arXiv:2304.02460v1 [physics.flu-dyn] 5 Apr 2023

# 自由液面气泡的塌陷动力学：重力和黏度的影响

Sangeeth Krishnan[1]†、Baburaj A. Puthenveettil[2]和 E. J. Hopfinger[3]

[1]印度塔塔基础研究院理论科学国际中心，班加罗尔 560 089，印度[2]印度理工学院马德拉斯分校应用力学系，金奈 600 036，印度[2]LEGI-CNRS，格勒诺布尔阿尔卑斯大学，CS40700，38052，格勒诺布尔，法国

（收到日期 xx；修订日期 xx；接受日期 xx）

液体–气体界面处漂浮气泡顶部的薄膜破裂，会导致气泡空腔发生轴对称塌陷。我们基于一系列实验提出了这种空腔塌陷的标度律；实验涉及邦德数（$10^{-3} < Bo \leqslant 1$）和奥内佐格数（$10^{-3} < Oh < 10^{-1}$）范围广泛的气泡，这两个数均以气泡半径 $R$ 为特征长度定义。空腔塌陷是由毛细作用驱动的过程，其对黏度和重力的依赖分别影响空腔边界上的前驱毛细波和气泡的静态形状。塌陷过程的特征是折点的切向速度和法向速度；折点由顶部薄膜破裂后凹形空腔开口与凸形气泡空腔边界相交形成。塌陷期间，切向速度 $U_t$ 保持恒定，且可表示为 $U_t = 4.5\,U_c\mathcal{W}_R$；其中 $U_c$ 为毛细速度，$\mathcal{W}_R\,(Oh,\ Bo) = (1-\sqrt{Oh\mathscr{L}})^{-1/2}$ 为前驱毛细波导致的波阻因子，$\mathscr{L}\,(Bo)$ 则是折点运动的路径修正。折点沿法向的运动，是薄膜破裂后气泡空腔内部气体压力骤降所致的整个空腔向内收缩的一部分。在赤道平面内，该法向速度的标度为 $U_c$；而在空腔底部，则为 $\overline{U}_{nb} = U_c\,(Z_c/R)\ (\mathcal{W}_R/\mathscr{L})$，其中 $Z_c\,(Bo)$ 为静态空腔深度。空腔填充的总容积通量完全由这种收缩贡献，其标度为 $Q_T \simeq 2\pi R Z_c U_c$；并在整个塌陷过程中保持恒定。

关键词：

## 1. 引言

液体-气体界面处的气泡由空腔表征，该空腔上方覆盖球形薄膜，并在圆形边缘处连接，如图1a所示。薄膜破裂后在界面处留下不稳定空腔，该空腔轴对称坍缩并产生高速射流（Woodcock et al. 1953; Kientzler et al. 1954）；图1显示了水-空气界面处气泡破裂的图像序列。这些自由表面气泡的破裂是许多应用中的重要传输机制。从液体表面到周围空气的质量传输在海气交换中具有重要意义

† 通信邮箱：sangeeth.krishnan@icts.res.in

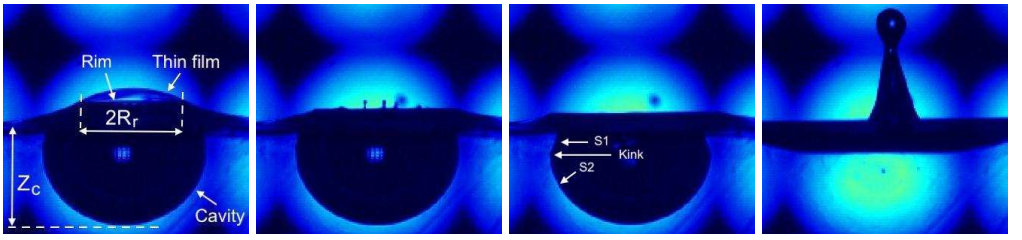



图 1：自由液面气泡塌陷的各个阶段。(a)，水中的静止气泡，半径为 $R \approx 2$mm；(b)，薄膜破裂；(c)，空腔开始塌陷；(d)，自由液面处的射流 (d)。图像之间的时间间隔约为 $10^{-4}$s。

以及病原体的传播（Blanchard 1963; MacIntyre 1972; Spiel 1995; Walls et al. 2015; Joung et al. 2017; Sampath et al. 2019年; Yang et al. 2023）。气泡破裂还与海洋溢油混合中观察到的反向质量传输有关（Feng et al. 2014），并在生物反应器中产生强烈应力区的背景下得到研究（Boulton-Stone & Blake 1993; Walls et al. 2017）。

大多数关于自由表面气泡坍塌的研究都聚焦于喷射动力学。关于喷射，普遍观点是，当奥内佐格数满足 $Oh = \mu/\sqrt{\sigma\rho R} < 0.037$ 时，射流速度 $U_j$ 与毛细速度 $U_c = \sqrt{\sigma/\rho R}$ 成比例（符号定义见表 1），前提是气泡较小，即邦德数满足 $Bo = \rho g R^2/\sigma < 0.1$。然而，对于较大的气泡，当 $Bo > 0.1$ 时，由于重力效应，射流速度可能显著偏离毛细速度 $U_c$（Krishnan et al. 2017；Deike 等人 2018；Ga˜n´an Calvo 2017、2018；Gordillo & Rodr´ıguez-Rodr´ıguez 2019）。Krishnan et al. (2017) 提出的喷流韦伯数标度 $We_j = \rho {U_j}^2 R/\sigma \sim (Z_c/R)^2$, ，通过气泡空腔的静态深度 $Z_c$（见图 1(a)）解释了重力对射流速度的影响，其中 $Z_c$ 是邦德数的函数。自由液面气泡破裂后喷出射流的速度和尺寸，或此类射流破碎后液滴的速度和尺寸，仍未得到充分理解。

喷射出的射流/液滴的速度和尺寸，内在地与自由液面处气泡形成的空腔坍缩动力学有关，但这一过程尚未得到充分研究。已知空腔坍缩速度比射流速度低一个数量级（Krishnan & Puthenveettil 2015）。如图 1 所示的表面气泡空腔塌陷图像，在薄表面膜破裂后，孔洞扩张形成凹边界（从液体一侧观察）S1（图 1c）（Krishnan et al. 2020），并在其与凸形空腔轮廓 S2（图 1c）的交界处形成一个折点。折点以速度 $U_t$ 沿边界切向移动；与此同时，气体压力在空腔开启后下降，过剩的毛细压力使空腔以垂直于边界的速度 $U_n$ 收缩。类似于此前在陡峭重力波（Perlin et al. 1993）和法拉第波（Das & Hopfinger 2008）中观察到的毛细波，会向折点前方传播。这些前驱毛细波的振幅衰减与 $Oh^{1/2}$ 成正比；当达到 $Oh \approx 0.02$ 时，波会完全受到抑制（Krishnan et al. 2017; Gordillo & Rodr´ıguez-Rodr´ıguez2019）。这些波逐渐受到黏性阻尼，从而导致射流速度增加（Ghabache et al. 2014）。

虽然 上述所述的坍缩阶段（如图1所示）已得到充分 ll

识别（MacIntyre 1972；Duchemin 等人 2002；Lee 等人 2011；Brasz 等人 2018），但目前尚无关于坍缩速度及相关质量通量的定量信息，也没有相应的标度律。移动折点具有二维特征，且流动聚焦过程中界面缺乏自上而下的对称性，因此无法使用基于一维 Rayleigh–Plesset 方程的模型；这类模型常用于研究物体撞击后在自由液面形成的空腔（Oguz 与 Prosperetti（1993）；Burton 等人 2005；Bartolo 等人 2006；Bergmann 等人 2006；Duclaux 等人 2007）。尽管研究发现，折点以恒定速度移动，且该速度与毛细速度尺度成正比（Krishnan & Puthenveettil 2015；Krishnan 等 2017；Gordillo & Rodr´ ıguez-Rodr´ıguez 2019），但由于会出现前驱毛细波，且总路径长度取决于 $Bo$，尚不清楚这一速度是否也取决于 $Oh$ 和 $Bo$。此前已有研究探讨前驱毛细波对射流速度的影响（Ghabache 等人 2014；Krishnan 等 2017；Ga˜n´an Calvo 2017；Deike 等人 2018；Ga˜n´an Calvo 2018；Ga˜n´an Calvo & L´opez-Herrera 2021；Gordillo & Rodr´ ıguez-Rodr´ıguez 2019；Blanco–Rodr´ıguez & Gordillo 2021），但这些波对塌陷空腔表面的影响尚未得到探讨。

大多数其他研究（Ga˜n´an Calvo 2017、2018；Ga˜n´an Calvo 和 L´ opez-Herrera 2021；Ismail 等 2018；Lai 等 2018；Blanco–Rodr´ıguez 和 Gordillo 2021）将重点限制在空腔底部一个小区域内的流动聚焦动力学，其中黏度也决定了特征长度尺度。Ga˜n´an Calvo 和 L´opez-Herrera（2021）提出，流动聚焦期间的球平均速度按$W \sim (V_\mu/Oh_L)\psi(Oh, Oh_L, Bo)$标度，其中 $V_\mu = \sigma/\mu$，而 $Oh_L$ 是以流动聚焦时空腔底部的特征长度为基础定义的奥内佐格数；在 $Oh \ll 0.04$的极限下，$W$ 趋于毛细速度 $U_c$ （Ga˜n´an Calvo 2017、2018）。Gordillo 和 Rodr´ ıguez-Rodr´ıguez（2019）以及 Blanco–Rodr´ıguez 和 Gordillo（2021）假设，流动聚焦期间空腔底部的流动纯粹是水平向内的径向流，并采用沿子午中心线布置的垂直汇流点阵列对流动建模；阵列长度由气泡大小以及向折点前方传播的毛细波波长决定。然而，正如我们上文所述并将在后文详细讨论的，流动聚焦区域内既有径向（球面）速度，也有切向速度，而且二者的标度实际上不同。Lai 等（2018）指出，塌陷空腔的形状具有自相似性，呈现 $|t_s - t|^{2/3}$标度，其中 $t_s - t$ 是距奇点的时间， $t_s$ 则是流体在空腔底部汇聚的时刻，这与 Zeff 等（2000）关于法拉第波坍缩的标度相似；然而，这种自相似性仅在邦德数较小（$Bo \ll 0.1$）时才存在，此时没有前驱毛细波。

本文通过详细实验研究自由表面气泡坍塌过程中空腔的动力学特性，并据此获得了描述坍塌持续时间、各种坍塌速度以及坍塌过程中体积通量的标度律。我们表明，前驱毛细波会降低移动折点在切向和法向上的速度。体积通量完全源于空腔壁沿法向收缩，并与空腔深度直接相关 $Z_c$。黏度和重力对空腔塌陷的影响可通过三个参数量化：路径修正 $\mathscr{L}(Bo)$、波阻因子$\mathcal{W}_R(Oh, Bo)$以及空腔长宽比 $Z_c(Bo)/R$。这些空腔塌陷特征对于理解黏度和重力对喷射的影响至关重要。本文组织如下：第2节介绍实验装置和实验条件；第3节讨论空腔塌陷的不同方面，即塌陷空腔壁在切向和法向上的速度，以及空腔塌陷总时间。文中还建立了能够解释重力影响的标度关系

| | $\mu$ | $\rho$ | $\sigma$ | $R$ | $Bo$ | $Oh$ | $t_c$ | $U_c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 毫帕·秒 | 千克·米$^{-3}$ | 牛顿·米$^{-1}$ | mm | | | ms | ms$^{-1}$ |
| 水 | 1.005 | 1000 | 0.072 | 0.175-4.1 | 0.004-2.27 | 0.0019-0.009 | 0.3-30.7 | 0.64-0.13 |
| 乙醇 | 1.144 | 789 | 0.022 | 0.19-1.16 | 0.013-0.47 | 0.008-0.02 | 0.5-7.5 | 0.38-0.16 |
| 2-丙醇 | 2.073 | 781 | 0.018 | 1.46-2.41 | 0.9-2.4 | 0.011-0.014 | 11.6-24.6 | 0.13-0.1 |
| GW48(30℃) | 3.9 | 1115 | 0.068 | 0.42-3.4 | 0.029-1.9 | 0.0076-0.021 | 1.1-25.4 | 0.38-0.13 |
| GW48(20℃) | 5.5 | 1120 | 0.068 | 0.81-1.96 | 0.1-0.62 | 0.014-0.022 | 3-11.1 | 0.27-0.18 |
| GW55 | 8 | 1140 | 0.067 | 0.71-2.3 | 0.08-0.88 | 0.019-0.035 | 2.5-14.4 | 0.29-0.16 |
| GW 68 | 12.414 | 1170 | 0.066 | 0.48-2.3 | 0.04-0.89 | 0.03-0.064 | 1.4-14.7 | 0.34-0.16 |
| GW 72 | 16.616 | 1181 | 0.064 | 0.6-3.6 | 0.063-2.4 | 0.032-0.079 | 2-29.3 | 0.3-0.12 |

表1：实验所用流体的性质及相应的无量纲参数。流体性质 $\sigma$、 $\rho$ 和 $\mu$ 分别为表面张力、密度和黏度。 $g$ 为重力加速度。邦德数 $Bo = \rho g R^2/\sigma$、奥内佐格数 $Oh = \mu/\sqrt{\sigma\rho R}$、毛细时间尺度$t_c = \sqrt{\rho R^3/\sigma}$ 和毛细速度尺度 $U_c = \sqrt{\sigma/\rho R}$。

以及黏度对这些参数的影响。在第 4 节中，将确定与空腔塌陷速度相对应的体积流入量，最后在第 5 节总结。

## 2. 实验条件

实验在两个透明容器中进行，容器的横截面积分别为 $5 \times 5$ cm$^2$ 和3.5 $\times$ 5 cm$^2$, 。容器内盛有多种流体，包括蒸馏水、不同配比的甘油-水混合液（甘油质量分数分别为48%、55%、68%和72%，以下分别称为GW48、GW55、GW68和GW72）、乙醇和2-丙醇。表1列出了这些流体的性质。为避免弯月面效应，容器中所需液体均加至边缘。将不同尺寸的细毛细管连接到恒定排液流量的注射泵，并浸入工作流体中，以产生等效球半径为 $R$的不同气泡。保持较低的排液流量，使气泡处于周期性排放状态（Oguz 与 Prosperetti（1993））。为避免不同毛细管产生的气泡尺寸发生变化，整个实验过程中毛细管的方向保持不变（Doshi 等（2003））。气泡位于自由液面中心。我们使用 La Vision ProHS（帧率为6 19000Hz）和 Photron SA4（帧率为6 100000Hz）相机，对空腔的侧视动力学过程进行高速成像。采用高强度绿色 LED 阵列进行背光照明。图像采集频率满足条件 $t_i < 1/|dU_{abs}/ds|$，其中 $t_i$=1/（帧率），而 $dU_{abs}/ds$ 是空腔沿折点绝对速度的空间梯度。空间分辨率满足 $\Delta Z_i < U_{abs}\ t_{exp}$，其中$\Delta Z_i$ 为每个像素的尺寸， $t_{exp}$ 为曝光时间。成像的最低和最高分辨率分别为 27$\mu$m/pix和3.4$\mu$m/pix。

以下长度测量通过计算图像中相应液-气界面之间的像素数完成。等效球形气泡半径（$R$）是根据毛细管产生的上升气泡图像测得的。沿赤道平面的空腔收缩长度 $D_{ne}$ 和沿垂直面$D_{nb}$的空腔收缩长度，以及锥形空腔的底部半径 $r_b$ （见图 2d），均根据塌陷空腔的瞬时图像随时间测量。每幅图像对应的时间根据拍摄帧率估算，其中零时刻定义为液膜破裂的时刻。空腔塌陷总时间 $t_{bc}$ 为

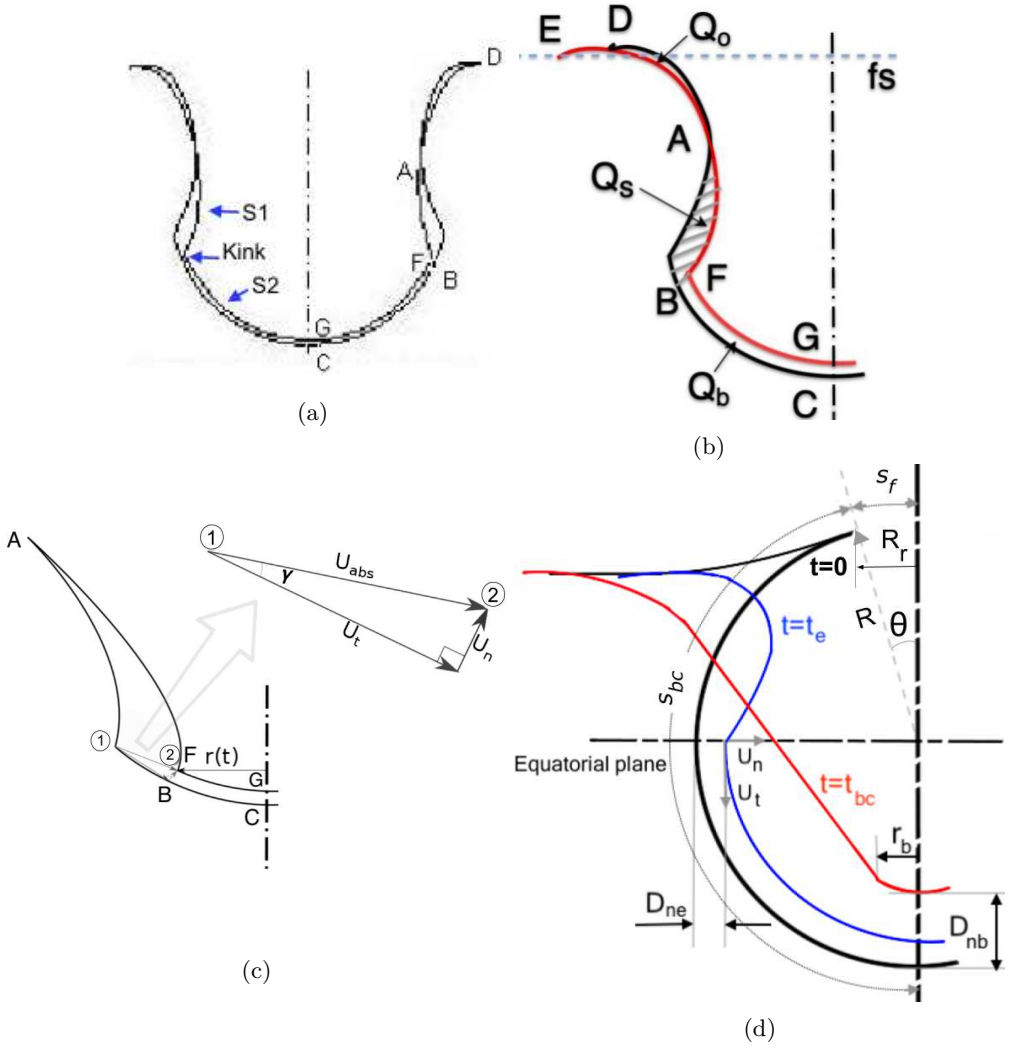



图2：描述空腔塌陷参数和术语的示意图。(a)，从气泡直径为 $R = 0.175$mm的水中实验提取的两个时刻的实际空腔轮廓，显示折点。S1和S2分别表示空腔的凹边界和凸边界（另见图3e）。(b)，由两个连续时刻侧向和底部空腔轮廓之差引起的侧向体积通量 $Q_s$ 和底部体积通量 $Q_b$ 。同理， $Q_o$ 为顶部体积流出通量，估计为自由液面fs处空腔轮廓之差。(c)，两个时刻塌陷空腔轮廓示意图，不同时刻折点位置分别标记为 1○和 2○。折点的绝对速度、切向速度和法向速度显示在相应的矢量三角形中。(d)，后续时刻空腔轮廓示意图。(i) $t = 0$ （黑色）；薄膜破裂时的初始空腔轮廓。(ii) $t = t_e$ （蓝色）；折点到达空腔赤道平面（由水平线表示）时的空腔轮廓，显示赤道空腔收缩量 $D_{ne}$。(iii) $t = t_{bc}$ （红色）；折点到达底部时的空腔轮廓，此时空腔呈截锥形，底部半径为 $r_b$ ，空腔垂直回缩量为 $D_{nb}$。

通过从液膜破裂开始计数图像数量，直至空腔变为圆锥形来测量（见图 2d）。与长度 $D_{ne}$ 和 $D_{nb}$ 对应的时间也以类似方式测量。

通过将折点 $U_{abs}$ 的绝对速度分解为两个相互正交方向上的分量，测量移动折点沿空腔表面切向和法向的速度（$U_t$ 和 $U_n$），如图 2c 所示。通过确定折点在相继时刻的坐标，测量其绝对位移；将绝对位移除以图像间的时间间隔，得到 $U_{abs}$。在整个坍塌持续时间内，通过将绝对速度矢量分解到切向和法向，并求得 $\tan\gamma$，测量角度 $\gamma$（见图 2c）。利用切向位移（$d_t$）随时间变化的多项式拟合（类似于图5插图 (a) 所示），通过对拟合曲线求时间导数，计算 $U_t$（$t$）。同理，根据逐步增加的法向位移估算法向速度 $U_n$。

我们定义了与空腔边界运动相关的三种体积通量：侧向（切向）体积流入 $Q_s$、底部（法向）流入 $Q_b$，以及侧向体积流出通量 $Q_o$，总填充速率为 $Q_T = Q_s + Q_b$。图2b所示的面积 ABF，是折点沿空腔表面移动并向内运动时，其前后两个位置扫过的面积；对应的侧向（切向）体积流入为 $Q_s$。同样，面积 BCGF 是空腔底部区域在法向运动时扫过的面积，对应的体积流入为 $Q_b$。与面积 DA 对应的体积流出通量 $Q_o$，仅针对单个气泡进行了测量。体积测量方法如下：根据图像序列中的噪声水平，采用 Canny 或 Sobel 边缘检测准则，从图像中提取塌陷空腔的边缘。将前后两个轮廓叠加，随时间生成一系列边缘对（见图2a）。对于前后两个轮廓之间的区域，在每个时刻测量各像素的径向距离（$r_p$）和像素总数 $\eta_p$。估算两条边缘之间每个正方形像素所贡献的体积 $2\pi r_p \Delta {Z_i}^2$。对轮廓内的所有像素重复这一过程，并将各像素的体积贡献相加。随后，将累积体积除以两帧之间的时间间隔，得到体积通量。对整个轮廓对序列重复采用相同方法，从而获得随时间变化的体积通量。

## 3. 空腔塌陷

图3展示了低黏度流体（水，$Oh = 0.0055$）中自由液面气泡塌陷各阶段的序列。高黏度流体（GW55，$Oh = 0.034$）中对应的阶段见图4。在两种情况下，都可以看到一个轴对称折点（图3e）从空腔顶部向空腔最底部移动，液体在此汇聚。除了低黏度情况下塌陷速度快得多（图3）之外，还可以看到前驱毛细波在折点前方传播（见图3h中的B）。只有当 $Oh < 0.02$时，我们才会观察到这些毛细波；图3所示的情况正是如此，因此折点的前缘很尖锐，如图3所示。当$Oh > 0.02$时，如图4所示，这些前驱毛细波会被黏性效应完全阻尼，使折点的前缘更为圆钝。如图3和图4所示，折点边缘沿空腔表面移动，而空腔本身则沿垂直于其表面的方向收缩。因此，在流动聚焦至空腔底部之前，折点在任一时刻都具有沿空腔表面切向和法向的速度。我们将在后续章节详细分析这些速度。

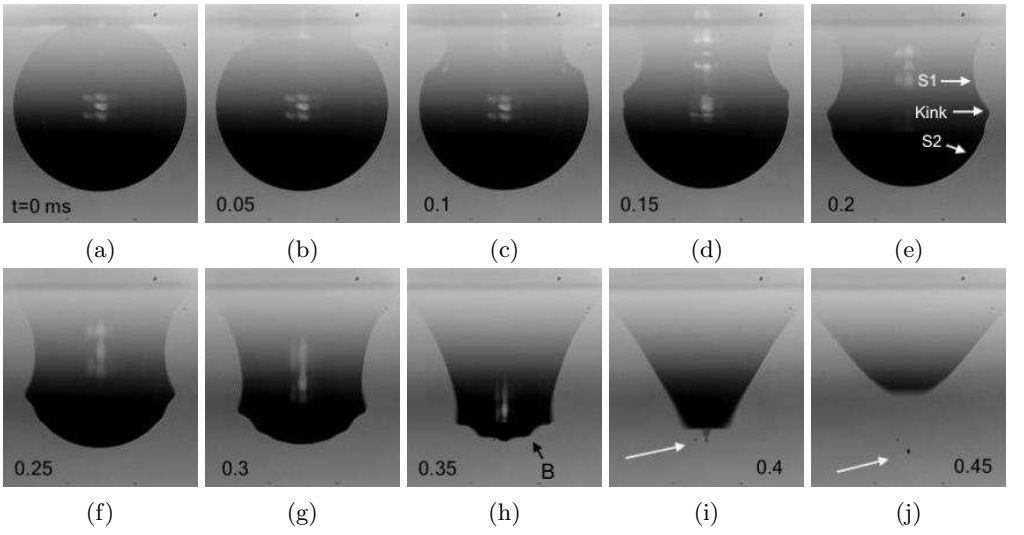



图3：展示低黏度流体中空腔塌陷各阶段的图像序列，可见前驱毛细波。水中的气泡半径为 $R = 0.47$mm（$Bo = 0.03$）（$Oh = 0.0055$）。波聚焦导致的气泡断裂，并形成半径为 $8.6\mu$m的向下气体射流，也可见于（h）至（i）。每幅图像的宽度为0.97 mm。影片1。

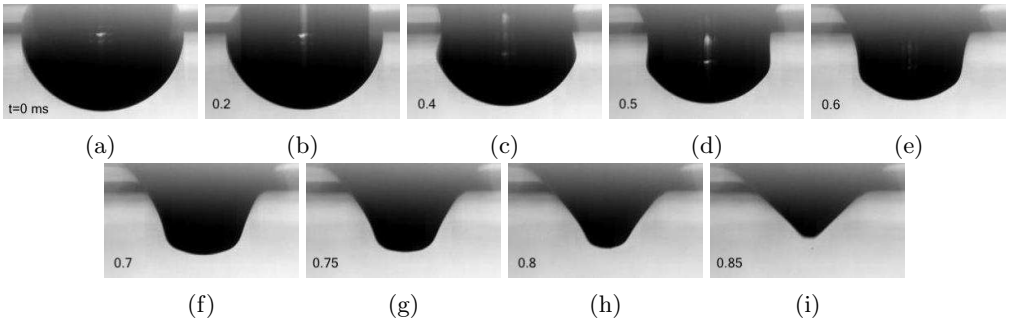



图4：展示高黏度流体（GW55，$Oh = 0.034$）中一个 $R = 0.7$mm气泡（$Bo = 0.08$）所致空腔塌陷各阶段的图像序列，其中没有前驱毛细波。图像宽度为1.7mm。影片2。

### 3.1. 折点的切向速度

按照第2节所述，测量了折点的切向速度 $U_t$ 。图5的插图（b）展示了对于 $Bo$ 相近的气泡，GW72中的 $Oh = 0.0427$ （红色圆圈）与水中的 $Oh = 0.0028$ （黄色方块）的无量纲切向速度（$U_t/U_c$）随无量纲时间（$t/t_c$）的变化。观察发现，$U_t$ 保持恒定（塌陷开始和结束时除外），并以毛细速度 $U_c = \sqrt{\sigma/\rho R}$为尺度，这与Krishnan & Puthenveettil (2015)、Krishnan et al. (2017)以及Gordillo & Rodr´ıguez-Rodr´ıguez (2019)的观察结果相似。然而，对于 $Oh = 0.0028$，当前驱毛细波如图3所示在折点前方出现时，$U_t/U_c$ 的数值比 $Oh = 0.0427$时低约40%；在 $Oh = 0.0427$时，前驱毛细波会被完全阻尼（图4）。我们在所有这些

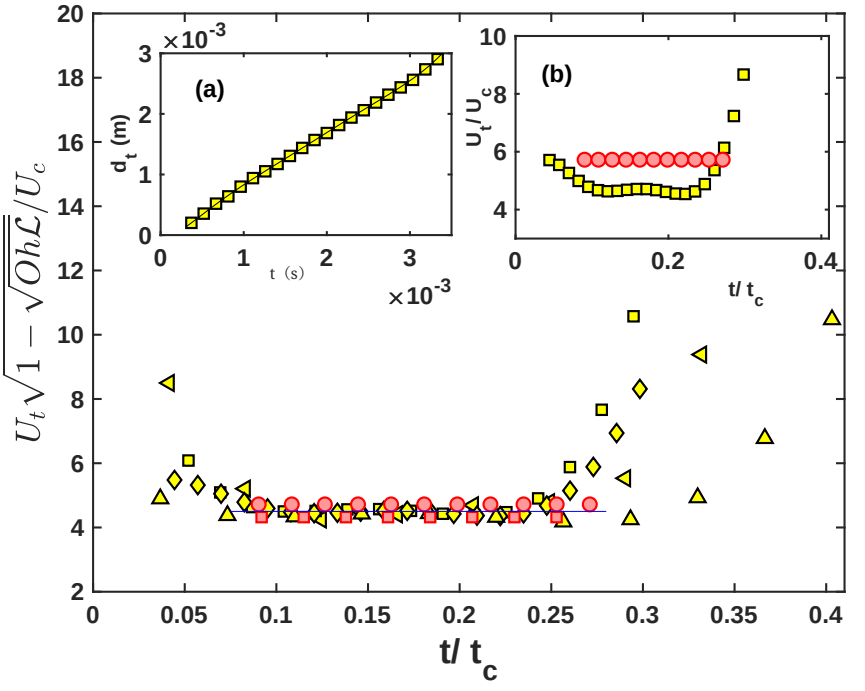



图5：考虑前驱毛细波的波浪阻力 $\mathcal{W}_R(Oh, Bo)$ 以及重力效应所致的路径修正 $\mathscr{L}(Bo)$ 后，折点的归一化切向速度如式（3.13）所示，绘为无量纲时间 $t/t_c$ 的函数；对象为尺寸分别为 $0.001 < Bo < 1$ 和 $0.001 < Oh < 0.05$ 的气泡。▲，$R = 0.175\,\mathrm{mm}$（$Bo = 4.2 \times 10^{-3}$, $Oh = 0.0099$）；◀，$R = 0.47\,\mathrm{mm}$（$Bo = 3 \times 10^{-2}$, $Oh = 0.0055$）；■，$R = 1.74\,\mathrm{mm}$（$Bo = 4.1 \times 10^{-1}$, $Oh = 0.0028$）以及 ♦ $R = 2.15\,\mathrm{mm}$（$Bo = 6.3 \times 10^{-1}$, $Oh = 0.00255$）。上述数据均来自水。GW72 的数据为：■ $R = 1.59\,\mathrm{mm}$（$Bo$ =$4.8 \times 10^{-1}$, $Oh = 0.0481$）；• $R = 2.02\,\mathrm{mm}$（$Bo = 7.7 \times 10^{-1}$, $Oh = 0.0427$）。—，$U_t\sqrt{1-\sqrt{Oh\mathscr{L}}}/U_c = 4.5$。插图（a）绘出了在水中、尺寸为 $R = 2.14\,\mathrm{mm}$ 的气泡所对应的折点沿切向运动的累积距离 $d_t$ 随时间的变化；图中还以 — 标示用于计算 $U_t$ 的多项式拟合。插图（b）显示了未考虑前驱毛细波效应时水与 GW72 之间的数据偏移。

当 $Oh < 0.02$时的气泡。Ji 等人（2021）的速度数据中清楚地显示了前驱毛细波存在时折点速度同样逐渐减小的现象（参见 Ji 等人 2021 年的图5）。该数据研究的是油层覆盖的水面上气泡破裂的情形，此时覆盖折点的油层增强了前驱毛细波的阻尼。因此，仅靠毛细速度尺度无法使不同黏度流体的切向速度数据归并，这可能是由于前驱毛细波对 $U_t$ 的影响。因此，需要为 $U_t$ 建立新的标度关系，以考虑前驱毛细波的黏性阻尼效应，以及可能存在的（较弱的）重力效应。现在，我们通过折点处的能量平衡推导出这样的标度关系，使切向速度数据能够归并。

3.1.1. 折点处的能量平衡

液膜破裂后，边缘的回缩为折点运动提供了动能。如第 3.1 节和图5所示，折点以恒定速度 $U_t$ 运动，因此我们假设折点运动的能量处于稳态平衡。假设 $R$ 是坍缩空腔在方位角方向和垂直方向上的特征长度，且 $a$ 的振幅与前驱毛细波的波长 $a \simeq \lambda$ 同量级，则通过平衡折点的动能（其质量为 $\rho a R^2$）与产生前驱毛细波所消耗的能量，

$$\frac{1}{2}\rho a R^2 {U_t}^2 = \alpha_1 \frac{1}{2}\rho a R \lambda {U_t}^2 + \alpha_2 \sigma a R, \tag{3.1}$$

其中， $\alpha_1$、 $\alpha_2$ 为常数前因子。对（3.1）式进行整理，可得空腔塌陷的韦伯数形式如下：

$$We_c = \frac{\rho {U_t}^2 R}{\sigma} = \left(\frac{U_t}{U_c}\right)^2 = \frac{2\alpha_2}{1-\alpha_1 \lambda/R}. \tag{3.2}$$

表达式（3.2）量化了前驱毛细波导致的 $U_t/U_c$减小，如图5插图（b）所示。式（3.2）中主导前驱毛细波的无量纲波长 $\lambda/R$取决于空腔塌陷总时间；正如我们将在§ 3.1.3中展示的，该时间取决于 $Oh$ 和 $Bo$。于是，（3.2）式可写为

$$U_t = \alpha_3 \, U_c \, \mathcal{W}_R(Oh, Bo), \tag{3.3}$$

其中， $\alpha_3 = \sqrt{2\alpha_2}$ 和

$$\mathcal{W}_R(Oh, Bo) = 1/\sqrt{1-\alpha_1 \lambda/R} \tag{3.4}$$

是波浪阻力因子，用于表征前驱毛细波导致的 $U_t$ 减小。 $\mathcal{W}_R$（$Oh$、 $Bo$）取决于 $\lambda/R$，而后者又取决于空腔塌陷总时间 $t_{bc}$，因为 $t_{bc}$ 期间的黏性阻尼会影响 $\lambda/R$。现在，我们讨论 $t_{bc}$ 对 $Oh$ 和 $Bo$的依赖关系，这使我们能够得到 $\lambda/R$ 对 $Oh$和 $Bo$ 的依赖关系，从而得出 $\mathcal{W}_R$（$Oh$、 $Bo$）的表达式。

3.1.2. 空腔塌陷总时间 $t_{bc}$

由于薄膜破裂所需的时间可以忽略不计（Duchemin 等人 2002年），我们将回缩边缘到达薄膜外缘的时刻 $R_r$ 作为参考时刻 $t = 0$ （见图 2d）。从 $t = 0$ 到空腔呈锥形、即将喷出射流之前的阶段（图3i）所经历的时间，记为腔体塌陷总时间 $t_{bc}$。图6中绘出了经毛细时间尺度 $t_c = \sqrt{\rho R^3/\sigma}$ 归一化的 $t_{bc}$ 随 $Bo$ 的变化。实验数据表明，$t_{bc}/t_c$ 对重力的依赖关系为：

$$\frac{t_{bc}}{t_c} = 0.26 \; Bo^{-0.1}. \tag{3.5}$$

这种对邦德数的依赖性可以通过计算折点沿空腔边界移动所需的时间来进行物理解释。折点沿空腔表面从边缘移动至空腔底部所经过的路径长度（$s_{bc}$；见图 2d）是 $Bo$ 的函数，因为自由表面气泡的静态形状取决于 $Bo$。对于 $Bo \leqslant 1$,

$$s_{bc} = (\pi R - s_f) Oh^n \approx (\pi R - R_r) Oh^n, \tag{3.6}$$

其中 $s_f = R\theta$ （见图 2d），当 $\theta$ 较小时为 $\theta = R_r/R$，而 $R_r$ 是边缘半径（见

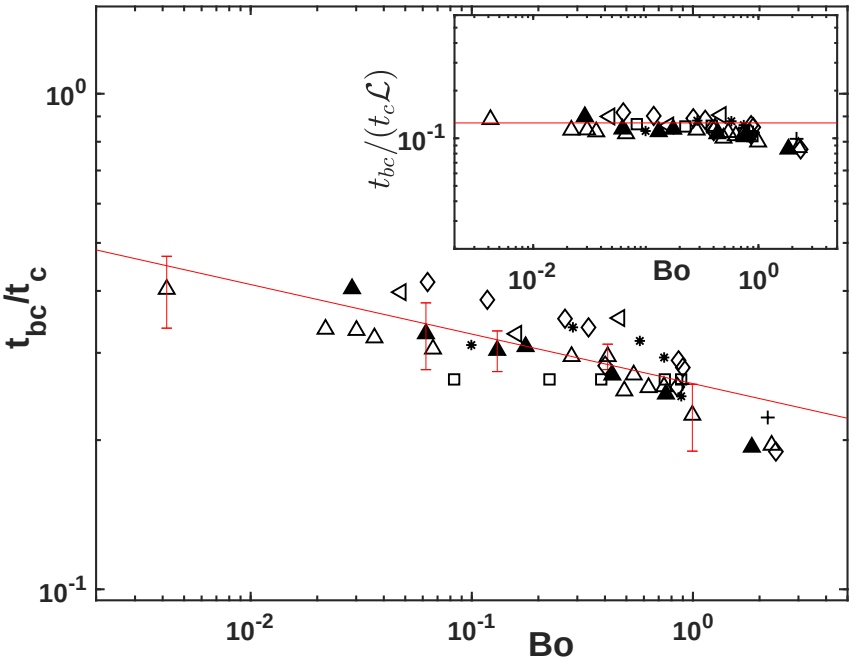



图 6：邦德数对空腔坍缩无量纲总时间 $t_{bc}/t_c$ 的影响，其中 $t_c$ 为毛细时间尺度。—，$t_{bc}/t_c = 0.26\ Bo^{-0.1}$。插图中，考虑重力导致的路径修正后，空腔坍缩无量纲总时间 $t_{bc}/(t_c\ \mathscr{L})$ 随 $Bo$ 的变化关系绘于图中。—，$t_{bc}/(t_c\ \mathscr{L}) = 0.13$ (3.10)。△，水；◁，乙醇；▲，GW48（30℃）；∗，GW68；♢，GW72；+，2-丙醇；□，GW55。

图 1a），它是 $Bo$ 的函数（Puthenveettil 等 2018）。因子 $Oh^n$（其中 $n$ 为正指数）出现在式 (3.6) 中，因为锥形空腔 $r_b$ 的底部半径（见图 2d）取决于 $Oh$。毛细波的出现会增大 $r_b$ （Gordillo & Rodr´ıguez-Rodr´ıguez 2019），其是否出现取决于 $Oh$。将式 (3.6) 中的 $s_{bc}$ 代入 $t_{bc} \approx s_{bc}/U_t$，其中 $U_t$ 由式 (3.3) 给出，可得：

$$t_{bc} \approx \frac{1}{\alpha_3}\, t_c \mathscr{L} \zeta, \tag{3.7}$$

其中 $\zeta = Oh^n/\mathcal{W}_R$，$\mathcal{W}_R$ 由式 (3.4) 给出，且

$$\mathscr{L}(Bo) = \pi - R_r/R \tag{3.8}$$

是路径修正项，用于考虑重力对折点行进路径长度的影响$s_{bc}$ 。在式 (3.8) 中，无量纲边缘半径

$$R_r/R = \sqrt{4/3 - 2(1/Bo + 1/Bo^2) + \sqrt{-4/3Bo^2 + 8/Bo^3 + 4/Bo^4}}, \tag{3.9}$$

当 $Bo < 1$ (Puthenveettil 等 2018)。

方程(3.7)通过 $t_c$ while阐明了毛细效应对空腔塌陷总时间的影响，而重力和黏性效应则分别通过 $\mathscr{L}(Bo)$和 $\zeta$来阐明。该

图6中的插图显示， $t_{bc}/(t_c\ \mathscr{L})$的测量值坍缩到ont o

$$t_{bc}\ \approx\ 0.13\ t_c\ \mathscr{L}, \tag{3.10}$$

对于 $0.001 < Bo < 1$ 和具有不同黏度的流体。当 $Bo > 1$时，数据偏离式 (3.10) 的原因是，随着空腔形状逐渐偏离截球体， $s_{bc}$ 开始偏离式 (3.6) 和 (3.9)。式 (3.7) 和 (3.10) 表明，在当前 $0.001 < Oh < 0.1$ 范围内， $Oh^n/(\alpha_3 \mathcal{W}_R) = 0.13$ 。因此，较大 $Oh$ 下，由于 $r_b$ 减小而导致的 $s_{bc}$ 增加（见式 (3.6)），似乎被前驱毛细波阻尼增强所引起的速度增加抵消了（见式 (3.2)），使得 $t_{bc}$ 与 $Oh$ 无关，如式 (3.10) 所示。因此，空腔塌陷总时间遵循毛细时间尺度 $t_c$，并由修正项 $\mathscr{L}$ 调整；该项通过式 (3.8) 和 (3.9) 取决于 $Bo$ ，且几乎不受黏度影响。

### 3.1.3. 前驱毛细波的波长与 $U_t$ 的标度关系

$Bo$ 对 $t_{bc}$ 的依赖关系由式（3.10）给出，这要求修改 Krishnan 等人（2017）提出的波阻尼标度关系 $\lambda/R \propto \sqrt{Oh}$ ，该关系基于 Krishnan & Puthenveettil (2015) 提出的 $t_{bc} \approx 0.3 t_{c0}$。已有研究表明，毛细波的振幅按 $a/a_0 = e^{-\kappa\ t}$ 的形式呈指数衰减，其中 $a_0$ 和 $a$ 分别为初始波幅和后续波幅， $\kappa = 8\pi^2\mu/\rho\lambda^2$ 为波阻尼系数（Lighthill 1978）。在空腔塌陷时间 $t_{bc}$ 结束时，可认为波已完全阻尼，此时

$$\kappa t_{bc} = \frac{8\pi^2 \mu t_{bc}}{\rho \lambda^2} = 4. \tag{3.11}$$

将式（3.10）中的 $t_{bc}$ 代入式（3.11）并重新整理，可得在时间 $t_{bc}$ 内被阻尼的无量纲波长：

$$\frac{\lambda}{R} = c_2 \sqrt{Oh \mathscr{L}}, \tag{3.12}$$

其中 $c_2 = 0.5\pi$。与 $Bo \approx 0.37$ 对应的实验值通常为 $\lambda/R \approx 0.4$；根据式 (3.12)，当 $\mathscr{L} \approx 2.5$ 时，需要满足 $Oh \approx 0.02$，而低于该值时，我们会观察到前驱毛细波。路径修正 $\mathscr{L}$ 的重力依赖性由式 (3.8) 和 (3.9) 给出。根据式 (3.9)，由于 $R_r/R$ 随着 $Bo$ 增大而增大，因此 $Bo$ 增大时， $\mathscr{L}$ 会减小。因此，当 $Bo$ 较大时，要使波在时间 $t_{bc}$ 内受到阻尼， $Oh$ 需要更大。

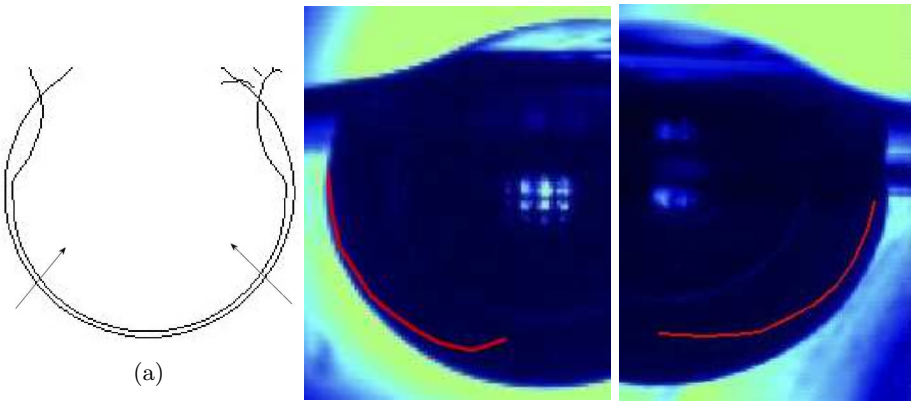
将式 (3.12) 中的 $\lambda/R$ 代入式 (3.3) 并重新整理，可得

$$U_t\ \approx\ \frac{\alpha_3\ U_c}{\sqrt{1 - c_2 \alpha_1 \sqrt{Oh \mathscr{L}}}}. \tag{3.13}$$

图5中绘出了水中气泡（黄色符号）和 GW72 中气泡（红色符号）的无量纲切向速度 $U_t\sqrt{1 - c_2\alpha_1\sqrt{Oh\mathscr{L}}}/U_c$ 随无量纲时间 $t/t_c$ 的变化，范围为 $2 \times 10^{-3} < Bo < 1$ 和 $0.001 < Oh < 0.05$。这些数据塌缩到

$$\frac{U_t\sqrt{1 - \sqrt{Oh\mathscr{L}}}}{U_c} = 4.5, \tag{3.14}$$

对于 $0.05 < t/t_c < 0.3$，切向运动的均匀阶段，这意味着 $\alpha_1 = 1/c_2$和 $\alpha_3 = 4.5$。关系式（3.14）在 $Oh$ 趋于零的极限下，与Gordillo和Rodríguez-Rodríguez（2019）基于其数值模拟提出的主导毛细波绝对速度关系式一致（见图2c），该数值模拟是在



(a) (b) (c)

图 7：空腔沿法向收缩。(a)，水中直径为 $R = 0.5$mm 的气泡在两个时刻的空腔轮廓叠加图。箭头表示扭结边缘下方空腔边界的收缩。两条轮廓之间的时间间隔为 0.15 ms。(b) 和 (c) 中气泡静态形状上叠加的（红色）线条表示从空腔塌陷过程中提取的扭结轨迹。(b) 和 (c) 中的气泡大小相近，但 $Oh$ 差异显著；(b)，水中 $R = 2.15$mm、$Bo = 0.63$、$Oh = 0.00255$；(c)，GW72 中 $R = 2$mm、$Bo = 0.77$ 和 $Oh = 0.0427$。图像宽度分别为 5.43mm 和 2.85mm。

邦德数趋于零的极限下 $Bo \ll 0.1$。当 $Bo$ 和 $Oh$有限时，（3.14）刻画了扭结速度对 $Oh$ 和 $Bo$ 的复杂依赖关系，这种依赖关系是通过前驱毛细波的阻尼产生的。

将式 (3.14) 与式 (3.3) 比较可知，式 (3.3) 中的波阻因子具有如下形式：

$$\mathcal{W}_R(Oh, Bo) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{Oh\mathscr{L}}}}. \tag{3.15}$$

因此，折点切向速度的最终标度关系为 $U_t \approx 4.5\, U_c\, \mathcal{W}_R$，其中$\mathcal{W}_R$ 由式 (3.15) 给出。

从图5中可以看出，$U_t$ 随时间保持恒定；这也可以从前驱毛细波的相速度来理解。折点在空腔表面产生波长为 $\lambda$ 的波扰动，该扰动像毛细波一样传播，其相速度为 $c_p = (2\pi)^{1/2}\sqrt{\sigma/\rho\lambda}$。将式 (3.12) 中的 $\lambda$ 代入该关系可得

$$c_p = 2.8 U_c (Oh\mathscr{L})^{-1/4}, \tag{3.16}$$

该结果与式 (3.14) 接近，尽管 $c_p$ 并未完全体现式 (3.14) 所显示的黏度和重力依赖性。不过，关键在于，前驱毛细波的相速度确实说明了 $U_t$ 会像图5所示那样随时间保持恒定。

### 3.2. 空腔边界沿法向收缩

在图7a中，将水中 $R = 0.5$mm气泡在 $t = 0$ 时的初始空腔边界（气泡边界）与稍后时刻（$t = 0.15$ms）的进行比较。空腔轮廓清楚地表明，空腔在扭结边缘以下各处均沿法向回缩，如箭头所示。这种空腔收缩是由于突然的

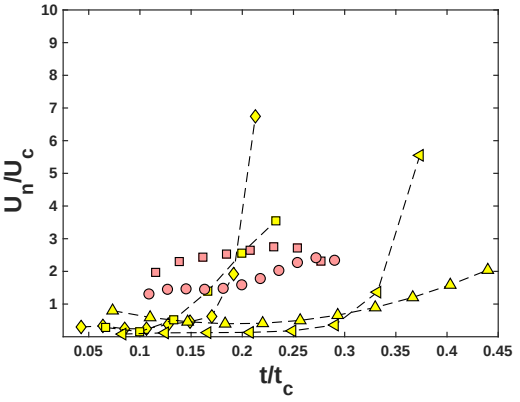



图8：前缘的无量纲法向速度 $U_n/U_c$ 随无量纲时间 $t/t_c$的变化。符号与图5中的相同，即：▲、$R = 0.175$毫米（$Bo = 4.2 \times 10^{-3}$、 $Oh = 0.0099$）； ◀、 $R = 0.47$毫米（$Bo = 3 \times 10^{-2}$、$Oh = 0.0055$）； ■、 $R = 1.74$毫米（$Bo = 4.1 \times 10^{-1}$、 $Oh = 0.0028$），以及 ♦ $R = 2.14$毫米（$Bo = 6.3 \times 10^{-1}$、 $Oh = 0.00255$）。上述数据来自水。GW72对应的数据为： ■ $R = 1.59$毫米（$Bo = 4.8 \times 10^{-1}$、 $Oh = 0.0481$）； ● $R = 2.02$毫米（$Bo = 7.7 \times 10^{-1}$、$Oh = 0.0427$）。

表面膜破裂后空腔内气体压力降低，导致与表面张力的不平衡，其尺度为 $\sigma/R$。

图 7b 和 7c 中，连续的（红色）线条标出了折点的轨迹，分别对应水中直径为 $R = 2.15$mm 的气泡和 GW72 中直径为 $R = 2$mm 的气泡。可以看出，GW72 这种粘性流体中的气泡收缩程度更大，即初始空腔轮廓与红线之间的间距更大。还可以看出，图 7b 中水里的气泡在坍缩末期，折点会突然跃动；而 GW72 中折点的轨迹（图 7c）在整个坍缩过程中都很平滑。对于含有前驱毛细波的 $Oh < 0.02$ 低黏度流体中的气泡，这种折点速度突然升高的现象也曾被观察到。

图 8 绘出了折点沿空腔边界法线方向的速度 $U_n$ 与毛细速度 $U_c$ 的比值随无量纲时间 $t/t_c$ 的变化。粘性流体（GW72， $Oh > 0.02$）中的标度化速度高于水中（$Oh < 0.02$）；显然，仅采用毛细速度标度（如图所示）并不能使法向速度实现坍缩。速度数据还显示，速度随时间增加，表明存在微弱加速；但水中情况例外，在朝向流动聚焦的过程中，由于前驱波的存在， $U_n/U_c$ 值会增大，详见 § 3.1。

需要指出的是，先前对无量纲切向速度进行的 $\mathcal{W}_R$ $U_n/U_c$ 修正 $U_t/U_c$ （见 (3.3)）旨在考虑前驱毛细波效应，但并不能使法向速度数据坍缩。为解决这一标度问题，我们现在分析空腔沿两个相互垂直方向的平均收缩速度，即：(i) 赤道平面内的水平方向，此处空腔到其垂直对称轴的局部半径最大；(ii) 子午面内沿垂直对称轴的方向（见图 2d）。

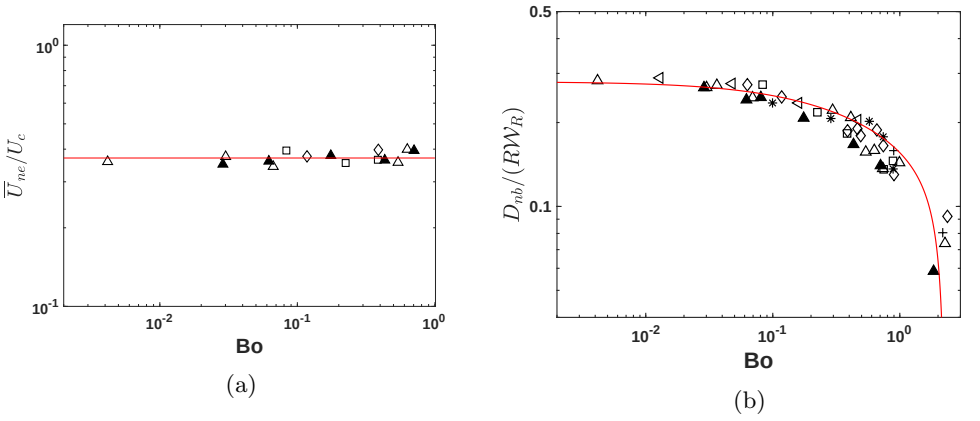



图9：(a)，赤道平面上的无量纲平均收缩速度（$\overline{U}_{ne}/U_c$）与 $Bo$ 的关系。—，$\overline{U}_{ne}/U_c = 0.37$。(b)，空腔底部的无量纲收缩，$D_{nb}/(R\mathcal{W}_R)$，以 $Bo$ 为函数绘制。—，$D_{nb}/(R\mathcal{W}_R) = 0.14(Z_c/R)$。△，水；▲，GW48（30℃）；□，GW55；∗，GW68；◊，GW72；+，2-丙醇；◁，乙醇。

### 3.2.1. 赤道平面内及沿垂直轴的平均法向收缩速度

图9a显示了赤道平面上垂直于空腔边界的平均收缩速度 $\overline{U}_{ne} = D_{ne}/t_e$，该速度以毛细速度尺度无量纲化，并表示为 $Bo$ 的函数。其中，$D_{ne}$ 是赤道平面上的平均法向位移，$t_e$ 是折点到达赤道平面所需的时间；这些量见图 2d。由图9a可见，$\overline{U}_{ne}/U_c$ 与 $Bo$ 无关，且按如下关系缩放

$$\overline{U}_{ne} = 0.35\ U_c. \tag{3.17}$$

因此，在赤道平面上，由于方位角方向具有对称性，收缩速度与毛细速度 $U_c$ 成正比，不受黏性和重力效应的影响。

相反，空腔底部的法向收缩强烈依赖于 $Bo$，如图9b所示。图中绘出了空腔底部收缩的无量纲法向距离 $D_{nb}/R$，并用 $\mathcal{W}_R$ 进行了修正；其处理方式与图5类似，该距离表示为 $Bo$ 的函数。图中的数据变化可由归一化空腔深度 $Z_c/R$ 随 $Bo$ 的变化很好地表征；该变化是利用 Puthenveettil 等人（2018）给出的关于 $Bo$ 的 $Z_c/R$ 闭式解得到的。这种表征揭示了 $D_{nb}$ 对 $Z_c$ 的依赖关系。因此，图9b中数据的最佳拟合表达式为

$$D_{nb}/(R\mathcal{W}_R) = 0.14(Z_c/R). \tag{3.18}$$

空腔底部的收缩速度为 $\overline{U}_{nb} = D_{nb}/t_{bc}$。利用式（3.18）以及式（3.10）中的 $t_{bc}$，空腔底部的平均竖直收缩速率于是为，

$$\frac{\overline{U}_{nb}}{U_c} = \frac{Z_c}{R}\frac{\mathcal{W}_R}{\mathscr{L}}, \tag{3.19}$$

其中，$Z_c/R$ 是空腔形状的长宽比。方程（3.19）表明，当 $Oh < 0.02$时，前驱毛细波会使空腔表面发生变形，从而降低空腔底部的收缩速度。这种降低后的

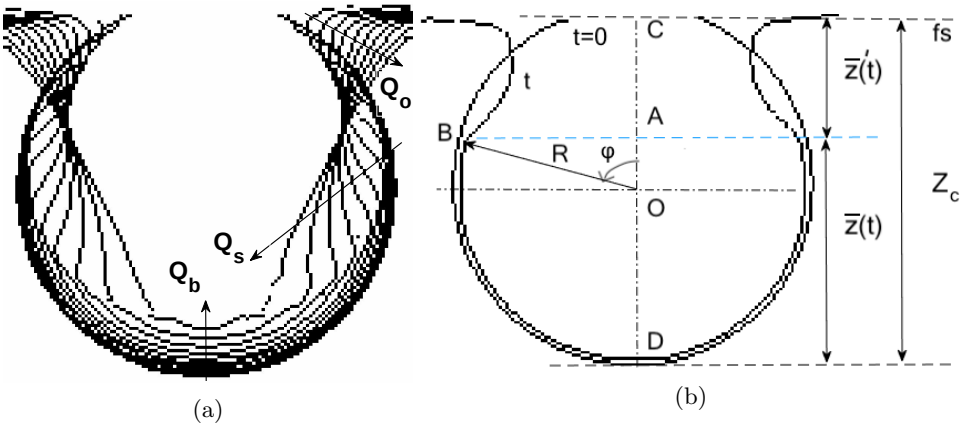



图10：(a) 水中 $R = 0.175$mm气泡塌陷空腔在不同时刻的叠加轮廓，从 $t = 0$ 处的静态形状开始直至达到锥形空腔形状。相邻轮廓间隔 $10\mu$s。影片3。(b) 初始静态空腔构型在 $t = 0$以及稍后时刻 $t > 0$的轮廓。该图显示了与移动折点相关的各种参数；自由液面以fs表示。

低黏度流体中空腔的收缩速度也可见于图8。（3.19）式的右端趋于常数。由此得到的 $\overline{U}_{nb}$ 毛细速度标度，与 Ga˜n´an Calvo 和 L´opez-Herrera（2021年）针对 $Oh \ll 0.04$提出的无黏极限下空腔径向速度标度一致。然而，对于约在 $Oh = 0.04$发生的塌陷末期，本文的 $\overline{U}_{nb}$与 Ga˜n´an Calvo 和 L´opez-Herrera（2021年）提出的径向速度对黏性毛细速度（$V_\mu$）的依赖关系不同。造成这种差异的原因可能是，$\overline{U}_{nb}$ 是对 $t_{bc}$范围内速度取平均所得，因而可能无法捕捉流动聚焦附近速度的急剧变化。

无论如何，由(3.19)和(3.14)可以清楚看出，在流动聚焦之前，空腔底部区域以两种不同的速度尺度闭合，这两种尺度源于两种不同的物理机制。因此，Ga˜n´an Calvo & L´opez-Herrera (2021)所采用的界面速度对称假设，或Gordillo & Rodr´ıguez-Rodr´ıguez(2019)提出的纯水平汇聚流，都需要根据这一认识进行修正。还值得注意的是，赤道平面处的空腔收缩速度$\overline{U}_{ne}$(3.17)与 $Oh$无关。这与 $\overline{U}_{nb}$(3.19)形成对比，后者通过 $\mathcal{W}_R$（由前驱毛细波存在引起的波阻因子）而依赖于黏度。这种差异是可以预期的，因为前驱毛细波仅在折点越过赤道平面之后才影响空腔塌陷。在空腔塌陷的最后阶段，即折点到达空腔底部时，低黏度流体中法向速度的上升几乎比高黏度流体高出一个数量级（见图8）。这种 $U_n$ 的上升发生在毛细波汇聚于空腔底部之时。

## 4. 空腔充填速率

相对于空腔边界运动，可以识别出三种体积通量，如图2b所示；其测量方法见第2节。图10a显示了不同时刻塌陷空腔的轮廓，从 $t = 0$时的静态形状开始，直至形成锥形空腔形状；该气泡在水中的半径为 $R = 0.175$mm。

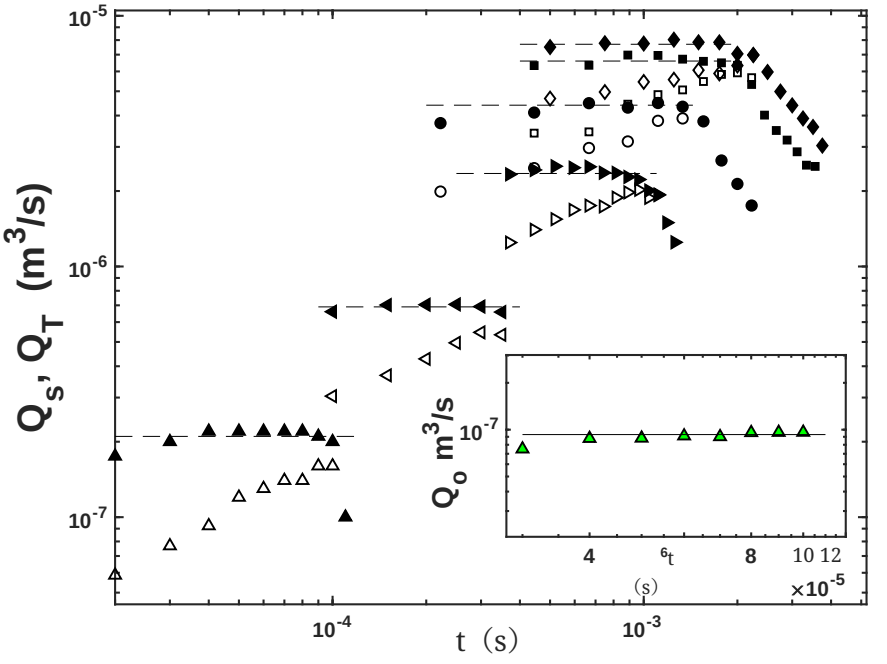



图 11：不同 $Bo$ 和 $Oh$的气泡，其空腔沿切向的填充速率 $Q_s$ （空心符号）和总填充速率 $Q_T$ （实心符号）随时间的变化。 ◊, $R = 2.15$ mm（$Bo = 0.63$, $Oh = 0.00255$）； □, $R = 1.89$ mm（$Bo = 0.49$, $Oh = 0.0027$）； ◯, $R = 1.47$ mm（$Bo = 0.3$, $Oh = 0.0031$）； ◁, $R = 0.47$ mm（$Bo = 0.03$, $Oh = 0.0055$）； △, $R = 0.175$ mm（$Bo = 0.0042$, $Oh = 0.0099$）（所有数据均在水中测得）。GW48 中的数据为 ▷, $R = 1.04$ mm（$Bo = 0.17$, $Oh = 0.0139$）。插图显示了在水中测量的、直径为 $R = 0.175$ mm 时的体积流出通量 $Q_o$。

从图中可以识别出以下体积通量：（i）侧向（切向）体积流入 $Q_s$，（ii）底部（法向）流入 $Q_b$，以及（iii）侧向体积流出通量$Q_o$，总填充速率为 $Q_T = Q_s + Q_b$。图11显示了不同尺寸气泡在水和GW48中的侧向体积流入 $Q_s$（空心符号表示）和总容积流入 $Q_T$（实心符号表示）随时间的变化。图11的横轴和纵轴分别跨越三个数量级的时间和体积通量。每组 $Q_T$ 数据的数值起初随时间近似保持恒定（以水平虚线表示），随后突然下降。$Q_T$ 的这一突变表明存在未计入的体积流出通量，这是由于空腔内形成射流所致，同时空腔变为锥形。侧向体积通量 $Q_s$起初仅占 $Q_T$的一小部分，随后随时间增加；当空腔变为圆锥形时，它几乎等于总容积通量。图11中 $Q_T$ 与 $Q_s$ 的差值对应于任意时刻的底部流入 $Q_b$ 。图11中的插图显示了半径为$R = 0.175$mm的气泡在水中的体积流出通量 $Q_o$ 随时间的变化。体积流出通量 $Q_o$ 并非完全可以忽略。不过，由于它实际上不随时间变化，且 $Q_T$ 保持恒定，因此 $Q_T - Q_o$ 也为常量；所以自由液面处空腔的体积扩张（$Q_o$）不会改变

$Q_T$ 随时间的函数变化。因此，在我们的分析中不再进一步考虑 $Q_o$ 。

现在，我们按如下方式对 $Q_s$ 进行标度估算。侧向通量的特征面积为 $2\pi R\overline{z}'(t)$ ，其中 $\overline{z}'(t)$ 是从折点到自由液面高度的高度（见图10b），速度为折点的切向速度 $U_t$（§ 3.1）。尽管折点以速度 $U_t$移动，但凹边界的上部内部区域滞后于折点（见图2c中的A）。侧边界内部的这种速度差意味着存在一个剪切区域，因此需要在侧向体积通量中予以考虑。因此，我们加入形式为 $Oh^d$ 的黏性修正项，以将侧向通量估算为 $Q_s \sim 2\pi RU_tOh^d\overline{z}'(t) \sim 2\pi RU_tOh^d(R - R\cos\phi)$ ，由此得到，

$$\frac{Q_s}{\pi R^2U_tOh^d} \approx \mathsf{a}_1 \sin^2(\phi/2), \tag{4.1}$$

其中，$\mathsf{a}_1$ 是一个由实验确定的常数。在式（4.1）中， $\phi = \omega t + \phi_0$ 是移动折点的相位角（见图10b），其中 $\omega$ 是圆频率，而$\phi_0 \approx \theta$ （见图 2d）是空腔开启时的相位角。图12的插图中绘出了无量纲侧向体积通量 $Q_s/\pi R^2U_tOh^{-0.12}$ 随无量纲时间 $t/t_{bc}$的变化。式（4.1）使数据坍缩，基于数据拟合得到的最终表达式为:

$$\frac{Q_s(t)}{\pi R^2U_tOh^{-0.12}} = 0.12 + 0.15\sin^2\left(\frac{0.5\pi t}{t_{bc}}\right), \tag{4.2}$$

其中，式（4.2）右侧的第一项是初始侧向通量。

现在考虑底部通量的标度。折点下方的特征面积为 $2\pi R\overline{z}(t)$ ，其中 $\overline{z}(t)$ 是折点与空腔底部之间的垂直距离（见图10b）。赤道平面内的收缩速度遵循毛细速度（见式（3.17））。因此，折点下方的法向流入为 $Q_b \sim 2\pi R\overline{z}(t)\,U_c \sim 2\pi RU_c(Z_c - R(1 - \cos\phi))$ 。对于较小的 $Bo$ ，取 $2R/Z_c \approx 1$ （Puthenveettil 等 2018），可得简化关系:

$$\frac{Q_b}{2\pi RZ_cU_c} \approx \mathsf{a}_2 \cos^2(\phi/2), \tag{4.3}$$

其中，$\mathsf{a}_2$ 是一个数值前因子。图12显示，式（4.3）将不同 $Bo$ 和 $Oh$下的 $Q_b$ 数据归并到一起；图12中所示的无量纲底部通量$Q_b(t)/2\pi RZ_cU_c$的最佳拟合关系为

$$\frac{Q_b(t)}{2\pi RZ_cU_c} = 0.5\cos^2\left(\frac{0.42\pi t}{t_{bc}}\right). \tag{4.4}$$

式（4.2）中 $Q_s$ 的相位角 $\pi t$ 略大于式（4.4）中 $Q_b$ 的相位角 $0.84\pi t$，这是因为侧向通量区域位于底部通量区域的上方所造成的假象。

现在假设回缩边缘仅产生波状传播扰动，而不会造成沿空腔向下的任何有效质量传递。那么，空腔的总充填速率为 $Q_T \approx (Q_b + Q_s)|_{t\to 0} \approx 2\pi RZ_cU_c$。这意味着，式（4.2）中的初始侧向通量是由法向收缩造成的。图12显示， $Q_T/2\pi RZ_cU_c$ 能够较好地将数据归并到一起。根据图中数据，最佳拟合方程为

$$\frac{Q_T(t)}{2\pi RZ_cU_c} \approx 1, \tag{4.5}$$

验证我们的假设，从而得到上述关系。

公式 (4.5) 表明，总容积通量完全由空腔的法向收缩速度产生。当 $Bo < 0.1$ 时，归一化空腔深度 $Z_c/R \to 2$，且

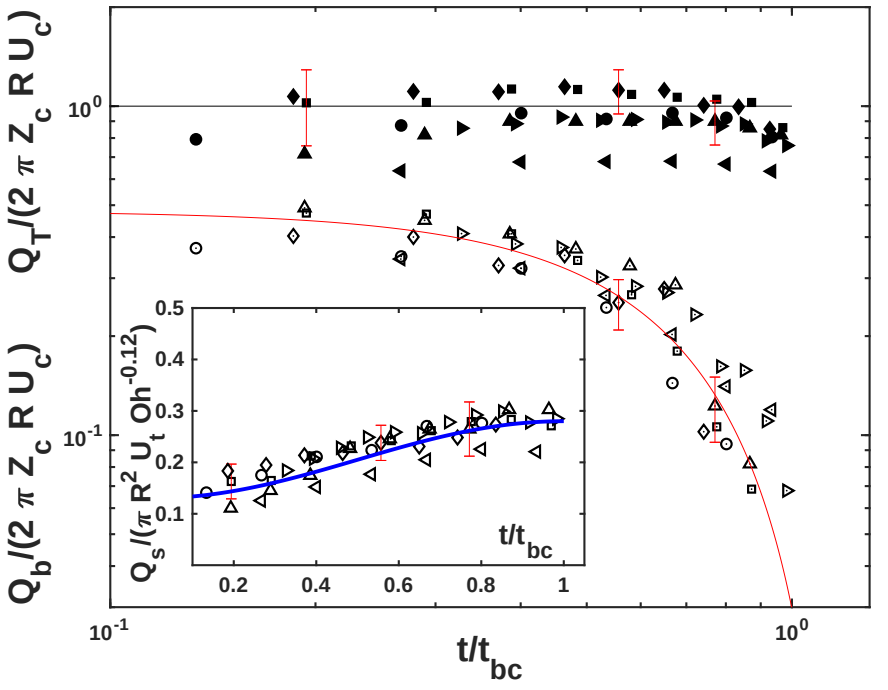



图12：归一化总体积流入量 $Q_T/2\pi RZ_cU_c$ 以及法向 $Q_b/2\pi Z_cRU_c$ 无量纲体积流入量随归一化时间 $t/t_{bc}$的变化。插图中：切向 $Q_s$ 体积流入量以 $\pi R^2U_tOh^{-0.12}$ 进行无量纲化，并绘制为无量纲时间$t/t_{bc}$的函数。—（黑色）， $Q_T/2\pi RZ_cU_c = 1$。—（红色）， $Q_b(t)/2\pi Z_cRU_c = 0.5\cos^2(0.42\pi t/t_{bc})$。插图中：—（蓝色）， $Q_s(t)/\pi R^2U_tOh^{-0.12} = 0.13 + 0.15\sin^2(0.5\pi t/t_{bc})$。带点的符号表示法向 $Q_b$体积流入。其余符号与图11相同。

与 $Bo$ 无关，因此 $Q_T$ 中的重力效应变得可以忽略。在中等至较大气泡尺寸范围（$Bo > 0.1$）内， $Q_T$ 中的重力效应通过 $Z_c$ 对 $Bo$ 的依赖而变得显著（Krishnan 等 2017；Puthenveettil 等 2018）。当趋近于 $t = t_{bc}$、空腔变为锥形时，总质量通量 $\rho Q_T$ 通过动量交换触发射流。关于流动聚焦和喷射的更多详情，请参见附录 A。

## 5. 结论

浮泡顶部的薄膜破裂后，边缘回缩会形成一个折点（凹形空腔边界与凸形空腔边界的交点），该折点沿空腔边界切向移动；毛细波则在其前方传播，而在高黏度流体中不会出现。与此同时，液膜破裂后气体压力骤降，使空腔收缩。这两种不同机制分别产生塌陷空腔边界的切向速度（$U_t$）和法向速度（$U_n$）。折点的切向运动与气体压力降低导致的整体向内空腔收缩相结合，是表面气泡空腔塌陷的独特特征；在以下研究所讨论的开口空腔塌陷问题中并未出现：

Zeff 等（2000）；Bergmann 等（2006）；Bartolo 等（2006）；Duclaux 等（2007）；Das 和 Hopfinger（2008）；Benusiglio 等（2014）；Thoroddsen 等（2018）；Yang 等（2020）；Krishnan 等（2022）。

表面气泡空腔塌陷是一种毛细驱动现象，黏度和重力分别通过前驱毛细波的阻尼以及静态空腔深度的减小（$Z_c$）来影响塌陷动力学。流体黏度的增加会因前驱毛细波的逐渐阻尼而增大折点的切向和法向速度。利用折点区域的能量模型，我们表明 $U_t \approx 4.5\, U_c\, \mathcal{W}_R$ (3.14)，其中 $U_c$ 是毛细速度，$\mathcal{W}_R = (1 - \sqrt{Oh\mathscr{L}})^{-1/2}$ (3.15) 是波阻因子，其中 $\mathscr{L}(Bo) = \pi - R_r/R$ (3.8) 是折点行进路径长度的修正，$Oh$ 是奥内佐格数，$Bo$ 是邦德数，$R_r$ 是边缘半径。

液膜破裂后，气泡空腔中压缩气体立即突然释放，导致空腔整体向内收缩。它产生折点的法向速度分量。在水平赤道平面内，法向折点速度与 $U_c$ (3.17) 成比例，不受黏性和重力效应影响。相比之下，空腔底部以速度尺度 $U_c(Z_c/R)\mathcal{W}_R\mathscr{L}^{-1}$ (3.19) 垂直向上收缩。底部垂直收缩中的黏性效应 $\mathcal{W}_R$ 是由于空腔上前驱毛细波引起的变形。这种收缩上的重力效应源于空腔的初始静态几何形状，由空腔的长宽比 $Z_c/R$ 和路径修正 $\mathscr{L}$ 表示。

空腔塌陷总时间按 $t_{bc} \approx 0.13 t_c \mathscr{L}$ (3.10) 的关系标度，其中重力依赖性源于折点轨迹 $\mathscr{L}$ 对 $Bo$ 的依赖。这表明，前驱毛细波的阻尼遵循修正后的关系 $\lambda/R \approx Oh^{1/2}\mathscr{L}^{1/2}$ (3.12)，说明随着邦德数增大，阻尼略有减弱。

空腔填充的质量通量 $\rho Q_T$ 由侧向通量 $\rho Q_s$ 和法向底部通量 $\rho Q_b$之和构成。我们表明，$Q_T \approx 2\pi R Z_c U_c$ (4.5)，而这取决于空腔的长宽比 $Z_c/R$，后者是 $Bo$ 的函数。$\rho Q_T$的全部量值都源于空腔的法向收缩，这表明由边缘回缩引发的折点运动类似于波前传播，并不伴随有效质量传递。事实上，对于给定的气泡，切向速度 $U_t$ 不随时间变化，并且与波长为 $\lambda$ 的毛细波的相速度密切对应，即 $U_t \approx c_p$ (3.16)，其中 $c_p = (2\pi)^{1/2}\sqrt{\sigma/\rho\lambda}$。采用实验值 $\lambda/R \approx 0.36$，可得 $c_p \approx 4.2U_c$，这与 $U_t$ (3.14) 接近；此处忽略了黏度和重力的微弱影响。

在空腔底部，由于空腔的质量通量 $\rho Q_T$ 与初始射流质量通量 $\rho\pi {r_j}^2 U_j$之间通过压力积聚发生动量交换，其中$r_j \sim r_b$ 为锥形空腔底部半径，$U_j$ 为射流速度（见附录 A）。这种交换给出了射流韦伯数的标度关系 $(U_j/U_c)^2 = C^2 (Z_c R/{r_j}^2)^2$, ，其中系数为 $C \approx 0.5$ ，因为动量交换并不完全。根据实验$R/r_j \approx 3$ ，因此在 $Bo < 0.1$ 的极限下，射流韦伯数为 $We_j \approx 350$ 。

资助。作者谨此感谢印度政府 DST 为本研究提供的部分经费支持，资助项目包括 FIST 资助项目 SR/FST/ETII-017/2003、SR/FST/ETII- 064/2015，以及核心研究资助项目 SR/S3/MERC/028/2009、CRG/2021/007497。

利益声明。作者声明不存在利益冲突。

## 附录 A. 空腔底部的动量平衡

Deike 等人（2018年）和 Duchemin 等人（2002年）在数值模拟中观察到空腔底部出现两个连续的速度（或压力）峰值，且第二个峰值最高。若认为第一个峰值由毛细波引起，第二个峰值由折点引起，那么与折点相比，前驱波的动量并不显著；Ga˜n´an Calvo（2018年）阐明了这一点。然而，体积通量（或质量通量）与由空腔法向收缩产生的毛细速度 $U_c$ 相关（见（4.5））， 而 $U_t$ 仅是传播速度，携带的质量很少。因此，塌陷空腔内液体动量的变化率为 $d\left(mU_c\right)/dt$，其中 $m$ 为相应的液体质量。求导得 $\dot{m}U_c+mU_c$，其中 $\dot{m}$ 为空腔塌陷的质量通量。由于 $U_c$ 相对于时间为常数，因此我们得到，

$$\frac{d}{dt}(mU_c) = \dot{m}U_c. \tag{A 1}$$

(A1) 中的动量通量会在空腔底部的轴对称聚焦流动过程中表现为一个力。相应的压力积聚为

$$p \simeq \dot{m}U_c/2\pi {r_b}^2, \tag{A 2}$$

其中， $2\pi {r_b}^2$ 是锥形空腔底部的特征面积，其底部半径为$r_b$ （见图 2d）。将式（4.5）中的总质量流入量 $\dot{m} = \rho Q_T$ 代入式（A2），可估算底部压力为，

$$p \simeq \left(\frac{Z_c}{R}\right)\rho {U_c}^2\left(\frac{R}{r_b}\right)^2. \tag{A 3}$$

方程（A3）表明，空腔底部的压力积聚主要遵循毛细—惯性标度，其形式为 $\rho {U_c}^2$。由于空腔的长宽比 $Z_c/R$ 是 $Bo$的函数（如 Puthenveettil 等人（2018年）所示）， $p$ 也取决于 $Bo$。同样，前驱波对压力的影响由式（A 3）中的项 $(R/r_b)^2$ 体现。请注意，在没有毛细波的情况下，冲击面积减小（$\sim {r_b}^2$）会增大冲击压力。

冲击的压力冲量 $P = \int_{t_i}^{t_f} p\ dt$，其中下标 $i$ 和 $f$分别表示时间 $t$的初始值和最终值，其估算值为

$$P \approx p\Delta t, \tag{A 4}$$

其中 $\Delta t = t_f - t_i$ 是冲击的时间尺度。在这种毛细驱动流动聚焦中，冲击时间尺度的自然选取为

$$\Delta t \simeq r_b/U_c. \tag{A 5}$$

由于压力冲量梯度驱动射流沿轴向运动，

$$U_j = -\nabla(P/\rho). \tag{A 6}$$

将 (A 3) 和 (A5) 代入 (A 4)，再将所得的 $P$表达式代入 (A 6)，我们得到：

$$U_j \simeq \nabla\left(\frac{R\ Z_c\ U_c}{r_b}\right). \tag{A 7}$$

将梯度算子 $\nabla$ 近似为 $1/r_b$，可得喷流韦伯数 $We_j$ 为

$$We_j = \left(\frac{U_j}{U_c}\right)^2 \sim \left(\frac{Z_c}{R}\right)^2\left(\frac{R}{r_b}\right)^4, \tag{A 8}$$

与 Krishnan et al. (2017) 提出的标度关系相同。射流半径 $r_j \sim r_b$（Ga˜n´an Calvo & L´opez-Herrera 2021年），其比值 $R/r_b$ 取决于是否存在前驱毛细波。

## REFERENCES


Bartolo, D., Josserand, C. & Bonn, D. 2006 液滴撞击中的奇异射流与气泡。*Phys. Rev. Lett.* **96**, 124501。Benusiglio,

A. Quéré D. & Clanet C. 2014 *Journal of* , , , 水面上的爆炸。 , –。Bergmann,

*Fluid Mechanics* **752** 123 139

R. van der Meer D. Stijnman M. Sandtke M. Prosperetti A. & , , , , , , , , , , Lohse D. 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 154505 巨大气泡断裂。。Blanchard, D. C. 1963 海洋气泡中的颗粒对大气的电化作用。

*Progress in oceanography* **1**, 73IN7113–112202。Blanco–Rodríguez, F. J. & Gordillo, J. M. 2021 液滴撞击深液池及气泡破裂产生的射流。 *Journal of Fluid Mechanics* **916**, A37。Boulton-Stone,

J. M. & Blake J. R. 1993 *Journal* 自由表面上的气泡破裂。 , –。Brasz,

*of Fluid Mechanics* **254** 437 466

C. F. Bartlett C. T. Walls P. L. L. Flynn E. G. Yu Y. E. & Bird J. C. , , , , , , , , , , 2018 气泡破裂产生的顶部射流液滴的最小尺寸。 *Phys. Rev. Fluids* **3**, 074001。Burton, J. C., Waldrep, R. & Taborek, P. 2005 气泡断裂中的标度与不稳定性。*Phys. Rev. Lett.* **94 (18)**, 184502。Gañán Calvo, A. M. 2017 气泡破裂研究的修订：顶部射流液滴尺寸和速度的普适标度律。 *Phys. Rev. Lett.* **119**, 204502。Gañán Calvo, A. M. 2018 纳入重力和无黏极限的气泡破裂顶部射流液滴尺寸与速度标度律。 *Phys. Rev. Fluids* **3**, 091601。Gañán Calvo, A. M. & López-Herrera, J. M. 2021 气泡破裂瞬态喷射的物理机制。 *Journal of Fluid Mechanics* **929**, A12。Das, S. P. & Hopfinger, E. J. 2008 圆柱容器中的参数激励重力波与有限时奇异性。 *Journal of Fluid Mechanics* **599**, 205–228。Deike, L., Ghabache, E., Liger-Belair, G., Das, A. K., Zaleski, S., Popinet, S. & Séon,

T. 2018 *Phys. Rev. Fluids* **3** 013603 气泡破裂所产生射流的动力学。 , 。Doshi, P., Cohen, I., Zhang, W. W., Siegel, M., Howell, P., Basaran,O. A. & Nagel, S. R. 2003 液滴破碎中的记忆持久性：普适性的失效。 *Science* **302** (5648), 1185–1188, arXiv: http://science.sciencemag.org/content/302/5648/1185.full.pdf。Duchemin, L., Popinet, S., Josserand, C. & Zaleski, S. 2002 自由表面气泡破裂时的射流形成。 *Physics of Fluids* **14** (9), 3000–3008。 Duclaux, V., Caille, F., Duez, C., Ybert, C., Bocquet, L. & Clanet, C. 2007 瞬态空腔的动力学。 *Journal of Fluid Mechanics* **591**, 1–19。Feng, J., Roché, M., Vigolo, D., Arnaudov, L. N., Stoyanov, S. D., Gurkov, T. D.,Tsutsumanova, G. G. & Stone, H. A. 2014 通过复合界面处的气泡破裂制备纳米乳液。 *Nature physics* **10** (8), 606–612。Ghabache, E., Antkowiak, A., Josserand, C. & Séon, T. 2014 气泡破裂物理学：气泡破裂如何控制液滴喷射。 *Physics of Fluids (1994-present)* **26** (12), 121701。Gordillo, J. M. & Rodríguez-Rodríguez, J. 2019 毛细波控制气泡破裂射流的喷射。 *Journal of Fluid Mechanics* **867**, 556–571。Ismail,

A. S. Gañán Calvo A. M. Castrejón-Pita J. R. Herrada M. A. & , , , , , , 受控空腔塌陷：液滴形成的标度律。*Soft Matter* **14**, 7671–7679。Castrejón-Pita A. A. 2018 Ji, B., Yang, Z. & Feng, J. 2021 气泡在气-油-水界面破裂产生的复合射流。 *Nature communications* **12** (1), 6305。Joung,

Y. S. Ge Z. & Buie C. R. 2017 *Nature* , , , 土壤上雨滴产生的生物气溶胶。 , 。

*Communications* **8** 14668

Kientzler, C. F., Arons, Arnold B., Blanchard, D. C. & Woodcock, A. H. 1954气泡在水面破裂时液滴喷射的摄影研究1。 *Tellus* **6** (1), 1–7。Krishnan, S., Bharadwaj, S. V. & Vasan, V. 2022 自由下落液体容器的撞击及随后的喷射。 *Experiments in Fluids* **63** (7), 1–20。Krishnan, S., Hopfinger, E. J. & Puthenveettil, B. A. 2017 液体表面气泡塌陷所致射流喷射的标度关系。 *Journal of Fluid Mechanics* **822**, 791–812。Krishnan, S. & Puthenveettil, B. A. 2015 自由表面气泡的塌陷动力学。*Procedia IUTAM* **15**, 207–214。Krishnan, S., Puthenveettil, B. A. & Hopfinger, E. J. 2020 液体表面气泡的孔洞扩张。 *Physics of Fluids* **32** (3), 032108, arXiv: https://doi.org/10.1063/1.5139569。Lai, C. Y., Eggers, J. & Deike, L. 2018 气泡破裂: 普适的空腔与射流轮廓。*Phys. Rev. Lett.* **121**, 144501。Lee, J. S., Weon, B. M., Park, S. J., Je, J. H., Fezzaa, K. & Lee, W. K. 2011 气泡破裂过程中液体射流形成的尺寸限制。 *Nature communications* **2**, 367。Lighthill, J. 1978 *Waves in fluids*。剑桥大学出版社。MacIntyre, F. 1972 破裂气泡中的流动模式。**77** 27 5211 5228 *Journal of Geophysical Research* ( ), –。

Oguz, H. N. & Prosperetti, A. 1993 针头处气泡生长与脱离的动力学。 *Journal of Fluid Mechanics* **257**, 111–145。Perlin, M., Lin, H. & Ting, C. L. 1993 陡峭重力波产生的寄生毛细波: 一项结合时空测量的实验研究。*Journal of Fluid Mechanics* **255**, 597–620。Puthenveettil, B. A., Saha, A., Krishnan, S. & Hopfinger, E. J. 2018 浮泡的形状参数。 *Physics of Fluids* **30** (11), 112105。Sampath, K., Afshar-Mohajer, N., Chandrala, L. D., Heo, W. S., Gilbert, J., Austin, D. Koehler K. & Katz J. 2019 , , , 气泡破裂导致原油-分散剂油膜气溶胶化。 *Journal of Geophysical Research: Atmospheres* **124** (10), 5555–5578, arXiv: https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2018JD029338。Spiel, D. E. 1995 水面气泡破裂产生射流液滴的起源。 *Journal of Geophysical Research: Oceans (1978–2012)* **100** 3 4995 5006 (C ), –。

Thoroddsen, S. T., Takehara, K., Nguyen, H. D. & Etoh, T. G. 2018 液滴撞击坑塌陷过程中的奇异射流。 *Journal of Fluid Mechanics* **848**, R3。Walls, P. L. L., Henaux, L. & Bird, J. C. 2015 破裂气泡产生的射流液滴: 重力与黏度如何耦合作用以抑制液滴生成。 *Physical Review E* **92**, 021002。Walls, P. L. L. McRae O. Natarajan V. Johnson C. Antoniou C. & Bird J. C. , , , , , , , , , 2017 量化气泡破裂损伤悬浮细胞的可能性。 *Scientific reports* **7** 1 15102 ( ), 。

Woodcock, A. H., Kientzler, C. F., Arons, A. B. & Blanchard, D. C. 1953 气泡破裂产生的巨大凝结核。 *Nature* **172**, 1144–1145。Yang, Z., Ji, B., Ault, J. T. & Feng, J. 2023 油膜包覆气泡破裂时增强的奇异射流形成。 *Nature Physics* 页1–7。Yang, Z. Q., Tian, Y. S. & Thoroddsen, S. T. 2020 多种凹坑形状均可在不混溶液滴撞击坑塌陷时产生奇异射流。 *Journal of Fluid Mechanics* **904** 19 , A。Zeff, B. W., Kleber, B., Fineberg, J. & Lathrop, D. P. 2000 流体表面曲率塌陷与射流喷发中的奇异性动力学。 *Nature* **403** (6768), 401–404。