arXiv:2304.02462v1 [quant-ph] 5 Apr 2023

测量不完美情况下非破坏性量子轨迹的渐近稳定性

Ma¨el Bompais[1] 和 Nina Amini[1]

摘要——**我们研究经历量子非破坏性不完美测量的量子轨迹的渐近稳定性问题，也就是说，估计轨迹收敛到真实轨迹的问题，其中真实轨迹的参数和初始态不一定已知。我们给出关于估计初始态的条件，以及估计参数的有效区域，从而确保这种收敛。我们通过物理实例 [1] 的数值模拟展示这些结果，并讨论更现实的一般情形下的渐近稳定性，在这种情形中，退相干作用于系统。此时，系统的演化由一组新的 Kraus算符描述，它们不满足量子非破坏性条件。**

I. 引言

开放量子系统是与环境相互作用的系统。这种相互作用会导致信息从系统流失到环境，或反过来从环境流向系统；这种现象称为退相干，参见例如 [2]。开放量子系统可以通过测量过程进行观测，参见例如 [3]，[4]。

对量子系统进行直接测量会使其状态冻结，这种现象称为量子芝诺效应（参见例如 [3]）。除此之外，也可以间接测量量子系统。这意味着系统与一个探针（通常是光束）发生相互作用，随后测量散射光的某个可观测量。这种测量包含有关系统的信息，也会对系统产生随机的反作用。量子测量具有完全的概率性。在离散时间情形下，系统演化由马尔可夫链描述；在连续时间情形下，则由维纳过程和泊松过程驱动的随机主方程描述，具体取决于检测类型：同相或外差检测对应维纳过程，光子计数检测对应泊松过程，参见例如 [5]。这类随机过程称为量子轨迹（参见 [6]）或量子滤波器（参见 [7], [8], [9]）。

得益于 [10] 中引入的量子非破坏（QND）特性，可以更好地克服测量对系统造成的扰动。从本质上说，这一条件意味着可以为系统的希尔伯特空间找到一组基，使基中的每个元素在测量后保持不变。Serge Haroche 团队已实现量子非破坏测量，并开展了首个反馈稳定实验，旨在稳定量子电动力学腔内的光子数态 [11], [12], [1]。

在实际实验中，存在许多不完美因素，例如探测器效率、结果误差等。存在不完美因素时，量子轨迹的形式会更加复杂。量子轨迹对于参数和初始态设定错误的鲁棒性至关重要。例如，纠错码和量子反馈控制在保持轨迹行为对误差的鲁棒性方面发挥着重要作用，参见例如 [13], [14]。

关于初始态信息缺失时量子轨迹的渐近稳定性，即估计轨迹向真实轨迹收敛的问题，已有多篇论文采用不同方法进行了研究；然而，针对包含测量不完美因素的一般量子轨迹，建立必要条件仍是一个未解决的问题。在 [15], 中，作者给出了渐近稳定性的一项充分条件。在 [16], [17], 中，针对理想量子非破坏测量，作者证明了离散时间和连续时间轨迹的渐近稳定性。在 [18], 中，我们刻画了理想测量下量子轨迹渐近稳定性的必要条件。在 [19], 中，作者设计了一种包含多种不完美因素的最优离散时间滤波器，并通过证明保真度的次鞅性质（保真度的定义见 [20,第 9] 章）表明，当初始态设定正确时，该滤波器在平均意义上会逐渐接近理想滤波器。随后， [21], 将这一结果推广至连续时间滤波器。

本文研究测量为量子非破坏且存在不完美性的离散时间量子轨迹，更具体地说，我们研究 [19] 中提出的最优滤波器。首先，我们研究这些量子轨迹的量子态约化性质，并求得其收敛速率。为此，我们采用 [16] 中针对理想 QND 测量情形提出的方法（见第二节）。其次，我们假设初始态以及测量算符中出现的物理参数未知，并针对这些情形开展渐近稳定性分析，给出保证渐近稳定性的估计参数和估计初始态条件（见第三节）。这是首个除初始态外还考虑参数设定错误的此类渐近稳定性结果。最后，我们研究著名的光子盒实例 [1]，并通过数值结果观察到渐近稳定性。此外，我们还研究了该实例中由环境引起的退相干，

[1]Ma¨el Bompais 和 Nina H. Amini 任职于信号与系统实验室（L2S），CNRS-中央理工-巴黎萨克雷大学-巴黎南大学，3, Rue Joliot Curie, 91190 Gif-sur-Yvette, France（名.姓@centralesupelec.fr）。

并通过数值结果说明，尽管新的 Kraus算符不满足量子非破坏条件，关于初始态的渐近稳定性仍然成立（见第四节）。这为沿此方向开展进一步研究带来了鼓舞。

II. 量子非破坏不完美测量的指针态选择

A. 存在测量不完美的量子轨迹

我们考虑一个进行离散时间间接测量的量子系统。系统的希尔伯特空间记为 $\mathscr{H} \cong \mathbb{C}^d$，状态空间为密度矩阵的集合

$$\mathscr{D}(\mathscr{H}) = \{\rho \in \mathscr{L}(\mathscr{H}) | \rho = \rho^\dagger, \rho \geq 0, \mathrm{tr}(\rho) = 1\}.$$

对于理想探测器，系统状态随时间演化满足以下马尔可夫链

$$\rho_{n+1} = \frac{V_{i_n}\rho_n V_{i_n}^\dagger}{\mathrm{tr}\left(V_{i_n}\rho_n V_{i_n}^\dagger\right)},$$

其演化取决于随机测量结果 i_n ，该结果取值于有限集合 $\mathscr{Y}$.。在时刻 n 测得结果 $i_n = i$的概率为 $\mathrm{tr}\left(V_i\rho_n V\dagger_i\right)$·。算符 V_i称为 Kraus算符，并满足 $\sum_{i\in\mathscr{Y}} V\dagger_i V_i = I,$，其中 I表示作用于 $\mathscr{H}$.上的恒等算符

现在假设探测器存在偏差，会给出一些受干扰的测量结果。误差概率已知，并由相关矩阵 η 描述，使得 $\eta_{i,j}$ 表示测得 i 的概率，而理想探测器本应给出 j.在这种情况下，已知测量结果序列时，对系统状态的最佳估计由 [19]中推导出的最优滤波器给出

$$\rho_{n+1} = \frac{\Phi_{i_n}(\rho_n)}{\mathrm{tr}(\Phi_{i_n}(\rho_n))} \tag{1}$$

其中 $\Phi_i(\rho) = \sum_{i\in\mathscr{Y}} \eta_{i,j} V_j \rho V\dagger_j$并且测量结果由概率测度 $\mathbb{P}$ 控制，使得$\mathbb{P}(i_n = i) = \mathrm{Tr}\,(\Phi_{i_n}(\rho_n))$.

B. 量子非破坏不完美测量下的渐近行为

在本节中，我们旨在研究当测量满足如下定义的量子非破坏条件时，马尔可夫链 (1) 的渐近行为：

定义 *2.1*（量子非破坏测量）：如果基 $\mathscr{P}$ 中的任何元素 $|\alpha\rangle$ 不被测量改变，则该测量对基 $\mathscr{P}$ 满足非破坏条件。状态 $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ 称为指针态。

我们从此认为该条件已得到验证。对于 $|\alpha\rangle$ $\mathscr{P}$,中的一个元素，我们定义

$$p(i|\alpha) = \mathrm{tr}\,(\Phi_i(|\alpha\rangle\langle\alpha|))$$

其对应于当我们在状态 $|\alpha\rangle\langle\alpha|$.上执行测量时观察到$i$ 的概率。让我们也定义

$$p_n(i) = \mathrm{tr}\,(\Phi_i(\rho_n))$$

这对应于在时间 n 观察到 i 的概率.

在本文中，我们假设以下非退化假设成立。

假设 *2.1*：对于 $\alpha \neq \beta \in \mathscr{P}$，存在 $i \in \mathscr{Y}$使得：

$$p(i|\alpha) \neq p(i|\beta).$$

为了研究 ρ_n 的渐近行为，我们将关注以下量

$$q_\alpha(n) = \mathrm{tr}(|\alpha\rangle\langle\alpha|\rho_n),$$

它决定了时刻 n 指针态 $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ 中的占据概率。请注意，$q\alpha$ $(n) \in [0,1]$和 $\sum_{\beta\in\mathscr{P}} q^\beta(n) = 1.$
下面的定理证明了指针态的选择。

定理 *2.1*：存在一个随机变量 Υ ，其取值属于集合 $\mathscr{P}$ ，使得：

$$\lim_{n\to\infty} q_\Upsilon(n) = 1 \quad a.s.,$$

等价地

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = |\Upsilon\rangle\langle\Upsilon| \quad a.s.$$

此外， $\mathbb{P}(\Upsilon = \alpha) = q\alpha(0)$。
证明是直接改编了 [22] 中针对理想测量所用的论证。这利用了$q\alpha(n)$， 在非理想测量下仍然成立的鞅性质，以及假设 2.1，从而说明 $q\alpha(\infty)$ 和 $q^\beta(\infty)$ 不可能同时非零，其中 $\alpha \neq \beta$.

现在引入以下记号 $\mathbb{P}_\alpha(。) = p(.|\alpha)$。 下一个定理将明确指针态 Υ 的选择速度。

定理 *2.2*：设 α 满足 $q\alpha(0) \neq 0.$ 则：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{q_\alpha(n)}{q_\Upsilon(n)}\right) = -S(\mathbb{P}_\Upsilon||\mathbb{P}_\alpha) \quad \text{a.s.},$$

其中 $S(\mathbb{P}_\Upsilon||\mathbb{P}_\alpha) = \sum_i p(i|\Upsilon)\ln(\frac{p(i|\Upsilon)}{p(i|\alpha)})$ 是概率分布 $\mathbb{P}_\Upsilon$ 和 $\mathbb{P}_\alpha$ 之间的相对熵。

证明：首先，我们先证明如下递推关系

$$q_\alpha(n+1) = q_\alpha(n)\frac{p(i_n|\alpha)}{p_n(i_n)} \tag{2}$$

对 $q\alpha(n).$ 成立。我们注意到

$$\begin{aligned} q_\alpha(n+1) &= \mathrm{tr}\,(|\alpha\rangle\langle\alpha|\rho_{n+1}) \\ &= \mathrm{tr}\left(|\alpha\rangle\langle\alpha|\frac{\Phi_{i_n}(\rho_n)}{\mathrm{tr}\,(\Phi_{i_n}(\rho_n))}\right) \\ &= \frac{\mathrm{tr}\left(\Phi_{i_n}^\dagger(|\alpha\rangle\langle\alpha|)\rho_n\right)}{\mathrm{tr}\,(\Phi_{i_n}(\rho_n))} \\ &= \frac{\mathrm{tr}\left(\mathrm{tr}(\Phi_{i_n}^\dagger(|\alpha\rangle\langle\alpha|))|\alpha\rangle\langle\alpha|\rho_n\right)}{\mathrm{tr}\,(\Phi_{i_n}(\rho_n))}, \end{aligned}$$

其中，最后一个等式用到了测量的QND性质。接下来我们得到

$$q_\alpha(n+1)=\frac{\mathrm{tr}(\Phi_{i_n}^\dagger(|\alpha\rangle\langle\alpha|))\,\mathrm{tr}(|\alpha\rangle\langle\alpha|\rho_n)}{\mathrm{tr}(\Phi_{i_n}(\rho_n))},$$

由此得到所需的递推关系 (2)。证明的其余部分采用与 [16, Section 4.3] 中类似的论证。为便于阅读，我们给出这些论证的主要部分。

首先注意，关系 (2) 可以改写如下：

$$q_\alpha(n+1)=q_\alpha(0)\frac{\prod_{k=1}^n p(i_k|\alpha)}{\sum_\beta q_\beta(0)\prod_{k=1}^n p(i_k|\beta)}. \tag{3}$$

现在我们可以计算 α and ζ in $\mathscr{P}$ 的以下比值

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\ln\left(\frac{q_\alpha(n)}{q_\zeta(n)}\right)\\&=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{q_\alpha(0)}{q_\zeta(0)}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\ln(p(i_k|\alpha))-\ln(p(i_k|\zeta)).\end{aligned}$$

接着，只需利用这样一个事实：在由 $\mathbb{Q}_\gamma$ 定义的新概率 $\mathbb{Q}_\gamma$ 下，测量结果是独立同分布的。 $=\mathbb{P}(.|\Upsilon=\gamma)$，根据大数定律，我们可以得出以下关系

$$\mathbb{Q}_\zeta\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{q_\alpha(n)}{q_\zeta(n)}\right)=-S(\mathbb{P}_\zeta||\mathbb{P}_\alpha)\right)=1. \tag{4}$$

然而，我们旨在证明以下结论

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{q_\alpha(n)}{q_\Upsilon(n)}\right)=-S(\mathbb{P}_\Upsilon||\mathbb{P}_\alpha)\right)=1.$$

现在我们注意到

$$\mathbb{P}(.)=\sum_\gamma\mathbb{P}(\Upsilon=\gamma)\mathbb{P}(.|\Upsilon=\gamma)=\sum_\gamma q_\gamma(0)\mathbb{Q}_\gamma(.)$$

于是我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{q_\alpha(n)}{q_\Upsilon(n)}\right)=-S(\mathbb{P}_\Upsilon||\mathbb{P}_\alpha)\right)\\&=\sum_\gamma q_\gamma(0)\mathbb{Q}_\gamma\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{q_\alpha(n)}{q_\gamma(n)}\right)=-S(\mathbb{P}_\gamma||\mathbb{P}_\alpha)\right)\\&=\sum_\gamma q_\gamma(0)=1.\end{aligned}$$

■

III. 渐近稳定性

本节将分两种情形证明马尔可夫链 (1) 的渐近稳定性：第一种是不知道初始态，第二种是既不知道初始态，也不知道物理参数。

A. 未知初始态

当初始态 ρ_0 未知时，构造真实轨迹 ρ_n 的估计值 $\hat{\rho}_n$ 的一种自然方法是，任取一个估计初始态 $\hat{\rho}_0$ ，并根据我们掌握的测量结果 i_n （由真实系统 ρ_n发出），使其按照以下递推关系演化：

$$\hat{\rho}_{n+1}=\frac{\Phi_{i_n}(\hat{\rho}_n)}{\mathrm{Tr}(\Phi_{i_n}(\hat{\rho}_n))}. \tag{5}$$

与先前的研究类似，我们定义 $\hat{q}_\alpha(n)=\mathrm{tr}(|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{\rho}_n)$. 下一个定理表明，该系统关于初始态具有渐近稳定性。

定理 *3.1:* 设 α 满足 $\hat{q}_\alpha(0)\neq 0$。那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\hat{q}_\alpha(n)}{\hat{q}_\Upsilon(n)}\right)=-S(\mathbb{P}_\Upsilon||\mathbb{P}_\alpha)$$

几乎必然成立，其中 Υ 是由轨迹 ρ_n选出的指针态所对应的随机变量。因此，若对所有 α，$q_\alpha(0)\neq 0$均成立，那么

$$\lim_{n\to\infty}\hat{q}_\Upsilon(n)=1,$$

换言之

$$\lim_{n\to\infty}\hat{\rho}_n=|\Upsilon\rangle\langle\Upsilon|\ \ a.s.$$

换言之，估计轨迹 $\hat{\rho}_n$ 选择与真实轨迹 ρ_n相同的指针态。满足条件 $q_\alpha(0)\neq 0$ 对所有 α 成立的一种简单方法，是选择一个满秩态作为 $\hat{\rho}_0$ 。

证明： 证明主要基于如下说明：估计轨迹 (5) 具有式 (2) 中所述的相同递推性质，即对于 $\hat{q}_\alpha(n)$，这一点可以用与前文相同的方式得到。证明的其余部分与[16,第 4 节3]类似。 ■

B. 初始态未知且参数未知

现在假设 Kraus 映射 Φ_i 依赖于未知参数 θ，将它们记作 Φ_i^θ，于是我们得到对轨迹的新估计，该估计基于对 θ的 $\hat{}$ 估计 θ ；随后仍根据检测到的测量结果演化，如下所示

$$\hat{\rho}_{n+1}^{\hat{\theta}}=\frac{\Phi_{i_n}^{\hat{\theta}}\left(\hat{\rho}_n^{\hat{\theta}}\right)}{\mathrm{Tr}\left(\Phi_{i_n}^{\hat{\theta}}\left(\hat{\rho}_n^{\hat{\theta}}\right)\right)}.$$

$\hat{}\,\hat{}$ 我们定义以下量：$\hat{q}_\alpha^\theta(n)=\mathrm{tr}(|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{\rho}_n^\theta)$。 我们 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 还将记号 $\mathbb{P}_\alpha^\theta(.)=p^\theta(.|\alpha)$ 用于表示，其中 $p^\theta(i|\alpha)=\mathrm{tr}\left(\Phi^{\hat{}\theta}{}_i(|\alpha\rangle\langle\alpha|)\right)$。下面的定理表明，在适当的假设下，此情形中的量子轨迹具有渐近稳定性。

$\hat{}$定理*3.2*： 设 α 满足 $\hat{q}_\alpha^\theta(0)\neq 0$。那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\hat{q}_\alpha^{\hat{\theta}}(n)}{\hat{q}_\Upsilon^{\hat{\theta}}(n)}\right)=S(\mathbb{P}_\Upsilon|\mathbb{P}_\Upsilon^{\hat{\theta}})-S(\mathbb{P}_\Upsilon|\mathbb{P}_\alpha^{\hat{\theta}})\ \ a.s.,$$

其中， Υ 是表示由轨迹 ρ_n选出的指针态$\hat{}$的随机变量。因此，如果对所有 α，$q_\alpha^\theta(0) \neq 0$，并且

$$\underset{\beta\in\mathscr{P}}{argmin}\ S(\mathbb{P}_\alpha|\mathbb{P}_\beta^{\hat{\theta}}) = \alpha, \tag{6}$$

then

$$\lim_{n\to\infty} q_\Upsilon^{\hat{\theta}}(n) = 1 \quad a.s,$$

等价地

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n^{\hat{\theta}} = |\Upsilon\rangle\langle\Upsilon| \quad a.s.$$

证明：与之前一样，可以得到关于 $\hat{q}\hat{}_\alpha^\theta(n)$ 的类似递推关系。这使我们能够证明以下极限成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\hat{q}_\alpha^{\hat{\theta}}(n)}{\hat{q}_\Upsilon^{\hat{\theta}}(n)}\right) = \sum_i p(i|\Upsilon)\ln\left(\frac{p^{\hat{\theta}}(i|\alpha)}{p^{\hat{\theta}}(i|\Upsilon)}\right).$$

上述表达式可写为如下形式 s

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\hat{q}_\alpha^{\hat{\theta}}(n)}{\hat{q}_\Upsilon^{\hat{\theta}}(n)}\right) &= \sum_i p(i|\Upsilon)\ln\left(\frac{p(i|\Upsilon)}{p^{\hat{\theta}}(i|\Upsilon)}\right)\\ &\quad -\sum_i p(i|\Upsilon)\ln\left(\frac{p(i|\Upsilon)}{p^{\hat{\theta}}(i|\alpha)}\right)\\ &= S(\mathbb{P}_\Upsilon|\mathbb{P}_\Upsilon^{\hat{\theta}}) - S(\mathbb{P}_\Upsilon|\mathbb{P}_\alpha^{\hat{\theta}}).\end{aligned}$$

$\hat{}$ 现在，若 $argmin_{\beta\in\mathscr{P}} S(\mathbb{P}_\alpha|\mathbb{P}_\beta^\theta) = \alpha$对所有 α,均成立，则上述表达式对任意值 $\alpha \neq \Upsilon$, 都为负，因此 $\hat{q}\hat{}_\alpha^\theta(n)$ 必然趋于零。由于这些量之和为一，$\hat{q}\hat{}_\Upsilon^\theta(n)$ 收敛于一。 ■

IV. 数值研究

本节考虑由巴黎高等师范学院（ENS）的 Laboratoire Kastler-Brossel (LKB) 设计的实验装置。我们考察两种情形：首先是在存在不完美因素时进行量子非破坏测量；其次还考虑系统与环境相互作用所导致的退相干。

A. 量子非破坏测量：光子盒示例

我们关注 [1] 中所讨论的量子电动力学腔态的演化。该系统对应于腔内一个量子化的受限模式，其状态由Fock基表示为 $|n\rangle\langle n|$ ，表示腔内有 n 个光子。光子数态在此例中是指针态。这里假设希尔伯特空间是有限维的，腔内最多只能有 $n^{\max}$ 个光子。腔态通过量子非破坏测量进行估计。具体做法是将里德伯原子作为探针，逐个送入腔内，并在原子离开后立即进行测量。原子可以处于基态 $|g\rangle\langle g|$ 或激发态 $|e\rangle\langle e|$.。在这项实验中，存在多种误差来源。与腔相互作用的原子样本可能为空，概率为 p_0,；含有一个原子的概率为 p_1 ；含有两个原子的概率为 p_2.。其他误差来源包括探测器的效率，记为 ε_d ，它表示探测器探测到原子的概率。最后一类误差是可能出现错误的探测结果。我们用 η_g （分别用 η_e）表示原子被探测为g （分别为e），而其真实状态为e （分别为g）的概率。形式上，探测结果有 7 种可能：$i \in \{no, g, e, gg, ge, ee\}$，分别对应于没有原子、一个处于$g$态或$e$态的原子、两个原子均处于$g$态、一个处于$g$ 态而另一个处于e 态，或两个原子均处于e态。下面给出与上述各探测结果相对应的 Kraus算符形式：

$$\begin{aligned}&V_{no} = \sqrt{p_0}I, \quad V_g = \sqrt{p_1}\cos\phi_N, \quad V_e = \sqrt{p_1}\sin\phi_N\\ &V_{gg} = \sqrt{p_2}\cos^2\phi_N, \quad V_{ge} = V_{eg} = \sqrt{p_2}\cos\phi_N\sin\phi_N,\\ &V_{ee} = \sqrt{p_2}\sin^2\phi_N,\end{aligned}$$

其中 $\phi_N = \frac{\phi_0}{(N+\frac{1}{2})+\phi_R}2$ ，其中 ϕ_0和 ϕ_R对应物理参数，N 表示光子数算符。

相关矩阵的元素 η_{ij} （其中 $i, j \in$ {no， g， e， gg， ge， ee}）由图6所示的表格确定。随后，系统动力学由方程（1）描述。

我们用于模拟真实轨迹的取值为$p_0 = 0.9$、$p_1 = 0.05$、$p_2 = 0.05$、 $\phi_0 = 0.78$、 $\phi_R = -0.44$。对于相关矩阵，取值为 $\varepsilon_d = 0.9$、 $\eta_g = 0.1$、和 $\eta_e = 0.1$。真实初始态 ρ_0 选为随机纯态，而估计初始态 $\hat{\rho}_0$ 选为完全混合态。

未知初始态和参数

这里我们尝试通过数值方法验证初始态和物理参数未知的轨迹的渐近稳定性。就稳定性而言，我们已经看到，对估计初始态没有实际限制（只需选择满秩态即可）。至于估计参数，根据定理3.2，只需满足公式6即可；也就是说，对于任意指针态，使用估计参数生成的概率分布都比使用真实参数、由同一指针态生成的概率分布更接近。为简单起见，我们假设只有参数 ϕ_0 和ϕ_R存在误差。更确切地说，我们通过数值计算 $\mathbb{P}_\alpha$与 $\mathbb{P}\hat{}_\beta^\theta$之间的相对熵，其中$\hat{\theta} = (\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_R)$是对 $\theta = (\phi_0, \phi_R)$的估计。 图1中绘出了满足上述条件的参数。

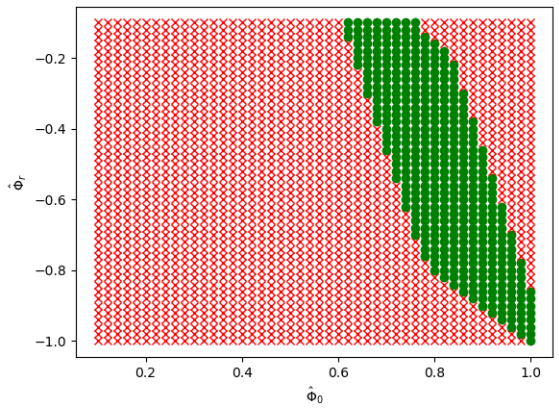

图 1. 假设 (6) 的有效性。验证该假设时标为绿色；未验证时标为红色。最大光子数为 $n^{\max} = 4$. 真实参数为 $\phi_0 = 0.78$ 和 $\phi_R = -0.44$.

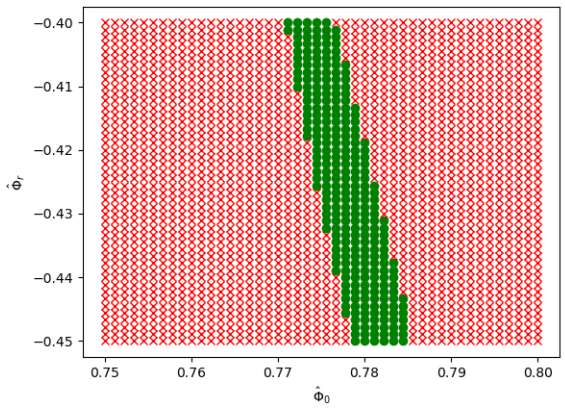

图 3. 假设 (6) 的有效性。验证该假设时标为绿色；未验证时标为红色。最大光子数为 $n^{\max} = 9$. 真实参数为 $\phi_0 = 0.78$ 和 $\phi_R = -0.44$.

下面是指针态中布居的演化示例，即从$\alpha = 0$ 到 $\alpha = 4$的量$q\alpha(n)$和$\hat{}q\alpha(n)$。

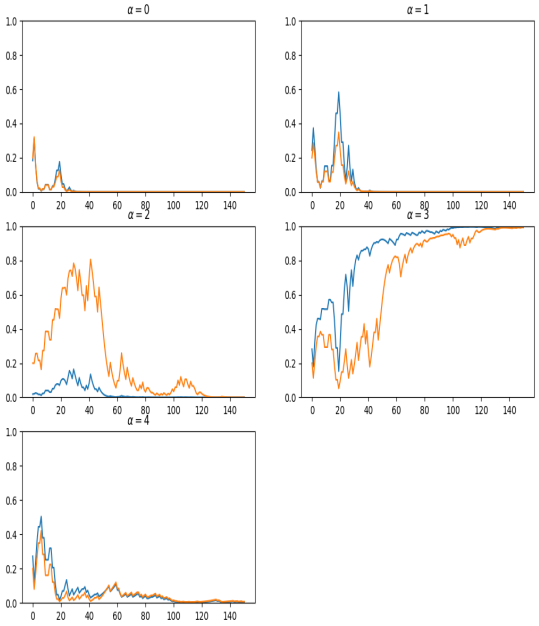

图 2. 不同指针态的布居随时间的变化。真实轨迹标为蓝色，估计轨迹标为黄色。估计参数为 $\hat{}\phi_0 = 0.83$ 和 $\hat{\phi}_R = -0.40$.

接下来，类似于图1，我们绘制了对于更大的$n^{\max}$，验证条件(6)的参数，这表明该区域现在窄得多（为了更好的可见性，该图已放大）。

B. 超越量子非破坏情形：考虑退相干效应的光子盒示例

本节仍以光子盒为例，但现在将腔场与环境之间的相互作用，即退相干，纳入考虑。退相干可以通过超算符T 对腔态的作用来描述，如下所示

$$T(\rho) = L_0 \rho L_0^\dagger + L_+ \rho L_+^\dagger + L_- \rho L_-^\dagger,$$

其中 $L_0 = I - \frac{\varepsilon}{(1+2n_{th})} 2\, N \; - \frac{\varepsilon}{n_{th}} 2\, I$ 对应于无光子跃迁算符，$L_+ = \sqrt{\varepsilon(1+n_{th})}a$ 表示从环境中吸收一个光子，而 $L_- = \sqrt{\varepsilon n_{th}}a^\dagger$表示向环境中损失一个光子。实验参数为 $0 \le \varepsilon, n_{th} \ll 1$. 记号 a和 $a^\dagger$ 分别对应湮灭算符和产生算符。

整个演化可由 21 个 Kraus算符描述，其形式为 $L_d V_i$，其中 $i \in \{no, g, e, gg, ge, ee\}$和 $d \in \{0, +, -\}$. 然而，显然这些新的 Kraus算符不满足量子非破坏性质。

在此，我们旨在通过模拟研究存在退相干和不完美因素时的渐近稳定性。这一次，由于 Kraus算符不再满足量子非破坏性质，我们无法考察指针态中的布居。在这种情况下，真实轨迹通常不会收敛到某个状态。不过，我们可以考虑真实轨迹与估计轨迹之间的保真度[1] 。我们假设参数已知，但无法获取初始态。图 4 展示了真实状态 ρ_n 与估计状态$\hat{\rho}_n$之间的保真度趋近于 1 的过程。

[1]两个状态 ρ和$\hat{}\rho$之间的保真度定义为 $\mathcal{F}(\rho, \hat{}\rho) = \mathrm{tr}^2 \sqrt{\sqrt{\rho}\hat{}\rho\sqrt{\rho}} \in [0, 1]$.

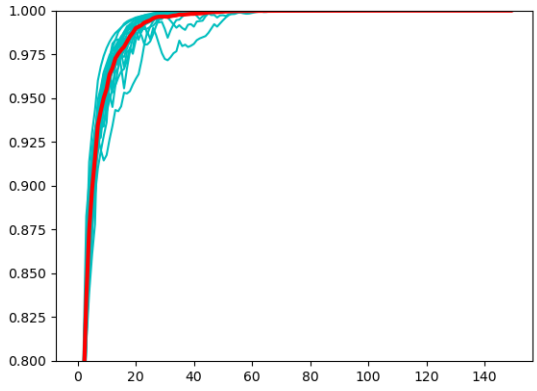

图 4. 存在退相干且初始态未知时，真实轨迹与估计轨迹之间的保真度。红色曲线表示 20 个样本的平均值。此处 $n^{\max} = 4$.

在图 5 中，我们假设参数也是未知的，因此估计轨迹随估计参数$\hat{}\ \phi_0$，$\hat{}\phi_R$演化。我们观察到，在这种情况下，保真度不会收敛到 1。

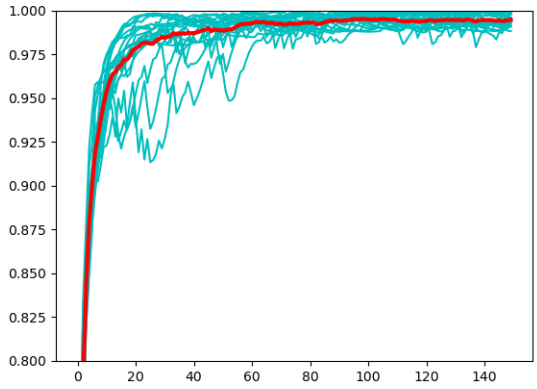

图 5. 存在退相干且初始态和参数未知时，真实轨迹与估计轨迹之间的保真度。红色曲线表示 20 个样本的平均值。此处 $n^{\max} = 4$，$\hat{}\Phi_0 = 0.83$，和$\hat{\Phi}_R = -0.40$.

V. 结论

本文证明，在量子非破坏不完美测量下演化的离散时间量子轨迹关于初始态具有渐近稳定性。这意味着估计轨迹会收敛到真实轨迹。此外，我们考虑物理参数未知的情形，并给出一个条件，确保在这一此前据我们所知尚未被文献探讨的新情形下仍具有渐近稳定性。数值结果表明，对于著名的光子盒示例 [1]，即使存在退相干和测量不完美因素，且表示这一情形的Kraus算符不满足量子非破坏性质，从任意初始态出发的估计轨迹仍会收敛到具有正确初始态的真实轨迹。

然而，参数方面的稳定性似乎并非在一般情况下都能得到保证。这些问题值得进一步研究。

致谢

作者感谢 Igor Dotsenko 提供了有益且启发性的讨论。本研究得到法国国家研究署项目 Q-COAST ANR-19-CE48-0003、QUACO ANR-17-CE40-0007 和 IGNITION ANR-21-CE47-0015 的资助。

参考文献

[1] C. Sayrin、I. Dotsenko、X. Zhou、B. Peaudecerf、T. Rybarczyk、S. Gleyzes、P. Rouchon、M. Mirrahimi、H. Amini、M. Brune、J.M. Raimond 和 S. Haroche。实时量子反馈制备并稳定光子数态。《自然》, 477(7362):73–77, 2011. [2] H-P. Breuer 和 F. Petruccione。《开放量子系统理论》。牛津大学出版社, 2002. [3] A. Barchielli 和 M. Gregoratti。《连续时间中的量子轨迹与测量：扩散情形》, 第 782 卷。Springer, 2009.[4] H. M. Wiseman 和 G. J. Milburn。《量子测量与控制》。剑桥大学出版社, 2009. [5] D. F. Walls 和 G. J. Milburn。《量子光学》。量子光学, 第 397–420 页, 2008. [6] H. Carmichael。《量子光学的开放系统方法》, 第 18 卷。施普林格科学与商业媒体, 2009. [7] V. P. Belavkin。白量子噪声下马尔可夫信号的量子滤波。载于《量子通信与测量》, 第 381–391 页。Springer, 1995. [8] V. P. Belavkin。量子随机微积分与量子非线性滤波。《多元分析杂志》, 42(2):171–201, 1992. [9] L. Bouten、R. van Handel 和 M. R. James。量子滤波导论。《SIAM 控制与优化杂志》, 46(6):2199–2241, 2007. [10] V. Braginsky 和 F. Khalili。《量子测量》。剑桥大学出版社, 1992. [11] S. Haroche。诺贝尔演讲：控制盒中光子并探索量子与经典的边界。《现代物理评论》, 85(3):1083, 2013. [12] J-M. Raimond 和 S. Haroche。《探索量子：原子、腔与光子》。牛津大学出版社, 82:86, 2006. [13] D. A. Lidar 和 T. A. Brun。《量子纠错》。剑桥大学出版社, 2013. [14] H. M. Wiseman。连续反馈的量子理论。《物理评论 A》, 49(3):2133, 1994. [15] R. van Handel。量子马尔可夫滤波器的稳定性。《无限维分析、量子概率及相关主题》, 12(01):153–172, 2009. [16] M. Bauer、T. Benoist 和 D. Bernard。重复量子非破坏性测量：收敛性与连续时间极限。载于《亨利·庞加莱年刊》, 第 14 卷, 第 639–679 页。Springer, 2013. [17] T. Benoist 和 C. Pellegrini。标准非破坏性条件下量子滤波器的大时间行为与收敛速率。《数学与理论物理通讯》, 331(2):703–723, 2014. [18] N. H. Amini、M. Bompais 和 C. Pellegrini。关于量子轨迹及其切萨罗平均的渐近稳定性。《Journal of Physics A: 数学与理论》, 54(38):385304, 2021. [19] A. Somaraju、I. Dotsenko、C. Sayrin 和 P. Rouchon。具有测量不完美因素的离散时间量子滤波器的设计与稳定性。载于《2012 年美国控制会议（ACC）》, 第 5084–5089 页。IEEE, 2012. [20] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang。《量子计算与量子信息》。剑桥大学出版社, 2010. [21] H. Amini 、 C. Pellegrini 和 P. Rouchon。具有测量不完美因素的连续时间量子滤波器的稳定性。《俄罗斯数学物理杂志》, 21(3):297–315, 2014. [22] M. Bauer 和 D. Bernard。重复量子非破坏性测量的收敛与波函数坍缩。《物理评论 A》, 84(4):044103, 2011.

$i \backslash j$	no	g	e	gg	ee	ge或 eg
no	1	$1-\varepsilon_d$	$1-\varepsilon_d$	$(1-\varepsilon_d)^2$	$(1-\varepsilon_d)^2$	$(1-\varepsilon_d)^2$
g	0	$\varepsilon_d(1-\eta_g)$	$\varepsilon_d\eta_e$	$2\varepsilon_d(1-\varepsilon_d)\ (1-\eta_g)$	$2\varepsilon_d\ (1-\varepsilon_d)\ \eta_e$	$\varepsilon_d\ (1-\varepsilon_d)\ \ (1-\eta_g+\eta_e)$
e	0	$\varepsilon_d\eta_g$	$\varepsilon_d\ (1-\eta_e)$	$2\varepsilon_d\ (1-\varepsilon_d)\ \eta_g$	$2\varepsilon_d\ (1-\varepsilon_d)\ \ (1-\eta_e)$	$\varepsilon_d\ (1-\varepsilon_d)\ \ (1-\eta_e+\eta_g)$
gg	0	0	0	$\varepsilon_d^2(1-\eta_g)^2$	$\varepsilon_d^2\eta_e^2$	$\varepsilon_d^2\eta_e(1-\eta_g)$
ge	0	0	0	$2\varepsilon_d^2\eta_g(1-\eta_g)$	$2\varepsilon_d^2\eta_e(1-\eta_e)$	$\varepsilon_d^2((1-\eta_g)\ (1-\eta_e)\ +\eta_g\eta_e)$
ee	0	0	0	$\varepsilon_d^2\eta_g^2$	$\varepsilon_d^2(1-\eta_e)^2$	$\varepsilon_d^2\eta_g\ (1-\eta_e)$

图 6. 显示 η_{ij}元素的表格，摘自 [19]。