arXiv:2304.02486v1 [math-ph] 5 Apr 2023

WI绕数、态密度与加速度

XUEYIN WANG、ZHENFU WANG、JIANGONG YOU 和 QI ZHOU

摘要。绕数和态密度是非自伴准周期薛定谔算子的两个基本物理量，它们分别反映了在Dirichlet边界条件下，截断算子的特征行列式的零点关于复化相位和能量的渐近分布。我们将证明，绕数实际上就是 Avila 的加速度；此外，根据非自伴薛定谔算子的广义 Thouless 公式及 Avila 全局理论，绕数与态密度也密切相关。

1. 引言

我们研究解析准周期薛定谔算子

$$(H\psi)_n = \psi_{n+1} + \psi_{n-1} + v(x+n\alpha)\psi_n = E\psi_n, \tag{1.1}$$

其中 $x \in \mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$ 是相位， $v \in C^\omega(\mathbb{T}^d, *)$ 是势函数， α 是频率，且 $(1, \alpha)$ 有理无关。这里 $*$ 表示 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，则 (1.1) 定义了作用于 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上的自伴或非自伴准周期薛定谔算子（物理文献中称为非厄米准晶）。

自伴情形下，自20世纪80年代前后几乎周期性研究兴起以来 [42], ，由于其在物理学中的重要性 [8, 46] 以及令人惊讶的谱丰富性 [2, 3, 5, 7, 13, 24, 31, 33]，近年来出现了许多突破（详情请参阅 [32]及其中的参考文献）。另一方面，尽管厄米性是量子力学的核心，近年来在耗散控制方面的实验进展为在开放的经典与量子系统中设计非厄米哈密顿量带来了前所未有的灵活性[27]；非厄米哈密顿量展现出许多没有厄米对应物的丰富现象 [1, 10], ，而这些现象都可以在非厄米准晶中呈现 [40, 30]。本文更关注非自伴情形。

研究（1.1）的一种有效方法是采用准周期 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 余循环方法。回顾一下，特征值方程 $H\psi = E\psi$ 等价于一族特定的离散动力系统，称为薛定谔余循环 $(\alpha, A) \in \mathbb{T}^d \times C^\omega(\mathbb{T}^d, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$, 即,

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = A(x+n\alpha) \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix}, \text{ where } A(x) = S_{E,v}(x) = \begin{pmatrix} E - v(x) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

著名的 Avila 全局理论通过两个动力学不变量对单频解析拟周期 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 余循环进行分类：李雅普诺夫指数和加速度。下面介绍这两个不变量：李雅普诺夫指数定义为

$$L(E, \mathrm{i}y) := L(\alpha, A(\cdot + \mathrm{i}y)) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{1}{n} \log \|M_n(x+\mathrm{i}y)\| \mathrm{d}x,$$

其中， M_n 是 n 步传递矩阵，定义为

$$M_n(x+\mathrm{i}y)=A(x+\mathrm{i}y+n\alpha)\cdots A(x+\mathrm{i}y+\alpha).$$

在单频率情形下 $(d=1)$，根据 Avila 全局理论 [2], ， Lyapunov 指数是关于 y的分段线性凸函数，并且可以定义(α的加速度 $A_{\mathrm{i}y}$)： $=(\alpha,\ A(\cdot+\mathrm{i}y))$ 如下：

$$\omega^{\pm}(E,\mathrm{i}y):=\omega^{\pm}(\alpha,A_{\mathrm{i}y}):=\lim_{\epsilon\to0^{\pm}}\frac{1}{\epsilon}(L(\alpha,A_{\mathrm{i}(y+\epsilon)})-L(\alpha,A_{\mathrm{i}y})),$$

即 $L(E$ 关于 y 的右（左）导数，记为 $L(E,\mathrm{i}y)$ 。Avila 的关键观察是，加速度是量子化的： $\omega(\alpha,A_{\mathrm{i}y})\in\mathbb{Z}$。这一观察在他的全局理论 [2] 中发挥着基础性作用。

另一方面，在研究（1.1）时，无论是在物理设定下 [1, 10, 27, 30, 39, 40]还是在数学设定下[3, 4, 13, 23, 24, 26, 31, 33], 一个关键对象是具有 Dirichlet边界条件的截断行列式

$$\begin{aligned}f_n(x,E)&:=\det(H_n(x)-E)\\&:=\det\begin{pmatrix}v(x+\alpha)-E & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & v(x+2\alpha)-E & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & v(x+n\alpha)-E\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

如果 v 是复数，那么在研究 $f_n(x,E)$ 的零点分布时，会出现两个基本物理量，即绕数和态密度。本文将证明，绕数与态密度密切相关，而 Avila 的加速度在二者之间架起了桥梁。

1.1. 绕数与拓扑相变。

下面介绍第一个物理量，称为 绕数 [27, 39, 40]:

$$\nu^{\pm}(E,\mathrm{i}y)=\lim_{\epsilon\to0^{\pm}}\lim_{n\to\infty}\nu_n(E,\mathrm{i}(y+\epsilon)),$$

其中

$$\nu_n(E,\mathrm{i}y)=\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}n}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\log\det(H_n(x+\mathrm{i}y)-E)\mathrm{d}x.$$

可以证明，绕数是一个整数，代表一维非厄米晶格中的拓扑相。因此，可以通过检测绕数 [35] 的变化来观察非厄米系统的拓扑相变。

我们先来解释绕数的物理意义。设 $E_j(x+\mathrm{i}y), j=1,\cdots,n$ 是 $H_n(x+\mathrm{i}y)$ 的特征值。那么， $\det(H_n(x+\mathrm{i}y)-E)=\prod_{j=1}^n(E_j(x+\mathrm{i}y)-E)$ 意味着绕数可以表示为

$$\nu_n(E,\mathrm{i}y)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\arg(E_j(x+\mathrm{i}y)-E)\mathrm{d}x,$$

其中， $\arg(E_j(x+\mathrm{i}y)-E)$ 是复能量 $E_j(x+\mathrm{i}y)-E$的辐角。从这个意义上说，非平凡的绕数表示复本征能量围绕基点 E旋转的次数。

为清楚说明绕数与加速度之间的关系，我们考虑（1.1）的复扩展：

$$(H_{v,y}\psi)_n = \psi_{n+1} + \psi_{n-1} + v(x + \mathrm{i}y + n\alpha)\psi_n, \tag{1.2}$$

并将 $\Sigma_{v,y}$ 记为 $H_{v,y}$的谱。如[27], 绕数$\nu^-(E,\mathrm{i}y) = \nu^+(E,\mathrm{i}y)$ 若基点 $E \notin \Sigma_{v,y}$, 即 $(\alpha, S_{E,v})$ 是一致双曲的[1]中所述。对于$E \in \Sigma_{v,y}$ 具有正李雅普诺夫指数的情形，我们有

定理 1.1. 对于任意 $(\alpha, v) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \times C^\omega(\mathbb{T}, \mathbb{C})$，若 $L(E,\mathrm{i}y) > 0$，则

$$\begin{aligned} \nu^+(E,\mathrm{i}y) &= \omega^+(E,\mathrm{i}y), \\ \nu^-(E,\mathrm{i}y) &= \omega^-(E,\mathrm{i}y). \end{aligned} \tag{1.3}$$

特别地，若 $E \notin \Sigma_{v,y}$，则

$$\nu^+(E,\mathrm{i}y) = \nu^-(E,\mathrm{i}y) = \omega^+(E,\mathrm{i}y) = \omega^-(E,\mathrm{i}y).$$

注 1.1. (1.3) 最早在 [39], 中以物理学层面的证明首次提出，此处我们给出严格证明。

如前所述，绕数的重要性体现为非厄米哈密顿量中的拓扑相变。对于某些模型，可以精确确定相变点。例如，考虑以下简单但经过充分研究的物理模型 [30, 39, 40]:

$$(H_{2\lambda\cos,y}\psi)_n = \psi_{n+1} + \psi_{n-1} + 2\lambda\cos(x + \mathrm{i}y + n\alpha)\psi_n, \tag{1.4}$$

即带有复扩展的几乎 Mathieu 算子。于是我们有如下结论：

推论 1.1. 设 $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\lambda \in (0, 1)$。则 $-\log\lambda$是(1.4)的拓扑转变点。更准确地说，有如下结论：

(1) 若 $0 < y < -\log\lambda$，则 $\nu^+(E, \mathrm{i}y) = \nu^-(E, \mathrm{i}y) = 0$ 对任意 $E \notin \Sigma_{2\lambda\cos,\,0}$均成立。(2) 若 $y > -\log\lambda$，则存在 $E \notin \Sigma_{2\lambda\cos,\,0}$ 使得 $\nu^+(E, \mathrm{i}y) = \nu^-(E, \mathrm{i}y) = 1$。

注 1.2. 此前已在 [48] 中证明，若 $0 < y < -\log\lambda$，则 $\Sigma_{2\lambda\cos,\,0} = \Sigma_{2\lambda\cos\,y}$。

为分析一般单频解析准周期薛定谔算子的拓扑转变，可以应用 Ge-Jitomirskaya-You-Zhou [20] 发展的定量全局理论来研究转变点。

我们的第二个应用涉及 $\det(H_n(z) - E)$ 的零点分布与相位 z之间的关系。正如 Goldstein-Schlag [23] 最先指出的：“事实上，这些零点沿着某些圆周相对均匀地分布。”这里，我们精确给出这些圆周的位置。记 $\mathcal{A}(r_1, r_2)$ 为环域 $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$，则$f_n(E,z)$ 在环域 $\mathcal{A}(\mathrm{e}^{-h}, \mathrm{e}^h)$ 上的 z 中全纯，只要 v 在条带 $\mathbb{T}_h$ 上解析，其中$\mathbb{T}_h = \{x + \mathrm{i}y : x \in \mathbb{T}, y \in (-h, h)\}$。令 $\mathcal{Z}_{f_n} = \{z \in \mathbb{C} : f_n(z) = 0\}$，并将零点的个数（按重数计）记为

$$N_n(r_1, r_2) = \#\{z \in \mathcal{Z}_{f_n} : z \in \mathcal{A}(r_1, r_2)\}.$$

接下来我们证明，绕数实际上计数的是环域中零点的平均数量：

[1]可参阅命题 2.1 。

推论 1.2. 设 $(\alpha,\ v)\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\times C^\omega(\mathbb{T}_h,\ \mathbb{C})$。假设 $L(E,\ \mathrm{i}y)>0$ 对任意 $y\in[y_1,\ y_2]$均成立。那么我们有

(1)
$$\lim_{\epsilon\to0^+}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}N_n(\mathrm{e}^{-(y_2+\epsilon)},\mathrm{e}^{-(y_1-\epsilon)})=\nu^+(E,\mathrm{i}y_2)-\nu^-(E,\mathrm{i}y_1). \tag{1.5}$$
尤其是,
$$\lim_{\epsilon\to0^+}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}N_n(\mathrm{e}^{-(y+\epsilon)},\mathrm{e}^{-(y-\epsilon)})=\nu^+(E,\mathrm{i}y)-\nu^-(E,\mathrm{i}y).$$

(2) 此外 ,
$$\lim_{\epsilon\to0^+}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}N_n(\mathrm{e}^{-\epsilon},\mathrm{e}^{\epsilon})=2\nu^+(E,\mathrm{i}0),$$
if $v\in C^\omega(\mathbb{T},\mathbb{R})$, $E\in\mathbb{R}$ *with* $L(E,\mathrm{i}0)>0$.

事实上，简单计算表明,
$$\begin{aligned}\nu_n(E,\mathrm{i}y_2)-\nu_n(E,\mathrm{i}y_1)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}n}\oint_{|z|=\mathrm{e}^{-y_1}}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\mathrm{d}z-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}n}\oint_{|z|=\mathrm{e}^{-y_2}}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{n}N_n(\mathrm{e}^{-y_2},\mathrm{e}^{-y_1})+\frac{1}{2n}\#\{z\in\mathcal{Z}_{f_n}:z\in\partial\mathcal{A}(\mathrm{e}^{-y_2},\mathrm{e}^{-y_1})\}.\end{aligned} \tag{1.6}$$
因此推论 1.2 立即由式（1.6）和定理 1.1 得出。

注意，根据 Avila 全局理论 [2], $L(E,\mathrm{i}y)$ 是凸的，分段线性于 y，我们记 $\{\gamma_j\}$ 转折点的集合。推论 1.2 意味着这些所谓的“某些圆”是同心圆，且圆的半径恰好是 $\{\mathrm{e}^{-\gamma_j}\}$，见图 1中的示意图。此外，如果 $v\in C^\omega(\mathbb{T},\mathbb{R})$，则根据零点的对称性，同心圆的数量在 $E\in\Sigma_{v,y}$ 时为奇数，并且在 $E\in\mathbb{R}\backslash\Sigma_{v,y}$时为偶数。

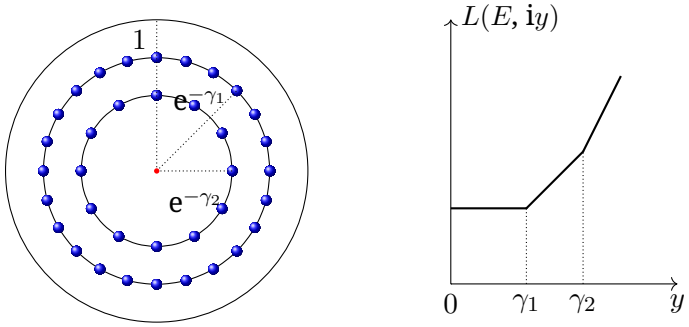

图 1. 圆的位置。

注 1.3. 此前，*Han-Schlag* 通过在环域上发展位势理论 [28]，对(1.5) 在假设 $\alpha\in$SDC[2] 的条件下给出了定量估计:
$$\left|\frac{1}{n}N_n(\mathrm{e}^{-(y_2+\epsilon)},\mathrm{e}^{-(y_1-\epsilon)})-\nu^+(E,\mathrm{i}y_2)+\nu^-(E,\mathrm{i}y_1)\right|\leqslant C\epsilon^{-2}n^{-c}.$$

[2]如果存在 $\kappa>0$ 和 $\tau>1$, 使得
$$\|\mathbf{k}\alpha\|_{\mathbb{T}}\geqslant\frac{\kappa}{|\mathbf{k}|(\log|\mathbf{k}|)^\tau},\ \text{for all}\ \mathbf{k}\neq0.$$

1.2. **态密度与 Thouless公式。**下面考虑第二个物理量：态密度，它描述能谱的极限分布。对于任意 $x \in \mathbb{T}^d$，行列式 $f_n(E, x+\mathrm{i}y)$ 是关于 E 的 n 次多项式。其根$E_j(x+\mathrm{i}y), j = 1, \cdots, n$ 恰好是截断算子 $H_n(x+\mathrm{i}y)$的特征值。将 $H_n(x+\mathrm{i}y)$ 的归一化特征值计数测度记为

$$\mathrm{d}\mathcal{N}_n^{x+\mathrm{i}y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{E_j(x+\mathrm{i}y)}.$$

于是，态密度测度定义为 $\mathrm{d}\mathcal{N}_n^{x+\mathrm{i}y}$ 在 $n \to \infty$ 趋于极限时的弱极限。该极限存在，并且对一组勒贝格测度满的 $x \in \mathbb{T}^d$ 取值都相同，我们将其记为 $\mathrm{d}\mathcal{N}^{\mathrm{i}y}$。在自伴情形（$v$ 为实值且 $y = 0$）下，我们将其记为 $\mathrm{d}\mathcal{N}$。

20 世纪 70 年代初，对于一维安德森模型，Thouless [45] 观察到（并给出了物理层面的证明）

$$L(E) = \int_{\mathbb{C}} \log|\tilde{E} - E| \mathrm{d}\mathcal{N}(\tilde{E}),$$

文献中称之为 Thouless公式。该公式通过希尔伯特变换，将一个数学物理对象——态密度——与一个动力系统对象——薛定谔余循环的李雅普诺夫指数——联系起来。本文将Thouless公式推广到非自伴准周期薛定谔算子。为陈述这一结果，我们用 $\mathrm{d}m$ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 上的勒贝格测度，并且

$$\mathcal{Z}_{L,y} = \{E \in \mathbb{C} : L(E, \mathrm{i}y) = 0\}.$$

设 $\mathbb{T}_h^d = \mathbb{T}_h \times \cdots \times \mathbb{T}_h$ 为具有解析延拓的乘积环面。则有如下结论：

定理1.2。 设 $v \in C^\omega(\mathbb{T}_h^d, \mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{T}^d$满足 $(1, \alpha)$ 有理无关。假设$m(\mathcal{Z}_{L,y}) = 0$。那么

(1) （弱收敛）对于几乎处处的 $x \in \mathbb{T}^d$,

$$\mathrm{d}\mathcal{N}_n^{x+\mathrm{i}y} \rightharpoonup \mathrm{d}\mathcal{N}^{\mathrm{i}y} := \frac{1}{2\pi}\Delta L(E, \mathrm{i}y)\mathrm{d}m, \quad as\ n \to \infty,$$

其中 Δ 是关于 E的分布拉普拉斯算子。

(2) （*Thouless*公式）对于每个 $E \in \mathbb{C}$,

$$L(E, \mathrm{i}y) = \int_{\mathbb{C}} \log|\tilde{E} - E| \mathrm{d}\mathcal{N}^{\mathrm{i}y}(\tilde{E}). \tag{1.7}$$

注1.4。 二维谱，即 $m(\mathcal{Z}_{L,y}) > 0$，确实存在于某些非自伴准周期雅可比算子中，而 *Thouless*公式 (1.7)在这种情况下不成立。详见我们即将发表的论文 [47]。

我们先说明建立非自伴算子的 Thouless公式的动机。

首先，在非厄米物理中，Thouless公式很重要，因为它提供了复谱处局域长度（李雅普诺夫指数的倒数）的近似表达式 [40, 16], 即，对于足够大的 n

$$L(E, \mathrm{i}y) \approx \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \log|E_j(x+\mathrm{i}y) - E|,$$

其中 $E_j(x+\mathrm{i}y)$ 是 $H_n(x+\mathrm{i}y)$ 的特征值。

第二个研究动机源自近期对定量单频薛定谔算子全局理论的研究 [20]，即通过研究其对偶算子来研究（1.2）

$$(\mathcal{L}u)(n)=\sum_{k=-d}^{d}\mathrm{e}^{-ky}\hat{v}_k u_{n+k}+2\cos(\theta+n\alpha)u_n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

核心分析归结为同时为（1.2）及其对偶算子建立 Thouless 型公式。在自伴情形（即 $y=0$）中，Haro-Puig 曾对其进行研究[29]，；然而，由于缺少谱定理，他们的方法无法推广到非自伴情形。

现在让我们回顾 Thouless 公式的研究进展。在一维情形下，Avron-Simon [9] 给出了 Thouless 公式的第一个严格证明。随后，Craig-Simon[19] 利用李雅普诺夫指数的次调和性给出了一个简洁的证明。在多维情形下，Craig-Simon [18] 证明了条带上具有有界遍历平稳势的薛定谔算子的 Thouless 公式。在[36]，，Kotani-Simon 证明了条带上一般有界可测遍历薛定谔算子的 Thouless 公式。最后，Chapman-Stolz [17]得到了一个更一般的 Thouless 公式，适用于具有动态定义元素的自伴分块雅可比矩阵。Thouless 公式自动推出态密度测度是对数 Hölder [19] 连续的，而这对自伴拟周期薛定谔算子而言是最优的 [6]。

以上所有结果都关注自伴薛定谔算子，即势函数为实数的情形。据我们所知，如果薛定谔算子的势函数为复数，唯一已有的结果是 Goldsheid-Khoruzhenko [22]，的工作，其中他们假设势函数是复独立同分布随机序列。

1.3. **关系与证明方法。**定理1.1 和定理1.2 描述了 $\det(H_n(z)-E)$ 关于相位 z和能量 E的零点分布。这两类分布通过以下公式巧妙地联系起来：

推论 ary 1.3. 令 $(\alpha,\ v)\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\times C^\omega(\mathbb{T}_h,\ \mathbb{R})$。设 $|y|<h$和 $L(E,\ \mathrm{i}0)>0$。则

$$\int_0^y\nu^+(E,\mathrm{i}\tilde{y})\mathrm{d}\tilde{y}+L(E,\mathrm{i}0)=\int_{\mathbb{C}}\log|\tilde{E}-E|\mathrm{d}\mathcal{N}^{\mathrm{i}y}(\tilde{E}).\tag{1.8}$$

可以将 $L(E,\ \mathrm{i}y)$ 视为关于两个变量 E 和 y的函数。（1.8）的左端实际上是 $L(E,\ \mathrm{i}y)$ 作为关于 y的分段线性凸函数的积分表示；而（1.8）的右端实际上是 $L(E,\ \mathrm{i}y)$ 作为次调和函数在 E上的 Riesz 表示。

T定理 1.1 和定理 1.2 的证明可归结为以下定理 .

定理 1.3. 设 $v\in C^\omega(\mathbb{T}_h^d,\ \mathbb{C})$, $\alpha\in\mathbb{T}^d$满足 $(1,\ \alpha)$ 有理无关。假设$L(E,\ \mathrm{i}y)>0$。则对于几乎处处的 $x\in\mathbb{T}^d$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|f_n(E,x+\mathrm{i}y)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{n}\log|f_n(E,x+\mathrm{i}y)|\mathrm{d}x=L(E,\mathrm{i}y).\tag{1.9}$$

在进一步阐述定理 1.3之前，我们先说明如何运用定理 1.3 来证明定理 1.1 和定理 1.2。

关于绕数，我们的主要动机之一来自[20]，，他们证明了除凸性和分段线性之外，$L(E,\ \mathrm{i}y)$ 还满足詹森公式。因此，詹森公式中的零点应当与加速度有关。更

通过以下众所周知的詹森公式，这一点变得更加 [43] 清晰，该公式适用于环域：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})|\mathrm{d}x-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})|\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{r_1<|z_i|<r_2}\log\frac{r_2}{|z_i|}+\log\frac{r_2}{r_1}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r_1}\frac{g'(z)}{g(z)}\mathrm{d}z,$$

其中 g 在 $\mathcal{A}(r_1$上全纯，$r_2)$ 并在 $\mathcal{A}(r_1$上连续，$r_2)$，且 $\overline{\{z_i\}}$ 是 g满足条件 $r_1<|z_i|\leqslant r_2$的零点。取 $g=f_n(E,\ x+\mathrm{i}y)$，则定理1.1 基本上可由定理1.3推出。

接下来讨论态密度测度。我们先回顾自伴情形下证明Thouless公式的关键一点。在自伴情形中，Thouless公式由以下事实推出：$\mathrm{d}\mathcal{N}_n$ 弱收敛到一个极限测度$\mathrm{d}\mathcal{N}$ [9, 18, 19]，这依赖于函数演算。然而，在非自伴情形中，由于谱测度不唯一，这种方法失效。为克服这一困难，我们先证明（1.9），再由（$\mathrm{d}\mathcal{N}_n$ （1.9）证明1.9）的弱收敛。事实上，一旦（$\mathrm{d}\mathcal{N}_n$）成立，根据对数势的次调和性，位势理论中的Widom引理便保证$\log|f_n(E$的收敛。$x)|$ 要应用Widom引理，唯一的技术障碍是证明对所有有理无关的 $\alpha\in\mathbb{T}^d$以及几乎处处的 $x\in\mathbb{T}^d$ 和几乎处处的 $E\in\mathbb{C}$，相应的收敛成立；这一点通过定理1.3 和Fubini定理得到证明。

最后，我们来谈谈定理 1.3。通常，人们只能预期

$$L(E,\mathrm{i}y)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2|n|}\log(|f_n(E,x+\mathrm{i}y)|^2+|f_{n-1}(E,x+\mathrm{i}y)|^2),\ \text{a.e. } x\in\mathbb{T}^d. \tag{1.10}$$

然而，要由 (1.10) 得到 (1.9) 并非易事。对于 $v\in C^\omega(\mathbb{T}^d$、$\mathbb{C})$，Goldstein-Schlag [23] 证明了，当准周期平移 $x\mapsto x+\alpha$ 满足 $\alpha\in$ SDC 时，(1.9) 成立。如果 v 是 $\mathbb{T}^d$上的三角多项式，他们还证明了，对于几乎处处的 $\alpha\in\mathbb{T}^{d-1}$，斜移$(x,y)\mapsto(x+y,y+\alpha)$ 在 [23] 中满足 (1.9)。Geng-Tao [21] 证明了，对于具有 Brjuno-Rüssmann 频率的 Jacobi 算子，(1.9) 成立。我们强调，根据 Jitomirskaya-Liu [33]给出的反例，定理 1.3 中的“几乎处处”不能加强为“处处”。我们还提到随机情形：Goldsheid-Khoruzhenko [22] 证明，如果 $\{v_n\}$ 是一个由复独立同分布随机变量组成的序列，那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|f_n(E)|=L(E),\quad \text{with probability one.}$$

关于定理1.3的证明，我们将在第 3.

2. 预备知识

用 $C^\omega(\mathbb{T}^d,*)$ 表示所有 $*$值解析函数的集合（$*$ 通常表示 $\mathbb{C}$、SL$(2,\mathbb{C})$ 等）。对于任意 $F\in C^\omega(\mathbb{T}^d,*)$，令 $\langle F\rangle:=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}F(x)\mathrm{d}x$，并定义范数 $\|F\|_h:=\sup_{x\in\mathbb{T}^d_h}\|F(x)\|$，其中 $\|\cdot\|$ 表示通常的矩阵范数。对于任意$\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d$，定义 $|\mathbf{k}|=|\mathbf{k}_1|+\cdots+|\mathbf{k}_d|$。

2.1. **拟周期余循环与一致双曲性。** 给定 $A \in C^\omega(\mathbb{T}^d, \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$和 $(1,\alpha)$ 有理无关，可以定义拟周期余循环 (α, A):

$$(\alpha, A): \begin{cases} \mathbb{T}^d \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{T}^d \times \mathbb{C}^2, \\ (x, v) \mapsto (x+\alpha, A(x)\cdot v). \end{cases}$$

如果存在连续函数 u、s： $\mathbb{T}^d \to \mathbb{PC}^2$，分别称为不稳定方向和稳定方向，并且存在 $n \geqslant 1$，使得我们称 (α, A) 是一致双曲的:

(1) 对每个 $x \in \mathbb{T}^d$，都有 $A(x)\cdot u(x) = u(x+\alpha)$ 和 $A(x)\cdot s(x) = s(x+\alpha)$; (2) 对每个单位向量 $w \in s(x)$，都有 $\|A_n(x)\cdot w\| < 1$; (3) 对每个单位向量 $w \in u(x)$，都有 $\|A_n(x)\cdot w\| > 1$。

显然，如果 (α, A) 是一致双曲的，那么 $L(\alpha, A) > 0$。从现在起，$(\alpha, A) \in \mathcal{UH}$ 表示 (α, A) 是一致双曲的。

2.2.**薛定谔算子与薛定谔余循环。** 我们考虑如下复值拟周期薛定谔算子:

$$(H(x)\psi)_n = \psi_{n+1} + \psi_{n-1} + v(x+n\alpha)\psi_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

给定初始数据 $(\psi_1, \psi_0)^{\mathrm{T}}$，差分方程 $H(x)\psi = E\psi$ 对于$n > 0$ 的解可以表示为

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = M_n(E,x) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{pmatrix},$$

其中

$$M_n(E,x) = \prod_{k=n}^{1} S_{E,v}(x+k\alpha) \text{ with } S_{E,v}(x) = \begin{pmatrix} E - v(x) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们称 $(\alpha, S_{E,v})$ 为薛定谔余循环。矩阵 $M_n(x)$ 称为 n 步传递矩阵。记

$$f_n(E,x) := \det(R_{[1,n]}(H(x) - E)R_{[1,n]}),$$

其中 R_Λ 表示到 $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ 的限制算子。则 n 步传递矩阵可写为

$$M_n(E,x) = \begin{pmatrix} f_n(E,x) & -f_{n-1}(E,x+\alpha) \\ f_{n-1}(E,x) & -f_{n-2}(E,x+\alpha) \end{pmatrix}.$$

谱，记为 Σ_x， $H(x)$ 的谱与薛定谔余循环 $(\alpha, S_{E,v})$的动力学行为密切相关。在自伴情形下，即势函数 v 为实值时，根据 Johnson 的著名结果 [34], $E \notin \Sigma_x$ 当且仅当 $(\alpha, S_{E,v}) \in \mathcal{UH}$。以下结果将 Johnson 的结果 [34] 推广到非自伴情形。

命题 2.1。 [20] 假设 v： $\mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$ 是一个复值连续函数，则存在某个 $\Sigma \subset \mathbb{C}$ 使得 $\Sigma_x = \Sigma$ 对所有 $x \in \mathbb{T}^d$均成立。此外， $E \notin \Sigma$ 当且仅当$(\alpha, S_{E,v}) \in \mathcal{UH}$。

2.3. **单频拟周期余循环的全局理论。**

定义 2.1。 我们称 $(\alpha, A) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \times C^\omega(\mathbb{T}, \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$ 是正则的，当且仅当 $L(\alpha, A_{\mathrm{i}y})$ 在 0 的某个邻域内关于 y 是仿射的。

回顾 Avila 的单频准周期 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 余循环全局理论中的以下两个基本结果。

定理 2.1。 [2] 设 $(\alpha,\ A) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \times C^{\omega}(\mathbb{T},\ \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{C}))$。假设 $L(E) > 0$。则$L(\alpha,\ A)$ 当且仅当 $(\alpha,\ A) \in \mathcal{UH}$。

定理 2.2。 [2] 对于任意 $(\alpha,\ A) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \times C^{\omega}(\mathbb{T},\ \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{C}))$，存在 $h' > 0$ 使得以下两种情况之一成立

(1) $L(\alpha,\ A_{\mathrm{i}y}) = 0$ (且 $\omega^{+}(\alpha,\ A_{\mathrm{i}y}) = 0$) 对每个 $0 < y < h'$都成立；或者(2) $(\alpha,\ A_{\mathrm{i}y})$ 对每个 $0 < y < h'$都是一致双曲的。

2.4. **关于次调和函数的一些事实。** 次调和函数在位势理论中发挥着至关重要的作用。我们总结次调和函数的一些基本性质。

引理2.1 (黎斯分解定理 [23]). 设 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ 是区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$上的次调和函数。设 $\partial\Omega$ 由有限条分段光滑的 C^1 曲线组成。存在一个定义在 μ Ω 上的正测度，使得对于任意 $\Omega_1 \Subset \Omega$(即 Ω_1 是紧含于 Ω中的子区域），

$$u(z) = \int_{\Omega_1} \log|z-\zeta| \mathrm{d}\mu(\zeta) + g(z), \tag{2.1}$$

其中， g 在Ω_1 上是调和的，并且 μ 是满足此性质的唯一函数。此外，对于任意$\Omega_2 \Subset \Omega_1$,$\mu$ 和 g，满足以下界

$$\mu(\Omega_1) \leqslant C(\Omega,\Omega_1)\left(\sup_{\Omega} u - \sup_{\Omega_1} u\right),$$

$$\left\| g - \sup_{\Omega_1} u \right\|_{L^{\infty}(\Omega_2)} \leqslant C(\Omega,\Omega_1,\Omega_2)\left(\sup_{\Omega} u - \sup_{\Omega_1} u\right).$$

定义 2.2. 设 $u : \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 是连续的。若对于任意 $1 \leqslant j \leqslant d$ 和 $z_k \in \Omega_k$， 当 $k \neq j$ 时，函数

$$z \mapsto u(z_1, \cdots, z_{k-1}, z, z_{k+1}, \cdots, z_d)$$

在 $z \in \Omega_j$中是次调和的。

我们回顾 Cartan 集的定义；该定义的动机来自以下关于多变量解析函数的 Cartan 估计。

定义 *2.3*（*Cartan* 集 [23]）。设 $H \gg 1$。对于任意子集 $\mathcal{B} \subset \mathbb{D}(z_0,\ 1) \subset \mathbb{C}$，若 $\mathcal{B} \subset \cup_{j=1}^{j_0} \mathbb{D}(z_j,\ r_j)$ 满足 $j_0 < J$，且 $\sum_j r_j < e^{-H}$.，则称 $\mathcal{B} \in \mathit{Car}_1(H,J)$。这里 $\mathbb{D}(z,r)$ 表示以 z 为圆心、半径为 r 的复圆盘。若 d 是大于 *1* 的正整数且 $\mathcal{B} \subset \prod_{j=1}^{d} \mathbb{D}(z_j,0,1) \subset \mathbb{C}^d$，则可归纳定义：若对于任意 $1 \leqslant j \leqslant d$，存在 $\mathcal{B}_j \subset \mathbb{D}(z_j,0,1) \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{B}_j \in \mathit{Car}_1(H,J)$，使得对于任意 $z \in \mathbb{C}\backslash\mathcal{B}_j$, $\mathcal{B}_z^{(j)} \in \mathit{Car}_{d-1}(H,J)$, 则称 $\mathcal{B} \in \mathit{Car}_d(H,J)$；此处 $\mathcal{B}_z^{(j)} = \{(z_1,\cdots,z_d) \in \mathcal{B} : z_j = z\}$。

引理 *2.2*（*Cartan* 估计 [24]）。设 $\varphi(z_1,\cdots,z_d)$ 是定义在多圆盘 $\mathcal{P} = \prod_{j=1}^{d} \mathbb{D}(z_j,0,1)$ 上的解析函数，且满足 $z_{j,0} \in \mathbb{C}$。设 $M \geqslant \sup_{z\in\mathcal{P}} \log|\varphi(z)|$, $m \leqslant \log|\varphi(z_0)|$,$z_0 = (z_1,0,\cdots,z_{d,0})$。给定 $H \gg 1$，存在集合 $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{B} \in \mathit{Car}_d(H^{1/d},J)$, $J = C_d H(M-m)$，使得

$$\log|\varphi(z)| > M - C_d H(M-m)$$

对任意 $z \in \prod_{j=1}^{d} \mathbb{D}(z_j,\ 0,\ 1/6)\backslash\mathcal{B}$。

注 2.1。 引理 1/6 中的半径 2.2 的选取是为了能够按原文所述使用 [38] 中的定理 4。不过，很容易得到以下更强的结论：给定 $\gamma \in (0,\ 1)$，该下界对所有 $z \in \prod_{j=1}^{d} \mathbb{D}(z_j,\ 0,\ 1-\gamma)$均成立。 γ的影响只体现在常数 C_d 中，因此应将 C_d 替换为 $C_{d,\ \gamma}$。

TCartan 集的定义提供了关于其测度的隐式信息 s.

引理 2.3。 [26]若 $\mathcal{B} \in \mathrm{Car}_d(H,\ J)$ 则有 $\mathrm{mes}(\mathcal{B} \cap \mathbb{R}^d) \leqslant C(d)\mathrm{e}^{-H}$.

3. 大偏差定理

本节将证明一个关于固定的有理无关频率对应的传递矩阵各元素的大偏差定理。为简化记号，有时我们省略对 E 的依赖。我们定义

$$L_n(E, x+\mathrm{i}y) = \frac{1}{n}\log\|M_n(x+\mathrm{i}y)\|$$

and

$$L_n(E, \mathrm{i}y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} L_n(E, x+\mathrm{i}y)\mathrm{d}x.$$

下文中，对 E、y 的依赖是局部一致的，而所有依赖于 v 的常数仅依赖于 v 在各种复化环面中的范数。本节的主要结果如下。

定理 *3.1.* 设 $d \in \mathbb{N}^+$, $h' \in (0, h)$, $v \in C^\omega(\mathbb{T}^d_{h'}, \mathbb{C})$, $E \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{R}^d$，且 $|y_j| < h'(1 \leqslant j \leqslant d)$。假设 $L(E, \mathrm{i}y) > \gamma > 0$。那么存在 $l_0 = l_0(E, v, \gamma, h, h', d)$, $\sigma_1 = \sigma_1(d)$,$C_1 = C_1(E, v, h, h', d)$, $K_1 = K_1(E, v, \gamma, h, h', d)$，使得以下结论成立。

(1) 对于任意 $l \geqslant l_0$ 和 $1 \leqslant p < \infty$，存在 $C_2 = C_2(E, v, h, h', d, p)$，使得

$$\|\log|f_l(\cdot + \mathrm{i}y)|\|_{L^p(\mathbb{T}^d)} \leqslant C_2 l.$$

(2) 设 $K > K_1$，并假设 $\alpha \in \mathbb{T}^d$ 满足

$$\|\langle \mathbf{k}, \alpha\rangle\|_{\mathbb{T}} > \delta \quad \textit{for all } 0 < |\mathbf{k}| < K.$$

那么对于任意 $n > K\delta^{-1}$,

$$\mathrm{mes}\{x \in \mathbb{T}^d : |\frac{1}{n}\log|f_n(E, x+\mathrm{i}y)| - L_n(E, \mathrm{i}y)| > K^{-\sigma_1}\} < \mathrm{e}^{-C_1 K^{\sigma_1}}. \tag{3.1}$$

(3) 此外，如果 $n > K^2\delta^{-1}$,

$$\left|\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{n}\log|f_n(E, x+\mathrm{i}y)|\mathrm{d}x - L(E, \mathrm{i}y)\right| < C_1 K^{-\sigma_1}.$$

作为定理 3.1 的直接推论，我们可以完成定理 1.3 的证明：

定理 1.3 的证明：固定 $E \in \mathbb{C}$ 和 $y \in \mathbb{R}^d$，其中 $|y_j| < h(1 \leqslant j \leqslant d)$ 使得 $L(E,$ 即 $y) > 0$。记 Θ_K 为 (3.1) 右边的集合。由定理 3.1(2)，我们有 $\sum_{K=1}^{\infty} \mathrm{mes}\,(\Theta_K) < \infty$。因此由博雷尔-坎特利引理，$\mathrm{mes}\,(\limsup_{K\to\infty}\Theta_K) = 0$。此外，如果 $n > K\delta^{-1}$，我们有 $\delta \to 0$ 且 $n \to \infty$ 当 $K \to \infty$。因此存在一个全测度集 $\Theta = \mathbb{T}^d \setminus \limsup \Theta_K$ 依赖于 E 和 y，使得对任意 $x \in \Theta$,

$$\lim_{K\to\infty}\frac{1}{n}\log|f_n(E, x+\mathrm{i}y)| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|f_n(E, x+\mathrm{i}y)| = L(E, \mathrm{i}y).$$

结合上述结果与定理 3.1(3) 即可证明定理 1.3。 □

在给出定理 3.1的完整证明之前，我们先回顾已有结果。若 $\alpha \in$SDC，Goldstein-Schlag [23] 证明了，对于任意 $\|\log|f_l\|\|_{L^p} \lesssim l^{1+\varepsilon}$，都有 $\varepsilon > 0$。随后，Tao-Voda [44]将该界改进为 $\|\log |f_l|\|_{L^p} \lesssim l$。因此，定理 3.1(1) 将这一 L^p 估计推广到了有理无关的频率。这一结果对于建立有理无关频率下行列式的大偏差定理至关重要。

我们回顾 Bourgain 的大偏差定理[12] 其中 $\alpha \in \mathbb{T}^d$ 满足定理3.1(2)中假设的某个受限丢番图条件。

定理3.2. [12] 设 $d \in \mathbb{N}^+$, $h > 0$, $v \in C^\omega(\mathbb{T}_h^d, \mathbb{C})$, $E \in \mathbb{C}$。假设 $\alpha \in \mathbb{T}^d$ 满足

$$\|\langle \mathbf{k}, \alpha\rangle\|_{\mathbb{T}} > \delta \quad for\ all\ 0 < |\mathbf{k}| < K.$$

此外，假设

$$n > K\delta^{-1}.$$

存在 $\sigma_2 = \sigma_2(d)$ 和 $C_3 = C_3(E, v, h, d)$ 使得

$$\mathrm{mes}\{x \in \mathbb{T}^d : |L_n(E,x) - L_n(E)| > C_3 K^{-\sigma_2}\} < \mathrm{e}^{-C_3 K^{\sigma_2}}.$$

此外，通过将$M_n(x)$ 替换为 $M_n(x + \mathrm{i}y)$，大偏差定理在复区域 $\mathbb{T}_{h'}^d$ 内仍然成立，因为其证明只涉及次调和性。更准确地说，我们有以下结论：

推论 3.1. 在与定理*3.2*相同的假设下，对任意 $h' \in (0, h)$ 存在 $\sigma_3 = \sigma_3(d)$ 和 $C_4 = C_4(E, v, h, h', d)$ 使得对任意 $|y| < h'(1 \leqslant j \leqslant d)$,

$$\mathrm{mes}\{x \in \mathbb{T}^d : |L_n(E, x + \mathrm{i}y) - L_n(E, \mathrm{i}y)| > C_4 K^{-\sigma_3}\} < \mathrm{e}^{-C_4 K^{\sigma_3}}.$$

大偏差定理最初由 Bourgain-Goldstein 建立[13] 对于 $v \in C^\omega(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$，假设 α 是丢番图的。对于任意有理无关的频率，且$d = 1$，此前 Bourgain-Jitomirskaya 已证明该结果 [15]。对于 $d > 1$，Powell[41] 将 [12] 推广到解析的 $M(2, \mathbb{C})$值余循环。然而，要为首项而非 M_n 的范数给出大偏差定理更具挑战性。Goldstein-Schlag 最先完成了这一工作[23], , 他们证明，对于 $\alpha \in$SDC，在正李雅普诺夫指数区域，大偏差估计可推广到传递矩阵的各个元素，即对于任意充分大的 n,

$$\mathrm{mes}\{x \in \mathbb{T}^d : |\log|f_n(x)| - nL_n(E)| > n^{-c}\} < \mathrm{e}^{-n^c}.$$

因此，与[12, 15, 41], 定理 3.1(2) 相比，将大偏差定理从传递矩阵推广到了其第一项。并且，与[23], 定理 3.1(2) 相比，去除了 $\alpha \in$ SDC 的假设，使其适用于所有 $\alpha \in \mathbb{T}^d$ 有理无关。

3.1. 定理 3.1的证明。

定理 *3.1(1)*的证明。 主要困难在于估计 $x \in \mathbb{T}^d$ 使得$f_l(x + \mathrm{i}y)$ 接近于零的测度。因此，Łojasiewicz型估计将对我们有所帮助。

以下引理3.1 由 Goldstein-Schlag在 [23] 将分别次调和函数在 $\mathbb{T}_h^d$ 上的上确界与 $\mathbb{T}^d$ 上的上确界联系起来，这用于建立 Łojasiewicz型估计，参见以下（3.4）。

引理 3.1。 [23] 设 $u(z_1, \cdots, z_d)$ 是定义在 $\mathbb{T}_h^d$ 上的分别次调和函数，满足$\sup_{z \in \mathbb{T}_h^d} u(z) \leqslant \mathcal{M}$。存在 $C_d, C_{h,d}$，使得若对某个 $\varrho \in (0, 1)$ 以及某个 $\mathcal{S} > 0$,

$$\mathrm{mes}\{x \in \mathbb{T}^d : u(x) < -\mathcal{S}\} > \varrho,$$

则有

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^d} u(x) \leqslant C_{h,d}\mathcal{M} - \frac{\mathcal{S}}{C_{h,d}\log^d(C_d/\varrho)}.$$

为简化记号，我们定义常数 $C_\star = C_\star(E, v, h, h', d)$ 如下

$$\sqrt{C_\star} := \max\{C_4, 4(d+1)C_E^v, C_{h-h',d}^2 C_E^v (\log C_d)^d\}, \tag{3.2}$$

其中 C_d 和 $C_{h-h',\ d}$ 定义见引理 3.1，且

$$C_E^v := \log(|E| + \|v\|_h + 2).$$

显然，对于任意 $E \in \mathbb{C}$,

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^d} L_n(E, x+\mathrm{i}y) \leqslant C_E^v. \tag{3.3}$$

我们证明存在常数 l_0，使得对于任意 $K \geqslant 1$ 和 $l \geqslant l_0$,

$$\mathrm{mes}\{x \in \mathbb{T}^d : |f_l(x+\mathrm{i}y)| \leqslant \mathrm{e}^{-C_\star K l}\} \leqslant \mathrm{e}^{-K^{\frac{1}{d}}}. \tag{3.4}$$

假设命题（3.4）对某些 l 和 K不成立。由于 $u(x) := \log|f_l(x+\mathrm{i}y)|$ 是 $\mathbb{T}^d_{h-h'}$上的分别次调和函数，因此我们将引理 3.1 应用于 $u(x)$ 其中

$$\mathcal{M} = C_E^v l, \quad \mathcal{S} = C_\star K l, \quad \varrho = \mathrm{e}^{-K^{\frac{1}{d}}}.$$

由引理 3.1 以及对 $C_\star$ 在（3.2）中的选取，可得

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{T}^d} u(x) &\leqslant C_{h-h',d}\mathcal{M} - \frac{\mathcal{S}}{C_{h-h',d}\log^d(C_d/\varrho)} \\ &\leqslant \left(C_{h-h',d}C_E^v - \frac{C_\star}{C_{h-h',d}(\log C_d)^d}\right) l \\ &\leqslant -\sqrt{C_\star} l,\end{aligned}$$

which 表示 $\sup_{\mathbb{T}^d}|f_l(x+\mathrm{i}y)| \leqslant \exp(-\sqrt{C_\star}l)$。回忆一下，$\det M_l(x+\mathrm{i}y) = 1$ 满足

$$M_l(x+\mathrm{i}y) = \begin{pmatrix} f_l(x+\mathrm{i}y) & -f_{l-1}(x+\mathrm{i}y+\alpha) \\ f_{l-1}(x+\mathrm{i}y) & -f_{l-2}(x+\mathrm{i}y+\alpha)\end{pmatrix}.$$

由（3.3），我们有 上确界$_{x\in\mathbb{T}^d}$ 对数 $|f_l(x+\mathrm{i}y)| \leqslant C_E^v l$，因此

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^d} |f_{l-1}(x+\mathrm{i}y)\cdot f_{l-1}(x+\mathrm{i}y+\alpha) - 1| \leqslant \exp(-\sqrt{C_\star}l/2),$$

其中用到了 $\sqrt{C_\star} \geqslant 4(d+1)C_E^v$。

为得到矛盾，我们使用以下结果。

引理 3.2。[23] 假设 $f \in C^1(\mathbb{T}^d,\ \mathbb{C})$ 满足 $|f| + |\nabla f| \leqslant \mathcal{H}$ 对于某个 $\mathcal{H} \geqslant 1$。令$0 < \epsilon < \mathcal{H}^{-2(d+1)}$ 并假设

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^d} |f(x)f(x+\alpha) - 1| \leqslant \epsilon.$$

于是存在一个常数 $C_5 = C_5(d)$，使得

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^d} |f(x)^2 - 1| \leqslant C_5\left(\epsilon\mathcal{H}^{2(d+1)}\right)^{\frac{1}{2+d}}.$$

现在我们将引理 3.2 应用于 $f_{l-1}(\cdot+\mathrm{i}y)$，其中

$$\mathcal{H}=\exp(C_E^v l),\quad \epsilon=\exp(-\sqrt{C_\star}l/2)$$

从而对于充分大的 l，可得 $\sup_{x\in\mathbb{T}^d}|f_{l-1}(x+\mathrm{i}y)|\leqslant 2$。因此，迭代

$$f_l(x+\mathrm{i}y)=(E-v(x+\mathrm{i}y+l\alpha))\cdot f_{l-1}(x+\mathrm{i}y)-f_{l-2}(x+\mathrm{i}y)$$

意味着 $\sup_{x\in\mathbb{T}^d}|f_{l-2}(x+\mathrm{i}y)|\leqslant 1+2(|E|+\|v\|_h)$，因此

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^d}\|M_l(x+\mathrm{i}y)\|\leqslant 6+2(|E|+\|v\|_h).$$

然而，这与以下假设矛盾：$L(E,\mathrm{i}y)>\gamma$。这就证明了（3.4）。

借助（3.4），即可完成证明。我们将 $\mathbb{T}^d=(\cup_{K\geqslant 0}\mathcal{Q}_K(y))\cup\mathcal{Q}(y)$ 分解，其中

$$\mathcal{Q}(y)=\{x\in\mathbb{T}^d:|f_l(x+\mathrm{i}y)|>1\},$$
$$\mathcal{Q}_K(y)=\{x\in\mathbb{T}^d:\mathrm{e}^{-C_\star(K+1)l}<|f_l(x+\mathrm{i}y)|\leqslant\mathrm{e}^{-C_\star Kl}\}.$$

如果 $x\in\mathcal{Q}(y)$，则

$$\left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathcal{Q}}\Big|\log|f_l(x+\mathrm{i}y)|\Big|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\log\|f_l(\cdot+\mathrm{i}y)\|_\infty\leqslant C_E^v l. \tag{3.5}$$

[1]如果 $x\in\mathcal{Q}_K(y)$ 满足 $K\geqslant 1$，由（3.4），可得 $\mathrm{mes}(\mathcal{Q}_K(y))\leqslant\mathrm{e}^{-K\overline{d}}$。经计算，

$$\sum_{K\geqslant 0}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathcal{Q}_K}\Big|\log|f_l(x+\mathrm{i}y)|\Big|^p\mathrm{d}x\leqslant(C_\star l)^p+\sum_{K>0}\mathrm{e}^{-K^{\frac{1}{d}}}(C_\star(K+1)l)^p. \tag{3.6}$$

因此 我们结合3.1(1) 定理与 (3.5) 和 (3.6)，令

$$C_2:=C_E^v+C_\star+C_\star\Big(\sum_{K>0}\mathrm{e}^{-K^{\frac{1}{d}}}(K+1)^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

□

定理*3.1(2)*的证明。为了证明定理3.1(2)，我们需要分别估计$\log|f_n(\cdot+\mathrm{i}y)|$ 的一致上界和平均下界。以下命题3.1 和命题3.2 给出了我们所需的结论。我们将先使用这两个命题，并把证明推迟到第 3.2 小节和第 3.3 小节。

命题 3.1。在与定理*3.2*相同的假设下，设 $h'\in(0,\ h)$ 和$y\in\mathbb{R}^d$满足 $|y_j|<h'(1\leqslant j\leqslant d)$。存在常数 $\sigma_4=\sigma_4(d)$，$C_6=C_6(E,\ v,\ h,\ h',\ d)$，$K_2=K_2(E,\ v,\ h,\ h',\ d)$ 使得对任意 $K>K_2$，都有

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^d}\frac{1}{n}\log\|M_n(x+\mathrm{i}y)\|\leqslant L_n(E,\mathrm{i}y)+C_6K^{-\sigma_4}.$$

命题 *3.2*。在与定理*3.2*相同的假设下，设 $h'\in(0、\ h)$ 和 $y\in\mathbb{R}^d$满足 $|y_j|<h'(1\leqslant j\leqslant d)$。假设 $L(E,\ \mathrm{i}y)>\gamma>0$。存在常数 $\sigma_5=\sigma_5(d)$、$C_7=C_7(E、\ v、\ h、\ h'、\ d)$、$K_3=K_3(E、\ v、\ \gamma、\ h、\ h'、\ d)$，使得对于任意 $K>K_3$，都有

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{n}\log|f_n(x+\mathrm{i}y)|\mathrm{d}x>L_n(E,\mathrm{i}y)-C_7K^{-\sigma_5}.$$

现在我们证明定理 3.1(2)。为简便起见，我们令 $d=2$。固定 $|y_1|<h'$，$|y_2|<h'$ 并令 $u(x_1,\ x_2)=\frac{1}{n}$ 对数 $|f_n(x_1+\mathrm{i}y_1,\ x_2+\mathrm{i}y_2)|$。由命题 3.1 和命题 3.2 可知，对于任意 $K>$ 最大值$\{K_2,\ K_3\}$,

$$\begin{cases}\langle u\rangle > L_n(E,\mathrm{i}y)-C_7K^{-\sigma_5},\\ \sup_{\mathbb{T}^2} u < L_n(E,\mathrm{i}y)+C_6K^{-\sigma_4}.\end{cases}$$

为运用单变量次调和函数的工具，我们令 $v(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}u(x_1,x_2)\mathrm{d}x_2$ 并选择 $\sigma_6=\min\{\sigma_4,\sigma_5\}$。于是有

$$\begin{cases}\langle v\rangle > L_n(E,\mathrm{i}y)-C_7K^{-\sigma_6},\\ \sup_{\mathbb{T}} v < L_n(E,\mathrm{i}y)+C_6K^{-\sigma_6}.\end{cases}$$

记 $\mathcal{P}=\{x_1\in\mathbb{T}:\ v(x_1)>\langle v\rangle\}$。于是利用 $\int_{\mathbb{T}}(v-\langle v\rangle)\mathrm{d}x_1=0$，可得

$$\begin{aligned}\|v-\langle v\rangle\|_{L^1(\mathbb{T})}&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{P}}|v-\langle v\rangle|\mathrm{d}x_1+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}\setminus\mathcal{P}}|v-\langle v\rangle|\mathrm{d}x_1\\ &\leqslant\int_{\mathcal{P}}|v-\langle v\rangle|\mathrm{d}x_1\leqslant\sup_{x_1\in\mathbb{T}}v(x_1)-\langle v\rangle<(C_6+C_7)K^{-\sigma_6}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

为应用约翰-尼伦伯格不等式，我们需要使用以下引理来控制次调和函数的有界平均振荡范数。

引理 3.3。 [14] 设 φ 在 $\mathbb{T}_h$ 上是次调和函数，且具有如下黎曼分解(2.1)在 $\mathbb{T}_{h/2}$ 上，其中

$$\mu(\mathbb{T}_{h/2})+\|g\|_{L^\infty(\mathbb{T}_{h/4})}<\infty.\tag{3.8}$$

Then

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{T})}\leqslant C_h\|\varphi-\langle\varphi\rangle\|^{1/2}_{L^1(\mathbb{T})},$$

其中

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{T})}:=\sup_{I\subset\mathbb{T}}\frac{1}{|I|}\int_I|\varphi-\langle\varphi\rangle_I|\mathrm{d}x,\ \ with\ \langle\varphi\rangle_I=\frac{1}{|I|}\int_I\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

注记 3.1. 引理 *3.3* 本质上在 [14] 中被证明，并命名为“有界平均振荡 分裂引理”，假设次调和函数有界。然而，该引理证明中所用的只是假设 (3.8)。

现在我们验证 v 满足引理 3.3 中的条件。由于 v 在 $\mathbb{T}_{h-h'}$ 上是次调和的，由引理 2.1，可以分解

$$v(z)=\int_{\mathbb{T}_{(h-h')/2}}\log|z-\zeta|\mathrm{d}\mu(\zeta)+g(z),$$

具有估计

$$\mu(\mathbb{T}_{(h-h')/2})+\|g\|_{L^\infty(\mathbb{T}_{(h-h')/4})}\leqslant C_8(h,h')(2\sup_{z\in\mathbb{T}_{h-h'}}v(z)-\langle v\rangle).$$

因此，由引理 3.3 和（3.7），存在常数 $C_9=C_9(E,\ v,\ h,\ h',\ d)$ 使得对于任意 $K>\max\{K_2,\ K_3\}$,

$$\|v\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{T})}\leqslant C_{h-h'}\|v-\langle v\rangle\|^{1/2}_{L^1(\mathbb{T})}\leqslant C_9K^{-\frac{\sigma_6}{2}}.\tag{3.9}$$

回忆约翰-尼伦伯格不等式：对于任意 $f\in$ 有界平均振荡$(\mathbb{T})$，存在常数 $\check{C}$、$\check{c}>0$（与 f 无关），使得

$$\operatorname{mes}\{x\in\mathbb{T}:|f-\langle f\rangle|>\varepsilon\}<\check{C}\mathrm{e}^{-\check{c}\frac{\varepsilon}{\|f\|_{\mathrm{BMO}}}}.$$

结合（3.9）与约翰-尼伦伯格不等式可得

$$\operatorname{mes}\{x\in\mathbb{T}:|v-\langle v\rangle|>K^{-\frac{\sigma_6}{4}}\}<\check{C}\mathrm{e}^{-C_{10}K^{\frac{\sigma_6}{4}}} \tag{3.10}$$

其中某个常数为 $C_{10}=C_{10}(E,v,h,h',d)$。

令 $\mathcal{V}=\{x_1\in\mathbb{T}:\ v(x_1)>L_n(E,\mathrm{i}y)-K^{-\frac{\sigma_6}{4}}\}$. 则根据（3.10），$\operatorname{mes}(\mathbb{T}\backslash\mathcal{V})<\check{C}\exp(-C_{10}K^{\frac{\sigma_6}{4}})$。为研究 $u(x_1,x_2)$ 的第二个变量，我们固定某个 $x_1\in\mathcal{V}$ 并令$w(x_2)=u(x_1,x_2)$。于是存在 $K_4=K_4(E,v,\gamma,h,h',d)$，使得对任意 $K>K_4$,

$$\begin{cases}\langle w\rangle>L_n(E,\mathrm{i}y)-K^{-\frac{\sigma_6}{4}},\\ \sup_{\mathbb{T}}w<L_n(E,\mathrm{i}y)+C_6K^{-\sigma_6}<L_n(E,\mathrm{i}y)+K^{-\frac{\sigma_6}{4}}.\end{cases}$$

与（3.7）类似，再次使用引理 2.1、引理 3.3 和约翰-尼伦伯格不等式可得，对任意 $x_1\in\mathcal{V}$,

$$\operatorname{mes}\{x_2\in\mathbb{T}:|w-\langle w\rangle|>K^{-\frac{\sigma_6}{16}}\}<\check{C}\mathrm{e}^{-C_{11}K^{\frac{\sigma_6}{16}}}$$

其中某个常数为 $C_{11}=C_{11}(E,v,h,h',d)$。

记 $\mathcal{R}_{x_1}=\{x_2\in\mathbb{T}:\ |w-\langle w\rangle|>K^{-\frac{\sigma_6}{16}}\}$并令 $K_5=$最大值$\{K_2,\ K_3,\ K_4\}$，$\sigma_7=\frac{\sigma_6}{16}$。用 Θ_K 表示式（3.1）中的集合。由 Fubini定理，存在 $C_{12}=C_{12}(E,\ v,\ h,\ h',\ d)$使得

$$\operatorname{mes}(\Theta_K)=\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\int_{\mathcal{V}}\operatorname{mes}(\mathcal{R}_{x_1})\mathrm{d}x_1+\int_{\mathbb{T}\backslash\mathcal{V}}\operatorname{mes}(\mathcal{R}_{x_1})\mathrm{d}x_1\right)<\mathrm{e}^{-C_{12}K^{\sigma_7}}.$$

对于 $d\geqslant 2$的一般情形，可以取 $\sigma_7=4^{-d}\sigma_6$。这证明了定理3.1(2)。 □

定理*3.1(3)*的证明。我们将使用李雅普诺夫指数 [12]的收敛性结果。

Pr命题 3.3 ([12])。令 $d\in\mathbb{N}^+$, $v\in C^\omega(\mathbb{T}^d_h,\ \mathbb{C})$, $E\in\mathbb{C}$。假设 $\alpha\in\mathbb{T}^d$ *wit* h

$$\|\langle\mathbf{k},\alpha\rangle\|_{\mathbb{T}}>\delta$$

对所有 $0<|\mathbf{k}|<K$ 均成立。此外，假设 $n>K^2\delta^{-1}$. $h>K^{-\sigma_8}$，其中 $\sigma_8=\sigma_8(d)$。那么

$$|L(E)-L_n(E)|<K^{-\sigma_8}.$$

由命题 3.1 和命题 3.2 可知，对于任意 $K>K_5$,

$$-C_7K^{-\sigma_6}\leqslant\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{n}\log|f_n(x+\mathrm{i}y)|\mathrm{d}x-L_n(E,\mathrm{i}y)\leqslant C_6K^{-\sigma_6}.$$

令 $C_1=2\max\{C_6,C_7,C_{12}\}$ 和 $\sigma_1=\min\{\frac{\sigma_7}{2},\sigma_8\}$。我们取充分大的 $K_1>K_5$，使得对于 $K>K_1$,

$$h-h'>K^{-\sigma_8}\ \text{and}\ \mathrm{e}^{-C_{12}K^{\sigma_7}}<\mathrm{e}^{-C_1K^{\sigma_1}}.$$

于是，由命题 3.3,

$$\left|\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{n}\log|f_n(x+\mathrm{i}y)|\mathrm{d}x-L(E,\mathrm{i}y)\right|\leqslant\max\{C_6,C_7\}K^{-\sigma_6}+K^{-\sigma_8}\leqslant C_1K^{-\sigma_1}.$$

这证明了定理 3.1(3)。 □

3.2. **命题 3.1的证明。** 证明的主要思路是利用传递矩阵的大偏差定理以及分别次调和函数在 $\mathbb{T}_h^d$ 上的次平均值性质，对底空间动力学给出显式估计，从而得到 $\log\|M_n(x+\mathrm{i}y)\|$的一致上界，$\log|f_n(x+\mathrm{i}y)|$也同样如此。

为了得到关于 $|L_n(x+\mathrm{i}y)-L_n|$的大偏差定理，我们需要比较 $L_n(\mathrm{i}y)$和 L_n。下面的引理指出，只要 $|y|$足够小， $L_n(\mathrm{i}y)$ 关于 y 实际上是利普希茨连续的。

引理 3.4。 [25] 设 $d\in\mathbb{N}^+$, $v\in C^\omega(\mathbb{T}_h^d,\ \mathbb{C})$, $E\in\mathbb{C}$。假设 $\alpha\in\mathbb{T}^d$，则存在$C_{13}=C_{13}(E,\ v,\ h)$ 使得

$$|L_n(E,\mathrm{i}y)-L_n(E)|\leqslant C_{13}\sum_{j=1}^{d}|y_j|,\quad \textit{for any } |y_j|\leqslant h.$$

现在我们完成命题 3.1 的证明。根据推论 3.1 和引理 3.4，可得

$$\mathrm{mes}\{x\in\mathbb{T}^d:|\frac{1}{n}\log\|M_n(x+\mathrm{i}y+\mathrm{i}\tilde{y})\|-L_n(\mathrm{i}y)|>2C_4K^{-\sigma_3}\}<\mathrm{e}^{-C_4K^{\sigma_3}} \tag{3.11}$$

只要对每个 $1\leqslant j\leqslant d$,

$$|\tilde{y}_j|\leqslant r:=\frac{C_4d^{-1}K^{-\sigma_3}}{C_{13}(E,v,h-h')}.$$

由于分别次调和函数具有次平均值性质，对于任意 $x=(x_1、\ \cdots、\ x_d)$，有如下结论

$$\log\|M_n(x+\mathrm{i}y)\|\leqslant\frac{1}{(\pi r^2)^d}\int_{\mathbb{D}^d}\log\|M_n(\xi+\mathrm{i}y+\mathrm{i}\tilde{y})\|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tilde{y},$$

其中 $\mathbb{D}^d=\prod_{j=1}^d\mathbb{D}(x_j,\ r)$。记 $\mathcal{B}_{\tilde{y}}\subset\mathbb{T}^d$为 (3.11) 中的集合。令

$$\mathcal{B}=\{(\xi,\tilde{y})\in\mathbb{T}^d\times(-r,r)^d:\xi\in\mathcal{B}_{\tilde{y}}\}.$$

由 (3.11) 可得 $\mathrm{mes}(\mathcal{B})\leqslant\mathrm{mes}(\mathcal{B}_{\tilde{y}})\leqslant\mathrm{e}^{-C_4K^{\sigma_3}}$。另一方面，

$$\frac{1}{(\pi r^2)^d}\int_{\mathbb{D}^d\setminus\mathcal{B}}\frac{1}{n}\log\|M_n(\xi+\mathrm{i}y+\mathrm{i}\tilde{y})\|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tilde{y}\leqslant L_n(\mathrm{i}y)+2C_4K^{-\sigma_3}. \tag{3.12}$$

另一方面，根据 C_E^v 的定义，当 K 充分大时，

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\pi r^2)^d}\int_{\mathbb{D}^d\cap\mathcal{B}}\frac{1}{n}\log\|M_n(\xi+\mathrm{i}y+\mathrm{i}\tilde{y})\|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tilde{y}&\leqslant C_E^v(\pi r^2)^{-d}\mathrm{mes}(\mathcal{B})\\&\leqslant\mathrm{e}^{-\frac{C_4}{2}K^{\sigma_3}}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

结合 (3.12) 和 (3.13)，令 $C_6=3C_4$, $\sigma_4=\sigma_3$，证明即告完成。 □

3.3. **命题 3.2 的证明。** 现在我们研究 $\log|f_n(\cdot+\mathrm{i}y)|$的平均下界。下面的引理给出了三个行列式的估计，其证明是对 [23] 的证明稍作修改而得。证明见附录 A。接下来我们将说明如何利用该引理得到单个行列式的平均下界。

引理 3.5. 假设 $l_0\leqslant j_1\leqslant j_1+l_0\leqslant j_2\leqslant K^{\frac{1-\sigma_3}{2}}$。设

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_K:=\{x\in\mathbb{T}^d:|f_n(x+\mathrm{i}y)|+|f_n(T^{j_1}x+\mathrm{i}y)|+|f_n(T^{j_2}x+\mathrm{i}y)|\\\leqslant\mathrm{e}^{nL_n(\mathrm{i}y)-5C_\star nK^{-\sigma_3}}\}.\end{aligned}$$

则存在 $\sigma_9 = \sigma_9(d)$ 和 $K_6 = K_6(E, v, \gamma, h, h', d)$ 使得对任意 $K \geqslant K_6$,

$$\mathrm{mes}(\mathcal{F}_K) \leqslant \mathrm{e}^{-K^{\sigma_9}}.$$

我们将完成命题 3.2 的证明。设 $\mathcal{G}_K$ 为 $x \in \mathbb{T}^d$ 的集合，使得对任意 $|j| \leqslant K^{\frac{1-\sigma_3}{2}}$,

$$|L_n(x + \mathrm{i}y + j\alpha) - L_n(\mathrm{i}y)| < C_4 K^{-\sigma_3}.$$

由推论 3.1 我们有 $\mathrm{mes}(\mathbb{T}^d \backslash \mathcal{G}_K) \leqslant K\mathrm{e}^{-C_4 K^{\sigma_3}}$。对任意 j_1, j_2, j_3 满足

$$0 \leqslant j_1 \leqslant j_1 + l_0 \leqslant j_2 \leqslant j_2 + l_0 \leqslant j_3 \leqslant K^{\frac{1-\sigma_3}{2}},$$

我们定义 Ω_K 为 $x \in \mathcal{G}_K$ 的集合，使得

$$\min_{j_1, j_2, j_3} \Big(|f_n(T^{j_1}x + \mathrm{i}y)| + |f_n(T^{j_2}x + \mathrm{i}y)| + |f_n(T^{j_3}x + \mathrm{i}y)| \Big) > \mathrm{e}^{nL_n(\mathrm{i}y) - 5C_\star n K^{-\sigma_3}}.$$

则由引理 3.5，对 $K > K_6$,

$$\mathrm{mes}(\mathbb{T}^d \backslash \Omega_K) \leqslant K\mathrm{e}^{-K^{\sigma_9}}. \tag{3.14}$$

设 $u(x) = \frac{1}{n}\log |f_n(x + \mathrm{i}y)|$ 并选择 $R = [K^{\frac{1-\sigma_3}{2}}/l_0]$。为了对 $f_n(\cdot + \mathrm{i}y)$ 应用 Cartan 估计，我们选择 $x_0 \in \mathbb{T}^d$ 使得 $\langle u \rangle n \leqslant \log |f_n(x_0 + \mathrm{i}y)|$。由引理 2.2、注记2.1 和引理 2.3，我们可以选择

$$M = C_E^v n, \quad m = \langle u \rangle n, \quad H = K^{\frac{1-\sigma_3}{4}}.$$

则存在 $C_{14} = C_{14}(E, v, h, h', d)$ 使得

$$\inf_{1 \leqslant k \leqslant R} u(T^{kl_0}x) > C_E^v - C_{d,h-h'} K^{\frac{1-\sigma_3}{4}} (C_E^v - \langle u \rangle) > -C_{14} K^{\frac{1-\sigma_3}{4}} \tag{3.15}$$

除去一个测度为 $\mathcal{R}_K \subset \mathbb{T}^d$ 的集合

$$\mathrm{mes}(\mathcal{R}_K) \leqslant C(d) K^{\frac{1-\sigma_3}{2}} \mathrm{e}^{-K^{\frac{1-\sigma_3}{4d}}}.$$

重写

$$\langle u \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \Big(\int_{\Omega_K} + \int_{\mathbb{T}^d \backslash \Omega_K} \Big) \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{R} u(T^{kl_0}x) \mathrm{d}x =: (I) + (II).$$

根据 Ω_K 的定义，对于 $1 \leqslant k \leqslant R$，至多有两项 $u(T^{kl_0}x)$ 不满足 $u(T^{kl_0}x) > L_n(\mathrm{i}y) - 5C_\star K^{-\sigma_3}$，因此

$$\begin{aligned}(I) &\geqslant \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Omega_K} \frac{R-2}{R} (L_n(\mathrm{i}y) - 5C_\star K^{-\sigma_3}) \mathrm{d}x + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Omega_K} \frac{2}{R} \inf_{1 \leqslant k \leqslant R} u(T^{kl_0}x) \mathrm{d}x \\ &=: (III) + (IV).\end{aligned}$$

根据（3.14）以及 R 的选择，若我们取 $\sigma_{10} = \text{最小值}\{\sigma_3, \frac{1-\sigma_3}{2}, \frac{\sigma_9}{2}\}$，则存在$C_{15} = C_{15}(E, v, h, h', d)$ 使得对于任意充分大的 K,

$$\begin{aligned}(III) &\geqslant L_n(\mathrm{i}y) - 5C_\star K^{-\sigma_3} - \frac{2C_E^v}{R} - \mathrm{mes}(\mathbb{T}^d \backslash \Omega_K)(2C_E^v + 5C_\star K^{-\sigma_3}) \\ &\geqslant L_n(\mathrm{i}y) - C_{15} K^{-\sigma_{10}}.\end{aligned}$$

根据（3.15）和霍尔德不等式，存在 $C_{16}=C_{16}(E,\ v,\ h,\ h',\ d)$ 使得对于充分大的 K，

$$\begin{aligned}(IV)&>\frac{1}{(2\pi)^d}\frac{2}{R}\int_{\Omega_K\setminus\mathcal{R}_K}-C_{14}K^{\frac{1-\sigma_3}{4}}\mathrm{d}x+\frac{1}{(2\pi)^d}\frac{2}{R}\int_{\Omega_K\cap\mathcal{R}_K}\inf_{1\leqslant k\leqslant R}u(T^{kl_0}x)\mathrm{d}x\\&>-\frac{2C_{14}}{R}K^{\frac{1-\sigma_3}{4}}-\frac{1}{(2\pi)^d}\frac{2}{R}\sum_{k=1}^{R}\int_{\Omega_K\cap\mathcal{R}_K}|u(T^{kl_0}x)|\mathrm{d}x\\&\geqslant-2C_{14}l_0K^{-\frac{1-\sigma_3}{4}}-2\mathrm{mes}(\Omega_K\cap\mathcal{R}_K)^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}\\&\geqslant-C_{16}K^{-\frac{1-\sigma_3}{8d}},\end{aligned}$$

其中我们使用 $\|u\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}\leqslant C_2(E,\ v,\ h,\ h',\ d,\ 2)$ 通过定理 3.1(1)。类似地，再由霍尔德不等式和定理 3.1(1)，存在 $C_{17}=C_{17}(E,\ v,\ h,\ h',\ d)$ 使得当 K充分大时，

$$(II)\geqslant-\mathrm{mes}(\mathbb{T}^d\setminus\Omega_K)^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}\geqslant-C_{17}\sqrt{K}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}K^{\sigma_9}}.$$

T由此完成证明：令 $\sigma_5=\min\{\frac{1-\sigma_3}{8d},\frac{\sigma_{10}}{2}\}$，并结合 $(I)-(IV)$. □

4. 绕数

注意到，正如引言中所述，绕数与环域上全纯函数的零点数密切相关。为证明绕数的存在性，关键在于建立环域上的詹森公式。然而，注意到行列式 $\det(H_n(z)-E)$ 在环域边界上可能为零，因此这种詹森公式必须包含边界的影响。

4.1. 闭圆环上的詹森公式。

命题 4.1 (詹森公式)。 设 f 在 $\mathcal{A}(r_1,r_2)$的某邻域内全纯，且 $\{z_i\}$ 是在 $\mathcal{A}(r_1,r_2)$内的 f 的零点（按重数计）。那么

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})|\mathrm{d}x-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})|\mathrm{d}x\\&\qquad=\sum_{r_1<|z_i|<r_2}\log\frac{r_2}{|z_i|}+\frac{1}{2}\sum_{|z_i|=r_1}\log\frac{r_2}{r_1}+\log\frac{r_2}{r_1}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r_1}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z.\end{aligned}\tag{4.1}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&\log\frac{r_2}{r_1}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r_1}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z\\&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\log|f(r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})|-\log|f(r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})|\Big)\mathrm{d}x\leqslant\log\frac{r_2}{r_1}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r_2}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z.\end{aligned}\tag{4.2}$$

证明。 让我们首先回顾以下詹森公式在半开圆环 [43]上:

引理 4.1 ([43]). 设 g 在 $\mathcal{A}(r_1$上全纯，$r_2)$ 并在 $\mathcal{A}(r_1$上连续，$r_2)$，并设$\{z_i\}$ 为 g 的零点，使得 $r_1 < |z_i| \leqslant r_2$。则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})|\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})|\mathrm{d}x = \sum_{r_1<|z_i|<r_2} \log\frac{r_2}{|z_i|} + \log\frac{r_2}{r_1}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r_1}\frac{g'(z)}{g(z)}\mathrm{d}z.$$

由于 f 在 $\mathcal{A}(r_1, r_2)$的邻域内全纯，因此存在 $\delta > 0$ 使得在 $\mathcal{A}(r_1-\delta, r_2+\delta)$中，

$$f(z) = h(z)\prod_{r_1<|z_i|\leqslant r_2}(z-z_i)\prod_{|z_i|=r_1}(z-z_i) =: g(z)\prod_{|z_i|=r_1}(z-z_i)$$

对于某个定义在 $\mathcal{A}(r_1-\delta, r_2+\delta)$ 中且无零点的全纯函数 h 以及在圆周 $|z|=r_1$上无零点的全纯函数 g。

应用引理 4.1 于 $g(z)$ 表明

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})|\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})|\mathrm{d}x \\ = \sum_{r_1<|z_i|<r_2} \log\frac{r_2}{|z_i|} + \log\frac{r_2}{r_1}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r_1}\frac{g'(z)}{g(z)}\mathrm{d}z + \sum_{|z_i|=r_1}\log\frac{r_2}{r_1},\end{aligned} \tag{4.3}$$

其中我们使用著名公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|a - b\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|\mathrm{d}x = \max\{\log|a|, \log|b|\}.$$

回忆主值积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r_1}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r_1}\frac{g'(z)}{g(z)}\mathrm{d}z = \sum_{|z_i|=r_1}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r_1}\frac{1}{z-z_i}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\#\{|z_i|=r_1\}. \tag{4.4}$$

结合 (4.4) 与 (4.3) 得到 (4.1).

另一方面，注意到主值积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r_2}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r_1}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\#\{z_i \in \partial\mathcal{A}(r_1, r_2)\} + \#\{z_i \in \mathcal{A}(r_1, r_2)\},$$

那么（4.2）便可直接由（4.1）得出。 □

4.2. 绕数的量子化。

定理的证明 *1.1*。我们只需证明 $\nu^+(E, \mathrm{i}y) = \omega^+(E, \mathrm{i}y)$，另一种情形的证明类似。固定 $|y| < h$ 使得 $L(E, \mathrm{i}y) > 0$。由定理 2.1 和定理 2.2，存在 $h' \in (0, h)$ 使得 $L(E, \mathrm{i}(y+\epsilon)) > 0$ 对所有 $0 < \epsilon < h'$ 和

$$\omega^+(E, \mathrm{i}y) = \frac{L(E, \mathrm{i}y_2) - L(E, \mathrm{i}y_1)}{y_2 - y_1}, \text{ if } [y_1, y_2] \subset (y, y+h'). \tag{4.5}$$

注意，直接计算表明

$$\nu_n(E,\mathrm{i}\tilde{y})=\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}n}\oint_{|z|=\mathrm{e}^{-\tilde{y}}}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\mathrm{d}z,\quad \text{for } |\tilde{y}|<h.$$

根据命题4.2，若 $[y_1,\ y_2]\subset(y,\ y+h')$，则

$$\nu_n(E,\mathrm{i}y_1)\leqslant\frac{-1}{2\pi n(y_2-y_1)}\int_0^{2\pi}\Big(\log|f_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y_1)})|-\log|f_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y_2)})|\Big)\mathrm{d}x\leqslant\nu_n(E,\mathrm{i}y_2).$$

将定理1.3 应用于上述不等式，得到

$$\limsup_{n\to\infty}\nu_n(E,\mathrm{i}y_1)\leqslant\frac{L(E,\mathrm{i}y_2)-L(E,\mathrm{i}y_1)}{y_2-y_1},\tag{4.6}$$

and

$$\liminf_{n\to\infty}\nu_n(E,\mathrm{i}y_2)\geqslant\frac{L(E,\mathrm{i}y_2)-L(E,\mathrm{i}y_1)}{y_2-y_1}.\tag{4.7}$$

设 $\epsilon\in(0,\ h'/10)$。在（ $y_1=y+2\epsilon$ 和 $y_2=y+3\epsilon$ ）中取4.6），并利用（4.5），得到

$$\limsup_{n\to\infty}\nu_n(E,\mathrm{i}(y+2\epsilon))\leqslant\frac{1}{\epsilon}(L(E,\mathrm{i}(y+3\epsilon))-L(E,\mathrm{i}(y+2\epsilon)))=\omega^+(E,\mathrm{i}y).\tag{4.8}$$

另一方面，在（ $y_1=y+\epsilon$ 和 $y_2=y+2\epsilon$ ）中取4.7），并利用（4.5），得到

$$\liminf_{n\to\infty}\nu_n(E,\mathrm{i}(y+2\epsilon))\geqslant\frac{1}{\epsilon}(L(E,\mathrm{i}(y+2\epsilon))-L(E,\mathrm{i}(y+\epsilon)))=\omega^+(E,\mathrm{i}y).\tag{4.9}$$

结合（4.8）与（4.9），可得

$$\nu^+(E,\mathrm{i}y)=\lim_{\epsilon\to0^+}\lim_{n\to\infty}\nu_n(E,\mathrm{i}(y+2\epsilon))=\omega^+(E,\mathrm{i}y).$$

如果 $E\notin\Sigma_{v,y}$，则 $(\alpha,S_{E,v}(\cdot+\mathrm{i}y))\in\mathcal{UH}$ 根据命题 2.1。由定理 2.1，我们有 $\omega^+(E,\mathrm{i}y)=\omega^-(E,\mathrm{i}y)$ 从而证明完成。□

4.3. **绕数的应用**。 在本小节中，我们给出绕数的应用:

推论 *1.1* 的证明。 Avila [2] 证明了对于任意 $E\in\mathbb{C}$，任意 $y\geqslant0$，

$$L(E,\mathrm{i}y)=\max\{\log\lambda+y,L(E,\mathrm{i}0)\}.\tag{4.10}$$

则对于任意 $E\notin\Sigma_{2\lambda\cos,0}$,薛定谔余循环 $(\alpha,S_{E,2\lambda\cos}(x))\in\mathcal{UH}$，特别地$L(E,\mathrm{i}0)>0$，并且容易看出转折点为 $\gamma_*=L(E,\mathrm{i}0)-\log\lambda$。因此结果直接由 (4.10) 和定理 1.1 得出。□

*Proo*推论 *1.2*。 将零点（按重数计）记为

$$\widehat{N}_n(r_1,r_2):=\#\{z\in\mathcal{Z}_{f_n}:z\in\mathcal{A}(r_1,r_2)\}+\frac{1}{2}\#\{z\in\mathcal{Z}_{f_n}:z\in\partial\mathcal{A}(r_1,r_2)\}.$$

由（1.6），可得

$$\nu_n(E,\mathrm{i}y_2)-\nu_n(E,\mathrm{i}y_1)=\frac{1}{n}\widehat{N}_n(e^{-y_2},e^{-y_1}).$$

另一方面，显然对于 $y_1\leqslant y_2$,

$$\widehat{N}_n(\mathrm{e}^{-(y_2+\epsilon)},\mathrm{e}^{-(y_1-\epsilon)})\leqslant N_n(\mathrm{e}^{-(y_2+2\epsilon)},\mathrm{e}^{-(y_1-2\epsilon)})\leqslant\widehat{N}_n(\mathrm{e}^{-(y_2+3\epsilon)},\mathrm{e}^{-(y_1-3\epsilon)}).$$

因此推论 1.2可由定理 1.1直接得出。□

5. 态密度

本节研究非自伴准周期薛定谔算子的态密度测度，并建立 Thouless公式。回顾以下著名的 Widom引理。

引理 5.1 (Widom引理 [49, 50])。 设 $\{\mathrm{d}\mu_n\}_{n\geqslant 1}$ 在 $\mathbb{C}$中具有紧支集。若 $p_n(z)=\int_{\mathbb{C}}\log|\zeta-z|\mathrm{d}\mu_n(\zeta)$ 几乎处处收敛于 $p(z)$，则 $\mathbb{C}$是局部可积的， p，且 $\mathrm{d}\mu_n$ 弱收敛于 $\frac{1}{2\pi}(\Delta p)\mathrm{d}m$， 当 $n\to\infty$时。

现在我们可以完成定理 1.2 的证明。

定理 *1.2* 的证明。 取 $y\in\mathbb{R}^d$ 使得 $|y_j|<h(1\leqslant j\leqslant d)$。定义集合

$$\mathcal{K}=\{(E,x):\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|f_n(E,x+\mathrm{i}y)|=L(E,\mathrm{i}y)\},$$

并令 $\mathcal{L}=(\mathbb{C}\times\mathbb{T}^d)\backslash\mathcal{K}$ 为坏集，相应的截面为 $\mathcal{L}_x=\{E:(E,\ x)\in\mathcal{L}\}$， $\mathcal{L}_E=\{x:\ (E,\ x)\in\mathcal{L}\}$。对于任意固定的 $E\in\mathbb{C}\backslash\mathcal{Z}_{L,\ y}$，由定理 $\mathrm{mes}(\mathcal{L}_E)=0$ 可得 1.3。于是由Fubini定理可知

$$|\mathcal{L}|=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}m(\mathcal{L}_x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{C}}\mathrm{mes}(\mathcal{L}_E)\mathrm{d}m(E)=0,$$

其中 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{C}\times\mathbb{T}^d$上的乘积测度。因此，对于几乎处处的 $x\in\mathbb{T}^d$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|f_n(E,x+\mathrm{i}y)|=L(E,\mathrm{i}y)$$

对于几乎处处的 $E\in\mathbb{C}$。由于 $H_n(x+\mathrm{i}y)$ 对任意 $x\in\mathbb{T}^d$都有界，$\mathrm{d}\mathcal{N}_n^{x+\mathrm{i}y}$在 $\mathbb{C}$中具有紧支集。因此，定理1.2(1) 由引理5.1 可得，其中

$$p_n(E)=\frac{1}{n}\log|f_n(E,x+\mathrm{i}y)|,\quad \mathrm{d}\mu_n=\mathrm{d}\mathcal{N}_n^{x+\mathrm{i}y},\quad p(E)=L(E,\mathrm{i}y).$$

为证明定理1.2(2)，我们回顾以下内容:

引理5.2 （下包络定理 [37]）。假设 $\{\mathrm{d}\mu_n\}_{n\geqslant 1}$ 在 $\mathbb{C}$中具有紧支集。记 $p_n(z)=\int_{\mathbb{C}}\log|z-\zeta|\mathrm{d}\mu_n(\zeta)$。假设$\mathrm{d}\mu_n\rightharpoonup\mathrm{d}\mu$，当 $n\to\infty$时成立。那么

$$\limsup_{n\to\infty}p_n(z)=\int_{\mathbb{C}}\log|z-\zeta|\mathrm{d}\mu(\zeta)\quad \textit{for a.e. } z\in\mathbb{C}.$$

定理1.2(2) 由引理5.2 及次调和函数的弱唯一性得出。□

作为非自伴 Thouless公式的一个推论，我们可以建立单频准周期薛定谔算子的绕数与态密度测度之间的关系。首先证明一个引理：对于具有实解析势函数 $v(\cdot+\mathrm{i}y)$ 的任意薛定谔算子，都有 $m(\mathcal{Z}_{L,\ y})=0$ 。

引理 5.3. 设 $(\alpha,v)\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\times C^\omega(\mathbb{T}_h,\mathbb{R})$。以下成立。

(1) 对于任意 $E\notin\mathbb{R}$, $\omega^+(E,\ \mathrm{i}0)=\omega^-(E,\ \mathrm{i}0)=0$.(2) 对于任意 $|y|<h$, $\mathcal{Z}_{L,\ y}\subset\mathbb{R}$.

证明。 我们来证明引理 5.3(1)。对于任意 $E \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$，薛定谔余循环 $(\alpha, S_{E,v}) \in \mathcal{UH}$。由定理 2.1 和定理 2.2 可知，存在 $h' \in (0, h)$ 使得对于任意 $|\epsilon| < h'$

$$\omega^+(E, \mathrm{i}\epsilon) = \omega^-(E, \mathrm{i}\epsilon). \tag{5.1}$$

应用命题 4.1 取 $r_1 = 1$ 和 $r_2 = \mathrm{e}^{\epsilon}$ 取 $\epsilon \in (0, h'/10)$, 可得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}n} \oint_{|z|=1} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \mathrm{d}z \leqslant \frac{1}{2\pi n\epsilon} \int_0^{2\pi} \Big(\log |f_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\mathrm{i}\epsilon)})| - \log |f_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})| \Big) \mathrm{d}x. \tag{5.2}$$

注意， $H_n(x)$ 是自伴算子，其谱 $\{E_j(x)\}$ 为实数，这意味着

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}n} \oint_{|z|=1} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \mathrm{d}z = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \arg(E_j(x) - E) \mathrm{d}x = 0. \tag{5.3}$$

由（5.2）、（5.3）以及定理 1.3 可得

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n\epsilon} \int_0^{2\pi} \Big(\log |f_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\mathrm{i}\epsilon)})| - \log |f_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})| \Big) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\epsilon} (L(E, -\mathrm{i}\epsilon) - L(E, \mathrm{i}0)) = -\omega^-(E, \mathrm{i}0). \end{aligned} \tag{5.4}$$

另一方面，应用命题 4.1 取 $r_2 = 1$ 和 $r_1 = \mathrm{e}^{\epsilon}$ 取 $\epsilon \in (-h'/10, 0)$,可得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}n} \oint_{|z|=1} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \mathrm{d}z \geqslant \frac{1}{2\pi n\epsilon} \int_0^{2\pi} \Big(\log |f_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})| - \log |f_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\mathrm{i}\epsilon)})| \Big) \mathrm{d}x. \tag{5.5}$$

因此，结合（5.5）与（5.3）以及定理 1.3 可得

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n\epsilon} \int_0^{2\pi} \Big(\log |f_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})| - \log |f_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}\epsilon)})| \Big) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\epsilon} (L(E, \mathrm{i}0) - L(E, \mathrm{i}\epsilon)) = -\omega^+(E, \mathrm{i}0). \end{aligned} \tag{5.6}$$

因此引理5.3(1) 由（5.1）、（5.4）和（5.6）得出。

关于引理5.3(2)，由于 $L(E,\mathrm{i}y)$ 是凸的，且对于 $E \notin \mathbb{R}$， $L(E,\mathrm{i}0) > 0$ ，由引理5.3(1)可推得 $L(E, \mathrm{i}y) \geqslant L(E, \mathrm{i}0)$ 对任意 $|y| < h$ 均成立，这意味着 $\mathcal{Z}_{L,y} \subset \mathbb{R}$。□

推论*1.3*的证明。根据 Avila 全局理论 [2]， $L(E, \mathrm{i}y)$ 关于 是凸的且分段线性，并具有右导数 y 与 $\omega^+(E, \mathrm{i}y)$。因此

$$L(E, \mathrm{i}y) = \int_0^y \omega^+(E, \mathrm{i}\tilde{y}) \mathrm{d}\tilde{y} + L(E, \mathrm{i}0).$$

N注意，若 $E \in \mathbb{R}$，由于 $L(E, \mathrm{i}y)$ 关于 y 是凸的且为偶函数，因此可得

$$L(E, \mathrm{i}y) \geqslant L(E, \mathrm{i}0) > 0, \quad \text{for any } y \in (0, h). \tag{5.7}$$

若 $E \notin \mathbb{R}$，由引理5.3(1)，我们有 $\omega^+(E, \mathrm{i}0) = 0$，则（5.7）再次由凸性得出。因此，我们可以应用定理1.1 并得到

$$L(E, \mathrm{i}y) = \int_0^y \nu^+(E, \mathrm{i}\tilde{y}) \mathrm{d}\tilde{y} + L(E, \mathrm{i}0). \tag{5.8}$$

同时，由引理5.3(2)，可以应用定理1.2(2) 得到

$$L(E,\mathrm{i}y)=\int_{\mathbb{C}}\log|\tilde{E}-E|\mathrm{d}\mathcal{N}^{\mathrm{i}y}(\tilde{E}). \tag{5.9}$$

S因此，根据（1.8）以及（5.8）和（5.9），两边相等，故推论 1.3 成立 . □

Appendix A. Proof of Lemma 3.5

回想一下，对于任意 $A\in\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{C})$，都存在单位向量 u_A^+、u_A^-、v_A^+、v_A^-，使得 $Au_A^+=\|A\|v_A^+$、$Au_A^-=\|A\|^{-1}v_A^-$。此外，$|u_A^+\wedge u_A^-|=|v_A^+\wedge v_A^-|=1$。

N现在我们完成引理 3.5 的证明。先来证明，对于充分大的 K，

$$\mathrm{mes}(\mathcal{F}_K\cap\mathcal{G}_K)\leqslant \mathrm{e}^{-(K^{1-\sigma_3})^{\frac{1}{2d}}}. \tag{A.1}$$

对于任意 $x\in\mathcal{F}_K\cap\mathcal{G}_K$，根据推论 3.1 以及 $\mathcal{F}_K$ 的定义，

$$\begin{aligned}|f_n(x+\mathrm{i}y)|&\leqslant \mathrm{e}^{nL_n(E,\mathrm{i}y)-5C_\star nK^{-\sigma_3}},\\ \|M_n(x+\mathrm{i}y)\|&\geqslant \mathrm{e}^{nL_n(E,\mathrm{i}y)-C_4nK^{-\sigma_3}}.\end{aligned} \tag{A.2}$$

由于 $f_n(x+\mathrm{i}y)=M_n(x+\mathrm{i}y)\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2$ 以及 $|\langle u_n^+(x+\mathrm{i}y),\ \vec{e}_1\rangle|=|u_n^-(x+\mathrm{i}y)\wedge\vec{e}_1|$，th en

$$\begin{aligned}|f_n(x+\mathrm{i}y)|\geqslant&\|M_n(x+\mathrm{i}y)\||u_n^-(x+\mathrm{i}y)\wedge\vec{e}_1||v_n^+(x+\mathrm{i}y)\wedge\vec{e}_2|\\ &-\|M_n(x+\mathrm{i}y)\|^{-1}|u_n^+(x+\mathrm{i}y)\wedge\vec{e}_1||v_n^-(x+\mathrm{i}y)\wedge\vec{e}_2|.\end{aligned} \tag{A.3}$$

将 (A.2) 与 (A.3) 结合起来，$C_\star\geqslant C_4$ 即可得到

$$|u_n^-(x+\mathrm{i}y)\wedge\vec{e}_1|\cdot|v_n^+(x+\mathrm{i}y)\wedge\vec{e}_2|\leqslant \mathrm{e}^{-4C_\star nK^{-\sigma_3}}.$$

因此，要么

$$|u_n^-(x+\mathrm{i}y)\wedge\vec{e}_1|\leqslant \mathrm{e}^{-2C_\star nK^{-\sigma_3}} \tag{A.4}$$

or

$$|v_n^+(x+\mathrm{i}y)\wedge\vec{e}_2|\leqslant \mathrm{e}^{-2C_\star nK^{-\sigma_3}}. \tag{A.5}$$

任取 $x\in\mathcal{F}_K\cap\mathcal{G}_K$。根据前面的讨论，在 $\mathcal{F}_K$中的三项中，要么有两项满足 (A.4)，要么有两项满足 (A.5)，这是由鸽巢原理得出的。以下结果实际上已在 [23, 11]中证明。

引理 A.1. 若 *(A.4)* 在 $\mathcal{F}_K$中出现两次，则

$$\begin{aligned}|\vec{e}_1\wedge M_{j_2-j_1}(T^{j_1}x+\mathrm{i}y)\vec{e}_1|\leqslant&|u_n^-(T^{j_2}x+\mathrm{i}y)\wedge M_{j_2-j_1}(T^{j_1}x+\mathrm{i}y)u_n^-(T^{j_1}x+\mathrm{i}y)|\\ &+\sqrt{2}\|M_{j_2-j_1}(T^{j_1}x+\mathrm{i}y)^{-1}\|\cdot|\vec{e}_1\wedge u_n^-(T^{j_1}x+\mathrm{i}y)|\\ &+\sqrt{2}\|M_{j_2-j_1}(T^{j_1}x+\mathrm{i}y)\|\cdot|\vec{e}_1\wedge u_n^-(T^{j_2}x+\mathrm{i}y)|.\end{aligned}$$

若 *(A.5)* 在 $\mathcal{F}_K$中出现两次，则

$$\begin{aligned}|\vec{e}_2\wedge M_{j_2-j_1}(T^{n+j_1}x+\mathrm{i}y)\vec{e}_2|\leqslant&|v_n^+(T^{j_2}x+\mathrm{i}y)\wedge M_{j_2-j_1}(T^{n+j_1}x+\mathrm{i}y)v_n^+(T^{j_1}x+\mathrm{i}y)|\\ &+\sqrt{2}\|M_{j_2-j_1}(T^{n+j_1}x+\mathrm{i}y)\|\cdot|\vec{e}_2\wedge v_n^+(T^{j_2}x+\mathrm{i}y)|\\ &+\sqrt{2}\|M_{j_2-j_1}(T^{n+j_1}x+\mathrm{i}y)^{-1}\|\cdot|\vec{e}_2\wedge v_n^+(T^{j_1}x+\mathrm{i}y)|.\end{aligned}$$

此外，将 (j_1,j_2) 替换为 $(0,j_1)$ 或 $(0,j_2)$ 时，同类估计仍然成立。

根据引理 A.1, (A.4), (A.5)，当 K 充分大时，我们有

$$\begin{aligned}|f_{j_2-j_1-1}(T^{j_1}x+\mathrm{i}y)| &= |\vec{e}_1 \wedge M_{j_2-j_1}(T^{j_1}x+\mathrm{i}y)\vec{e}_1| < \mathrm{e}^{-C_\star nK^{-\sigma_3}},\\ |f_{j_2-j_1-1}(T^{n+j_1+1}x+\mathrm{i}y)| &= |\vec{e}_2 \wedge M_{j_2-j_1}(T^{n+j_1}x+\mathrm{i}y)\vec{e}_2| < \mathrm{e}^{-C_\star nK^{-\sigma_3}}.\end{aligned} \tag{A.6}$$

假设（A.1）不成立，则 $\mathrm{mes}(\mathcal{F}_K \cap \mathcal{G}_K) > \mathrm{e}^{-(K^{1-\sigma_3})^{\frac{1}{2d}}}$。由（A.6），我们推得，对于从 l 中选取的 j_1-1、j_2-1、j_2-j_1-1，

$$\mathrm{mes}\{x\in\mathbb{T}^d : |f_l(x+\mathrm{i}y)| < \mathrm{e}^{-C_\star nK^{-\sigma_3}}\} \geqslant \mathrm{mes}(\mathcal{F}_K\cap\mathcal{G}_K) > \mathrm{e}^{-(K^{1-\sigma_3})^{\frac{1}{2d}}}.$$

回想一下 $n > K\delta^{-1}$，我们注意到，对于任意 $l < K^{\frac{1-\sigma_3}{2}}$，

$$\mathrm{e}^{-(K^{1-\sigma_3})^{\frac{1}{2d}}} > \mathrm{e}^{-(nK^{-\sigma_3})^{\frac{1}{2d}}} > \mathrm{e}^{-(nK^{-\sigma_3}l^{-1})^{\frac{1}{d}}}.$$

因此我们有 $\mathrm{mes}\{x\in\mathbb{T}^d : \ |f_l(x+\mathrm{i}y)| < \mathrm{e}^{-C_\star nK^{-\sigma_3}}\} > \mathrm{e}^{-(nK^{-\sigma_3}l^{-1})^{\frac{1}{d}}}$. 应用引理 3.1于 $u(x)=\log|f_l(x+\mathrm{i}y)|$，其中

$$\mathcal{M} = C_E^v l, \quad \mathcal{S} = C_\star nK^{-\sigma_3}, \quad \varrho = \mathrm{e}^{-(nK^{-\sigma_3}l^{-1})^{\frac{1}{d}}}.$$

可以得到，对于 $l\in(l_0$，当 K 足够大时，$K^{\frac{1-\sigma_3}{2}})$

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^d} u(x) \leqslant C_{h-h',d}\mathcal{M} - \frac{\mathcal{S}}{C_{h-h',d}\log^d(C_d/\varrho)} \leqslant -\sqrt{C_\star}l.$$

由引理 3.2 可知，$\sup_{x\in\mathbb{T}^d}\|M_l(x+\mathrm{i}y)\| < 6+2(|E|+\|v\|_h)$，这与假设 $L(E,\ \mathrm{i}y) > \gamma$矛盾。

我们 通过选择 $\sigma_9 = \min\{\frac{\sigma_3}{2}, \frac{1-\sigma_3}{4d}\}$ 完成证明，因为当 K 足够大时，

$$\mathrm{mes}(\mathcal{F}_K) \leqslant \mathrm{mes}(\mathbb{T}^d\backslash\mathcal{G}_K) + \mathrm{mes}(\mathcal{F}_K\cap\mathcal{G}_K) \leqslant K\mathrm{e}^{-C_4K^{\sigma_3}} + \mathrm{e}^{-(K^{1-\sigma_3})^{\frac{1}{2d}}} \leqslant \mathrm{e}^{-K^{\sigma_9}}.$$

□

致谢

X. Wang 感谢 M. Goldstein 就 Cantan 估计所进行的有益讨论。Q. Zhou 也感谢 S. Jitomirskaya 启发性的讨论。本工作部分得到中国国家重点研发计划（2020 YFA0713300）和南开知止基金会的资助。J. You 还获得了国家自然科学基金项目（11871286）的部分资助。Q. Zhou 获得了国家自然科学基金项目（12071232）以及天津市杰出青年科学基金（编号：19JCJQJC61300）的资助。

参考文献

[1] Y. Ashida, Z. Gong, M. Ueda：非厄米物理学。*Adv. Phys.*，**69(3)**，249-435（2020年）。[2] A. Avila：单频薛定谔算子的全局理论，*Acta Math.*，**215(1)**，1-54（2015年）。[3] A. Avila, S. Jitomirskaya：十马提尼问题，*Ann. Math.*，**170(1)**，303-342（2009年）。[4] A. Avila, S. Jitomirskaya：几乎局域化与几乎约化，*J. Eur. Math. Soc.*，**12(1)**，93-131（2010年）。[5] A. Avila, R. Krikorian：准周期薛定谔余循环的约化性或非一致双曲性，*Ann. Math.*，**164(3)**，911-940（2006年）。[6] A. Avila, Y. Last, M. Shamis, Q. Zhou：论频率具有良好逼近性质的几乎 Mathieu 算子的糟糕性质，即将发表于*Duke Math. J.*。[7] A. Avila, J. You, Q. Zhou：几乎 Mathieu 算子的尖锐相变，*Duke Math. J.*，**166(14)**，2697-2718（2017年）。

[8] J. Avron, D. Osadchy, R. Seiler：从拓扑学角度看量子霍尔效应，Physics Today，56(8)，38-42（2003年）。[9] J. Avron, B. Simon：几乎周期薛定谔算子 II：积分态密度，Duke Math. J.，50(1)，369-391（1983年）。[10] Emil J. Bergholtz, Jan Carl Budich, Flore K. Kunst：非厄米系统的例外拓扑，Rev. Mod. Phys.，93(1)，015005（2021年）。[11] I. Binder, M. Voda：关于大小为n、包含于大小为 n^{-C}区间内的准周期雅可比矩阵的特征值数量的估计，J. Spectr. Theory，3(1)，1-45（2013年）。[12] J. Bourgain：具有任意频率向量和实解析势的 $\mathbb{T}^d$ 上的移位之李雅普诺夫指数的正性与连续性，J. Anal. Math.，96(1)，313-355（2005年）。[13] J. Bourgain, M. Goldstein：关于具有准周期势的非微扰局域化，Ann. Math.，152(3)，835-879（2000年）。[14] J. Bourgain, M. Goldstein, W. Schlag：势由斜移给出的 $\mathbb{Z}$ 上的薛定谔算子的安德森局域化，Commun. Math. Phys.，220(3)，583-621（2001年）。[15] J. Bourgain, S. Jitomirskaya：具有解析势的准周期算子的李雅普诺夫指数的连续性，J. Stat. Phys.，108(5/6)（2002年）。[16] X. Cai：非厄米非周期一维模型中的边界依赖自对偶性、绕数与非对称局域化，Phys. Rev. B，103(1)，014201（2021年）。[17] J. Chapman, G. Stolz：与 XY 自旋链相关的随机块算子的局域化，Ann. Henri Poincaré，16(2)，405-435（2015年）。[18] W. Craig, B. Simon：随机雅可比矩阵积分态密度的对数赫尔德连续性，Commun. Math. Phys.，90(2)，207-218（1983年）。[19] W. Craig, B. Simon：李雅普诺夫指数的次调和性，Duke Math. J.，50(2)，551-560（1983年）。[20] L. Ge, S. Jitomirskaya, J. You, Q. Zhou：乘法型詹森公式与单频薛定谔算子的定量全局理论，预印本。[21] W. Geng, K. Tao：具有 Brjuno-Rüssmann 频率的解析准周期雅可比算子的狄利克雷行列式的大偏差定理，Commun. Pure Appl. Anal.，19(12)，5305-5335（2020年）。[22] I. Goldsheid, B. Khoruzhenko：随机非厄米雅可比矩阵的 Thouless公式，Israel J. Math.，148(1)，331-346（2005年）。[23] M. Goldstein, W. Schlag：积分态密度的精细性质与狄利克雷特征值的定量分离性质，Geom. Funct. Anal.，18(3)，755-869（2008年）。[24] M. Goldstein, W. Schlag：准周期薛定谔方程的共振与谱中间隙的形成，Ann. Math.，173(1)，337-475（2011年）。[25] M. Goldstein, W. Schlag, M. Voda：关于多频准周期算子的局域化与谱，arXiv：1610.00380（2016年）。[26] M. Goldstein, W. Schlag, M. Voda：大耦合下多频准周期薛定谔算子的谱，Invent. Math.，217(2)，603–701（2019年）。[27] Z. Gong, Y. Ashida, K. Kawabata, K. Takasan, S. Higashikawa, M. Ueda：非厄米系统的拓扑相，Phys. Rev. X，8(3)，031079（2018年）。[28] R. Han, W. Schlag：通过行列式的零点研究 Avila 的加速度及其在薛定谔余循环中的应用，arXiv：2212.05988（2022年）。[29] A. Haro, J. Puig：长程薛定谔斜积的 Thouless公式与 Aubry 对偶性，Nonlinearity，26(5)，1163-1187（2013年）。[30] H. Jiang, L. J. Lang, C. Yang, S. L. Zhu, S. Chen：非互易准周期晶格中的非厄米皮肤效应与安德森局域化的相互作用，Phys. Rev. B，100(5)，054301（2019年）。[31] S. Jitomirskaya：几乎 Mathieu 算子的金属-绝缘体相变，Ann. Math.，150(3)，1159-1175（1999年）。[32] S. Jitomirskaya：一维准周期算子：全局理论、对偶性与小分母的尖锐分析，国际数学家大会论文集（2022年）。[33] S. Jitomirskaya, W. Liu：准周期特征函数的普适层级结构，Ann. Math.，187(3)，721-776（2018年）。[34] R. Johnson：有界系数线性微分算子的指数二分性、旋转数，J. Differ. Equ.，61(1)，54-78（1986年）。

[35] T. Kitagawa, E. Berg, M. Rudner, E. Demler: 周期驱动量子系统的拓扑表征，《物理评论B》，82(23)，235114（2010年）。[36] S. Kotani, B. Simon: 条带上的随机薛定谔矩阵与雅可比矩阵，《数学物理通讯》，119(3)，403-429（1988年）。[37] N. S. Landkof: 现代位势理论基础，第180卷，Springer，柏林，（1972年）。[38] B. Y. Levin: 整函数讲座，数学译丛，专著150，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，（1996年）。[39] Y. Liu, Q. Zhou, S. Chen: 一维非厄米准晶的局域化转变、谱结构与绕数，《物理评论B》，104(2)，024201，（2021年）。[40] S. Longhi: 非厄米准晶中的拓扑相变，《物理评论快报》，122(23)，237601（2019年）。[41] M. Powell: 解析多频准周期余循环李雅普诺夫指数的连续性，arXiv: 2210.09285（2022年）。[42] B. Simon: 几乎周期薛定谔算子：综述，《应用数学进展》，3(4)，463-490（1982年）。[43] E. Sorets, T. Spencer: 具有准周期势函数的薛定谔算子的正李雅普诺夫指数，《数学物理通讯》，142(3)，543-566（1991年）。[44] K. Tao, M. Voda: 准周期雅可比算子积分态密度的赫尔德连续性，《谱理论杂志》，7(2)，361-386（2017年）。[45] D. Thouless: 一维系统态密度与局域化范围之间的关系，《物理学杂志C》，5(1)，77-81（1972年）。[46] D. Thouless, M. Kohmoto, M. Nightingale, M. Den Nijs: 二维周期势中的量子化霍尔电导，《物理评论快报》，49(6)，405-408（1982年）。[47] X. Wang, Z. Wang, J. You, Q. Zhou: 准周期Hatano-Nelsen模型的Thouless公式，预印本。[48] X. Wang, J. You, Q. Zhou: 非自伴几乎周期薛定谔算子的等谱，arXiv: 2206.02400（2022年）。[49] H. Widom: 非自伴Toeplitz矩阵的特征值分布及非零指标情形下Toeplitz行列式的渐近性质，《算子理论：进展与应用》，48，387-421（1990年）。[50] H. Widom: 非自伴Toeplitz矩阵的特征值分布，《算子理论：进展与应用》，71，1-8（1994年）。陈省身数学研究所和LPMC，南开大学，天津300071，中国 电子邮件地址：xueyinwang@mail.nankai.edu.cn 陈省身数学研究所和LPMC，南开大学，天津300071，中国 电子邮件地址：zhenfuwang@mail.nankai.edu.cn 陈省身数学研究所和LPMC，南开大学，天津300071，中国 电子邮件地址：jyou@nankai.edu.cn 陈省身数学研究所和LPMC，南开大学，天津300071，中国 电子邮件地址：qizhou@nankai.edu.cn