arXiv:2304.02487v1 [math.DG] 5 Apr 2023

# 低熵高余维曲线缩短流的奇点

FLORIAN LITZINGER

摘要。我们研究欧几里得背景空间中任意余维的曲线缩短流。我们证明，在奇点附近，该流渐近平面，这与 Altschuler 关于空间曲线的研究相呼应，并分析该流的放大极限。利用这些结果，我们进一步证明，具有熵界的初始曲线在有限时间内经曲线缩短流演化后收敛到一个圆点。

## 1. 引言

设 $\gamma\colon S^1\times[0,\omega)\to\mathbb{R}^n$ 为一族满足曲线缩短流、且具有光滑初始数据 $\gamma_0\colon S^1\to\mathbb{R}^n$: 的单位圆的光滑浸入。

$$\text{(CSF)}\qquad \begin{aligned}\frac{\partial\gamma}{\partial t}(p,t)&=(\kappa N)(p,t),\\ \gamma(p,0)&=\gamma_0(p).\end{aligned}$$

这里， $\kappa(\cdot\ t)$ 是 $\gamma_t$ 的曲率：$=\gamma(\cdot\ t)$， $N(\cdot\ t)$ 是我们选取的单位法向量场。为简洁起见，我们也称$\{\gamma_t\}$ 为曲线缩短流。在平面情形下， $n=2$存在法向量指向内侧或外侧的概念；而在任意余维下，每条曲线 $\gamma_t$ 仍有两个定义明确的定向。因此，我们可以选择定向的符号，使曲线缩短流（曲线缩短流）具有向前时间方向的弱抛物性。特别地，乘积 $\kappa N$ 即使在 $N$ 未定义的点上也有意义。我们还假设每条曲线 $\gamma_t$ 都是光滑且可求长的。众所周知，解至少在短时间内存在 [23]。

对于平面中嵌入曲线的曲线缩短流，Gage 和 Hamilton[23, 24] 证明，凸曲线最终会变成圆形并收缩至一点。具体而言，在演化过程中，流始终保持光滑，直至最终时刻曲率趋于无穷大。Grayson [25, 26, （另见 33] ）证明，任意嵌入曲线在演化过程中都能保持嵌入状态，并最终变为凸曲线，且不会产生奇点，从而完成了对平面中嵌入曲线流的分析。另一方面，浸入曲线可能呈现复杂得多的行为 [26]。在该流下作自相似运动的解已得到分类 [1, 28]。

近年来，曲线缩短流及其高维对应物——平均曲率流——越来越多地在余维大于一的情形下受到关注。对于曲线而言，这种情形与平面情形有很大不同；例如，起初嵌入的解可能会随时间演化而产生自交。此外，最大值原理等常用工具也不像在余维为一时那样适用。20 世纪 90 年代初，Altschuler 曾研究空间曲线的奇点 [3] ，Altschuler–Grayson 则借助一类特殊的空间曲线，为平面曲线定义了穿越奇点的流 [4] 。此后，关于浸入任意维空间的曲线流的更多研究也开始

日期：2023年4月5日。2020 数学主题分类。主要分类 53E10；次要分类 35K59。

出现 [2, 22, 29, 30, 35, 36, 38, 40, 50]。在平均曲率流领域，Ambrosio 和 Soner [5] 采用变分流形的设想，发展了适用于任意余维的方法；与此同时，传统的子流形方法也得到了应用 [8, 21,42，另见 43, 47]。值得注意的是，Nguyen 提出了任意余维下带手术的平均曲率流概念 [39]。

人们也越来越关注熵界下流的研究。曲线 $\gamma$ 的熵 $\lambda(\gamma)$ 是一种可视为几何复杂度度量的泛函，其定义为 [18, 37]

$$\lambda(\gamma) = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n,\, t_0 > 0} (4\pi t_0)^{-\frac{1}{2}} \int_\gamma \mathrm{e}^{-\frac{|x-x_0|^2}{4t_0}}\, d\mu.$$

由于 Huisken 单调性公式，熵在曲线缩短流下单调不增。因此，在奇点研究中考察熵尤其有意义，因为初始曲线上这一量的上界会沿流传播。

具体而言，Colding–Minicozzi [18] 、Chodosh 等人 [16, 17] 在平均曲率流一般奇点的研究中，以及 Bernstein–L. Wang 的低熵 Schoenflies 定理 [14]中，都运用了熵。Colding 等人证明，圆球面在闭自收缩子中熵最小 [19], ；Bernstein–L. Wang [10, 11, （另见 13] ）以及 Ketover–Zhou [34] 证明了闭嵌入曲面在 $\mathbb{R}^3$ 中也有相同结论。Zhu [51]将这一结果推广到高维。Hershkovits–White 为任意维数的自收缩子证明了尖锐的熵界 [31]。Bernstein–L. Wang [12] 和 S. Wang [46]证明了圆球面在熵的小扰动下具有 Hausdorff 稳定性。此外，对于任意余维，Colding 和 Minicozzi [20] 给出了一般奇点的熵和余维的统一界。

在本文中，我们首先沿用 Altschuler 关于空间曲线的工作思路 [3]，证明奇点的形成在本质上是平面现象。也就是说，我们证明流的放大极限局限于 $\mathbb{R}^n$ 的二维子空间中。这一结果已出现在 Yang 和 Jiao 的工作中 [50]。此外，我们论证，与 $n = 3$ 情形一样，对于 I 型奇点的任意放大序列（即曲率的增长速度不超过 $(\omega - t)^{\frac{1}{2}}$），都存在一个子序列，使得沿其对曲线进行重标度后收敛到一个平面自相似收缩解；而对于 II 型奇点（即非 I 型奇点），则存在一个本质爆破序列，使得沿其进行的一列重标度收敛到平移型 Grim Reaper 解。由于 Grim Reaper 的熵已知 [27], ，我们因此能够排除 II 型奇点的出现；再结合平面中自相似收缩曲线的分类 [1, （另见 28], ），便可证明，对于初始熵较低的曲线缩短流，唯一可能出现的奇点是圆圆：

**定理 1.1** (主定理)。 假设 $\gamma\colon \ S^1 \times [0, \omega) \to \mathbb{R}^n$ 是 (曲线缩短流) 的一个光滑解，其初始数据为 $\gamma(\cdot, 0) = \gamma_0$ 并假设 $\gamma_0$的熵满足

$$\lambda(\gamma_0) \leq 2.$$

那么 $\omega$ 是有限的，且重标度流收敛到圆圆。

本文结构如下。在第2节中，我们介绍本文所用的符号以及熵泛函。接下来的两节与 Altschuler 关于空间曲线奇点的研究相呼应。在第3节中，我们推导 Frenet–Serret标架的演化方程，并得到切向量导数的伯恩斯坦型估计，即定理 3.9。在第4节中，我们在定理4.3 和4.4中证明，解在奇点附近渐近平面；也就是说，一列重标度的子序列极限是一个凸平面曲线族。此外，在奇点附近

对于 I 型奇点，定理4.5 表明，沿放大序列的一列重标度收敛到一个平面自相似收缩解；而对于 II 型奇点，我们在定理4.6中证明，存在一列本质爆破序列收敛到大U形曲线。最后，在第5节中，我们证明主要结果：将曲线缩短流的奇点相关结论与初始曲线的熵界相结合，可知该流会在有限时间内收敛到一个圆点。这是任意余维下曲线缩短流的首个此类收敛结果。

**致谢**。本文是作者在伦敦玛丽女王大学攻读博士学位期间论文的一部分。衷心感谢 Huy The Nguyen 提出这一问题，并在整个研究过程中给予支持。

## 2. 记号与预备知识

我们考虑 $\mathbb{R}^n$中的曲线的曲线缩短流。采用 Frenet–Serret标架进行研究较为方便，我们在很大程度上沿用 Gage–Hamilton 关于平面曲线的研究中的记号 [23]。

**2.1. 中的曲线** $\mathbb{R}^n$。设 $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^n$, $p \mapsto \gamma(p)$ 是单位圆到 $\mathbb{R}^n$ 的一个浸入，其中参数 $p$ 视为模 $2\pi$。我们始终假设 $\gamma$ 光滑且可求长。定义该参数化的速度为

$$v = \left|\frac{\partial \gamma}{\partial p}\right|.$$

由于 $\gamma$ 可求长，我们可以用弧长 $s$ 对其进行参数化，使得 $v(s) = 1$。此外，微分算子 $\frac{\partial}{\partial s}$ 定义为

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v(p)}\frac{\partial}{\partial p}, \tag{2.1}$$

对于任意 $U \subset S^1$，诱导测度 $ds$ 由下式给出

$$\int_U ds = \int_U v(p)\, dp.$$

此外，令 $(T, N, B_1, \dots, B_{n-2})$ 表示由正交归一向量构成的 Frenet–Serret活动标架，其中 $T$ 称为切向量， $N$ 称为法向量，而$B_1, \dots, B_{n-2}$称为副法向量。曲率 $\kappa$ 由下式给出

$$\kappa = \left|\frac{\partial T}{\partial s}\right| = \left|\frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2}\right|,$$

并令 $\tau_1 = \left|\frac{\partial N}{\partial s} + \kappa T\right|, \tau_2, \dots, \tau_{n-2}$表示挠率。于是广义Frenet–Serret方程成立 [44]:

$$\frac{\partial}{\partial s}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\tau_1 & 0 & \tau_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\tau_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \tau_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau_{n-2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{n-2} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

在接下来的章节中，我们将考虑沿方向 $N$ 以速度 $\kappa$运动的含时浸入 $\gamma_t = \gamma(\cdot\, t)$，并计算Frenet–Serret标架的演化方程。

最后，为了证明曲线缩短流解的放大极限是平面的，我们需要以下定理。该定理将一个挠率为零的空间曲线是平面的这一著名事实推广到了 $\mathbb{R}^n$ 中曲线的情形。

**定理 2.1** (Spivak [44, 定理 7.B.5])。 设 $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^n$ 是以弧长为参数的曲线，使得 $\kappa$，$\tau_1$，……，$\tau_{j-2}$ 在任一点都不为零，并且 $\tau_{j-1}$ 处处为零。那么 $\gamma$ 包含于 $(j-1)$维平面中，该平面位于 $\mathbb{R}^n$。

2.2. **熵**。 现在我们定义熵泛函，该泛函由 Magni–Mantegazza [37] 和Colding–Minicozzi [18], 引入，并陈述其基本性质。

设 $M^m \subset \mathbb{R}^n$为一个浸入曲面。对于 $(x_0, t_0)$， $\in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 以 $(x_0, t_0)$ 为中心的缩放后的反向热核定义为

$$k_{x_0,t_0}(x,t) = (4\pi(t_0-t))^{-\frac{m}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(t_0-t)}}.$$

注意，$k_{x_0,t_0}$在 $\mathbb{R}^n \times (-\infty, t_0)$ 上定义良好。于是，Huisken 的 $F$-泛函$F_{x_0,t_0}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$定义为 [18, 32]

$$F_{x_0,t_0}(M) = (4\pi t_0)^{-\frac{m}{2}} \int_M \mathrm{e}^{-\frac{|x-x_0|^2}{4t_0}}\, d\mu = \int_M k_{x_0,t_0}(x,0)\, d\mu.$$

**定义 2.2**。 $M$ 的熵定义为 [18, 37]

$$\lambda(M) = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n,\, t_0 > 0} F_{x_0,t_0}(M).$$

设 $\{\gamma_t\}$ 是由闭曲线构成的曲线缩短流。对于任意 $s < t < t_0$，由 Huisken 单调性公式 [32] 可得

$$\frac{d}{dt}\int_{\gamma_t} k_{x_0,t_0}\, d\mu \le 0,$$

由此

$$F_{x_0,t_0}(\gamma_t) \le F_{x_0,t_0+(t-s)}(\gamma_s),$$

这意味着，对于任意 $s < t$， $\lambda(\gamma_t) \le \lambda(\gamma_s)$。因此，若$\{\gamma_t\}$ 是曲线缩短流，则 $\lambda(\gamma_t)$关于 $t$是非增的。此外，熵泛函 $\lambda$ 非负，且在对 $\gamma$进行膨胀变换、旋转变换和平移变换时保持不变；正如Colding–Minicozzi [18]所示， $\lambda$ 的临界点是曲线缩短流的自相似收缩解。

此外，在所有闭合平面曲线中，圆使熵 $\lambda$ 达到最小值。根据Gage–Hamilton–Grayson 定理，平面中的任意闭合曲线 $\gamma$ 都会变为凸曲线，并最终收缩为一个圆点。但熵在曲线缩短流下非增，因此必有 $\lambda(\gamma) \ge \lambda(S^1)$。

注意，自收缩子的熵等于泛函$F_{0,1}$，即高斯面积，因为根据单调性公式，$F_{0,1}$ 的临界点恰好是自收缩子 [18]。

对于某些例子，可以显式计算熵。首先，熵经过归一化，使得直线的熵等于一。此外，对于任意曲线 $\gamma$，我们有 $\lambda(\gamma \times \mathbb{R}) = \lambda(\gamma)$。对于圆 $S^1$，Stone [45] 证明了

$$\lambda(S^1) = \sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{e}}} \approx 1.52.$$

我们还需要曲线缩短流的一些特殊解的熵值。Guang 已计算出平移型 Grim Reaper 解的熵：

**命题 2.3** (Guang [27, 定理 1.3])**.** 令 $\Gamma : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$, $\Gamma(x,t) = (x, -\log(\cos x) + t)$ 表示大$U$形曲线。对于任意点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $t_0 \in (0,\infty)$， 我们有

$$F_{(x_0,y_0),t_0}(\Gamma) \le 2.$$

事实上，

$$\lim_{N\to\infty} F_{(0,N),N}(\Gamma) = 2.$$

因此，大*U*形曲线的熵满足

$$\lambda(\Gamma) = 2.$$

此外，对于自收缩的 Abresch–Langer 解 [1] ，Baldauf 和 Sun 证明了其熵存在一个下界。

**命题 2.4** (Baldauf–Sun [9])**.** 设 $\gamma_{m,n}$ 表示一条 *Abresch–Langer* 曲线，即曲线缩短流在平面中的一个闭合凸自收缩解，其转数为 $m$ ，且曲率有 $2n$ 个临界点，其中 $m$、$n \in \mathbb{N}$是互素整数，并且

$$\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

那么，$\gamma_{m,n}$ 的熵满足

$$\lambda(\gamma_{m,n}) \geq m\lambda(S^1) = m\sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{e}}}.$$

最后，我们可以用每个点处的欧几里得密度来估计熵。

**命题 2.5** (White [49])**.** 设 $M^m \subset \mathbb{R}^n$ 为一浸入曲面。定义 $M$ 在 $x$ 处的欧几里得密度为

$$\Theta^m(M, x) = \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^m(B_r(x) \cap M)}{\omega_m r^m},$$

其中 $\omega_m$ 是 $m$维单位球的体积。然后，对于任意 $x \in M$，我们有

$$\lambda(M) \geq \Theta^m(M, x)$$

只要极限存在。

## 3. 任意余维的曲线缩短流

设 $\gamma\colon S^1 \times [0,\omega) \to \mathbb{R}^n$ 是满足（曲线缩短流）的曲线光滑浸入的单参数族。然后，对于任意光滑初始曲线 $\gamma_0\colon S^1 \to \mathbb{R}^n$，在某个时间区间上存在唯一光滑解 $[0,\omega)$，$0 < \omega \leq \infty$ [23]。事实上，由下面的命题 3.8 ，我们有 $\omega \leq \frac{1}{2}\max|\gamma_0|^2$。

3.1. **演化方程**。在以下命题中，我们用Frenet–Serret标架表述相关的演化方程。它们的类似物先前已由Gage和Hamilton对平面曲线导出 [23]，并由Altschuler对空间曲线导出 [3]；在一般情形下，其中一些出现在文献的各个地方 [29, 36, 50]。

回顾一下，我们已将 $s$ 设为弧长参数，并且 $v = \left|\frac{\partial\gamma}{\partial p}\right|$。下面的两个结论可以完全按照平面情形 [23] 的方法证明。

**命题 3.1.** $v$ 的演化由下式给出

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -\kappa^2 v.$$

证明. 算子 $\frac{\partial}{\partial p}$ 与 $\frac{\partial}{\partial t}$ 可交换，因此

$$\begin{aligned} 2v\frac{\partial}{\partial t}v = \frac{\partial}{\partial t}(v^2) &= 2\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial p}, \frac{\partial^2\gamma}{\partial p\partial t}\right\rangle \\ &= 2\left\langle vT, \frac{\partial}{\partial p}(\kappa N)\right\rangle \\ &= 2\left\langle vT, \frac{\partial\kappa}{\partial p}N - v\kappa^2 T + v\kappa\tau_1 B_1\right\rangle \\ &= -2v^2\kappa^2, \end{aligned}$$

这里我们用到了弗雷内–塞雷公式（2.2）、（曲线缩短流，以及向量$(T,\ N,\ B_1)$是正交归一的。□

由于弧长参数 $s$ 取决于 $t$，我们不能期望算子$\frac{\partial}{\partial s}$ 和 $\frac{\partial}{\partial t}$ 可交换。相反，我们有 —

**命题 3.2**。关于 $s$ 和 $t$ 的微分满足如下交换公式

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial s} = \frac{\partial^2}{\partial s\partial t} + \kappa^2\frac{\partial}{\partial s}. \tag{3.1}$$

证明。利用方程（2.1），我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s} = \kappa^2\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial t} = \kappa^2\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t},$$

从而证明了该结论。 □

这两个命题和弗雷内–塞雷公式（2.2）使我们能够推导出活动标架、曲率和挠率的演化方程。

**命题 3.3.** 我们有

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} + \kappa^2 T = \frac{\partial\kappa}{\partial s}N + \kappa\tau_1 B_1. \tag{3.2}$$

证明。 首先利用交换公式，再结合曲线缩短流方程（曲线缩短流），我们计算得

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial^2\gamma}{\partial t\partial s} \\ &= \frac{\partial^2\gamma}{\partial s\partial t} + \kappa^2\frac{\partial\gamma}{\partial s} \\ &= \frac{\partial^3\gamma}{\partial s^3} + \kappa^2 T \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} + \kappa^2 T. \end{aligned}$$

为了得到第二个等式，注意到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} &= \left(\frac{\partial\kappa}{\partial s}\right)N + \kappa\frac{\partial N}{\partial s} \\ &= \frac{\partial\kappa}{\partial s}N + \kappa\left(-\kappa T + \tau_1 B_1\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

由公式（2.2），因此

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial\kappa}{\partial s}N + \kappa\tau_1 B_1,$$

如所要求。 □

**命题 3.4.** 曲率 $\kappa$ 的演化由下式给出

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t}=\frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2}+\kappa^3-\kappa\tau_1^2 \tag{3.4}$$

只要 $\kappa>0$。

证明。 我们利用以下事实： $\kappa^2=\langle \frac{\partial T}{\partial s}, \frac{\partial T}{\partial s}\rangle$ 并利用弗雷内–塞雷公式（2.2）和公式（3.2）得到：

$$\begin{aligned}
\kappa\frac{\partial \kappa}{\partial t}&=\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial t\partial s}, \frac{\partial T}{\partial s}\right\rangle\\
&=\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial s\partial t}+\kappa^3 N, \kappa N\right\rangle\\
&=\left\langle \frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2}N+\frac{\partial \kappa}{\partial s}\frac{\partial N}{\partial s}+\frac{\partial \kappa}{\partial s}\tau_1 B_1+\kappa\frac{\partial \tau_1}{\partial s}B_1+\kappa\tau_1\frac{\partial B_1}{\partial s}+\kappa^3 N, \kappa N\right\rangle\\
&=\kappa\frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2}+\kappa^4+\langle \kappa^2\tau_1(-\tau_1 N+\tau_2 B_2), N\rangle\\
&=\kappa\frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2}+\kappa^4-\kappa^2\tau_1^2,
\end{aligned}$$

这就证明了所述结论。 □

**推论 3.5.** 我们有

$$\frac{\partial \kappa^2}{\partial t}=\frac{\partial^2 \kappa^2}{\partial s^2}-2\left(\frac{\partial \kappa}{\partial s}\right)^2+2\kappa^4-2\kappa^2\tau_1^2.$$

**命题 3.6.** 法向量场 $N$ 满足

$$\frac{\partial N}{\partial t}=-\frac{\partial \kappa}{\partial s}T+\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial s}+\frac{2\tau_1}{\kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial s}\right)B_1+\tau_1\tau_2 B_2. \tag{3.5}$$

证明。 由弗雷内–塞雷公式（2.2）可得 $\frac{\partial T}{\partial s}=\kappa N$，因此—

$$\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial T}{\partial s}\right).$$

使用弗雷内–塞雷公式（2.2）、交换公式（3.1）以及 $T$ 和 $\kappa$的演化方程（式（3.2）和（3.4））， 通过与上文类似的计算即可得到结论。 □

**命题 3.7。** 第一挠率 $\tau_1$ 的演化由下式给出

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial t}=\frac{\partial^2 \tau_1}{\partial s^2}+\frac{2}{\kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial s}\frac{\partial \tau_1}{\partial s}+\frac{2\tau_1}{\kappa}\left(\frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2}-\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial \kappa}{\partial s}\right)^2+\kappa^3\right)-\tau_1\tau_2^2.$$

证明。 注意，由弗雷内–塞雷公式（2.2），

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial s}, \frac{\partial N}{\partial s}\right\rangle=\kappa^2+\tau_1^2.$$

对该方程关于 $t$ 求导，得到 [50]

$$\tau_1\frac{\partial \tau_1}{\partial t}+\kappa\frac{\partial \kappa}{\partial t}=\left\langle \frac{\partial^2 N}{\partial t\partial s}, \frac{\partial N}{\partial s}\right\rangle.$$

利用式（2.2）、交换公式（3.1）以及 $N$ 和 $\kappa$的演化方程（式（3.4）和（3.5））， 即可得到结论。 □

**命题 3.8.** 我们有

$$\frac{\partial |\gamma|^2}{\partial t}=\frac{\partial^2 |\gamma|^2}{\partial s^2}-2.$$

证明。 由于 $\frac{\partial T}{\partial s} = \kappa N$，曲线缩短流方程也可以写成

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2}.$$

虽然这看起来像热方程，但请注意，弧长参数 $s$取决于时间 $t$。这意味着

$$\begin{aligned}\frac{\partial |\gamma|^2}{\partial t} &= 2\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \gamma \right\rangle \\ &= 2\left\langle \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2}, \gamma \right\rangle.\end{aligned}$$

最后，请注意

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 |\gamma|^2}{\partial s^2} &= \frac{\partial^2}{\partial s^2}\langle \gamma, \gamma \rangle \\ &= 2\left\langle \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2}, \gamma \right\rangle + 2\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\rangle \\ &= 2\left\langle \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2}, \gamma \right\rangle + 2,\end{aligned}$$

这就证明了该结论。 □

3.2. **尺度不变估计**。 与空间曲线的情形一样，我们对切向量的导数以及曲率的导数有尺度不变估计，这些估计仅取决于初始时刻的最大曲率。

我们在式（3.4）中看到，即使在高余维情形下，曲率的演化仍只涉及曲率本身 $\kappa$ 和第一挠率 $\tau_1$，而不涉及任何更高阶挠率。因此，我们可以完全按照 Altschuler [3] 的论证，得到以下结果。为简便起见，我们将切向量的导数记作，例如 $\frac{\partial T}{\partial s} \equiv T_s$ 以及 $T^{(m)} \equiv \frac{\partial^m T}{\partial s^m}$（参见 $T$ [第6章第 2 节）。6]。

**定理 3.9** （参见 [3, 定理 3.1，50，定理 3.1，29，定理 3.6]）。 对于任意 $m \geq 1$，存在 $C_m < \infty$ 使得对于 $t \in (0, \frac{1}{8K_0}]$，其中 $K_t :=$ 上确界 $\kappa^2(\cdot\, t)$，有

$$\left|\frac{\partial^m T}{\partial s^m}\right|^2 \leq \frac{C_m K_0}{t^{m-1}}.$$

证明。 交换公式（3.1）表明

$$T_t = T_{ss} + |T_s|^2 T,$$

因为 $\gamma$ 随曲线缩短流演化。因此，

$$\begin{aligned}|T_s|_t^2 &= 2\langle (T_s)_t, T_s \rangle \\ &= 2\langle (T_t)_s + |T_s|^2 T_s, T_s \rangle \\ &= 2\langle (T_{ss} + |T_s|^2 T)_s, T_s \rangle + 2|T_s|^4 \\ &= 2\langle T_{sss}, T_s \rangle + 2|T_s|_s^2 \langle T, T_s \rangle + 4|T_s|^4 \\ &= |T_s|_{ss}^2 - 2|T_{ss}|^2 + 4|T_s|^4,\end{aligned}$$

因为 $|T_s|_{ss}^2 = 2\langle T_{sss},\ T_s \rangle + 2|T_{ss}|^2$。因此我们有如下微分不等式

$$|T_s|_t^2 - |T_s|_{ss}^2 = -2|T_{ss}|^2 + 4|T_s|^4 \leq 4|T_s|^4.$$

由常微分方程比较原理及 $|T_s|^2 = \kappa^2 \leq K_0$ 在 $t = 0$处，我们得到

$$|T_s|^2 \leq \frac{K_0}{1 - 4K_0 t} \leq 2K_0,$$

根据假设，$t \le \frac{1}{8K_0}$ 成立。因此我们选择 $C_1 = 2$。

我们定义

$$Z_m := T_t^{(m)} - T_{ss}^{(m)},$$

使用记号 $T^{(m)} = \frac{\partial^m T}{\partial s^m}$。那么

$$Z_{m+1} = (Z_m)_s + |T_s|^2 T^{(m+1)}$$

and

$$\begin{aligned}\left|T^{(m)}\right|_t^2 - \left|T^{(m)}\right|_{ss}^2 &= 2\langle T_t^{(m)} - T_{ss}^{(m)}, T^{(m)}\rangle - 2\left|T^{(m+1)}\right|^2 \\ &= 2\langle Z_m, T^{(m)}\rangle - 2\left|T^{(m+1)}\right|^2.\end{aligned}$$

我们已经知道

$$\begin{aligned}Z_0 &= |T_s|^2 T, \\ Z_1 &= 2\langle T_{ss}, T_s\rangle T + 2|T_s|^2 T_s,\end{aligned}$$

而且

$$Z_2 = 2\langle T_{sss}, T_s\rangle T + 2|T_{ss}|^2 T + 6\langle T_{ss}, T_s\rangle T_s + 3|T_s|^2 T_{ss}.$$

对于 $m = 2$，定义 $\Phi := t|T_{ss}|^2 + 4|T_s|^2$。那么

$$\begin{aligned}\Phi_t - \Phi_{ss} =& \ |T_{ss}|^2 + 2t\langle (T_{ss})_t, T_{ss}\rangle + 4(|T_s|_{ss}^2 - 2|T_{ss}|^2 + 4|T_s|^4) \\ & - (2t\langle (T_{ss})_{ss}, T_{ss}\rangle + 2t|T_{sss}|^2 + 4|T_s|_{ss}^2) \\ =& \ -7|T_{ss}|^2 + 2t(\langle (T_{ss})_t - (T_{ss})_{ss}, T_{ss}\rangle - |T_{sss}|^2) + 16|T_s|^4 \\ =& \ -7|T_{ss}|^2 + 2t(\langle Z_2, T_{ss}\rangle - |T_{sss}|^2) + 16|T_s|^4\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\langle Z_2, T_{ss}\rangle &= 2\langle T_{sss}, T_s\rangle\langle T, T_{ss}\rangle + 2|T_{ss}|^2\langle T, T_{ss}\rangle \\ &\quad + 6\langle T_{ss}, T_s\rangle^2 + 3|T_s|^2|T_{ss}|^2 \\ &= 2\langle T_{sss}, T_s\rangle\langle T, T_{ss}\rangle - 2|T_{ss}|^2|T_s|^2 \\ &\quad + 6\langle T_{ss}, T_s\rangle^2 + 3|T_s|^2|T_{ss}|^2,\end{aligned}$$

其中我们用到了 $T_{ss} = -\kappa^2 T + \kappa_s N + \kappa\tau_1 B_1$ (见方程 (3.3))，以及 $\kappa = |T_s|^2$蕴含 $\langle T, T_{ss}\rangle = -|T_s|^2$，我们得到

$$\begin{aligned}\Phi_t - \Phi_{ss} =& \ -7|T_{ss}|^2 + 4t\langle T_{sss}, T_s\rangle\langle T, T_{ss}\rangle - 4t|T_{ss}|^2|T_s|^2 \\ & + 12t\langle T_{ss}, T_s\rangle^2 + 6t|T_s|^2|T_{ss}|^2 - 2t|T_{sss}|^2 + 16|T_s|^4 \\ \le& \ -7|T_{ss}|^2 + 4t|T_{sss}||T_{ss}||T_s| + 14t|T_{ss}|^2|T_s|^2 - 2t|T_{sss}|^2 + 16|T_s|^4 \\ =& \ -7|T_{ss}|^2 - 2t(|T_{sss}| - |T_{ss}||T_s|)^2 + 16t|T_{ss}|^2|T_s|^2 + 16|T_s|^4 \\ \le& \ 64K_0^2 + (32K_0 t - 7)|T_{ss}|^2 \\ \le& \ 64K_0^2,\end{aligned}$$

利用 $|T_s|^2 \le 2K_0$ 和 $t \le \frac{1}{8K_0}$ 在 $t = 0$ 处，我们有 $\Phi \le 4K_0$，因此常微分方程比较原理推出

$$\Phi \le 64K_0^2 t + 4K_0 \le 12K_0$$

对任意 $t \le \frac{1}{8K_0}$。因此，

$$|T_{ss}|^2 \le \frac{12K_0}{t},$$

并且我们可以选择 $C_2 = 12$。

一般而言，对于 $m \geq 3$，我们有

$$
\begin{aligned}
Z_m = {} & 2\langle T^{(m+1)}, T^{(1)}\rangle T \\
& + 2m\langle T^{(m)}, T^{(2)}\rangle T \\
& + 2(m+1)\langle T^{(m)}, T^{(1)}\rangle T^{(1)} \\
& + (m+1)\left|T^{(1)}\right|^2 T^{(m)} \\
& + \sum_{\substack{0\leq i,j,k<m \\ i+j+k=m+2}} n_{ijk}\langle T^{(i)}, T^{(j)}\rangle T^{(k)},
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

其中 $n_{ijk} = n_{ijk}(m)$ 为非负整数。事实上，

$$
\begin{aligned}
Z_3 &= (Z_2)_s + \left|T^{(1)}\right|^2 T^{(3)} \\
&= 2\langle T^{(4)}, T^{(1)}\rangle T \\
&\quad + 6\langle T^{(3)}, T^{(2)}\rangle T \\
&\quad + 8\langle T^{(3)}, T^{(1)}\rangle T^{(1)} \\
&\quad + 4\left|T^{(1)}\right|^2 T^{(3)} \\
&\quad + 8\left|T^{(2)}\right|^2 T^{(1)} \\
&\quad + 12\langle T^{(2)}, T^{(1)}\rangle T^{(2)}.
\end{aligned}
$$

现在假设方程（3.6）对某个 $m$成立。那么我们有

$$
\begin{aligned}
Z_{m+1} &= (Z_m)_s + |T_s|^2 T^{(m+1)} \\
&= 2\langle T^{(m+2)}, T^{(1)}\rangle T + 2\langle T^{(m+1)}, T^{(2)}\rangle T + 2\langle T^{(m+1)}, T^{(1)}\rangle T^{(1)} \\
&\quad + 2m\langle T^{(m+1)}, T^{(2)}\rangle T + 2m\langle T^{(m)}, T^{(3)}\rangle T + 2m\langle T^{(m)}, T^{(2)}\rangle T^{(1)} \\
&\quad + 2(m+1)\langle T^{(m+1)}, T^{(1)}\rangle T^{(1)} + 2(m+1)\langle T^{(m)}, T^{(2)}\rangle T^{(1)} \\
&\quad + 2(m+1)\langle T^{(m)}, T^{(1)}\rangle T^{(2)} + 2(m+1)\langle T^{(2)}, T^{(1)}\rangle T^{(m)} \\
&\quad + (m+1)\left|T^{(1)}\right|^2 T^{(m+1)} \\
&\quad + \sum_{\substack{0\leq i,j,k<m \\ i+j+k=m+2}} n_{ijk}\langle T^{(i+1)}, T^{(j)}\rangle T^{(k)} \\
&\quad + \sum_{\substack{0\leq i,j,k<m \\ i+j+k=m+2}} n_{ijk}\langle T^{(i)}, T^{(j+1)}\rangle T^{(k)} \\
&\quad + \sum_{\substack{0\leq i,j,k<m \\ i+j+k=m+2}} n_{ijk}\langle T^{(i)}, T^{(j)}\rangle T^{(k+1)} + |T_s|^2 T^{(m+1)} \\
&= 2\langle T^{(m+2)}, T^{(1)}\rangle T + 2(m+1)\langle T^{(m+1)}, T^{(2)}\rangle T \\
&\quad + 2(m+2)\langle T^{(m+1)}, T^{(1)}\rangle T^{(1)} + (m+2)\left|T^{(1)}\right|^2 T^{(m+1)} \\
&\quad + \sum_{\substack{0\leq i,j,k<m+1 \\ i+j+k=m+3}} \tilde{n}_{ijk}\langle T^{(i)}, T^{(j)}\rangle T^{(k)},
\end{aligned}
$$

证明该论断。

我们得到

$$\begin{aligned}
\left|T^{(m)}\right|_t^2-\left|T^{(m)}\right|_{ss}^2 &= 2\langle Z_m,T^{(m)}\rangle-2\left|T^{(m+1)}\right|^2\\
&= 4\langle T^{(m+1)},T^{(1)}\rangle\langle T,T^{(m)}\rangle+4m\langle T^{(m)},T^{(2)}\rangle\langle T,T^{(m)}\rangle\\
&\quad+4(m+1)\langle T^{(m)},T^{(1)}\rangle^2+2(m+1)\left|T^{(1)}\right|^2\left|T^{(m)}\right|^2\\
&\quad+2\sum_{\substack{0\le i,j,k<m\\ i+j+k=m+2}}n_{ijk}\langle T^{(i)},T^{(j)}\rangle\langle T^{(k)},T^{(m)}\rangle\\
&\quad-2\left|T^{(m+1)}\right|^2\\
&\le\ -2\left|T^{(m+1)}\right|^2+4\left|T^{(m+1)}\right|\left|T^{(1)}\right|\left|T^{(m)}\right|\\
&\quad-2\left|T^{(1)}\right|^2\left|T^{(m)}\right|^2+2(m+2)\left|T^{(1)}\right|^2\left|T^{(m)}\right|^2\\
&\quad+4m\langle T^{(m)},T^{(2)}\rangle\langle T,T^{(m)}\rangle+4(m+1)\langle T^{(m)},T^{(1)}\rangle^2\\
&\quad+2\sum_{\substack{0\le i,j,k<m\\ i+j+k=m+2}}n_{ijk}\langle T^{(i)},T^{(j)}\rangle\langle T^{(k)},T^{(m)}\rangle\\
&=\ -2\left(\left|T^{(m+1)}\right|-\left|T^{(1)}\right|\left|T^{(m)}\right|\right)^2\\
&\quad+2(m+2)\left|T^{(1)}\right|^2\left|T^{(m)}\right|^2\\
&\quad+4m\langle T^{(m)},T^{(2)}\rangle\langle T,T^{(m)}\rangle+4(m+1)\langle T^{(m)},T^{(1)}\rangle^2\\
&\quad+2\sum_{\substack{0\le i,j,k<m\\ i+j+k=m+2}}n_{ijk}\langle T^{(i)},T^{(j)}\rangle\langle T^{(k)},T^{(m)}\rangle.
\end{aligned}$$

根据归纳假设，我们有

$$\left|T^{(i)}\right|^2\le\frac{C_iK_0}{t^{i-1}}$$

对于任意 $i=1$、…、$m-1$。因此

$$\begin{aligned}
\left|T^{(m)}\right|_t^2-\left|T^{(m)}\right|_{ss}^2 &\le A_1K_0\left|T^{(m)}\right|^2+A_2\sqrt{\frac{K_0}{t}}\left|T^{(m)}\right|^2\\
&\quad+2\sum_{\substack{0\le i,j,k<m\\ i+j+k=m+2}}n_{ijk}\left|T^{(i)}\right|\left|T^{(j)}\right|\left|T^{(k)}\right|\left|T^{(m)}\right|\\
&\le A_3K_0\left|T^{(m)}\right|^2+A_4K_0^3t^{-(m-2)}+\frac{A_5}{t}\left|T^{(m)}\right|^2,
\end{aligned}$$

利用 Peter–Paul 不等式和 $\varepsilon=t$，其中常数 $A_i$ 取决于 $m$和 $C_1$，…，$C_{m-1}$。因此，

$$\begin{aligned}
\left(t^{m-1}\left|T^{(m)}\right|^2\right)_t-\left(t^{m-1}\left|T^{(m)}\right|^2\right)_{ss} &\le (m-1)t^{m-2}\left|T^{(m)}\right|^2\\
&\quad+A_3K_0t^{m-1}\left|T^{(m)}\right|^2\\
&\quad+A_4K_0^3t+A_5t^{m-2}\left|T^{(m)}\right|^2.
\end{aligned}$$

对于足够大的常数 $C>0$，我们令 $\Phi_m = t^{m-1}\left|T^{(m)}\right|^2 + Ct^{m-2}\left|T_{(m-1)}\right|^2$并得到

$$\begin{aligned}(\Phi_m)_t - (\Phi_m)_{ss} &\leq t^{m-2}(A_3K_0t + A_6 - 2C)\left|T^{(m)}\right|^2 + A_7K_0^2\\ &\leq A_7K_0^2.\end{aligned}$$

然后，我们按照 $m=2$ 情形进行，从而得到 $C_m$。 □

利用这些估计和短时存在性，我们得到长时存在性，其含义是：只要曲率保持有界，流就可以继续存在一段时间。特别是，挠率不起作用。

**定理 3.10** (参见 [4, 定理 1。13])。 假设曲率 $\kappa$ 在时间区间 $[0,t_0)$上有界。那么存在 $\varepsilon>0$ 使得曲线缩短流$\{\gamma_t\}$ 在区间 $[0,t_0+\varepsilon)$上存在且光滑。

等价地，我们可以说，如果 $\omega$ 是流的最大存在时间，那么当 $t$ 趋近于 $\omega$时，曲率必定趋于无穷大。

**推论 3.11**。 设 $\gamma\colon S^1\times[0,\omega)\to\mathbb{R}^n$ 是 (曲线缩短流) 的一个解，其初始数据为 $\gamma(\cdot,0)=\gamma_0$。那么 $\omega$ 是有限的，并且 最大值$_{\gamma_t}\kappa^2\to\infty$ 当 $t\to\omega$时。

## 4. Blow-up limits

回想一下，我们设定了 $K_t=\sup\kappa^2(\cdot\ t)$。假设 $\{\gamma_t\}$ 是一个曲线缩短流，并在时刻 $\omega$ 形成奇点。若存在常数 $c>0$ 使得

$$K_t \leq \frac{c}{\omega - t}, \qquad t<\omega,$$

我们称 $\omega$ 处的奇点为 I 型 [3]。否则，也就是说，若

$$\limsup_{t\to T} K_t(\omega - t) = \infty,$$

我们称其为 II 型。

此外，若 $t_j\to\omega\,\text{as}j\to\infty$ 且，则称 $\{(p_j,t_j)\}\subset S^1\times[0,\omega)$ 为放大序列

$$\lim_{j\to\infty}\kappa^2(p_j,t_j)=\infty.$$

特别地，若存在常数 $\rho>0$使得，则称放大序列为本质的

$$\rho K_{t_j}\leq\kappa^2(p_j,t_j), \qquad t\leq t_j$$

对于任意浸入曲线 $\gamma:S^1\to\mathbb{R}^n$，总绝对曲率 $\int_\gamma|\kappa|\,ds$ 是一个尺度不变量。为了证明曲线缩短流的放大极限是平面的，我们回顾一下 Altschuler 关于总绝对曲率导数的估计。由于第 3.1 节导出的演化方程，该估计对 $\mathbb{R}^n$ 中演化的曲线同样成立。

**定理 4.1** (参见 [3, 定理 5。1], 另见 [50])。 设 $\gamma\colon S^1\times[0,\omega)\to\mathbb{R}^n$ 是 (曲线缩短流)的一个解。则积分估计

$$\frac{d}{dt}\int_\gamma|\kappa|\,ds\leq-\int_\gamma|\kappa|\,\tau_1^2\,ds$$

对 $t\in[0,\omega)$成立。

证明。 由推论3.5，我们得到

$$\frac{\partial\kappa^2}{\partial t}=\frac{\partial^2\kappa^2}{\partial s^2}-2\left(\frac{\partial\kappa}{\partial s}\right)^2+2\kappa^4-2\kappa^2\tau_1^2.$$

与 Altschuler 的证明一样，我们接着定义 $\kappa_\varepsilon = \sqrt{\kappa^2 + \varepsilon}$，其中 $\varepsilon > 0$ 是任意的，并得到

$$\frac{d}{dt}\int_\gamma \kappa_\varepsilon \, ds \le -\int_\gamma \frac{1}{\kappa_\varepsilon}\kappa^2\tau_1^2 \, ds,$$

这就证明了该断言。 □

对于平面曲线，我们可以得到一个更精确的公式。

**定理 4.2** (Altschuler [3, 定理 5.14])。 对于曲线缩短流的平面解 $\gamma$，我们有

$$\frac{d}{dt}\int_\gamma |\kappa| \, ds = -2 \sum_{\{p\,:\,\kappa(p,\cdot)=0\}} \left|\frac{\partial \kappa}{\partial s}\right|.$$

给定一个放大序列 $\{(p_j,\ t_j)\}$，我们定义如下放大过程 [3]: 定义 $\gamma_j$: $S^1 \times [\alpha_j, \omega_j) \to \mathbb{R}^n$，其中 $\alpha_j = -\lambda_j^2 t_j$, $\omega_j = \lambda_j^2(\omega - t_j)$，由下式给出

$$\gamma_j(\cdot, \bar{t}) = \lambda_j(A_j\gamma(\cdot, t) + b_j), \qquad \bar{t} = \lambda_j^2(t - t_j).$$

此外，$\lambda_j > 0$, $A_j \in$SO($n$)，$b_j \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$\begin{aligned}
\gamma_j(p_j, 0) &= 0 \in \mathbb{R}^n,\\
T_j(p_j, 0) &= (1, 0, \dots, 0) = e_1,\\
N_j(p_j, 0) &= (0, 1, 0, \dots, 0) = e_2,\\
(B_i)_j(p_j, 0) &= (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = e_{i+2}, \qquad i = 1, \dots, n-2.
\end{aligned}$$

为了按弧长参数化 $\gamma_j$，注意到

$$\left|\frac{\partial \gamma_j}{\partial s}\right| = \lambda_j \left|A_j \frac{\partial \gamma}{\partial s}\right| = \lambda_j.$$

因此，若令 $\bar{s} = \lambda_j s$，那么一旦定义了 $\bar{s}$，$\gamma_j$ 确实按弧长参数化

$$\gamma_j(\bar{s}, \bar{t}) = \lambda_j(A_j\gamma(s, t) + b_j).$$

由此得到

$$\frac{\partial \gamma_j}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial \gamma_j}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \bar{s}} = \lambda_j A_j \frac{\partial \gamma}{\partial s}\frac{1}{\lambda_j} = A_j \frac{\partial \gamma}{\partial s},$$

即,

$$T_j(\bar{s}, \bar{t}) = A_j T(s, t), \tag{4.1}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
N_j(\bar{s}, \bar{t}) &= A_j N(s, t),\\
(B_i)_j(\bar{s}, \bar{t}) &= A_j B_i(s, t),\\
\kappa_j(\bar{s}, \bar{t}) &= \frac{1}{\lambda_j}\kappa(s, t),\\
(\tau_i)_j(\bar{s}, \bar{t}) &= \frac{1}{\lambda_j}\tau_i(s, t).
\end{aligned}$$

那么 $\gamma_j$ 确实按弧长参数化 $\bar{s}$,

$$\left|\frac{\partial \gamma_j}{\partial \bar{s}}\right| = \left|A_j \frac{\partial \gamma}{\partial s}\right| = 1,$$

因为 $\gamma$ 是按弧长参数化的，$s$ 和 $|A_j| = 1$。因此，每条 $\gamma_j$ 都是曲线缩短流的一个解,

$$\frac{\partial \gamma_j}{\partial \bar{t}}(\bar{s}, \bar{t}) = (\kappa_j N_j)(\bar{s}, \bar{t}).$$

确实，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma_j}{\partial \bar{t}}(\bar{s},\bar{t}) &= \lambda_j A_j \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s,t)\frac{\partial t}{\partial \bar{t}} \\ &= \frac{1}{\lambda_j} A_j(\kappa N)(s,t) \\ &= (\kappa_j N_j)(\bar{s},\bar{t}).\end{aligned}$$

对于以下定理，我们可以使用与 Altschuler 完全相同的证明 [3]，鉴于第 3.1 节的演化方程以及定理 3.9中的尺度不变估计，该证明仍然有效。为方便起见，我们在此重述。

**定理4.3** （参见 [3, 定理7。3]）。设 $\gamma\colon S^1\times[0,\omega)\to\mathbb{R}^n$ 是（曲线缩短流）的一个解。假设 $\{(p_j,t_j)\}$ 是一个本质爆破序列。那么，存在 $\{(p_j,t_j)\}$ 的一个子序列，使得沿该子序列，重缩放后的解 $\gamma_j$ 收敛到一个光滑的非平凡极限 $\gamma_\infty$，该极限至少存在于时间区间 $[-\infty,0]$ 上。

证明。令 $\lambda_j:=\kappa(p_j,t_j)$，使得 $\kappa_j^2(p_j,0)=1$（注意 $\bar{t}=0\Leftrightarrow t=t_j$）。

由于$\{(p_j,t_j)\}$ 是一个放大序列，我们有 $\lim_{j\to\infty}\alpha_j=-\infty$。若发生 I 型奇点（即 $\lim_{t\to\omega}K_t(\omega-t)<\infty$），则 $\lim_{j\to\infty}\omega_j<\infty$；对于 II 型奇点（$\lim_{t\to\omega}K_t(\omega-t)=\infty$），我们可以选取一个本质爆破序列，使得 $\lim_{j\to\infty}\omega_j=\infty$，因为根据 $\lambda_j$ 的定义，我们有$\lambda_j^2\le K_{t_j}$。

由于极限解可能是一族非紧曲线，我们改为将解 $\gamma_j$ 视作一族曲线 $\tilde{\gamma}_j\colon\mathbb{R}\times[\alpha_j,\omega_j)\to\mathbb{R}^n$，它们在空间中是周期性的，且满足 $\tilde{\gamma}_j(0,\cdot)=\gamma_j(p_j,\cdot)$。记 $\tilde{\gamma}_j(\cdot,\bar{t})$ 从原点 $0\in\mathbb{R}$ 出发的弧长参数为 $\bar{s}$，并回顾一般而言，$\bar{s}$ 以 $\bar{t}$ 为自变量，具体来说 $\frac{\partial\bar{s}}{\partial\bar{t}}\neq 0$。

定义微分算子

$$\frac{\delta}{\delta\bar{t}}=\frac{\partial}{\partial\bar{t}}+\phi_j(\bar{s})\frac{\partial}{\partial\bar{s}},$$

其中 $\phi_j(\bar{s})=\int_0^{\bar{s}}\kappa_j^2(\sigma,\bar{t})\,d\sigma$ 因此 $\frac{\partial\phi_j}{\partial\bar{s}}=\kappa_j^2$。接着，

$$\begin{aligned}\left[\frac{\delta}{\delta\bar{t}},\frac{\partial}{\partial\bar{s}}\right] &= \frac{\partial}{\partial\bar{t}}\frac{\partial}{\partial\bar{s}}+\phi_j\frac{\partial}{\partial\bar{s}}\frac{\partial}{\partial\bar{s}}-\frac{\partial}{\partial\bar{s}}\frac{\partial}{\partial\bar{t}}-\frac{\partial\phi_j}{\partial\bar{s}}\frac{\partial}{\partial\bar{s}}-\phi_j\frac{\partial}{\partial\bar{s}}\frac{\partial}{\partial\bar{s}} \\ &= \frac{\partial}{\partial\bar{t}}\frac{\partial}{\partial\bar{s}}-\frac{\partial}{\partial\bar{s}}\frac{\partial}{\partial\bar{t}}-\kappa_j^2\frac{\partial}{\partial\bar{s}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

因此，记 $v=\left|\frac{\partial\gamma}{\partial p}\right|$ 和 $\bar{s}=\int_{p_0}^{p}v\,dq$，

$$\begin{aligned}\frac{\delta\bar{s}}{\delta\bar{t}} &= \frac{\partial\bar{s}}{\partial\bar{t}}+\phi_j \\ &= -\int_{p_0}^{p}\kappa_j^2 v\,dq+\int_0^{\bar{s}}\kappa_j^2\,d\sigma \\ &= 0,\end{aligned}$$

其中我们用到了 $\frac{\partial v}{\partial\bar{t}}=-\kappa_j^2 v$ 和 $d\bar{s}=v\,dp$。

由于 $\{(p_j,t_j)\}$ 是一个本质爆破序列，存在一个与 $j$ 无关的 $\rho>0$，使得当 $t\le t_j$时，$\rho K_t\le\kappa^2(p_j,t_j)$。特别地，对于曲线 $\tilde{\gamma}_j$，$\rho\sup\kappa_j^2(\cdot,\bar{t})\le\kappa_j^2(p_j,0)=1$，当 $\bar{t}\le 0$时成立。

然后对方程 (4.1) 关于 $\bar{s}$ 求导，我们得到

$$\frac{\partial T_j}{\partial\bar{s}}=A_j\frac{\partial T}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial\bar{s}}=\frac{1}{\lambda_j}A_j\frac{\partial T}{\partial s}.$$

因此，由定理 3.9，我们有

$$\left|\frac{\partial T_j}{\partial \bar{s}}\right|^2 = \frac{1}{\lambda_j^2}\left|\frac{\partial T}{\partial s}\right|^2 \le \frac{\tilde{c}_1 K_{t_j}}{\lambda_j^2} \le c_1,$$

由于$\{(p_j,t_j)\}$是一个本质爆破序列，并且我们有 $\frac{K_{t_j}}{\lambda_j^2} \le \frac{1}{\rho} < \infty$。

对 $\bar{s}$ 进一步求导，我们得到

$$\frac{\partial^\ell T_j}{\partial \bar{s}^\ell} = \frac{1}{\lambda_j^\ell} A_j \frac{\partial^\ell T}{\partial s^\ell},$$

由此

$$\left|\frac{\partial^\ell T_j}{\partial \bar{s}^\ell}\right|^2 = \frac{1}{\lambda_j^{2\ell}}\left|\frac{\partial^\ell T}{\partial s^\ell}\right|^2 \le c_\ell.$$

利用 $\frac{\partial}{\partial \bar{t}}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \bar{s}}$ 的交换公式，我们得到

$$\left|\frac{\partial T_j}{\partial \bar{t}}\right|^2 \le \left|\frac{\partial^2 T_j}{\partial \bar{s}^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial T_j}{\partial \bar{s}}\right|^4 \le c_2 + c_1^2.$$

然后，对 $t$ 求导并使用交换公式，我们发现 $\left|\frac{\partial^\ell T_j}{\partial \bar{t}^\ell}\right|^2$ 可以由 $k<\ell$ 的 $\left|\frac{\partial^k T_j}{\partial \bar{t}^k}\right|^2$ 与 $m \le 2\ell$ 的 $\left|\frac{\partial^m T_j}{\partial \bar{s}^m}\right|^2$ 的乘积之和所界定，因此其本身也有界。

因此，根据 $\frac{\delta}{\delta \bar{t}}$ 的定义，由于 $\frac{\delta}{\delta \bar{t}}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \bar{s}}$ 可交换，且根据估计 $\phi_j(\bar{s}) \le \rho^{-1}\bar{s}$，我们得出 $\left|\frac{\delta^\ell T_j}{\delta \bar{t}^\ell}\right|^2$ 对任意 $\ell$ 都有界，且在 $\mathbb{R}\times[-\infty,\omega_\infty$ 的紧子集上该界与 $j$ 无关。又由于 $\frac{\delta}{\delta \bar{t}}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \bar{s}}$ 可交换，对所有混合导数 $\left|\frac{\delta^j \partial^k T_j}{\delta^j \bar{t}\,\partial^k \bar{s}}\right|^2$ 也同样成立。

由阿尔泽拉–阿斯科利定理，存在 $\{(p_j,t_j)\}$ 的一个子列（仍记作原符号），使得切向量 $T_j(\bar{s},\bar{t})$ 在 $\mathbb{R}\times[-\infty,\omega_\infty$ 的紧集上一致收敛到一个光滑极限 $T_\infty(\bar{s},\bar{t})$，当 $j\to\infty$ 时如此。因此，我们可以通过积分 $T_\infty$ 定义一个光滑的极限解 $\tilde{\gamma}_\infty$。若 $\tilde{\gamma}_\infty$ 是周期的，我们用 $\gamma_\infty$ 表示 $\tilde{\gamma}_\infty$ 的一个周期；否则，令 $\gamma_\infty = \tilde{\gamma}_\infty$。

Fin最终，$\gamma_\infty$ 不能是平凡的，即不能是直线，for

$$\kappa_\infty^2(0,0) = \lim_{j\to\infty} \tilde{\kappa}_j^2(0,0) = \lim_{j\to\infty} \kappa_j^2(p_j,0) = 1,$$

从而完成证明。 □

演化空间曲线的放大极限是平面的，这一事实可追溯至 Altschuler 的工作 [3]。对于任意余维的曲线，Yang 和 Jiao 指出了这一事实 [50]。利用定理4.1 和单调性公式，我们也可以在一般情形下给出一个简单的证明。

**定理 4.4** (参见 [3, 定理 7。7])。设 $\gamma\colon S^1\times[0,\omega) \to \mathbb{R}^n$ 是方程 (曲线缩短流)的一个解。那么，$\gamma$ 的任意非平凡放大极限都是平面的且为凸的。

证明。 根据 Huisken 的单调性公式，曲线缩短流的任意放大极限 $\gamma_\infty$ 都是自相似的。此外，总绝对曲率在缩放下不变。因此，定理 4.1推出

$$0 \le -\int_{\gamma_\infty} |\kappa|\,\tau_1^2\,ds.$$

这意味着，在光滑极限曲线的几乎每一点 $\gamma_\infty$，必有 $\kappa=0$ 或 $\tau_1=0$。于是定理 2.1 推出 $\gamma_\infty$ 必须包含在2维子空间 $\mathbb{R}^n$中。注意，$\gamma_\infty$ 不能有任何拐点，因为根据定理4.2，任何拐点都必须是退化的，即 $\kappa = \frac{\partial \kappa}{\partial s} = 0$,

但 Angenent 的一个结果 [7] 表明，任何具有退化拐点的解都必须是一条直线。□

**4.1. I 型奇点**。为了分析 I 型奇点的行为，我们可以采用 Huisken 对平均曲率流奇点所使用的论证方法 [32]，Altschuler [3] 也曾用这一方法证明了空间曲线的曲线缩短流对应的结果。

为此，设 $\gamma\colon\ S^1\times[0,\omega)\ \to\mathbb{R}^n$ 是（曲线缩短流）的一个解，并假设$(0,\omega)$ $\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ 是流达到的一个 I 型奇点。于是，我们通过以下方式定义流的连续重标度：

$$\tilde{\gamma}(s,\tilde{t})=\frac{1}{\sqrt{2(\omega-t)}}\gamma(s,t),$$

其中 $\tilde{t}=-\frac{1}{2}\log(\omega-t)$。因此，重标度流 $\{\tilde{\gamma}_{\tilde{t}}\}$ 定义在 $-\frac{1}{2}\log\,\omega\le\tilde{t}<\infty$ 上，并且就微分算子而言，

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}=2(\omega-t)\frac{\partial}{\partial t},$$
$$\frac{\partial}{\partial\tilde{s}}=\sqrt{2(\omega-t)}\frac{\partial}{\partial s},$$

它满足

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\tilde{\gamma}=\frac{\partial^2}{\partial\tilde{s}^2}\tilde{\gamma}+\tilde{\gamma}.$$

选择这种特定重标度方式的原因是，I 型假设意味着重标度流的曲率在所有时间内都一致有界，因为

$$\tilde{\kappa}(s,\tilde{t})=\sqrt{2(\omega-t)}\kappa(s,t).$$

在重标度的情形下，我们于是得到单调性公式 [32]

$$\frac{d}{d\tilde{t}}\int_{\tilde{\gamma}}\tilde{k}\,d\tilde{s}=-\int_{\tilde{\gamma}}\left|\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial\tilde{s}}+\tilde{\gamma}^{\perp}\right|^2\tilde{k}\,d\tilde{s},\tag{4.2}$$

其中，$\mathbb{R}^n$ 上的重标度后向热核为

$$\tilde{k}(x,\tilde{t})=\mathrm{e}^{-|x|^2}.$$

随后，我们可以按照定理 4.3的证明中的方法进行放大过程。注意到，I型假设还意味着任意放大序列必定是本质的，因此可得到一个子序列极限。由重标度单调性公式（4.2），我们得出该极限是自相似收缩的 [32]，，并且由定理 4.4可知该极限是平面的。此外，由于总绝对曲率的连续性，绕数不会改变。因此我们有

**定理4.5** （参见 [3, 定理8。15]）. 假设在时刻 $\omega$形成一个*I*型奇点。令 $\{(p_j,t_j)\}$ 为一个放大序列。则存在 $\{(p_j,t_j)\}$ 的一个子序列，使得沿该子序列对 $\gamma$ 进行重标度后，收敛到一个平面自相似收缩解 $\gamma_\infty$，且绕数相同。

**4.2. II型奇点**。 我们现在假设流所到达的奇点 $(0,\omega)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$属于 II 型。由于论证与空间曲线的情形完全相同，我们不再重复细节，而是请读者参阅 Altschuler 的相关工作 [3]。

由定理4.3可知，重标度 $\gamma_\infty$ 的极限必定存在于区间 $[-\infty,0]$上。此外，该极限是平面的且凸的。随后可以证明，由于奇点属于 II 型，存在一个本质爆破序列，使得沿该序列得到的重标度极限实际上是永恒的，也就是说，它存在于时间区间 $[-\infty,\infty]$上。此外，极限解是嵌入的，且其总曲率等于 $\pi$。进一步地，通过证明曲率及其所有

导数在两端趋于零，进而可证明该极限必定是大U形曲线。最后，有

**定理4.6** (cf. [3, Thm.8.16])**.** 假设在时间 $\omega$ 处形成一个*II*型奇点。则存在一个本质爆破序列 $\{(p_j, t_j)\}$ 使得沿其的重标度序列收敛到大*U*形曲线。

## 5. 收敛性分析

我们现在来证明我们的主定理，即我们证明熵小于大U形曲线的初始曲线在有限时间内收敛到圆点。

定理*1.1*的证明。 由于熵在曲线缩短流下是非增的，我们可以假设 $\lambda(\gamma) < 2$。因为如果 $\lambda(\gamma)$ 等于 2，初始曲线 $\gamma_0$必须是自收缩子，但 $\lambda(S^1) < 2$。

假设在时间 $\omega$ 处形成一个II型奇点。则由定理 4.6，存在一个本质爆破序列使得沿其的重标度的极限 $\gamma_\infty$ 是大U形曲线。由于熵关于局部光滑收敛是下半连续的，我们必须有 $\lambda(\gamma_\infty) < 2$，然而，我们从命题 2.3 知道大U形曲线的熵等于2。因此该奇点不可能是II型的。

因此，假设形成了一个 I 型奇点，那么根据定理4.5，我们有一列重标度 $\gamma_\infty$ 的极限$\gamma_j$，它是在平面中自相似收缩的。根据 Abresch–Langer 的分类 [1], $\gamma_\infty$ 可能是经过原点的一条或多条直线、单重或多重覆盖的圆，或 Abresch–Langer 曲线之一$\gamma_{m,n}$, $m \geq 2$。命题 2.4 蕴含 $\lambda(\gamma_{m,n}) \geq m\sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}$，因此后一种可能性不成立。此外，由命题 2.5 可知，对于任意点 $x$，有$\lambda(\gamma_\infty) \geq \Theta^2(\gamma_\infty, x)$，这意味着 $\gamma_\infty$ 是嵌入的。因此， $\gamma_\infty$不可能是多重覆盖的圆或相交直线族。

根据标准理论，若流的重标度极限中出现一条直线 [15, 48], ，那么在某个适当的时空区域内，其高斯密度为1 这一事实意味着该处的曲率实际上有界，因此放大点不是奇点，这就产生了矛盾。因此，放大极限 $\gamma_\infty$必定是原点周围的标准圆，也就是说，该奇点处的切流是光滑、闭合且嵌入的自收缩子。随后，Schulze 关于紧切流的唯一性结果 [41] 表明这是唯一可能的切流，因此重标度流收敛到圆圆。□

## 参考文献

[1] U. Abresch 和 J. Langer。《归一化曲线缩短流与相似解》。载于 《微分几何杂志》23.2 (1986), pp. 175–196.DOI:10.4310/jdg/1214440025。[2] D. J. Altschuler、S. J. Altschuler、S. B. Angenent 和 L. F. Wu。《 $\mathbb{R}^n$中的曲线缩短孤子动物园》。载于 《非线性》26.5 (2013), pp. 1189–1226。DOI: 10.1088/0951-7715/26/5/1189。[3] S. J. Altschuler。《空间曲线曲线收缩流的奇点》。载于《微分几何杂志》34.2 (1991), pp. 491–514。DOI: 10.4310/jdg/1214447218。[4] S. J. Altschuler 和 M. A. Grayson。《空间曲线缩短与穿越奇点的流》。载于 《微分几何杂志》35.2 (1992), pp. 283–298.DOI: 10.4310/jdg/1214448076。

[5] L. Ambrosio 和 H. M. Soner。《高余维平均曲率流的测度论方法》。载于《比萨高等师范学院科学类年鉴》(4) 25.1-2 (1997), pp. 27–49。[6] B. Andrews、B. Chow、C. Guenther 和 M. Langford。《外在几何流》。数学研究生教材 206。普罗维登斯，罗得岛州：美国数学学会，2020。[7] S. Angenent。《曲面上曲线的抛物方程。II. 交点、爆破与广义解》。载于《数学年刊》(2) 133.1 (1991), pp. 171–215。doi: 10.2307/2944327。[8] C. Baker。《高余维子流形的平均曲率流》。澳大利亚国立大学，2010。doi: 10.25911/5d5155ff2112e。[9] J. Baldauf 和 A. Sun。《平面曲线的尖锐熵界与曲线缩短流的动力学》。2020年12月25日。arXiv: 1808.03936 [math]。[10] J. Bernstein 和 L. Wang。《维数至多为六的闭超曲面熵的尖锐下界》。载于《数学发明》206.3 (2016), pp. 601–627。doi: 10.1007/s00222-016-0659-3。[11] J. Bernstein 和 L. Wang。《小熵渐近锥形自缩子的一个拓扑性质》。载于《杜克数学杂志》166.3 (2017), pp. 403–435。doi: 10.1215/00127094-3715082。[12] J. Bernstein 和 L. Wang。《熵的小扰动下圆形二球面的 Hausdorff 稳定性》。载于《数学研究快报》25.2 (2018), pp. 347–365。doi: 10.4310/mrl.2018.v25.n2.a1。[13] J. Bernstein 和 L. Wang。《小熵闭超曲面的拓扑》。载于《几何与拓扑》22.2 (2018), pp. 1109–1141。doi: 10.2140/gt.2018.22.1109。[14] J. Bernstein 和 L. Wang。《 $\mathbb{R}^4$ 中的低熵闭超曲面在同痕意义下平凡》。载于《杜克数学杂志》171.7 (2022), pp. 1531–1558。doi: 10.1215/00127094-2022-0012。[15] K. A. Brakke。《曲面的平均曲率运动》。数学札记 20。普林斯顿，新泽西州：普林斯顿大学出版社，1978。[16] O. Chodosh、K. Choi、C. Mantoulidis 和 F. Schulze。《具有一般初始数据的平均曲率流》。2020年3月31日。arXiv: 2003.14344 [math]。[17] O. Chodosh、K. Choi、C. Mantoulidis 和 F. Schulze。《具有一般低熵初始数据的平均曲率流》。2021年2月23日。arXiv: 2102.11978 [math]。[18] T. H. Colding 和 W. P. Minicozzi II。《一般平均曲率流 I：一般奇点》。载于《数学年刊》(2) 175.2 (2012), pp. 755–833。doi: 10.4007/annals.2012.175.2.7.[19] T. H. Colding、T. Ilmanen、W. P. Minicozzi II 和 B. White。《圆球面在闭自缩子中熵最小》。载于《微分几何杂志》95.1 (2013), pp. 53–69。doi: 10.4310/jdg/1375124609。[20] T. H. Colding 和 W. P. Minicozzi II。《一般奇点的熵与余维界》。2019年7月10日。arXiv: 1906.07609 [math]。[21] A. A. Cooper。《高余维中的平均曲率流》。密歇根州立大学，2011。doi: 10.25335/m5pf5n。[22] K. Corrales。《嵌入且无结空间曲线不存在 II 型奇点》。2016年5月10日。arXiv: 1605.03100 [math]。[23] M. Gage 和 R. S. Hamilton。《热方程使凸平面曲线收缩》。载于《微分几何杂志》23.1 (1986), pp. 69–96。doi: 10.4310/jdg/1214439902.[24] M. E. Gage。《曲线缩短使凸曲线变成圆形》。载于《数学发明》76.2 (1984), pp. 357–364。doi: 10.1007/bf01388602。

[25] M. A. Grayson. “热方程将嵌入平面曲线收缩为圆点”。载于：《微分几何杂志》26.2 (1987)，第 285–314 页。doi: 10.4310/jdg/1214441371.[26] M. A. Grayson. “曲线缩短流下 8 字形曲线的形状”。载于：《数学发明》96.1 (1989)，第 177–180 页。doi: 10.1007/bf01393973.[27] Q. Guang. “平移孤子的体积增长、熵与稳定性”。载于：《分析与几何通讯》27.1 (2019)，第 47–72 页。doi: 10.4310/cag.2019.v27.n1.a2.[28] H. P. Halldorsson. “曲线缩短流的自相似解”。载于：《美国数学会汇刊》364.10 (2012)，第 5285–5309 页。doi: 10.1090/s0002-9947-2012-05632-7.[29] J. Hättenschweiler. “高维曲线缩短流”。苏黎世联邦理工学院，2015。doi: 10.3929/ethz-a-010412094.[30] S. He. 三维曲线缩短流中的距离比较原理与 Grayson 型定理。2012 年 9 月 24 日。arXiv: 1209.5146 [math].[31] O. Hershkovits 和 B. White. “平均曲率流中自缩子的精确熵界”。载于：《几何与拓扑》23.3 (2019)，第 1611–1619 页。doi: 10.2140/gt.2019.23.1611.[32] G. Huisken. “平均曲率流奇点的渐近行为”。载于：《微分几何杂志》31.1 (1990)，第 285–299 页。doi: 10.4310/jdg/1214444099.[33] G. Huisken. “演化曲线的距离比较原理”。载于：《亚洲数学杂志》2.1 (1998)，第 127–133 页。doi: 10.4310/ajm.1998.v2.n1.a2.[34] D. Ketover 和 X. Zhou. “闭曲面的熵与极小极大理论”。载于：《微分几何杂志》110.1 (2018)，第 31–71 页。doi: 10.4310/jdg/1536285626.[35] G. Khan. 确保空间曲线在曲线缩短流下形成 II 型奇点的条件。2015 年 12 月 15 日。arXiv: 1209.4072 [math].[36] L. Ma 和 D. Chen. “黎曼流形中的曲线缩短”。载于：《纯粹与应用数学年刊》(4) 186.4 (2007)，第 663–684 页。doi: 10.1007/s10231-006-0025-y.[37] A. Magni 和 C. Mantegazza. “关于平均曲率流的 Huisken 单调性公式的一些评注”。载于：《非线性演化现象与应用中的奇点》。M. Novaga 和 G. Orlandi 编。CRM 系列 9。比萨：比萨高等师范学院出版社，2009，第 157–169 页。arXiv: 1705.02159 [math].[38] J. Minarčík 和 M. Beneš. “$\mathbb{R}^3$中的曲线缩短流的长期行为”。载于：《工业与应用数学学会数学分析杂志》52.2 (2020)，第 1221–1231 页。doi: 10.1137/19m1248522.[39] H. T. Nguyen. 高余维平均曲率流与手术。2020 年 4 月 17 日。arXiv: 2004.07163 [math].[40] S. J. Pan. “黎曼流形中的曲线缩短流奇点”。载于：《数学学报》(英文版) 37.11 (2021)，第 1783–1793 页。doi: 10.1007/s10114-021-0395-5.[41] F. Schulze. “平均曲率流中紧切流的唯一性”。载于：《纯粹与应用数学杂志》690 (2014)，第 163–172 页。doi: 10.1515/crelle-2012-0070.[42] K. Smoczyk. “任意余维平均曲率流的自缩子”。载于：《国际数学研究通知》48 (2005)，第 2983–3004 页。doi: 10.1155/imrn.2005.2983.[43] K. Smoczyk. “高余维平均曲率流：导论与综述”。载于：《整体微分几何》。Springer 数学会议录 17。海德堡：施普林格，2012，第 231–274 页。doi: 10.1007/978-3-642-22842-1_9.

[44] M. Spivak. 《微分几何综合导论》。第三版。第 4 卷。美国得克萨斯州休斯敦: Publish or Perish，1999。[45] A. Stone. “平均曲率流奇点结构的密度函数”。载于：Calc. Var. Partial Differential Equations 2.4 (1994)，第 443–480 页。doi: 10.1007/bf01192093.[46] S. Wang. “圆球面在熵的小扰动下具有豪斯多夫稳定性”。载于：《纯粹与应用数学杂志》758 (2020)，第 261–280 页。doi: 10.1515/crelle-2017-0055.[47] M.-T. Wang. “高余维平均曲率流讲义”。载于：《几何分析手册》。第 1 册。Adv. Lect. Math. (ALM) 7。美国马萨诸塞州萨默维尔：Int. Press，2008，第 525–543 页。[48] B. White. “平均曲率流的局部正则性定理”。载于：Ann. of Math. (2) 161.3 (2005)，第 1487–1519 页。doi: 10.4007/annals.2005.161.1487.[49] B. White. “平均曲率流专题”。Otis Chodosh 记录的讲义。2015。[50] Y. Y. Yang 和 X. X. Jiao. “欧几里得空间中任意维数的曲线缩短流”。载于：《数学学报》(英文版) 21.4 (2005)，第 715–722 页。doi: 10.1007/s10114-004-0426-z.[51] J. J. Zhu. “关于闭超曲面和奇异自缩子的熵”。载于：《微分几何杂志》114.3 (2020)，第 551–593 页。doi: 10.4310/jdg/1583377215。

分析与数值研究所，马格德堡奥托·冯·格里克大学，Uni- versitätsplatz 2，39106Magdeburg，德国电子邮件地址： florian.litzinger@ovgu.de