri, 3, I-56100 PISA*Email address*: george.cooper@sns.it