Séminaire BOURBAKI Avril 2023
75e année, 2022–2023, no 1205

POINTWISE CONVERGENCE FOR THE SCHRÖDINGER EQUATION
[After Xiumin Du and Ruixiang Zhang]

by **Jonathan Hickman**

arXiv:2304.02507v1 [math.CA] 5 Apr 2023

1. INTRODUCTION: THE CARLESON PROBLEM

1.1. Solutions to the Schrödinger equation

经过适当归一化， $\mathbb{R}^n$ 上的自由薛定谔方程是一个二阶偏微分方程。

$$iu_t - \Delta_x u = 0. \tag{1}$$

这里 u 是时空变量 (x,t)的复值函数， $\in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$，而$u_t$ 和 $\Delta_x u$ 分别表示一阶时间导数和空间拉普拉斯算子。我们关注该方程的柯西问题，即给定初始数据 f 并希望求解

$$\begin{cases} iu_t - \Delta_x u = 0, \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \tag{2}$$

根据我们对 f的假设， u 作为方程（2）的“解”有不同的含义。这里我们考虑两个例子:

经典解。如果 f 足够光滑，那么初等傅里叶变换方法表明（2）在经典意义下有唯一解。[(1)] 例如，若假设$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，即施瓦茨空间，则唯一解为

$$u(x,t) := e^{it\Delta} f(x)$$

where $e^{it\Delta}$ is the *Schrödinger propagator*

$$e^{it\Delta} f(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\widehat{\mathbb{R}^n}} e^{i(x\cdot\xi + t|\xi|^2)} \hat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi. \tag{3}$$

注意，初始数据 f 的正则性——或光滑性——对这些观察至关重要。事实上， f 的光滑性直接转化为该衰减。

(1)特别地，导数 u_t 和 $\Delta_x u$ 在通常的微积分意义下都是良定义的，并且（2）中的恒等式逐点成立。

傅里叶变换 $\hat{f}(\xi)$ 当 $|\xi| \to \infty$。这种衰减确保了(3)中的积分是良定义的，并且还允许将导数移到积分内部以验证(1)。

L^2 解。现在假设 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，且不作任何额外的正则性假设。$\hat{}$在这种情况下，普朗歇尔定理允许我们将傅里叶变换定义为 f 中的一个函数 $L^2(\widehat{\mathbb{R}}^n)$，但一般而言，我们无法得出$\hat{}$ f 是可积的。因此，积分公式（3）在经典意义下没有明确定义。

为了规避这些问题，我们进一步诉诸于 L^2 傅里叶变换理论。注意，上述引入的传播子 $e^{it\Delta}$ 可被解释为作用于$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$上的线性算子，给定初始数据 f，输出时间为 t 的解。利用普朗歇尔定理，我们可以将 $e^{it\Delta}$ 延拓为作用于整个 $L^2(\mathbb{R}^n)$上的傅里叶乘子算子。特别地，我们定义

$$e^{it\Delta} f := \mathcal{F}^{-1}\Big(e^{it|\cdot|^2} \cdot \mathcal{F} f\Big) \qquad \text{for } f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

其中，$\mathcal{F}$ 表示作用于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的傅里叶变换。此外，该算子是 L^2 空间上的等距映射，其意义是

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{for all } f \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ and all } t \in \mathbb{R}; \tag{4}$$

this identity is typically referred to as *conservation of energy*.

As before, we may define

$$u(x,t) := e^{it\Delta} f(x),$$

但一般而言，这不再是薛定谔方程的经典解：例如，对于固定的时间 t，关于 $u(\cdot\, t)$ 我们所能说的最多是它属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$，因此拉普拉斯算子 $\Delta_x u$ 在经典意义下并没有定义。然而，我们可以将 u 解释为分布意义下的方程(1) 的解。事实上，利用(4)不难证明 u 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ 中定义了一个分布，因此 $\partial_t u$ 和 $\Delta_x u$ 可以在分布意义下理解。此外，一个简单的傅里叶分析论证表明，对于所有测试函数 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$，$\langle i\partial_t u - \Delta_x u, \phi \rangle = 0$。

1.2. The Carleson problem

一旦构造出一个解 u 对于（2）之后，研究 u 的行为以及它与初始数据 f之间的关系是很自然的。沿着这一方向可以提出各种各样的问题。这里我们感兴趣的是经典的 *Carleson*问题，其旨在理解初始数据能否作为该解的逐点极限被恢复。

首先考虑 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的情形，此时解 $u(x,t) := e^{it\Delta} f(x)$ 是经典定义的。根据定义，我们知道解 u 满足 $u(x,0) = f(x)$，并且关于 t 可微，因而连续。特别地，

$$\lim_{t \to 0_+} e^{it\Delta} f(x) = f(x) \qquad \text{for all } x \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Carleson问题询问，当我们考虑薛定谔方程的更一般的 L^2 解时，这个初等极限恒等式在多大程度上仍然成立。

由于 L^2 函数仅在几乎处处有定义，为了使 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中一般初始数据的问题有意义，有必要将收敛对 所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 在 (5) 中成立的要求弱化为对 几乎所有 $x \in \mathbb{R}^n$成立。也就是说，给定 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$我们希望确定是否

$$\lim_{t\to 0_+} e^{it\Delta} f(x) = f(x) \qquad \text{for almost every } x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

然而，如何精确解释上述极限仍不清楚，因为对于每一个时间切片 t （属于连续统 $[0,1]$, 比如说）我们对 $e^{it\Delta} f$有表示的选择。我们现在将略过这些技术细节，并在§3.2下文中再讨论它们。

不难证明，该极限在 L^2 意义下成立：也就是说，给定 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，我们有

$$\lim_{t\to 0_+} \|e^{it\Delta} f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{7}$$

事实上，对于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 利用传播子的积分公式（3）和控制收敛定理，可以很容易地验证这一点。然后可以通过密度，利用能量守恒恒等式（4），推广到一般的$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 。

另一方面，存在一些 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 的例子，其中 (6) 实际上 **不成立**(见下文 §1.3)。因此，我们希望确定关于 f的一个附加假设，使得上述范数收敛 (7) 能够“提升”为几乎处处收敛。对比 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 与一般 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$的情形，附加假设自然应当对初始数据施加某种程度的正则性要求。

上述考虑引导我们考虑索об列夫空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$。粗略地说， $H^s(\mathbb{R}^n)$ 由所有 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 具有导数直到阶 s 也位于$L^2(\mathbb{R}^n)$。更精确地说，

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1-\Delta_x)^{s/2} f \in L^2(\mathbb{R}^n) \Big\}, \qquad s \geq 0,$$

其中，$(1-\Delta)^{s/2}$ 表示分数阶微分算子，它通过傅里叶变换$\mathcal{F}$ 定义，现作用于分布空间$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上

$$(1-\Delta_x)^{s/2} f := \mathcal{F}^{-1}\Big((1+|\cdot|^2)^{s/2} \cdot \mathcal{F} f \Big).$$

特别地，给定 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，我们总能将分数阶导数 $(1-\Delta_x)^{s/2} f$ 理解为一个分布；当该分布与一个 L^2函数相同的时候， $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$。从定义可以清楚看出，

$$H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{and} \quad H^{s_1}(\mathbb{R}^n) \supseteq H^{s_2}(\mathbb{R}^n) \quad \text{for } 0 \leq s_1 \leq s_2.$$

Sobolev spaces provide a natural framework in which to formalise the Carleson problem.

问题 1.1 (Carleson, 1980年)。—确定 $s \geq 0$ 使得 t

(8) 如果 $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$，那么 $\lim_{t\to 0} e^{it\Delta} f(x) = f(x)$ 对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立。

也就是说，我们希望确定能够保证几乎处处收敛成立的最低正则性程度（以索об列夫空间指标 s 来衡量）。

除了其本身的吸引力之外，问题1.1还与有关解 $e^{it\Delta}f(x)$ 在时空中分布的重要问题密切相关。逐点收敛通常通过分析薛定谔极大算子来证明，该算子本身也很受关注。反过来，可以利用薛定谔方程的解的分形能量估计来研究极大算子。我们将在下文§3.2和 §3.5 介绍这些概念。通过这些联系，问题 1.1的研究进展推动了许多不同问题的新发展，令人意想不到，例如 Falconer 距离问题（例如参见 Guth、Iosevich、Ou 和 Wang，2020年；Du 和 Zhang，2019年）以及傅里叶限制猜想（参见 Wang 和 Wu，2022年）。

1.3. A resolution of the Carleson problem: introducing the key results

问题 1.1 有着悠久的历史，与过去40年间调和分析领域的许多重要发展相互呼应。我们无意对相关文献作完整综述，而是聚焦于确立性的成果和近期亮点。

尽管 $n = 1$问题1.1 的情形已通过 Carleson（1980年）以及 Dahlberg 和 Kenig（1982年）的工作在 1980 年代初得到完全理解，但在高维中情况要微妙得多。尽管如此，最近一系列戏剧性的进展带来了几乎完整的解决。

必要条件。——问题1.1 分为两部分：寻找使（ s （8）成立的指标的必要条件，以及寻找充分条件。这两部分都很困难。关于 Carleson 问题的近期大量活动，始于对 s 的一个新必要条件的惊人发现。

定理 1.2 （Bourgain，2016年）。——对所有$s \leq \frac{n}{2(n+1)}$，存在某个 $f \in H^s$（$\mathbb{R}^n$）使得（6）不成立。

定理1.2 依赖于一个显式[(2)] 初始数据 f的构造；证明很复杂，涉及数论方面的考虑。在 Bourgain（2016年）之前，较弱的必要条件已在 Dahlberg 和 Kenig（1982年）、Bourgain（2013年）以及 Lucà 和 Rogers（2017年）中建立。

我们不在此讨论定理1.2的证明，而是请读者参阅 Pierce（2020年）中的详细论述。另一种基于遍历论论证而非数论的论证，也可参见 Lucà 和 Rogers（2019年）。

---

(2)严格来说，定理 1.2 的证明通过构造一个反例来说明$H^s(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ 的 薛定谔极大算子的有界性。进而，通过 Stein 极大原理的一个变体，可以推出（8）存在反例。参见 §3.2。

充分条件。——我们现在转向正面结果，这些结果构成了本文的重点。在 Bourgain 反例之后，Carleson问题上掀起了一阵研究热潮。在一项重大进展中，$n = 2$ 情形通过 Du、Guth 和 Li 的工作（2017年）得到了彻底解决。高维情形后来在 Du 和 Zhang 的一篇里程碑式论文中得以解决（2019年）。

定理 1.3 (Du 和 Zhang，2019[(4)]). — 如果 $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ 对于某个 $s > \frac{n}{2} - \frac{n}{(n+1)}$，则

$$\lim_{t \to 0_+} e^{it\Delta} f(x) = f(x) \qquad \textit{holds for almost every } x \in \mathbb{R}^n.$$

注 *1.4*。— 如前所述，上述陈述的含义存在测度论技术问题，因为极限是在连续统上取的。我们将在下面的 §3.2中讨论这一点。

合在一起，定理 1.2 和定理 1.3 给出了对 Carleson 问题几乎完整的[(5)] 解答，并构成了调和分析与偏微分方程中的一个重大里程碑。此外，定理 1.3 实际上是 Du 和 Zhang（2019年）所证明的一个显著更一般结果的特例，该结果还有多种额外应用：见下面的 §3.5。

定理1.3 的证明建立在调和分析中许多重要进展以及此前关于 Carleson 问题的工作之上。就本文而言，我们将大致把该问题的近期历史划分为两个时期。

1. **多线性理论/ 宽窄分析**。现代调和分析中的一项关键发展，是 Bennett、Carbery和 Tao（2006年）引入了薛定谔方程的多线性 Strichartz估计（见下文定理5.5）。Bourgain 和Guth（2011年）将这些估计应用于（线性）振荡积分算子的研究，其中引入了一种通过线性算子的多线性对应物来估计线性算子的重要机制。Bourgain 和Guth（2011年）的技术此后被称为宽窄分析；相关思想将在下文第 §6 节中详细讨论。该多线性技术被应用于 Bourgain（2013年）对问题1.1 的研究中，其中定理1.3 被证明在更严格的范围 $s > \frac{2n-1}{4n}$ 内成立（此前Lee（2006年）已使用双线性方法证明了该结果对于 $n = 2$ 成立）。

2. **精细 Strichartz 估计**。 Du、Guth 和 Li 的一篇里程碑式论文（2017年）确立了定理 $n = 2$的情形 1.3。他们的工作依赖于调和分析领域的重要进展，例如 ℓ^2 Bourgain and Demeter 的解耦定理（2015年）（见下文定理 6.5），以及 Guth and Katz（2015年）和 Guth（2016年）引入的多项式划分技术。此外，Du、Guth 和 Li（2017年）提出了精细 *Strichartz* 估计，随后 Du、Guth、Li 和 Zhang （ 2018 年）运用这些估计来攻克高维中的 Carleson 问题，并

(4) $n = 1$ 和 $n = 2$ 情形的定理 1.3 先前已由Carleson (1980年)以及Du、Guth和Li (2017年)分别建立。
(5)也就是说，除了端点指数 $s = n/(2(n+1))$。

已被发现具有一系列额外的应用（例如，参见 Guth、Iosevich、Ou 和 Wang，2020年；Wang 和 Wu，2022年）。

Du 和 Zhang 的论证（2019年）融入了上文提及的许多工具和思想：尤其是 Bourgain and Guth（2011年）的宽窄分析；Bennett、Carbery 和 Tao（2006年）的多线性 Strichartz 不等式，以及 Bourgain and Demeter（2015年）的解耦估计。我们将在下文 §6中详细讨论这些要素。另一方面，Du 和 Zhang（2019年）的方法在许多方面与 Du、Guth 和 Li（2017年）用于解决$n = 2$ 情形的方法大不相同。这里既没有使用多项式划分，论证也不需要精细 Strichartz 估计。[(6)] 然而，Du 和 Zhang（2019年）的主要新颖要素，是一种巧妙的尺度归纳法，其根源在于 Du、Guth 和 Li（2017年）以及 Du、Guth、Li 和 Zhang（2018年）对精细 Strichartz 估计的证明。我们将在下文 §7 中讨论这些技巧。

1.4. 关于本文

下文将阐述定理 1.3 的证明，并沿用 Du 和 Zhang（2019年）的方法。如上所述，该证明结合了调和分析中的复杂现代工具，尤其是 Bennett、Carbery 和 Tao（2006年）的多线性 Strichartz 估计，以及 ℓ^2 Bourgain and Demeter 的解耦理论（2015年）。我们将在下文的定理 5.5 和定理 6.5 中介绍这两项关键工具，但不提供证明。本文其余部分内容自成一体。同样重要的是，论证还依赖于一系列源自傅里叶分析的基本指导原则，这些原则支配着薛定谔方程的解的行为。我们将在 §4 中花些篇幅讨论这些原则，因此本文也可作为了解这一活跃的调和分析与偏微分方程领域的入门读物。

1.5. 致谢

作者谨向Marco Vitturi、BernatRamisVich以及一位匿名审稿人致谢，感谢他们提出了许多极其有帮助的意见，改进了本文的论述。他还要感谢 AnthonyCarbery和 Andreas Seeger，就该理论的某些方面进行了有趣的讨论。

(6)在 Du 和Zhang（2019年）中，Du、Guth、Li 和Zhang（2018年）的多线性精细化斯特里卡茨估计得到了应用，但正如论文中所指出的，Bennett、Carbery 和Tao（2006年）的更基本的多线性 Strichartz 估计足以证明定理 1.3。

2. 记号

在本文中，我们始终在 时空域 $\mathbb{R}^{n+1}$ 或 空间域 $\mathbb{R}^n$中工作。后者赋予了乘积度量

$$|z-\bar{z}| = \max\{|x-\bar{x}|, |t-\bar{t}|\} \qquad \text{for } z=(x,t), \bar{z}=(\bar{x},\bar{t}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{9}$$

其中，右侧出现的范数 $|\cdot|$ 分别是 $d=n$ 和 $d=1$ 上的通常欧几里得范数 $\mathbb{R}^d$ 。另一方面，空间域配备通常的欧几里得度量。我们用 $B^{n+1}(z,R)$ 表示以 $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ 为中心、半径为 R 的时空球，其定义基于（9）；用 $B^n(x,R)$ 表示以 $x \in \mathbb{R}$ 为中心、半径为 R 的通常欧几里得球。这使记号略有歧义，但其含义应始终能从上下文中明确。在某些情况下，我们将用 B_R^{n+1} 或 B_R^n 分别表示 $B^{n+1}(0,R)$ 和 $B^n(0,R)$。

给定函数 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 和 $g \in L^1(\widehat{\mathbb{R}}^n)$，我们用积分公式定义 f 的傅里叶变换以及 g 的傅里叶逆变换：

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{and} \quad \check{g}(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\widehat{\mathbb{R}}^n} e^{ix\cdot\xi} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

$\widehat{\ }$请注意，我们区分空间域 $\mathbb{R}^n$ 和频域 $\mathbb{R}^n$；$\widehat{\ }$这仅仅是出于记号上的考虑，$\mathbb{R}^n$ 可以视为 $\mathbb{R}^n$的一个副本。

给定集合 $E \subseteq \mathbb{R}^d$，我们用 $\chi_E\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 表示其示性函数，因此$\chi_E(x)=1$ 当 $x \in E$ 时成立，而 $\chi_E(x)=0$ 在其他情况下成立。如果 E 是勒贝格可测的，我们用 $|E|$表示其勒贝格测度。

一个 r-立方体 （或简称立方体） $Q \subset \mathbb{R}^n$ 是如下形式的集合

$$Q := x + [-r/2, r/2]^n \qquad \text{for some } x \in \mathbb{R}^n \text{ and } r>0;$$

在这种情况下， x 称为立方体的中心， r 称为其边长。请注意，就本文而言，所有立方体的面均平行于坐标轴。若 $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个格点 r-立方体，且 $r>0$ 满足某条件，则称之为如此；也就是说，它是一个 r-立方体，其中心位于整数格 $r\mathbb{Z}^{n+1}$上的某点。在 $r=1$的情况下，我们也将 Q 称为格点单位立方体。给定立方体 Q 和 $M>0$，我们用 $M\cdot Q$ 表示与 Q同心、但边长按因子 M缩放的立方体。

给定一个对象列表 L 和实数 A、 $B \geq 0$，我们写作 $A \lesssim_L B$ 或 $B \gtrsim_L A$，表示对于某个常数 C_L， $A \leq C_L B$，其中该常数仅取决于列表 L 中的项目，以及可能的其他允许参数，例如维数 n或勒贝格指数 p。我们写作 $A \sim_L B$，表示 $A \lesssim_L B$ 和 $B \lesssim_L A$。

3. STANDARD REDUCTIONS AND REFORMULATIONS

本节将通过一系列论证，将定理 1.3 归结为下文定理 *3.7* 中陈述的 分形能量估计。尽管这些论证属于标准方法（运用

极大估计、线性化、离散化），定理 3.7中分形能量估计的最终形式是该方法的一个有趣之处。

3.1. 初等对称性

对于固定时间 $t \in \mathbb{R}$，算子 $e^{it\Delta}$ 是傅里叶乘子，因此自动具有许多特殊对称性。[7] 特别地， $e^{it\Delta}$ 与任何其他乘子交换，因而与（空间）平移交换。我们称此性质为空间平移不变性。关于伸缩变换，这些算子满足

$$e^{it\Delta}(\delta_R f) = \delta_R(e^{iR^2 t\Delta} f) \qquad \text{where} \qquad \delta_R f(x) := f(Rx),$$

因而在时间参数的缩放下是伸缩不变的。最后，算子 $e^{it\Delta}$ 构成半群，这导致时间平移不变性性质，至少在 L^2 范数的层面上。

3.2. 薛定谔最大估计

第一步是应用标准论证，将逐点收敛问题简化为证明极大算子的 先验 界。

定理 定理 3.1 （Du 和 Zhang，2019年）。— 对于所有 $s > \frac{n}{2(n+1)}$，我们有一个极大估计

$$\| \sup_{0\le t\le 1} |e^{it\Delta} f| \|_{L^2(B^n(0,1))} \lesssim \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{for all } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{10}$$

这里，给定 $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$， H^s-范数 定义为

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \|(1-\Delta_x)^{s/2} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

注意我们只要求 (10) 对 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 成立；在这种情况下，解 $u(x,\ t) := e^{it\Delta} f$ 在 $(x,\ t)$ 中是连续的，因此 (10) 左边出现的表达式当然是良定义的。我们将运算 $f \mapsto \sup_{0\le t\le 1} |e^{it\Delta} f|$ 称为薛定谔极大算子。

通过标准论证，定理 3.1 蕴含定理 1.3。为完整性起见，此蕴含的细节如下给出。我们注意到这里 L^2 空间的选择可能不是最优的，并且 (10) 可能在将左边的 L^2-范数替换为更大 p 的 L^p-范数时成立。事实上，对于 $n = 1$，Kenig、Ponce 和 Vega（1991年）证明了可以取 $p = 4$，而对于 $n = 2$，Du、Guth、Li 和 Zhang（2018）证明了可以取 $p = 3$。这些指数是尖锐的。一般地，一个明显的必要条件是 $p \le 2\cdot \frac{n+1}{n}$，这通过索об列夫嵌入产生。事实上，由于我们知道 $\lim_{t\to 0} e^{it\Delta} f$ 对于 $f \in S(\mathbb{R}^n)$，我们只能希望有一个 $H^s(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ 极大估计，如果 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 嵌入到 $L^p(\mathbb{R}^n)$。令人惊讶的是，Du、Kim、Wang 和 Zhang（2020年）通过改编 Bourgain（2016年）的 Bourgain 反例，发现了关于 p 的一个更严格的必要条件。

定理3.1 具有以下推论，这使定理 1.3 (参见 注 1.4 以及公式（6）之后的讨论）.

[7]我们将在下文第 $e^{it\Delta}$ 4.2 节讨论特有的其他特殊对称性。

推论 3.2. — 令 $s > \frac{n}{n+1}$ 且 $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$。则对每个 $0 \le t \le 1$，存在 L^2-函数 $e^{it\Delta}f$ 的一个代表元，使得对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$，映射 $t \mapsto e^{it\Delta}f(x)$ 是连续的。

证明。——由平移不变性，只需考虑 $x \in B^n(0, 1)$。按照推论中的陈述固定 f，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们都可以找到某个 $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，使得 $\|f - f_k\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \le 2^{-2k}$。我们断言，该集合

$$E := \Big\{x \in B^n(0,1) : \limsup_{k\to\infty} 2^k \sup_{0\le t\le 1} |e^{it\Delta}(f_k - f_{k-1})(x)| > 1\Big\}$$

的勒贝格测度为零。暂且假设这一点成立，我们看到，函数序列$e^{it\Delta}f_k(x)$在 $(x, t) \in B^n(0, 1) \setminus E \times [0, 1]$ 上是一致的柯西序列，并且关于 t 一致。于是，该序列在 x 中逐点收敛，并在此集合上关于 t 一致收敛到某个极限函数 $L(x, t)$，该极限函数在 t 中连续。另一方面，对于固定的 $0 \le t \le 1$，由能量守恒恒等式可得

$$\|e^{it\Delta}f_k - e^{it\Delta}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f_k - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|f_k - f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \le 2^{-2k},$$

因此，$e^{it\Delta}f_k$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 意义下收敛到 $e^{it\Delta}f$。由于在 L^2 中的收敛蕴含沿某个子序列几乎处处收敛，因此对每个 $0 \le t \le 1$，函数 $L(x, t)$ 必须在几乎处处的 $x \in B^n(0, 1)$ 上与 $e^{it\Delta}f(x)$ 一致。这正是所要证明的结论。

剩下只需证明 E 的勒贝格测度为零，这通过Borel– Cantelli论证实现。注意

$$E \subseteq \bigcap_{K\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\ge K} E_k$$

where

$$E_k := \Big\{x \in B^n(0,1) : \sup_{0\le t\le 1} |e^{it\Delta}(f_k - f_{k-1})(x)| > 2^{-k}\Big\}.$$

By Tchebyshev's inequality and the maximal estimate,

$$|E| \le \sum_{k\ge K} |E_k| \le \sum_{k\ge K} 2^{2k} \Big\| \sup_{0\le t\le 1} |e^{it\Delta}(f_k - f_{k-1})| \Big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim_s \sum_{k\ge K} 2^{-2k} \lesssim 2^{-2K}$$

for all $K \in \mathbb{N}$. Thus, $|E| = 0$, as required.

□

对于 $s \ge \frac{n}{n+1}$ 以及 $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$，我们可以使用推论 3.2 来明确我们极限的含义。我们为函数 $e^{it\Delta}f$ 选择 $0 \le t \le 1$ 的代表元，以保证推论 3.2的结论。由于 $e^{it\Delta}f(x)|_{t=0} = f(x)$ 对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$成立，采用这些代表元后，我们确实有

$$\lim_{t\to 0_+} e^{it\Delta}f(x) = f(x) \qquad \text{for almost every } x \in \mathbb{R}^n.$$

Th我们，推论 3.2 可被视为定理 1.3 的精确表述 .

3.3. Littlewood–Paley 分解

下一步是将定理 $H^s(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 3.1 中的最大值界改写为针对频率局部化数据的 $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 估计。由于定理 3.1涉及一个开放的 s，因此我们很容易做到这一点。

对于 $R \geq 1$，令 $\chi_{A(R)}$ 表示频率环带的示性函数

$$A(R) := \{\xi \in \widehat{\mathbb{R}}^n : R/2 \leq |\xi| < R\}$$

并令 $\chi_{A(R)}(D)$ 表示由下式定义的傅里叶乘子算子

$$\chi_{A(R)}(D)f := \mathcal{F}^{-1}\big(\chi_{A(R)} \cdot \mathcal{F}f\big) \qquad \text{for all } f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

因此，$\chi_{A(R)}(D)$ 对应于到 $A(R)$ 的频率投影，并带有粗截断。由普朗歇尔定理可得一个简单推论：

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \sim \Big(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{2ks}\|\chi_{A(2^k)}(D)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\Big)^{1/2} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}; \tag{11}$$

这称为 *Littlewood–Paley* 刻画，用于 H^s-范数。

鉴于刻画（11），要证明定理3.1 只需证明对于所有 $\varepsilon > 0$ 以及所有 $R \geq 1$，不等式

$$\| \sup_{0\leq t\leq 1} |e^{it\Delta}f|\|_{L^2(B^n(0,1))} \lesssim_\varepsilon R^{n/(2(n+1))+\varepsilon}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{12}$$

对于所有满足 $\operatorname{supp}\widehat{f} \subseteq A(R)$的 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$均成立。通过缩放并利用传播子的某些伪局部性质，该问题进一步归结为以下命题。

命题 3.3. — 对于所有 $\varepsilon > 0$ 以及所有 $R \geq 1$ 不等式

$$\| \sup_{0\leq t\leq R} |e^{it\Delta}f|\|_{L^2(B^n(0,R))} \lesssim_\varepsilon R^{n/(2(n+1))+\varepsilon}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{13}$$

当 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 满足 支集 $\widehat{f} \subseteq A(1)$时成立。

仅凭缩放即可表明（12）等价于（13）的一个变体，其中上确界取于更长的时间区间 $0 < t < R^2$。为了转换到较短的时间区间，我们使用Lee（2006年）基于算子的伪局部性质所提出的论证；我们在 §4.4 中详细描述。

3.4. Linearising the maximal operator

为证明命题 3.3，我们使用 Kolmogorov–Seliverstov–Plessner 方法将极大算子线性化。特别地，只需证明，对于所有 $\varepsilon > 0$，$R \geq 1$ 以及所有可测函数 $\mathbf{t}\colon B^n(0, R) \to (0, R)$，不等式

$$\Big(\int_{B^n(0,R)} |e^{i\mathbf{t}(x)\Delta}f(x)|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \lesssim_\varepsilon R^{n/(2(n+1))+\varepsilon}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{14}$$

对所有满足 $\operatorname{supp}\widehat{f} \subseteq B^n(0,1)$ 的 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 均成立。

令 U 表示最初定义在Schwartz空间上的算子

$$Uf(x,t) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{B^n(0,1)} e^{i(\langle x,\xi\rangle + t|\xi|^2)} \hat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

因此， $Uf(\cdot\ t)$对应于将 $e^{it\Delta}f$与一个到单位球的粗糙频率投影复合。我们将估计式（14）视为对可测函数 Uf 在时空图 $\Gamma_{\mathbf{t}}: =\{(x,\mathbf{t}(x)): x \in B^n(0,R)\}$ 上的界，其中 $\mathbf{t}$。这一视角证明很有用，因此我们将所有关键估计都表述在时空域上。

由于 Uf在频率上局部化，我们不期望 $|Uf(z)|$在小尺度上有很大变化。这是不确定性原理的一种体现，详见下文§4.1。这些观察使我们能够将设置离散化。

定义 3.4。— 设 Q 是 $\mathbb{R}^{n+1}$中的一族格点单位立方体。

i) 我们令 $Z_{\mathcal{Q}}$ 表示并集 $\bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} Q$。 *ii)* 如果对于几乎每个 $x \in \mathbb{R}^n$，至多有一个来自 Q 的立方体与直线 $\{(x,t): t \in \mathbb{R}\}$相交，则称 $\mathcal{Q}$ 满足垂直线检验 。

一个格点单位立方体 Q 应被视为一个“离散化点”，而 $Z_{\mathcal{Q}}$ 对于满足垂直线检验的族$\mathcal{Q}$ ，应被视为一个“离散化图”。根据这些定义，命题3.3 是以下界的推论。

Propos义 3.5 (Du 和Zhang，2019年）。— 对于所有 $\varepsilon > 0$ 以及所有 $R \geq 1$，不等式 y

$$\|Uf\|_{L^2(Z_{\mathcal{Q}})} \lesssim_\varepsilon R^{n/(2(n+1))+\varepsilon} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

当 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 且 $\mathcal{Q}$ 是一组位于 $B^{n+1}(0,R)$内并满足垂直线检验的单位格点立方体时，结论成立。

我们将详细说明为什么命题 3.5 中的离散化界蕴含了下方 §14中的线性化极大估计（4.1）。

3.5. Fractal energy estimates

命题 3.5实际上是 Du 和Zhang（2019年）证明的一个更为一般的定理的特例。在此我们介绍这一一般框架，并在下文中采用它。

定义 3.6. — 设 $M > 0$ 与 $\mathcal{Q}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一族格点 M-立方体 .

i) 对于 $1 \leq \alpha \leq n+1$ 和一个时空球 $B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$，我们定义

$$\Delta_\alpha(\mathcal{Q}, B) := \frac{\#\{Q \in \mathcal{Q} : Q \subset B\}}{\mathrm{rad}(B)^\alpha},$$

where $\mathrm{rad}(B)$ *denotes the radius of* B.

ii) Furthermore, let

$$\Delta_\alpha(\mathcal{Q}) := \sup_B \Delta_\alpha(\mathcal{Q}, B)$$

其中上确界取遍所有时空球 $B = B^{n+1}(z,r) \subseteq \mathbb{R}^{n+}$ [1].

如果 $1 \le M \le R$ 且 $\mathcal{Q}$ 是包含于$B^{n+1}(0,R)$ 中的格点 M-立方体的非空集合，则由定义可得

$$M^{-\alpha} \lesssim \Delta_\alpha(\mathcal{Q}) \qquad \text{and} \qquad \#\mathcal{Q} \lesssim \Delta_\alpha(\mathcal{Q}) R^\alpha.$$

现在我们终于可以陈述 Du 和 Zhang（2019年）的主要结果了。[8]

定理 3.7 （Du 和 Zhang，2019年）。— 对于所有 $\varepsilon > 0$ 以及所有 $R \ge 1$，$1 \le \alpha \le n+1$，不等式

$$\|Uf\|_{L^2(Z_\mathcal{Q})} \lesssim_\varepsilon \Delta_\alpha(\mathcal{Q})^{1/(n+1)} R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{15}$$

holds whenever $f \in L^2$（$\mathbb{R}^n$）且 $\mathcal{Q}$ 是 B^{n+1}（$0, R$） 中格点单位立方体的一个族 .

若 $\mathcal{Q}$ 满足垂直线检验，则不难看出 Δ_n（$\mathcal{Q}$） $\lesssim 1$。因此，定理 3.7蕴含命题 3.5 ，进而根据前面的化简，也蕴含定理 1.3中的逐点收敛结论。

我们将估计式（15）称为分形能量估计。这一术语部分源于能量守恒恒等式（4）。事实上，由（4）可得

$$\|Uf\|_{L^2(Z_\mathcal{Q})} \le \Big(\int_{-R}^{R} \|e^{it\Delta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \, \mathrm{d}t \Big)^{1/2} \lesssim R^{1/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{16}$$

这直接推出了 $\alpha = n+1$ 定理 3.7 的情形。对于一般指数$1 \le \alpha \le n+1$，将满足 $\Delta_\alpha(\mathcal{Q}) \lesssim 1$ 的立方体族 $\mathcal{Q}$ 视为一个离散化的 α 维“分形”集合会很有帮助。

There are two main advantages in working with the general framework of fractal energy estimates:

1) 定理 3.7 除了薛定谔极大函数的逐点收敛问题之外，还有一系列其他应用。这些应用包括对 Carleson 问题中发散集维数的估计，以及关于 Falconer距离猜想的部分结果。有关更多细节，请参阅 Du 和Zhang（2019年，§2）。

2) 估计的形式在 (15) 在证明时很有用。特别是，论证涉及一个归纳方案，并且包含 $\Delta_\alpha(\mathcal{Q})$因子允许从归纳假设中获得更大的杠杆作用。[9]

在本文的其余部分，我们将讨论定理 3.7 的证明。我们先在第 §4 节介绍调和分析和色散型偏微分方程的一些基础背景，然后再转向第 §§5–7 节中的更高级主题。

---

[8]事实上，Du 和 Zhang（2019年）证明了定理 3.7的一个进一步强化版本，其中涉及一个额外参数 λ：参见 Du 和 Zhang（2019年，定理 1.6）。不过，这一强化结果对于典型应用而言并无必要，因此我们在此坚持采用定理 3.7中的较为简单的表述。[9]归纳论证并不是应用于定理 3.7 本身，而是应用于命题 7.2中所描述的一个变体。

4. BASIC TOOLS FROM HARMONIC ANALYSIS

4.1. The uncertainty principle

我们首先讨论傅里叶变换的不确定性原理。这是一组大致表述如下的启发式原则：

如果 $\hat{F}$ 集中在尺度 R^{-1} 上，那么 $|F|$ 在尺度 R 上应当局部为常数。下面的引理在单位尺度上对这一原理给出了严格的表述。

引理 4.1（局部常值性质）。— 存在一个连续函数 $\eta\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ 满足以下条件：

i) 若 $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 满足 支集 $\hat{F} \subseteq Q_0 := [-1/2,1/2]^d$，则

$$|F(z)| \le \sum_{Q\in\mathcal{Q}_{\text{all}}} a_Q \chi_Q(z) \lesssim |F| * \eta(z) \qquad \text{for all } z \in \mathbb{R}^d \tag{17}$$

where here $\mathcal{Q}_{\text{all}}$ *is the collection of all lattice unit cubes in* $\mathbb{R}^d$ *and*

$$a_Q := \sup_{z\in Q} |F(z)| \qquad \text{for all } Q \in \mathcal{Q}_{\text{all}}.$$

ii) 函数 η 是 L^1-归一化的，并且在远离 Q_0 时快速衰减，其含义是

$$\eta(z) \lesssim_N (1+2|z|_\infty)^{-N} \qquad \text{for all } N \in \mathbb{N}.$$

证明. —取 $\eta_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$，使其满足$\hat{\eta_0}(\xi) = 1$ 对所有 $\xi \in [-1,1]^d$均成立。因此，若 $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$满足第 i) 部分的假设，则有再生公式 $F = F * \eta_0$。特别地，给定 $Q \in \mathcal{Q}_{\text{all}}$ 以及选取为满足 $|F(z_Q)| = a_Q$的 $z_Q \in Q$，可得

$$a_Q = |F(z_Q)| \le \int_{\mathbb{R}^d} |F(y)||\eta_0(z_Q - y)|\,\mathrm{d}y.$$

Now define $\eta\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ by

$$\eta(z) := \sup_{|w-z|_\infty \le 1} |\eta_0(w)|.$$

施瓦茨函数的快速衰减 η_0 因此确保 η 在远离 $[-1,1]^d$时快速衰减。因此只需证明（17）成立。

If $z \in Q$ is an arbitrary element, then

$$|(z_Q - y) - (z - y)|_\infty \le 1 \qquad \text{for all } y \in \mathbb{R}^d.$$

因此，对所有 $y \in \mathbb{R}^d$，都有 $|\eta_0(z_Q - y)| \le \eta(z - y)$，于是

$$a_Q \le |F| * \eta(z) \qquad \text{for all } z \in Q,$$

这立即推出了（17）中的第二个不等式。另一方面，（17）中的第一个不等式是由定义直接得到的。 □

我们可以利用上述不确定性原理的严格表述，为 §3.4 中所述的离散化过程提供依据。

证明（命题 3.5 ⇒ 命题 3.3）。——假设命题 3.5 成立。回顾一下，只需证明线性化最大值估计（14）。

令 $\tilde{\chi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$满足 $|\tilde{\chi}(z)| \gtrsim 1$ 对所有 $|z| \le 2$ 以及支集 $\mathcal{F}\tilde{\chi} \subseteq B^{n+1}(0,1)$。定义

$$F(z) := Uf(z) \cdot \tilde{\chi}(R^{-1}z),$$

则有 $|Uf(z)| \lesssim |F(z)|$ 对所有 $z \in B^{n+1}(0,2R)$ 以及支集 $\widehat{} F \subseteq B^{n+1}(0,2)$。证明将由函数 F 由此得到的局部常值性质得出。

固定 $\varepsilon > 0$，并设有可测函数 $\mathbf{t}\colon B^n(0,R) \to (0,1]$，令 $\mathfrak{q}_R$ 表示与 $B^n(0,R)$ 相交的 $\mathbb{R}^n$ 中格点单位立方体的集合。对于每个 $q \in \mathfrak{q}_R$，都存在某种 $x_q \in q$ 的选取，使得

$$\sup_{x \in q} |e^{i\mathbf{t}(x)\Delta} f(x)| \le 2|e^{i\mathbf{t}(x_q)\Delta} f(x_q)|.$$

如果我们对每个 $q \in \mathfrak{q}_R$定义 $z_q := (x_q, \mathbf{t}(x_q))$，那么可得

$$\Big(\int_{B^n(0,R)} |e^{i\mathbf{t}(x)\Delta} f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \Big)^{1/2} \lesssim \Big(\sum_{q \in \mathfrak{q}_R} |F(z_q)|^2 \Big)^{1/2}.$$

对于每个 $q \in \mathfrak{q}_R$，令 $I_q \subseteq \mathbb{R}$ 表示包含 $\mathbf{t}(x_q)$的一个格点单位区间，并定义 $Q_q := q \times I_q$。由引理 4.1，我们有

$$|F(z_q)| \lesssim \| |F| * \eta \|_{L^2(Q_q)}$$

其中 η 在以原点为中心的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位立方体之外快速衰减。特别地，如果令 $\delta := \varepsilon/(2n)$ 并定义扩大的立方体 $Q_q^{(\delta)} := R^\delta \cdot Q_q$，那么

$$|F(z_q)| \lesssim_{N,\varepsilon} \|F\|_{L^2(Q_q^{(\delta)})} + R^{-N} \|F\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \qquad \text{for all } N \in \mathbb{N}_0.$$

因此，如果我们定义时空单位立方体族 $\mathcal{Q}^{(\delta)} := \{Q_q^{(\delta)} \colon q \in \mathfrak{q}_R\}$，那么

$$\Big(\int_{B^n(0,R)} |e^{i\mathbf{t}(x)\Delta} f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \Big)^{1/2} \lesssim \|Uf\|_{L^2(Z_{\mathcal{Q}^{(\delta)}})} + R^{-100n} \|Uf\|_{L^2(w_{B_R^{n+1}})}, \tag{18}$$

对于 $w_{B_R^{n+1}}$ 适应于 B_R^{n+1} 的权重。快速衰减的误差项使用能量守恒恒等式容易被界。特别地，它由权重的快速衰减和算子的平移不变性性质得出

$$\|Uf\|_{L^2(w_{B_R^{n+1}})} \lesssim R^{1/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{19}$$

另一方面，集合 $Z_{\mathcal{Q}^{(\delta)}}$ 可以被 $O(R^{(n+1)\delta})$ 个形如 $Z_{\mathcal{Q}}$的集合覆盖，其中$\mathcal{Q}$ 是由单位格点立方体组成的族，满足命题3.5的假设（尤其是垂直线检验）。对于任意这样的$\mathcal{Q}$，我们都可以应用命题3.5来推得

$$\|Uf\|_{L^2(Z_{\mathcal{Q}})} \lesssim_\varepsilon R^{n/(2(n+1))+\delta} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

将这些贡献相加，我们得到对 $\|Uf\|_{L^2(Z_{\mathcal{Q}^{(\delta)}})}$ 的估计。将其与 (18) 和 (19) 结合，即可推出所需的界 (14)。 □

现在我们来讨论不确定性原理的其他一些表现形式，它们将在后续论证中发挥作用。

根据傅里叶变换的基本缩放性质，引理 4.1 蕴含了其自身的一个推广。我们将 平行六面体 定义为集合 $\pi \subseteq \mathbb{R}^d$，它是 Q_0 的像：$= [-1/2, 1/2]^d$ 在仿射变换下得到的像。特别地，$\pi = A(Q_0) + a$对于某个 $A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ 以及 $a \in \mathbb{R}^d$。给定这样的平行六面体，我们定义其 对偶平行六面体 π^*：$= A^{-\top}(Q_0)$，其中 $A^{-\top}$ 是 A的逆转置，并且

$$\mathcal{P}_{\mathrm{all}}(\pi) := \{A^{-\top}Q : Q \in \mathcal{Q}_{\mathrm{all}}\}.$$

因此，$\mathcal{P}_{\mathrm{all}}(\pi)$ 是 π^* 的平移族，它们铺满整个 $\mathbb{R}^d$。

作为引理 4.1 和显然的变量替换的直接推论，我们得到以下结果。

推论 4.2. — 设 $\pi \subseteq \widehat{\mathbb{R}}^d$ 为一个平行六面体。存在一个函数 $\eta_\pi\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ 满足以下条件：

i) 若 $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 满足$\mathrm{supp}\, \widehat{} F \subseteq \pi$，则

$$|F(z)| \leq \sum_{P \in \mathcal{P}_{\mathrm{all}}(\pi)} a_P \chi_P \lesssim |F| * \eta_\pi(z) \qquad \text{for all } z \in \mathbb{R}^d \tag{20}$$

其中 $\mathcal{P}_{\mathrm{all}}(\pi)$ 如上所定义，且

$$a_P := \sup_{z \in P} |F(z)| \qquad \text{for all } P \in \mathcal{P}_{\mathrm{all}}(\pi).$$

ii) 函数 η_π 是 L^1-归一化的，并且按照以下意义在远离 π^* 处快速衰减：

$$\eta(z) \lesssim_N |\pi^*|^{-1}(1 + |z|_{\pi^*})^{-N} \qquad \text{for all } N \in \mathbb{N}.$$

这里，$|\cdot|_{\pi^*}$ 是由 π^*的闵可夫斯基函数给出的范数。

推论 4.2 通过允许我们从 F 转到其在 $\mathcal{P}_{\mathrm{all}}(\pi)$ 上的离散化，再反向转换，从而实现了不确定性原理。然而，右侧出现的光滑化函数 η_π是（20）中的一个小小缺憾。在 $L^q(\mathbb{R}^d)$ 范数估计的层面上可以将其消去：例如，结合（17）与杨氏不等式，我们可推出

$$\|F\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq \Big(\sum_{P \in \mathcal{P}_{\mathrm{all}}(\pi)} |a_P|^q |P| \Big)^{1/q} \lesssim \|F\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$$

对所有 $1 \leq q < \infty$ 均成立。推广这一论证，我们得到以下基本估计。

引理 4.3 (伯恩斯坦不等式)。— 设 $1 \leq p \leq q \leq \infty$ 并假设 $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$满足 支集 $\mathrm{supp}\, \widehat{} F \subseteq \pi$，其中某个平行六面体为 $\pi \subseteq \widehat{\mathbb{R}}^d$。则

$$\|F\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim |\pi|^{1/p - 1/q} \|F\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

这里的要点是，由于局部常值性质，F 表现得像一个离散函数，因此，F 的 L^p 范数满足类似于序列的 ℓ^p范数的嵌套性质。

证明（引理 4.3）。— 我们假设 $q<\infty$；同样的证明对 $q=\infty$相应地。固定 $F\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 满足傅里叶支撑假设，并应用推论 4.2 以获得界

$$|F|\le \sum_{P\in\mathcal{P}_{\mathrm{all}}(\pi)} a_P\chi_P.$$

由于 $|P|=|\pi|^{-1}$ 对于任意 $P\in\mathcal{P}_{\mathrm{all}}(\pi)$，根据 ℓ^p 范数的嵌套关系，

$$\|F\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\le\Big(\sum_{P\in\mathcal{P}_{\mathrm{all}}(\pi)}|a_P|^q|P|\Big)^{1/q}\le|\pi|^{1/p-1/q}\Big(\sum_{P\in\mathcal{P}_{\mathrm{all}}(\pi)}|a_P|^p|P|\Big)^{1/p}.$$

Applying Corollary 4.2, we have

$$\Big(\sum_{P\in\mathcal{P}_{\mathrm{all}}(\pi)}|a_P|^p|P|\Big)^{1/p}=\Big\|\sum_{P\in\mathcal{P}_{\mathrm{all}}(\pi)}|a_P|\chi_P\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\lesssim\||F|*\eta_\pi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

The desired result now follows by Young's convolution inequality. □

伯恩斯坦不等式可以在空间中进行局部化，前提是这种局部化发生在一个足够粗的尺度上，从而遵循不确定性原理。在陈述这一局部版本之前，我们先引入以下定义，它在我们的论证中发挥着某种技术性作用。

定义 4.4。— 设 $S_0\subseteq\mathbb{R}^d$ 为一个对称凸体(10)，且 $S:=S_0+z_0$是 S的某个平移。若函数 $w_S\colon\ \mathbb{R}^d\to[0,\infty)$ 连续且满足以下条件，则称其为适配于 S 的（快速衰减）权重：w_S

$$w_S(z)\lesssim_N(1+|z-z_0|_{S_0})^{-N}\qquad \textit{for all } N\in\mathbb{N},$$

其中，$|\cdot|_{S_0}$ 是由 S_0 的闵可夫斯基函数给出的范数。

这类权重函数用于处理“施瓦茨尾部误差”；当试图同时在物理空间和频域中将函数局部化时，就会出现这类误差。

推论 4.5（局部伯恩斯坦不等式）。— 设 $1\le p\le q\le\infty$，且 $\pi\subseteq\widehat{\mathbb{R}}^d$ 是一个平行六面体。对于每个 $P\in\mathcal{P}_{\mathrm{all}}(\pi)$，都存在一个与 P 相适配的快速衰减权重 w_P，使得下述结论成立。若 $F\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 满足 $\operatorname{supp}\widehat{F}\subseteq\pi$，则

$$\|F\|_{L^q(P)}\lesssim|\pi|^{1/p-1/q}\|F\|_{L^p(w_P)}.$$

证明。— 不妨设 $p<\infty$。容易证明，存在某个 $\beta_P\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$，其 $\operatorname{supp}\widehat{\beta_P}\subseteq\pi$ 满足

$$1\lesssim|\beta_P(z)|\quad\text{for all } z\in P$$

并且使得 $|\beta_P(z)|$是一个适应于 P 的快速衰减权重。函数 $G:=F\cdot\beta_P$的傅里叶支撑在 Minkowski 和 $\pi+\pi$并且满足 $|F(z)|\lesssim|G(z)|$对所有 $z\in P$。对 G 应用伯恩斯坦不等式，所需结果随之得出，其中 $w_P:=|\beta_P|^p$。 □

(10)实际上，我们只会考虑一些简单的例子，例如欧几里得球、立方体以及这些集合的笛卡尔积。

4.2. Parabolic geometry

给定 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，其支集为 $\hat{} f \subseteq B^n(0,1)$，我们回顾解的积分公式

$$Uf(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{B^n(0,1)} e^{i\phi(x,t;\xi)}\, \hat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

where the *phase function* ϕ is given by

$$\phi(x,t;\xi) := \langle x, \xi \rangle + t|\xi|^2.$$

相位 ϕ 可以解释为时空向量 $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$与抛物面有界部分上一点的内积。

$$\Sigma_0 := \Big\{ \Sigma(\xi) : \xi \in B(0,1) \Big\} \subset \Sigma := \Big\{ \Sigma(\xi) : \xi \in \widehat{\mathbb{R}}^n \Big\} \tag{21}$$

其中 $\Sigma(\xi) := (\xi, |\xi|^2)$。由此可知，$Uf$ 的（分布意义下）时空傅里叶变换支集在 Σ_0 上。

Σ 的几何结构构成了我们对传播子 $e^{it\Delta}$进行整体分析的基础。作为这一点的第一个例子，我们观察到抛物面的一些对称性，这些对称性转化为传播子的对称性。

$\hat{}$任意球 $\theta \subset \mathbb{R}^n$ 半径为 r 对应于抛物面上的一个 帽，或 r-帽，由下式给出

$$\Sigma_\theta := \Big\{ \Sigma(\xi) : \xi \in \theta \Big\}.$$

$\hat{}$鉴于此，我们将经常把球 $\theta \subset \mathbb{R}^n$ 本身称为“帽”。注意，抛物面的有界部分 Σ_0 出现在（21）中，对应于在以原点为中心的单位球上方形成的帽。我们注意到抛物面的一个重要的自相似性，将每个帽与 Σ_0联系起来。

引理 4.6 (抛物缩放：几何版本). — 给定一个帽 Σ_θ，对应于一个球 $\theta \subseteq \widehat{\mathbb{R}}^n$，存在一个仿射变换 A_θ 的环境空间 $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$其限制为从 Σ_0 到 Σ_θ。

注*4.7*。——通过求逆并复合仿射变换，引理 4.6 进一步表明，给定任意两个帽 Σ_{θ_1}，Σ_{θ_2}存在环境空间的一个仿射变换 $A_{\theta_2 \to \theta_1}$，其 $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ 将 Σ_{θ_2} 双射地映射到 Σ_{θ_1}。

在给出引理 4.6的（简单）证明之前，我们介绍一些记号，并且实际上给出 $\hat{}$的显式公式 A_θ。给定一个球 $\theta \subset \mathbb{R}^n$，令 ξ_θ 表示其中心，并令半径(θ) 表示其半径。令 M_θ 表示剪切变换，令 D_θ 表示 $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ 上的各向异性缩放，其定义为

$$M_\theta := \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 2\xi_\theta^\top & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad D_\theta := \begin{pmatrix} \mathrm{rad}(\theta) I_n & 0 \\ 0 & \mathrm{rad}(\theta)^2 \end{pmatrix};$$

此处 I_n 表示 $n \times n$ 单位矩阵。下面的证明将表明，仿射变换 A_θ 在引理的陈述中4.6 可以取为

$$A_\theta \colon \zeta \mapsto (\mathcal{L}_\theta)^\top \zeta + \Sigma(\xi_\theta) \qquad \text{where} \qquad \mathcal{L}_\theta := D_\theta \circ M_\theta^\top, \tag{22}$$

where here $\top$ is used to denote the matrix transpose.

证明（引理 4.6）。——设 $\theta \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个球，使得该映射

$$\eta \mapsto \xi_\theta + r_\theta \eta \quad \text{for} \quad \eta \in \widehat{\mathbb{R}}^n$$

限制为从 $B(0,1)$ 到 θ 的双射。这里 $r_\theta := \mathrm{rad}(\theta)$。此外，若固定 $\xi \in \theta$ 并记 $\xi = \xi_\theta + r_\theta \eta$，则简单计算表明

$$\Sigma(\xi) = \Sigma(\xi_\theta) + M_\theta \circ D_\theta \Sigma(\eta) \tag{23}$$

其中 M_θ 和 D_θ 如上所定义。事实上，（23）直接由内积的展开得出

$$|\xi|^2 = |\xi_\theta + r_\theta \eta|^2 = |\xi_\theta|^2 + 2 r_\theta \langle \xi_\theta, \eta \rangle + r_\theta^2 |\eta|^2,$$

这也可以解释为泰勒级数展开。因此，（A_θ 在（22）中定义的映射满足所需性质。

□

我们现在通过公式 $\phi(z;\xi) := \langle z, \Sigma(\xi) \rangle$ 将抛物面的缩放性质与解算子 U 联系起来，对于 $z = (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$。

推论 4.8 (抛物缩放). — 设 $\theta \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$ 为球 并假设 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$满足 支集 $\widehat{} f \subseteq \theta \cap B^n(0,1)$. 则

$$|Uf(z)| = \mathrm{rad}(\theta)^{n/2} |U\tilde{f} \circ \mathcal{L}_\theta(z)| \tag{24}$$

for some function $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *satisfying*

$$\|\tilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \textit{and} \quad \operatorname{supp} \mathcal{F}(\tilde{f}) \subseteq B^n(0,1). \tag{25}$$

Here the linear rescaling $\mathcal{L}_\theta$ is as defined in (22).

证明（推论 4.8）。— 令 ξ_θ 表示 θ 的中心，且 r_θ : =rad(θ)。我们简单地˜定义 f，通过傅里叶变换可得

$$\mathcal{F}(\tilde{f})(\eta) := r_\theta^{n/2} \hat{f}(\xi_\theta + r_\theta \eta),$$

so that (25) immediately holds. On the other hand, we apply a change of variables to write

$$Uf(z) = r_\theta^{n/2} \int_{\widehat{\mathbb{R}}^n} e^{i\phi(z;\xi_\theta + r_\theta \eta)} \mathcal{F}(\tilde{f})(\eta)\, \mathrm{d}\eta.$$

The remaining property (24) now follows from the identity

$$\phi(z;\xi_\theta + r_\theta \eta) = \langle z, \Sigma(\xi_\theta + r_\theta \eta) \rangle = \langle z, \Sigma(\xi_\theta) \rangle + \langle \mathcal{L}_\theta z, \Sigma(\eta) \rangle,$$

which is itself a simple consequence of (23) and the definition of $\mathcal{L}_\theta$. □

4.3. Wave packets

现在我们分析一类非常简单、性质良好的初始数据所对应的薛定谔方程的解。我们将看到，这些解的行为与抛物面 Σ 的几何形状密切相关。

例*4.9* （单位尺度局域化初值）。— 取定 $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，其傅里叶变换非负且满足

$$\operatorname{supp}\hat{\psi} \subseteq B^n(0,4) \quad \text{and} \quad \hat{\psi}(\xi) = 1 \quad \text{for all } \xi \in B^n(0,2).$$

By a simple integration-by-parts argument, the propagator

$$e^{it\Delta}\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\widehat{\mathbb{R}^n}} e^{i\langle x,\xi\rangle}\Big(e^{it|\xi|^2}\hat{\psi}(\xi)\Big)\,\mathrm{d}\xi$$

satisfies

$$|e^{it\Delta}\psi(x)| \lesssim_N (1+|x|)^{-N} \qquad \text{for all } N \in \mathbb{N}_0 \text{ whenever } |t| \le 1. \tag{26}$$

确实，这里的要点是，对于 $|t| \le 1$，函数 $e^{it|\cdot|^2}\hat{\psi}$ 构成 Schwartz空间中的一致有界族。

例 *4.10* （波包）。— 我们现在对单位尺度局域化初值 ψ 进行缩放和平移，以创建丰富的例子族。设 $\rho \ge 1$ 和 $\theta_T \subset B^n(0,1)$ 为半径 $\rho^{-1/2}$、中心在 $\xi_T \in \widehat{\mathbb{R}^n}$ 的球。考虑 L^2-正规化函数 ψ_{θ_T}，由(11)给出

$$\hat{\psi}_{\theta_T}(\xi) := \rho^{n/4}\hat{\psi}\Big(\rho^{1/2}(\xi - \xi_T)\Big). \tag{27}$$

此外，对于 $x_T \in \mathbb{R}^n$ 我们考虑平移后的初值

$$\psi_T(x) := \psi_{\theta_T}(x - x_T). \tag{28}$$

因此，ψ_T 对应于一个调制鼓包函数，它在半径为 $\rho^{1/2}$、中心在 x_T 的球中空间局域化，并且频率支撑位于 $4\cdot\theta_T$ 中。

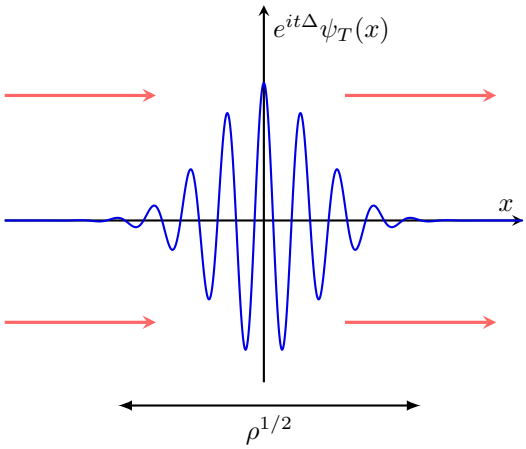
由推论 4.8 形式的抛物缩放、平移不变性以及 (26) 可得

$$|e^{it\Delta}\psi_T(x)| \lesssim_N (1+\rho^{-1/2}|x - x_T + 2t\xi_T|)^{-N} \qquad \text{for all } N \in \mathbb{N}_0 \text{ whenever } |t| \le \rho.$$

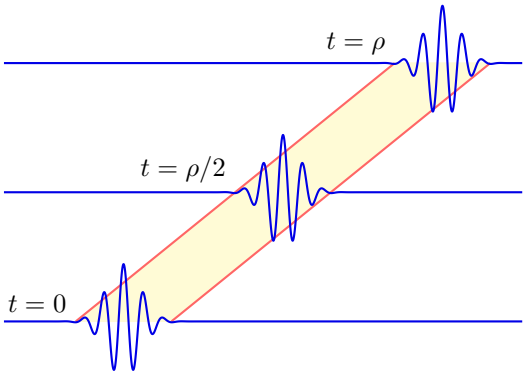
因此，在时间区间 $|t| \le \rho$ 内，时刻 t 的解集中在空间球 $B(x_T - 2t\xi_T, \rho^{1/2})$ 中，意思是 $e^{it\Delta}\psi_T$ 远离该集合迅速衰减。我们在图 1a 中以 1 空间维数说明这一现象。该解是所谓波包 的一个例子。

We highlight the basic properties of the wave packets from Example 4.10:
– 初始数据 ψ_T （以及每个固定时刻的解 $e^{it\Delta}\psi_T$）的频率支撑位于一个以 ξ_T 为中心、半径为 $\sim \rho^{-1/2}$ 的球内；– 对于满足 $|t| \le \rho$ 的每个时刻 t，解集中在一个半径为 $\rho^{1/2}$ 的空间球内；

(11)The reason for the apparently superfluous subscript T will be made clear below.



(a) 时间为 t 的一个波包。该波包集中在物理空间的一个区间内，并且随着时间演化，以固定速度 $v(T) = -2\xi_T$ 与频率 ξ_T 成正比地传播。



(b) 一个时空管 T。该管描述了解 $U\psi_T$ 在每个时间切片上的空间局部化。图中展示了三个这样的时间切片。

FIGURE 1. Two perspectives on wave packets.

– 空间球从初始位置 x_T 在 $t = 0$ 沿着线性轨迹以速度 $-2\xi_T$运动。特别地，速度由频率决定。

这阐明了薛定谔波的速度 v 与其频率 ξ之间的基本色散关系，可由公式概括为

$$v = -2\xi.$$

不同频率的波以不同的速度传播这一事实（因此在较大的时间尺度上会发生色散）是色散偏微分方程的定义性特征。

注*4.11*。—对于我们的波包 ψ_T，我们已将频率局部化在尺度 $\rho^{-1/2}$，使构成该波 $e^{it\Delta}\psi_T$ 的不同频率模式以相同的速度传播，误差为 $O(\rho^{-1/2})$。因此，在时间尺度 $|t| \leq \rho$内，波包保持“稳定”。超过这一时间尺度后，不同模式之间的速度差异会导致波包发生色散。

鉴于下文内容，采用一种新的视角，将波包 $e^{it\Delta}\psi_T(x)$ 视为时空域 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的函数是很有益的。

定义 4.12. — 对于 $\rho \geq 1$，一个 时空 ρ-管，或简称为一个 ρ-管，是一个集合$T \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 形式为

$$T := \Big\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x(T) - tv(T)| \leq \rho^{1/2} \quad and \quad |t| \leq \rho\Big\}$$

对于某个 $x(T)$， $v(T)$ *{v13}*。在这种情况下，我们称 T具有初始位置 $x(T)$、速度 $v(T)$、持续时间 ρ 和空间半径 $\rho^{1/2}$。

作为.....的函数 $(x,\ t)$，我们看到波包[(12)] $U\psi_T(x,\ t)$ 集中在时空管 T，其中心位于 x_T，速度为 $v(T) = -2\xi_T$，持续时间为 ρ 且空间半径为 $\rho^{1/2}$；见图 1b。特别地，如果对于 $0 < \delta < 1$ 我们定义稍微扩大的时空管

$$T^{(\delta)} := \Big\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x(T) - tv(T)| \le \rho^{1/2+\delta} \quad \text{and} \quad |t| \le \rho\Big\}, \tag{29}$$

then

$$|U\psi_T(x,t)| \lesssim_{\delta,N} \rho^{-N} \qquad \text{if } (x,t) \in B^{n+1}(0,\rho) \setminus T^{(\delta)}. \tag{30}$$

我们更新记号以适应视角的变化。如果 $T \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个^时空 ρ-管，如定义 4.12 中所述，则我们定义 $\theta_T \subset \mathbb{R}^n$ 为以 ξ_T 为中心的球：$= -v\ (T)\ /2$ 边长为 $\rho^{-1/2}$。此外，我们令 ψ_T 表示例 4.10 中的函数（28）。

注意，一个 ρ-管 T 以其 核心线 为中心

$$\ell_T := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x = x_T - 2t\xi_T\}.$$

这具有方向 $G(\xi_T)$，其中

$$G(\xi) := \frac{1}{\sqrt{1+4|\xi|^2}} \begin{pmatrix} -2\xi \\ 1 \end{pmatrix}; \tag{31}$$

我们也将 $G(\xi_T)$ 称为 T 的方向 。注意 G 恰好是与抛物面 Σ相关联的高斯映射。因此，管 T 的方向对应于抛物面在与 θ_T 相关联的帽 Σ_T 中心处的法向量。

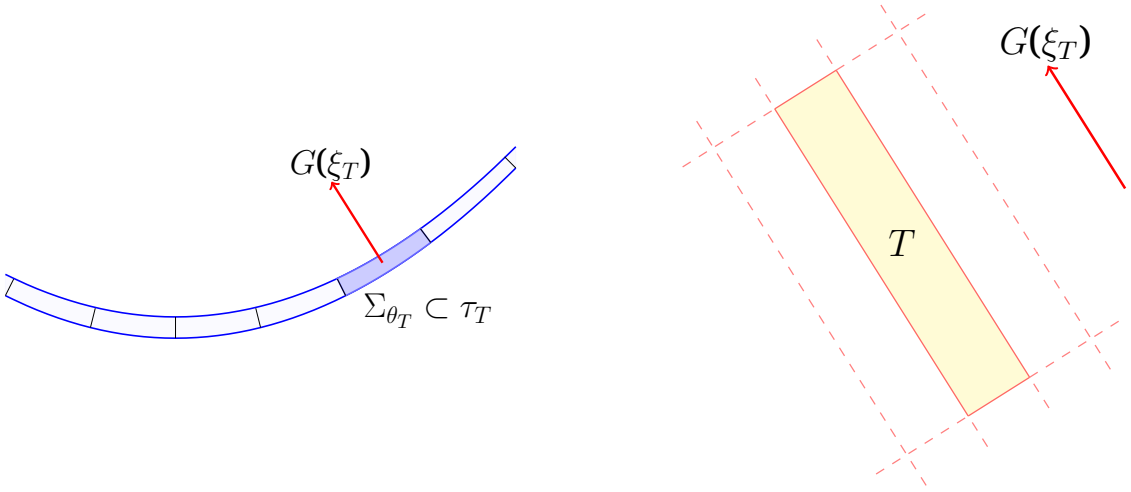
注记 4.13. — 这些观察与不确定性原理一致，应与推论 4.2 的陈述相比较。事实上，$e^{it\Delta}\psi_T(x)$ 的时空傅里叶支撑在 Σ_{θ_T} 中。这个帽本身包含在一个矩形 τ_T 中，该矩形以 ξ_T 为中心，具有长度为 $O(\rho^{-1/2})$ 的 n 边位于 Σ 在 $\Sigma(\xi_T)$ 处的切向方向，以及长度为 $O(\rho^{-1})$ 的剩余边位于法向方向。（本质的）时空支撑 T 因此对应于频率支撑 τ_T 的对偶 τ_T^* 的一个平移。见图 2。

4.4. Wave packet decomposition

上一节所考察的例子似乎相当特殊。然而，利用傅里叶级数分解，任何初始数据 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 都可以表示为叠加

$$f = \sum_{T \in \mathbf{T}} a_T \psi_T$$

(12)由假设 $\theta \subseteq B^n(0,1)$，我们有 $e^{it\Delta}\psi_T(x) = U\psi_T(x,t)$】【。



(a)每个 $\rho^{-1/2}$-帽 θ_T 都包含在一个矩形 τ_T 中，其维数约为$\rho^{-1/2} \times \cdots \times \rho^{-1/2} \times \rho^{-1}$，短边方向为 $G(\xi_T)$。

(b) 与帽 θ_T相关联的时空 ρ-管 T。该管的维数为$\rho^{1/2} \times \cdots \times \rho^{1/2} \times \rho$，其长边方向与 $G(\xi_T)$一致。

图 2. 波包分解遵循不确定性原理。

其中 $\mathbf{T}$ 是一个（可能无限的）时空管集合； ψ_T 是上文介绍的基本初始数据，而 $(a_T)_{T\in\mathbf{T}}$是一个复系数序列。因此，

$$e^{it\Delta} f = \sum_{T\in\mathbf{T}} a_T e^{it\Delta}\psi_T$$

因此，任何解都可以表示为波包的叠加。这一观察称为波包分解。这本质上是不确定性原理的结果，并且与推论 4.2中描述的局部常值性质密切相关。

定义与基本性质。——下面转向具体细节，我们先引入一些记号。

定义 4.14。——对于 $\rho \geq 1$，令$\mathbf{T}[\rho]$ 表示所有时空 ρ-管的集合，如定义 *4.12*中所述，其中

– 初始位置 x（T）可在格点 $\rho^{1/2}\mathbb{Z}^n$上自由变化；– 速度 v（T）可在格点 $c_n\rho^{-1/2}\mathbb{Z}^n$上自由变化。

这里 c_n ： $= 1/2n^{1/2}$ 是一个固定常数，仅起到次要的技术作用。

The precise form of the wave packet decomposition is given by the following lemma.

引理 4.15（波包分解）。—给定 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$满足 支集 $\hat{f} \subseteq B^n(0, 1/2)$ 且 $\rho \geq 10$ 我们可以写成

$$f = \sum_{T \in \mathbf{T}[\rho]} f_T \tag{32}$$

where the functions $f_T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *satisfy the following:*

i) 色散关系。 设 $T \in \mathbf{T}[\rho]$ ， 并假设 f_T 不恒等于0。则

$$|v(T) + 2\xi| \leq 2\rho^{-1/2} \qquad \text{for some } \xi \in \operatorname{supp} \hat{f}.$$

ii) ***Orthogonality.*** *For any collection* $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{T}[\rho]$*, we have*

$$\Big\| \sum_{T \in \mathbf{W}} f_T \Big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \sum_{T \in \mathbf{W}} \|f_T\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{33}$$

*iii)*时空局部化。 若对于 $T \in \mathbf{T}[\rho]$ 和 $0 < \delta < 1$ 我们按照 (29)中的定义，定义稍微扩大的时空管 $T^{(\delta)}$ ， 则

$$|Uf_T(x,t)| \lesssim_{\delta,N} \rho^{-N} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{if } (x,t) \in B^{n+1}(0,\rho) \setminus T^{(\delta)}. \tag{34}$$

We refer to (32) *as the wave packet decomposition of* f *at scale* ρ*.*

其思路是先将 f 分解为若干部分 f_θ 之和，每一部分的频率都支撑在某个帽 θ 内。然后再对各个 f_θ 使用傅里叶级数进一步分解。在给出具体细节之前，我们先约定一些记号。对于 $\rho \geq 1$ ， 令

$$\Theta[\rho] := \Big\{ B(\xi_T, \rho^{-1/2}) : \xi_T \in c_n \rho^{-1/2} \mathbb{Z}^n \cap B^n(0,2) \Big\}$$

表示一个覆盖 $B^n(0, 2)$ 由 $\rho^{-1/2}$-帽构成。如§4.3末尾所述，我们对每个$T \in \mathbf{T}[\rho]$关联一个帽 $\theta_T \in \Theta[\rho]$，其中心 ξ_T满足色散关系 $v(T) = -2\xi_T$。固定 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足[(13)]

$$\operatorname{supp} \hat{\phi} \subseteq [-c_n, c_n]^n \quad \text{and} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\phi}(\xi - c_n k) = 1 \quad \text{for all } \xi \in \widehat{\mathbb{R}}^n.$$

此外， 令 $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 如例 4.9中所述， 从而

$$\hat{\phi}(\xi) = \hat{\phi}(\xi)\hat{\psi}(\xi) \qquad \text{for all } \xi \in \widehat{\mathbb{R}}^n. \tag{35}$$

给定一个帽 $\theta_T \in \Theta[\rho]$ ， 其中心为 ξ_T， 通过以下方式定义 $\phi_{\theta_T} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{\phi}_{\theta_T}(\xi) := \hat{\phi}(\rho^{1/2}(\xi - \xi_T)).$$

$\hat{}$ 函数族 ϕ_{θ_T} 因而构成了相对于 $B^n(0,2)$ 覆盖 $\Theta[\rho]$ 的单位分解。因此，

$$f = \sum_{\theta_T \in \Theta[\rho]} f_{\theta_T} \qquad \text{where} \qquad f_{\theta_T} := \phi_{\theta_T} * f. \tag{36}$$

有了这些定义，我们现在来证明波包分解。

---

(13)为了构造这样的函数，选取 $\beta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，使得 $\operatorname{supp} \beta \subseteq Q_0 := [-1/2, 1/2]^n$ and $\int_{\mathbb{R}} \beta = 1$。由于 $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \chi_{Q_0} * \beta(\cdot - k) \equiv 1$，我们可以将 $\hat{}$ ϕ 取为 $\chi_{Q_0} * \beta$ 的适当缩放。

证明（引理4.15）。——对于 f_{θ_T}，如（36）中所定义，可知$\hat{}$ f_{θ_T} 的支集包含在一个边长为 $\rho^{-1/2}$的立方体中。因此，我们可以将$\hat{}$ f_{θ_T} 展开为傅里叶级数（经过适当缩放），得到

$$\hat{f}_{\theta_T}(\xi) = \sum_{k\in\rho^{1/2}\mathbb{Z}^n} \rho^{n/2} e^{-i\langle\xi,k\rangle} f_{\theta_T}(k) = \sum_{k\in\rho^{1/2}\mathbb{Z}^n} \rho^{n/4} e^{-i\langle\xi,k\rangle} f_{\theta_T}(k)\hat{\psi}_{\theta_T}(\xi). \tag{37}$$

这里的收敛可以取为 L^2 意义下的，并且 ψ_θ 定义如下（27）。对于（37）中的第二步，我们使用了（35）。注意，根据普朗歇尔定理，

$$\sum_{k\in\rho^{1/2}\mathbb{Z}^n} |f_{\theta_T}(k)|^2 = \rho^{-n/2}\|f_\theta\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

In light of the above, we may write

$$f = \sum_{T\in\mathbf{T}[\rho]} f_T \quad \text{where} \quad f_T(x) := \rho^{n/4} f_{\theta_T}(x(T))\hat{\psi}_T(x)$$

对于 ψ_T如 (28) 中所定义。仍需证明函数 f_T具有所需性质。

i) 色散关系。根据定义，supp$\hat{}$ ϕ_{θ_T} 位于半径为$\rho^{-1/2}$的球 θ_T 内。如果 f_T 不恒为零，那么 f_{θ_T} 也不恒为零。在这种情况下， θ_T 必定与 f的频率支撑相交，这立即推出所需的性质。

ii) 正交性。对于每个 $\theta \in \Theta[\rho]$，令$\mathbf{T}_\theta[\rho]$ 表示所有与 θ 和$\mathbf{W}_\theta := \mathbf{W} \cap \mathbf{T}_\theta[\rho]$相关联的管$\mathbf{T}[\rho]$ 的集合。由于函数 $\sum_{T\in\mathbf{W}_\theta} f_T$ 具有有限重叠的傅里叶支撑，

$$\Big\|\sum_{T\in\mathbf{W}} f_T\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \Big\|\sum_{\theta\in\Theta[\rho]}\sum_{T\in\mathbf{W}_\theta} f_T\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \sum_{\theta\in\Theta[\rho]} \Big\|\sum_{T\in\mathbf{W}_\theta} f_T\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{38}$$

其中最后一步使用了普朗歇尔定理和柯西–施瓦茨不等式。

固定 $\theta \in \Theta[\rho]$ 并注意支集 $\hat{}$ ψ_θ 位于与 θ 同心、边长为$8\rho^{-1/2}$的立方体 $\tilde{\theta}$ 中。特别地，根据普朗歇尔定理（以及周期性），

$$\Big\|\sum_{T\in\mathbf{W}_\theta} f_T\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \rho^n \Big\|\sum_{T\in\mathbf{W}_\theta} f_\theta(x(T))e^{-i\langle\xi,x(T)\rangle}\Big\|^2_{L^2(\tilde{\theta})} \sim \rho^{n/2}\sum_{T\in\mathbf{W}_\theta} |f_\theta(x(T))|^2. \tag{39}$$

However, from the definition of f_T and the choice of normalisation of ψ_T, it follows that

$$\rho^{n/2}|f_\theta(x(T))|^2 \sim \|f_T\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{for any } T \in \mathbf{T}_\theta[\rho]. \tag{40}$$

Combining (38), (39) and (40), we deduce

$$\Big\|\sum_{T\in\mathbf{W}} f_T\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \sum_{T\in\mathbf{W}} \|f_T\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

which is the first of the desired inequalities.

On the other hand, in view of (37) and (40), we have

$$\sum_{T\in\mathbf{W}} \|f_T\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \rho^{n/2}\sum_{\theta\in\Theta[\rho]}\sum_{T\in\mathbf{W}_\theta} |f_\theta(x(T))|^2 \lesssim \sum_{\theta\in\Theta[\rho]} \|f_\theta\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

其中 t he last inequality follows since the f_θ has finitely-overlapping frequency support.

iii) **Spatio-temporal locality.** It follows from (30) that

$$|Uf_T(x,t)| \lesssim_N \rho^{-N} |f_{\theta_T}(x(T))| \qquad \text{if } (x,t) \in B^{n+1}(0,\rho) \setminus T^{(\delta)}. \tag{41}$$

然而，由于 f_{θ_T} 的傅里叶支撑位于一个小球内，根据伯恩斯坦不等式和波包的正交性可得

$$|f_{\theta_T}(x(T))| \le \|f_{\theta_T}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f_{\theta_T}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{42}$$

结合（42）和（41）即可得到所需的界。 □

我们可以使用引理4.15 来解决 §3中遗留的一个问题。下面的论证基本上取自 Lee（2006年）。

证明（命题 *3.3* ⇒ 定理 *3.1*）。——假设命题 3.3 成立。对于所有 $\varepsilon > 0$ 以及 $R \ge 1$，只需证明

$$\| \sup_{0<t<R^2} |e^{it\Delta} f| \|_{L^2(B^n(0,R))} \lesssim_\varepsilon R^{n/(2(n+1))+\varepsilon} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{43}$$

对于所有 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 满足 支集 $\hat{f} \subseteq A(1)$。事实上，如 §3.3中所述，所需结果可由简单的缩放论证以及对 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 的 Littlewood–Paley 刻画得到。

固定 $\varepsilon > 0$、$R \ge 1$ 和 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，其中 $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq A(1)$。令 $\mathcal{I}_R$ 表示与长时间区间 $[0, R^2]$ 相交的所有格点 R-区间的集合。显然，我们有

$$\begin{aligned} \| \sup_{0<t\le R^2} |e^{it\Delta} f| \|_{L^2(B^n(0,R))} &= \| \sup_{I\in\mathcal{I}_R} \sup_{t\in I} |e^{it\Delta} f| \|_{L^2(B^n(0,R))} \\ &\le \Big(\sum_{I\in\mathcal{I}_R} \| \sup_{t\in I} |e^{it\Delta} f| \|^2_{L^2(B^n(0,R))} \Big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{44}$$

另一方面，根据命题 3.3 以及估计在时间平移下的不变性，

$$\| \sup_{t\in I} |e^{it\Delta} g| \|_{L^2(B^n(0,R))} \lesssim_\varepsilon R^{n/(2(n+1))+\varepsilon/2} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{for all } I \in \mathcal{I}_R \tag{45}$$

当 $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 的支集为 $\hat{g} \subseteq A(1)$ 时。

为对 (45) 中的估计求和，我们注意到，与不同时间区间 I相对应的局部化极大算子之间存在某种正交性。我们先从启发式层面讨论这种正交性。如上所述，令 $\mathbf{T}[R]$ 表示所有时空 R管的集合。由于 $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq A(1)$，给定 $T \in \mathbf{T}[R]$，波包 $e^{it\Delta} f_T$ 的速度为 $|v(T)| \sim 1$。这意味着波 $e^{it\Delta} f_T$ 在空间球 $B^n(0,R)$中大约停留 R 个时间单位。因此，对每个 $T \in \mathbf{T}[R]$，基本上存在唯一的时间区间 $I \in \mathbf{I}_R$，使得 $\sup_{t\in I} |e^{it\Delta} f_T|$ 不可忽略。于是，每个波包只对右端 (44) 的和中的一项有贡献；由于函数 $(f_T)_{T\in\mathbf{T}[R]}$ 本身正交，这就得到了所需的极大算子之间的正交性。

现在我们转向证明的形式细节。固定 $\delta := \varepsilon/2$，并对每个 $I \in \mathcal{I}_R$，令$Q_I := B^n(0,R) \times I$以及 $Q_I^{(\delta)} := R^\delta \cdot Q_I$。定义

$$\mathbf{T}_I[R] := \Big\{ T \in \mathbf{T}[R] : T \cap Q_I^{(\delta)} \neq \emptyset \text{ and } 1/4 \leq |v(T)| \leq 2 \Big\} \tag{46}$$

so that, by frequency support hypotheses on f and the spatio-temporal locality of the wave packets,

$$\| \sup_{t\in I} |e^{it\Delta} f| \|_{L^2(B^n(0,R))} \lesssim_\varepsilon \| \sup_{t\in I} |e^{it\Delta} f_I| \|_{L^2(B^n(0,R))} + R^{-100n} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{47}$$

where

$$f_I := \sum_{T \in \mathbf{T}_I[R]} f_T.$$

The key observation is that the sets $\mathbf{T}_I[R]$ are essentially disjoint: more precisely,

$$\max_{T\in\mathbf{T}[R]} \#\{I \in \mathcal{I}_R : T \in \mathbf{T}_I[R]\} \lesssim R^\delta. \tag{48}$$

事实上，一旦我们得到（48），便可结合（44）、（45）和（47）推得

$$\begin{aligned} \| \sup_{0<t\leq R^2} |e^{it\Delta} f| \|_{L^2(B^n(0,R))} &\lesssim_\varepsilon R^{n/(2(n+1))+\varepsilon/2} \Big(\sum_{I\in\mathcal{I}_R} \|f_I\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \Big)^{1/2} + R^{-100n} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim_\varepsilon R^{n/(2(n+1))+\varepsilon} \Big(\sum_{T\in\mathbf{T}[R]} \|f_T\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \Big)^{1/2} + R^{-100n} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

其中第二步利用了正交性、求和顺序的交换以及（48）。所需的估计（43）现在由波包的正交性得出。

剩下要证明（48）。固定一个初始位置为 $x(T)$、速度为 $v(T)$ 的 $T \in \mathbf{T}[R]$。设对于一对时间区间 $I_1, I_2 \in \mathbf{I}_R$，有 $T \in \mathbf{T}_{I_1}[R] \cap \mathbf{T}_{I_2}[R]$。只需证明 $\operatorname{dist}(I_1, I_2) \leq 30R^{1+\delta}$。假设结论不成立，并令 $\bar{t}_j$ 表示 I_j 在 $j = 1, 2$ 处的中心。根据集合 $\mathbf{T}_{I_j}[R]$ 的定义，存在 $(x_j, t_j) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 使得

$$|x_j - x(T) - t_j v(T)| \leq R^{1/2}, \quad |x_j| \leq R^{1+\delta} \quad \text{and} \quad |t_j - \bar{t}_j| \leq R^{1+\delta}$$

对于 $j = 1, 2$。由三角不等式，

$$|\bar{t}_1 - \bar{t}_2||v(T)| \leq |x_1 - x_2| + \sum_{j=1}^{2} |x_j - x(T) - t_j v(T)| + |t_j - \bar{t}_j| \leq 6R^{1+\delta}.$$

由于根据假设，$|\bar{t}_1 - \bar{t}_2| \geq 30R^{1+\delta}$，因此可得 $|v(T)| \leq 1/10$。根据由$\mathbf{T}_{I_j}[R]$ 式（46）的定义，这与矛盾相矛盾。 □

4.5. 伪局部性质

在下文中，我们固定一个较大的时空尺度 $R \geq 1$。该尺度所扮演的作用类似于 R 在定理 3.7的陈述中的作用；特别地，我们将考虑 Uf 在时空中局部化于 $B^{n+1}(0, R)$的估计。因此，在尺度 R上进行波包分解是有用的，从而相应的时空管具有持续时间 R。

我们常常会使用一个额外的、小得多的中间尺度 $1 \leq K \leq R^{1/2}$；这应被视为相当大，但仍远小于 R。例如，在应用中我们通常要么取 K 为一个大的维数常数，要么取 $K = R^{\delta}$ 对于某个非常小的 $\delta > 0$。

设 $\mathcal{T}_{K^{-1}}$ 是 $B^n(0,1)$ 的一个由中心位于 $B^n(0,2)$ 的 $(2K)^{-1}$-帽构成的有限重叠覆盖。固定 $\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}$ 满足 $\tau \subseteq B^n(0,1)$ 并假设 $f_\tau \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\operatorname{supp} \widehat{f_\tau} \subseteq \tau$.[14] 通过对 f_τ 在尺度 R 上应用波包分解，我们有

$$f_\tau = \sum_{T \in \mathbf{T}_\tau[R]} f_T \qquad \text{where} \qquad \mathbf{T}_\tau[R] := \Big\{ T \in \mathbf{T}[R] : |v(T) + 2\xi_\tau| \leq 4K^{-1} \Big\};$$

这里使用了引理4.15 中的色散关系性质来限制速度。

每个 $T \in \mathbf{T}_\tau[R]$ 都沿方向 $G(\xi_\tau)$ 排列，角度差至多为 $O(K^{-1})$。因此，我们可以根据将时空划分为互不相交的条带 S 维数为 $R/K \times \cdots \times R/K \times R$来将波包分组：见图 3。鉴于此，解算子 U 在不同条带之间基本上独立作用。

To describe these properties more precisely, let $\mathbf{S}_\tau[R]$ denote the collection of all strips

$$S = \Big\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x(S) - tv(S)| \leq R/K \quad \text{and} \quad |t| \leq R \Big\}$$

其中 $x(S) \in \mathbb{R}^n$ 是格点的一个选择在 $R/K \cdot \mathbb{Z}^n$ 和 $v(S) := -2\xi_\tau$。形成一个划分 $\mathbf{T}_S[R]$ 的 $\mathbf{T}_\tau[R]$，由条带 $S \in \mathbf{S}_\tau[R]$ 使得

$$\mathbf{T}_S[R] \subseteq \Big\{ T \in \mathbf{T}_\tau[R] : T \cap S \neq \emptyset \Big\}.$$

Then we may write

$$f_\tau = \sum_{S \in \mathbf{S}_\tau[R]} f_S \qquad \text{where} \qquad f_S = \sum_{T \in \mathbf{T}_S[R]} f_T \quad \text{for all } S \in \mathbf{S}_\tau[R]. \tag{49}$$

从直观上说，如果 S_1、$S_2 \in \mathbf{S}_\tau[R]$ 是不同的条带，那么波 Uf_{S_1} 和 Uf_{S_2} 分别集中在 S_1 和 S_2上，因此不会相互作用。为了使这一陈述更加精确，我们定义稍微扩大的条带

$$\bar{S} = \Big\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x(S) - tv(S)| \leq 20R/K \quad \text{and} \quad |t| \leq R \Big\}.$$

Then we have the following lemma.

(14)出于技术原因，这些帽的半径选为 $(2K)^{-1}$；应将 f_τ 视为支集‘完全位于’半径为 K^{-1} 的帽内。

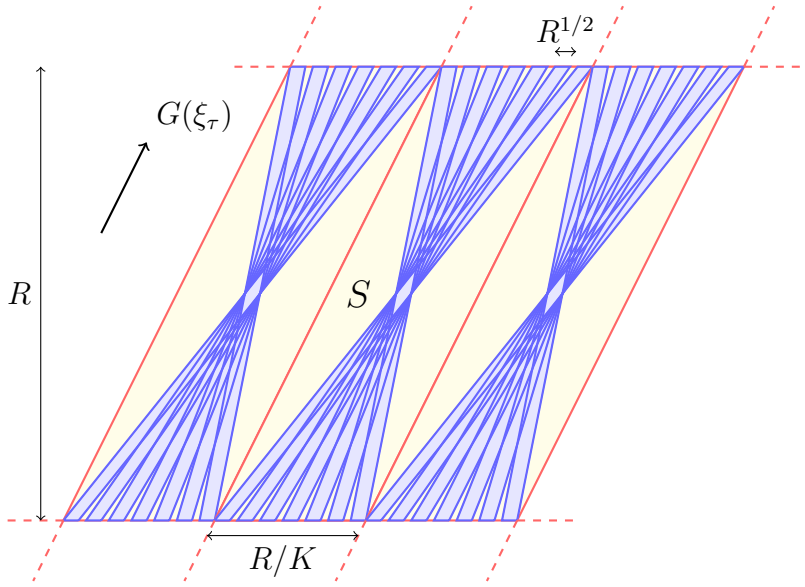


图3。展示伪局部性的示意图。由 f_τ 的波包分解产生的管 T的方向位于 $G(\xi_\tau)$ 的一个 K^{-1}-邻域内。因此，它们可以（本质上）被划分为分别位于互不相交的条带 S 中的族。

引理 4.16. — 假设 $0 < \delta < 1$ 和 $1 \le K \le R^{1/2-\delta}$。根据上述定义，对于所有 $S \in \mathbf{S}_\tau[R]$，我们有

$$|Uf_S(z)| \lesssim_{\delta,N} |Uf_S(z)|\chi_{\bar{S}}(z) + R^{-N}\|f_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{for all } z \in B^{n+1}(0,R) \text{ and } N \in \mathbb{N}.$$

证明。— 设 $S \in \mathbf{S}_\tau[R]$ 和 $T \in \mathbf{T}_S[R]$。由（34）中波包的局部化，只需证明 $T^{(\delta)} \subseteq \bar{S}$，其中 $T^{(\delta)}$ 是 T在（29）中定义的扩张。

设 $z = (x,t) \in B^{n+1}(0,R) \setminus S$，使得

$$|x - x(S) - tv(S)| > 20R/K.$$

由于 $T \in \mathbf{T}_S[R]$，由此可得 $|v(T) - v(S)| \le 4K^{-1}$ 并且存在某个 $(x',t') \in \mathbb{R}^{n+1}$ 满足

$$|x' - x(T) - t'v(T)| \le R^{1/2}, \quad |x' - x(S) - t'v(S)| \le R/K \quad \text{and} \quad |t'| \le R.$$

因此，由三角不等式，$|x(T) - x(S)| \le 6R/K$。从而，

$$|x - x(T) - tv(T)| \ge R/K > R^{1/2+\delta}$$

从而 $(x,t) \notin T^{(\delta)}$，如所需。 □

注记4.17。— 请注意，零时刻截面 $B_S := S \cap \{(x,0) : x \in \mathbb{R}^n\}$ 是一个 R/K-球。对前述观察的另一种解释是，$S \in \mathbf{S}_\tau[R]$ 本质上对应于在时间区间 $[-R,R]$内，局部化于 B_S 的初始数据 f_τ 的影响域。

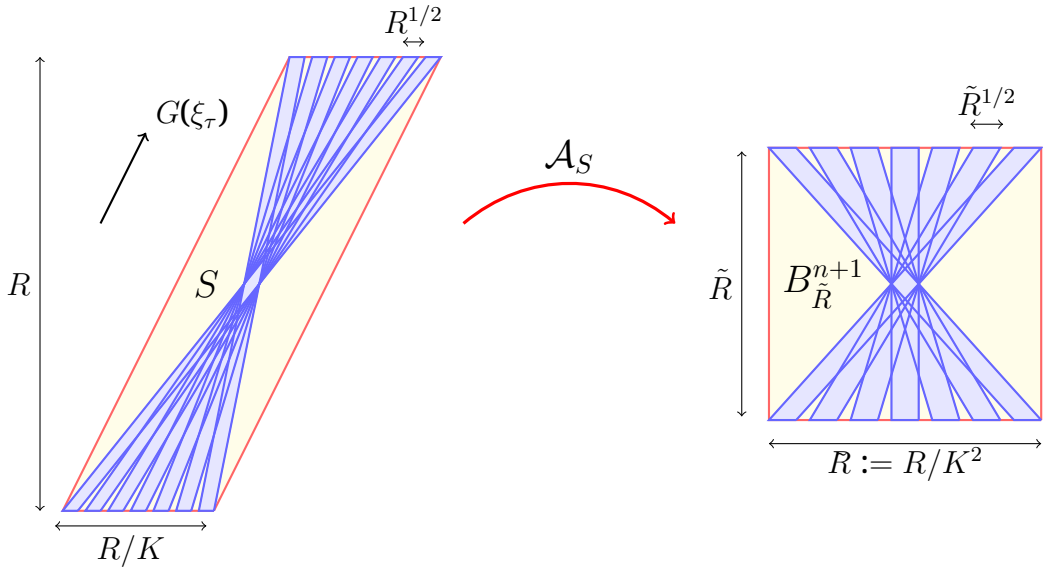


图 4。 引理中的缩放 4.18 在（物理）时空域中。条带 S 被映射为 $B^{n+1}(0, \tilde{R})$ 在仿射映射 $\mathcal{A}_S$下。

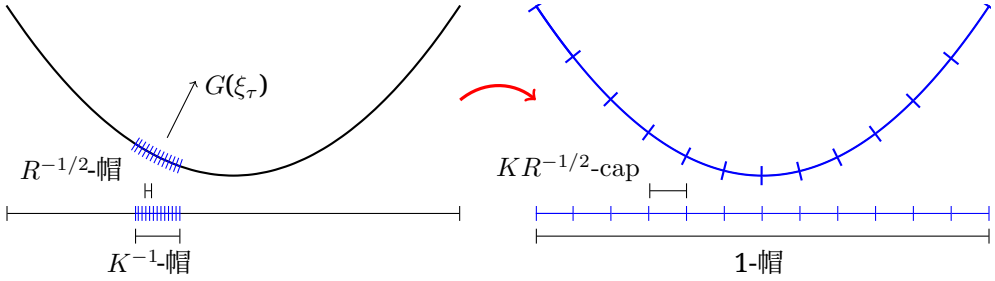


图 5. 引理 4.18 在频域中的缩放。该 K^{-1}- 帽 τ 被映射到整个抛物面。注意图4 中时空管方向与其底层频率之间的关系。

For $S \in \mathbf{S}_\tau[R]$ define the mapping

$$\mathcal{A}_S \colon (x,t) \mapsto (K^{-1}(x - x(S) - tv(S)), K^{-2}t).$$

因此，A_S 将条带 S 映射到球 $B^{n+1}(0, R/K^2)$；见图4。此外，我们可以写成 $\mathrm{A}_S(z) = \mathrm{L}_\tau(z) - z(S)$，其中 L_τ 是与帽 τ相关联的缩放映射，如(22) 中所定义，并且 $z(S) := (x(S), 0)$。鉴于这些观察，我们得到如下由推论 4.8 中抛物缩放的 L^p 变体。

引理 4.18. — 设 $1 \le p \le \infty$。在上述设置下，

$$\|Uf_S\|_{L^p(\bar{S})} \le K^{(n+2)/p - n/2} \|U\tilde{f}_S\|_{L^p(B^{n+1}(0,\tilde{R}))}$$

对于 $\tilde{R} = 20R/K^2$ 以及满足条件的某个函数 $\tilde{f}_S \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|\tilde{f}_S\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f_S\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \textit{and} \quad \operatorname{supp} \mathcal{F}(\tilde{f}_S) \subseteq B^n(0,1).$$

证明。——这是通过以推论 4.8 所述形式应用抛物缩放，利用 $\mathcal{L}_\tau$ 与 $\mathcal{A}_S$ 之间的关系，并改变时空变量得出的。物理域和频域中的缩放分别如图 4 和图5所示。[15]

□

4.6. 二进分割鸽巢原理与反向 Hölder

在定理3.7（见 §7）的证明中，我们将大量使用鸽巢原理论证。虽然这类论证完全是初等的，但却出人意料地有用，因此值得特别讨论二进分割鸽巢原理这一方法。

定义 4.19。— 我们称 $B \subseteq (0,\infty)$ 为二进制尺度上恒定，如果存在某个$j \in \mathbb{Z}$ 使得 $B \subseteq [2^j, 2^{j+1}]$。

注 *4.20*。— 通常，$\mathcal{B} = \{H(a) : a \in \mathcal{A}\}$ 是一个由有限集合$\mathcal{A}$索引的正数序列；在这种情况下，我们常写作

$$H(a) \qquad \text{is dyadically constant over } a \in \mathcal{A}$$

表示$\mathcal{B}$ 是二进制尺度上恒定的。

设 $M > 0, R \geq 1$。取对数可知，只有 $O(\log R)$ 个 $j \in \mathbb{Z}$ 的值使得 $2^j \in [MR^{-1}, MR]$。由此，任意集合$\mathcal{B} \subseteq [MR^{-1}, MR]$ 都可以写成并集

$$\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^{J} \mathcal{B}_j \tag{50}$$

其中每个$\mathcal{B}_j$ 是二进制尺度上恒定的且 $J \lesssim \log R$。将鸽巢原理应用于由此分解产生的集合$\mathcal{B}_j$ ，我们推导出以下初等（但出人意料地强大）的引理。

引理 4.21（二进分割鸽巢原理）。— 设 $M > 0$， $R \geq 1$ 和 $\mathcal{B} \subseteq [MR^{-1}, MR]$ 为一个有限集。

i) There exists some $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ which is dyadically constant and satisfies

$$\#\mathcal{B}' \gtrsim (\log R)^{-1} \#\mathcal{B}.$$

ii) 更一般地，给定 $F : B \to (0,\infty)$，存在某个 $B_F \subseteq B$，它是二进制尺度上恒定的并满足

$$\sum_{a\in\mathcal{B}} F(a) \lesssim \log R \sum_{a\in\mathcal{B}_F} F(a).$$

A 引理 4.21 的一个密切相关结果是下面这个 Hölder 不等式的反向形式 y.

(15)引理的证明中存在一些次要的技术性复杂情况4.18 由于稍大的¯频率支撑 f_S （与 f_τ相比）以及使用扩大的条带 S 而不是 S。这¯解释了因子 20 在定义 R中。

引理 4.22 (反向 Hölder)。— 设 $M > 0$, $R \geq 1$ 和 $H : A \to [MR^{-1}, MR]$ 是定义在有限集 A 上的函数。那么我们可以将 $A = \bigcup_{j=1}^{J} A_j$ 写作

$$\Big(\sum_{a \in \mathcal{A}_j} H(a)^p \Big)^{1/p} \lesssim \log R \, [\#\mathcal{A}_j]^{-(1/p-1/q)} \Big(\sum_{a \in \mathcal{A}_j} H(a)^q \Big)^{1/q}$$

对所有 $1 \leq p \leq q < \infty$ 以及所有 $1 \leq j \leq J$ 和 $J \lesssim$ 对数 R，均成立。

证明。——令 $\mathcal{B} := \{H(a) : a \in \mathcal{A}\}$ 并将此集合分解为 $O($对数 $R)$ 个互不相交的二进常数片段 $\mathcal{B}_j$, $1 \leq j \leq J$，如（50）所示。取 $\mathcal{A}_j := H^{-1}\big(\mathcal{B}_j\big)$，其中 $1 \leq j \leq J$。 □

鉴于引理 4.22，鸽巢原理对于“实插值”论证很有用；也就是说，当我们希望协调涉及不同 L^p 范数的不同估计时。我们将在后面的 §7中看到多个例子。

5. 多线性调和分析工具

5.1. 线性 Strichartz 估计

回想一下，我们的目标是证明定理 3.7，该定理对解 Uf 在一族时空立方体的并集 $Z_{\mathcal{Q}}$ 上给出了界。这里我们考虑一类更简单的估计，它们对解在整个时空域上的取值给出界。

定理 5.1（Strichartz 估计）。—— 设 $2 \cdot \frac{n+2}{n} \leq q \leq \infty$。不等式 ty

$$\|Uf\|_{L^q(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{51}$$

holds for all $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

这是对Stein–Tomas 傅里叶限制定理的一种重新诠释，该定理可追溯至Stein（1986年）、Tomas（1975年）和 Strichartz（1977年）。

注 *5.2*。——定理 5.1 实际上是更一般的 薛定谔方程的 *Strichartz* 估计的一个特例，其中涉及时空变量上的混合范数。

定理 5.1 与分形能量估计理论显然相关。事实上，如果 $\mathcal{Q}$是 $B^{n+1}(0, R)$ 中的格点单位立方体族，并且 $Z_{\mathcal{Q}}$ 表示它们的并集，那么

$$\|Uf\|_{L^2(Z_{\mathcal{Q}})} \leq |Z_{\mathcal{Q}}|^{1/(n+2)} \|Uf\|_{L^{2 \cdot \frac{n+2}{n}}(\mathbb{R}^{n+1})}$$

应用简单的界 $|Z_{\mathcal{Q}}| = \#\mathcal{Q} \leq \Delta_\alpha(\mathcal{Q}) R^\alpha$ 和定理 5.1，我们推得

$$\|Uf\|_{L^2(Z_{\mathcal{Q}})} \lesssim \Delta_\alpha(\mathcal{Q})^{1/(n+2)} R^{\alpha/(n+2)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

遗憾的是，这还不足以推出定理 3.7，因为 R-指数$\alpha/(n+2)$ 总是大于所需的值 $\alpha/(2(n+1))$。

注 *5.3.* —— 范围 $q \geq 2\cdot \frac{n+2}{n}$ 在定理5.1 中是尖锐的，因此不可能通过上述论证直接改进 Strichartz 估计来得到所需的分形能量估计。为此，我们固定一个空间尺度 $R \geq 1$ 和一个波包 ψ_T，如 §4.3 所示，其中 $\rho = R$。补充快速衰减性质（30），不难证明

$$|U\psi_T(x,t)| \gtrsim R^{-n/4} \qquad \text{for all } (x,t) \in \tfrac{1}{100}\cdot T.$$

特别地，对于任意 $1 \leq q \leq \infty$，我们有

$$\|U\psi_T\|_{L^q(B^{n+1}(0,R))} \gtrsim R^{-n/4+(n+2)/(2q)} \qquad \text{and} \qquad \|\psi_T\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim 1.$$

由于这些不等式对所有 $R \geq 1$都成立，因此（51）在 $q < 2\cdot \frac{n+2}{n}$ 时不成立。 ——

定理5.1 的证明并未使用定理 3.7；这里给出线性 Strichartz 估计，是为了引出下一节介绍的多线性 Strichartz 估计。因此，定理 5.1 的完整证明略去。[16]

5.2. 多线性 Strichartz 估计

假设我们有初始数据 ψ_{T_1} 和 ψ_{T_2}，如例 4.10 中所述，它们分别在间隔充分大的频率 ξ_{T_1} 和 ξ_{T_2}处振荡。由于波 $U\psi_{T_1}$ 和 $U\psi_{T_2}$ 具有不同的频率，我们预期它们之间会发生相消干涉；事实上，这一现象的严格体现就是正交性（33）。此外，根据色散关系，速度 v（T_1）和 v（T_2）也相距甚远。因此，$U\psi_{T_1}$ 和 $U\psi_{T_2}$只在很短的时间区间内发生相互作用。基于这些考虑，我们预期乘积$U\psi_{T_1}U\psi_{T_2}$ 很小，因为它度量了波之间的相互作用。

这些启发自然地引出了对薛定谔方程的多线性 Strichartz估计的研究。这一多线性理论是定理 3.7证明中的一个核心要素。为了介绍主要结果，我们首先讨论关于 $n = 1$ 的双线性估计这一基本例子。

如 §4.5中所述，令$\mathsf{T}_{K^{-1}}$ 为由 K^{-1}-帽对 B^n(0,1) 进行的有限重叠覆盖，其中心位于 B^n(0, 2)中。给定 $\tau \in \mathsf{T}_{K^{-1}}$，我们令 $G(\tau) \subseteq S^n$ 表示 τ在(31) 中引入的高斯映射 G 下的像。如果 f_τ在 τ上是傅里叶支撑的，那么 $G(\tau)$ 本质上就是 f_τ的波包分解中各波包的方向集合。

我们考虑相隔较远的帽对 (τ_1, τ_2)，它们对应于频率不同的波包。根据色散关系，我们也可以等价地考虑对应于横截管 (T_1, T_2) 的帽对 (τ_1, τ_2)。特别地，给定 ξ_1，$\xi_2 \in \mathbb{R}^n$，令 $|G(\xi_1) \wedge G(\xi_2)|$ 表示其第 j 列为 $G(\xi_j)$ 的 2×2 矩阵的行列式绝对值。于是我们定义

$$\mathcal{T}^{\text{trans}}_{K^{-1}} := \Big\{(\tau_1,\tau_2) \in (\mathcal{T}_{K^{-1}})^2 : |G(\tau_1) \wedge G(\tau_2)| \geq K^{-1}\Big\}, \tag{52}$$

where

$$|G(\tau_1) \wedge G(\tau_2)| := \inf\Big\{|G(\xi_1) \wedge G(\xi_2)| : \xi_j \in \tau_j \text{ for } j = 1,2\Big\}.$$

(16)不过请参见第 §6节，其中我们确实证明了稍弱版本的 $n = 1$ 情形。

设 $(\tau_1,\ \tau_2) \in \mathcal{T}_{\text{转置}K^{-1}}$，并假设 f_1、$f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ 满足支集 $\hat{}\, f_j \subseteq \tau_j$ 对于 $j = 1$, 2。正如上面的讨论所述，函数 Uf_j 以不同的频率振荡，其组成的波包以不同的速度传播。鉴于此，我们再次预期这两个波之间的相互作用很弱。

A rigorous manifestation of the above principle is the bilinear identity

$$\int_{\mathbb{R}^{1+1}} |Uf_1(z)Uf_2(z)|^2 \,\mathrm{d}z = 2\pi^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{f}_1(\xi_1)|^2 |\hat{f}_2(\xi_2)|^2}{|\xi_1 - \xi_2|} \,\mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2, \tag{53}$$

只要 f_j 满足上述假设，该等式就成立。这一恒等式可追溯至 Fefferman（1970年）的奠基性工作。证明很简单：我们写道

$$Uf_1(z)Uf_2(z) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\xi_1+\xi_2)+it(\xi_1^2+\xi_2^2)} \hat{f}_1(\xi_1)\hat{f}_2(\xi_2) \,\mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2$$

并进行变量替换 $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ 以推导出

$$Uf_1(z)Uf_2(z) = \check{F}(z) \qquad \text{where} \qquad F(\eta) := (2\pi)^2 \cdot \frac{\hat{f}_1 \circ \xi_1(\eta)\hat{f}_2 \circ \xi_2(\eta)}{2|\xi_1(\eta) - \xi_2(\eta)|}.$$

所需恒等式（53）现在通过应用普朗歇尔定理并作变量代换即可得到。

作为（53）以及与平凡 L^∞ 界进行插值的直接推论，我们得到如下双线性 Strichartz 不等式。

命题 5.4 （一维双线性 Strichartz 不等式）。——设 $4 \le p \le \infty$ 和 $(\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{T}_{\text{trans}K^{-1}}$。不等式

$$\Big\| \prod_{j=1}^{2} |Uf_j|^{1/2} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \lesssim K^{1/p} \prod_{j=1}^{2} \|f_j\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \tag{54}$$

当 $f_j \in L^2(\mathbb{R})$ 满足 支集 $\hat{}\, f_j \subseteq \tau_j$ 对于 $j = 1$, 2时成立。

在应用中，我们通常取 $K = O(1)$ 为有界（或使其依赖于尺度参数 R 次多项式地），从而附加的 $K^{1/p}$ 因子是可接受的。命题 5.4 的双线性设置相较于 $n = 1$ 定理 5.1 的情形的一个关键优势在于，估计式（54）一直对指数$p = 4$都成立。相比之下，线性不等式仅在指数降至 $p = 6$时仍成立。双线性设置中更广泛的估计范围体现了这样一个原则：横向波包之间的相互作用很弱。特别地，定理5.1 中的“临界行为”源于非横向相互作用。

建立令人满意的命题 5.4 的高维类比是一个深奥的问题。就我们的目的而言，我们关注以下尖锐的 $(n + 1)$-线性斯特里茨估计 $\mathbb{R}^n$，这是 Bennett、Carbery 和 Tao 的著名定理（2006年）。将（52）中横截对集合的定义推广，我们考虑横截的 $(n + 1)$-元组。

$$\mathcal{T}_{K^{-1}}^{\text{trans}} := \Big\{ (\tau_1, \dots, \tau_{n+1}) \in (\mathcal{T}_{K^{-1}})^{n+1} : |G(\tau_1) \wedge \cdots \wedge G(\tau_{n+1})| \ge K^{-n} \Big\}.$$

这里，$|G(\tau_1) \wedge \cdots \wedge G(\tau_{n+1})|$ 表示在所有$\xi_j \in \tau_j$、$1 \le j \le n+1$上 $|G(\xi_1) \wedge \cdots \wedge G(\xi_{n+1})|$ 的下确界。于是，主要结果如下。

定理 5.5 (Bennett、Carbery 和 Tao，2006年）。——设 $p_n := 2 \cdot \frac{n+1}{n}$ 且 $p_n \le p \le \infty$，并假设 $(\tau_1, \dots, \tau_{n+1}) \in \mathcal{T}^{\text{横截}K^{-1}}$。对于所有 $\varepsilon > 0$ 和所有 $R \ge 1$，不等式

$$\Big\| \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_j|^{1/(n+1)} \Big\|_{L^p(B_R^{n+1})} \lesssim_\varepsilon K^E R^\varepsilon \prod_{j=1}^{n+1} \|f_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1/(n+1)} \tag{55}$$

只要 $f_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 满足 支集$\hat{}\, f_j \subseteq \tau_j$，其中 $1 \le j \le n+1$，上述不等式即成立。这里 E 是一个维数常数。

用于证明 $n = 1$ 命题 5.4 中该情形的技巧无法推广到高维。定理 5.5的证明超出了本文的讨论范围。Guth（2015年）给出了一种简短的论证，其中运用了与本文探讨的思路类似的想法。[17] 我们也请读者参阅 Bennett（2014），以便对这一主题作初步了解。

作为定理 5.5 的直接推论，我们得到定理 3.1 中分形能量估计的以下多线性变体。

推论 5.6（多线性分形能量估计）。— 对于所有 $\varepsilon > 0$ 以及所有 $R \ge 1$，$1 \le \alpha \le n+1$ 不等式

$$\Big\| \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_j|^{1/(n+1)} \Big\|_{L^2(Z_{\mathcal{Q}})} \lesssim_\varepsilon K^E \Delta_\alpha(\mathcal{Q})^{1/(2(n+1))} R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon} \prod_{j=1}^{n+1} \|f_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1/(n+1)} \tag{56}$$

当 $f_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 满足定理 5.5 的假设，且 $\mathcal{Q}$ 是 $B^{n+1}(0,R)$ 中的单位格点立方体族时成立。

证明。— 这是在线性情形的 §5.1 中讨论过的简单论证的重复。我们应用 Hölder不等式和定理 5.5来推导出

$$\begin{aligned} \Big\| \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_j|^{1/(n+1)} \Big\|_{L^2(Z_{\mathcal{Q}})} &\le |Z_{\mathcal{Q}}|^{1/(2(n+1))} \Big\| \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_j|^{1/(n+1)} \Big\|_{L^{p_n}(B_R^{n+1})} \\ &\lesssim_\varepsilon K^E \Delta_\alpha(\mathcal{Q})^{1/(2(n+1))} R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon} \prod_{j=1}^{n+1} \|f_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1/(n+1)}. \end{aligned}$$

这里，在第二步中，我们使用界 $|Z_{\mathcal{Q}}| = \#\mathcal{Q} \le \Delta_\alpha(\mathcal{Q}) R^\alpha$，它是定义的直接推论。□

(17)更准确地说，Guth（2015年）建立了（非端点的）多线性*Kakeya*不等式，该不等式通过 Bennett、Carbery 和Tao（2006年）中描述的论证，与定理 5.5 等价。或者，可以应用Guth（2015年）的论证，通过结合波包分解技术直接证明多线性 Strichartz不等式。

例如，假设 $K = O_\varepsilon(1)$，那么 (56) 是定理 3.7 中的目标分形能量估计 (15) 的多线性类比（事实上，(56) 对$\Delta_\alpha(\mathcal{Q})$的依赖更优）。请注意，横截性在支撑这些观察的多线性 Strichartz 估计中起着关键作用。事实上，如果我们可以在定理 5.5 中去掉横截性假设，并取 $f = f_1 = \cdots = f_{n+1}$，那么就会得到线性估计

$$\|Uf\|_{L^{pn}(B(0,R))} \lesssim_\varepsilon R^\varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}; \tag{57}$$

然而，取 f 为例4.10中定义的波包，可以很容易看出（57）不成立（见备注5.3）。因此，证明定理3.7 的关键难点在于控制非横截相互作用。

5.3. Multilinear Bernstein inequality

在本小节中，我们将讨论第§4.1 节中结果的一些略显技术性的多线性推广，这些推广将在后续论证中发挥作用。

引理 5.7（多线性Bernstein 不等式）。— 设 $1 \le p \le q \le \infty$ 并假设$F_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$满足 支集 $\widehat{F_j} \subseteq Q_0 := [-1/2, 1/2]^d$ 对于 $1 \le j \le d$。则

$$\Big\| \prod_{j=1}^d |F_j|^{1/d} \Big\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \Big\| \prod_{j=1}^d |F_j|^{1/d} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

注*5.8*。— 通过仿射缩放，引理 5.7 立即推出其自身的一个推广，适用于傅里叶支撑于某个固定平行六面体中的函数 π。由于就我们的目的而言，只需单位尺度下的结果，因此省略细节。

事实上，并没有什么特别的多重线性 本身 关于引理 5.7：它是线性 Bernstein 不等式的直接推论。事实上，在引理 5.7的假设下，如果我们定义 $F := F_1 \cdots F_d$，那么我们可以等价地表示（5.7）为

$$\|F\|_{L^{q/d}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|F\|_{L^{p/d}(\mathbb{R}^d)}.$$

设 $p/d \ge 1$。由于 F的傅里叶支撑位于 $Q_0 + \cdots + Q_0$，也就是 d重 Minkowski 和，因此在这种情况下，引理 5.7 是将线性伯恩斯坦不等式应用于 F的直接推论。为处理剩余情形 $p/d < 1$，我们建立引理 4.1的一个变体。

引理 5.9. — 设 $0 < s \le 1$ 和 $M \ge 1$。存在一个函数 $\eta_M \colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$满足以下条件：

*i)*若 $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 满足 支集 $\widehat{F} \subseteq Q_0 := [-1/2, 1/2]^d$，则

$$|F(z)|^s \le \sum_{Q \in \mathcal{Q}_{M,\mathrm{all}}} |a_Q|^s \chi_Q(z) \lesssim M^d |F|^s * \eta_M(z) \qquad \textit{for all } z \in \mathbb{R}^d$$

where $\mathcal{Q}_{M,\mathrm{all}}$ *is the collection of all lattice* M*-cubes and*

$$a_Q := \sup_{z \in Q} |F(z)| \qquad \textit{for all } Q \in \mathcal{Q}_{M,\mathrm{all}}.$$

ii) 函数 η_M 是 L^1-归一化的，并且从 $[-M/2, M/2]^d$ 处快速衰减，其含义是

$$\eta_M(z) \lesssim_{N,s} M^{-d}(1 + 2M^{-1}|z|_\infty)^{-N} \qquad \textit{for all } N \in \mathbb{N}.$$

一旦引理 5.9 得到证明，引理 5.7 便可通过调整引理 4.3中用于证明线性伯恩斯坦不等式的论证轻松推出。注意，为此我们只需要引理 $M = 1$ 的情形；不过，考虑到后续应用，得到一般 M 情形下的结果也是有用的。

证明（引理 *5.9*）. — 固定满足 $\operatorname{supp} \hat{\eta}_0 \subseteq [-2, 2]^d$ 且 $\hat{\eta}_0(\xi) = 1$ 对所有 $\xi \in [-1, 1]^d$ 均成立的 $\eta_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$。令 $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 满足 i) 的假设。给定 $Q \in \mathcal{Q}_{M,\,\mathrm{all}}$以及满足 $|F(z_Q)| = a_Q$ 的 $z_Q \in Q$，我们有

$$a_Q = |F(z_Q)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |F(w)||\eta_0(z_Q - w)|\,\mathrm{d}w. \tag{58}$$

我们将右端解释为范数 $\|G_R\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$，其中

$$G_R(w) := F(w)\eta_0(z_Q - w).$$

不难看出，$\hat{}\, G_R$ 支集于 $[-10, 10]^d$。我们断言，根据伯恩斯坦不等式，

$$\|G_R\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|G_R\|_{L^s(\mathbb{R}^d)}. \tag{59}$$

这里的问题在于 $0 < s \leq 1$ 因此我们不能应用引理 4.3 直接。然而，应用伯恩斯坦不等式，其指数为 $p = 1$ 和 $q = \infty$ 可得

$$\|G_R\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|F\|^{1-s}_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\|F\|^s_{L^s(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|F\|^{1-s}_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|F\|^s_{L^s(\mathbb{R}^d)},$$

which then rearranges to produce the desired bound (59).

In light of the above, we can upgrade (58) to

$$|a_Q|^s \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} |F(w)|^s|\eta_0(z_Q - w)|^s\,\mathrm{d}w.$$

If we now define $\eta_M \colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ by

$$\eta_M(z) := M^{-d} \sup_{|w-z|_\infty \leq M} |\eta_0(w)|^s,$$

then the desired result follows as in the proof of Lemma 4.1. □

We m也可以像推论 4.5 中那样，对多线性伯恩斯坦不等式进行空间局部化 .

推论 **5.10**. — 在引理 *5.7* 的假设下，若 $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ 是边长至少为1的任意立方体，则

$$\Big\| \prod_{j=1}^d |F_j|^{1/d} \Big\|_{L^q(Q)} \lesssim \Big\| \prod_{j=1}^d |F_j|^{1/d} \Big\|_{L^p(w_Q)},$$

其中 $w_Q \colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ 是适配于 Q 的权重（见定义 *4.4*）。

证明。——这可通过引理 5.7，使用证明推论 4.5 时所采用的相同论证得到。

□

6. BROAD-NARROW ANALYSIS

6.1. Motivation

在上一节中，我们推导出了分形能量估计的一个多线性变体，即推论 5.6，这是Bennett、Carbery和 Tao（2006年）的多线性Strichartz 估计的直接推论。现在的问题是，如何从它们的多线性对应形式中获得 真正的 线性估计。

乍看之下，从多线性估计过渡到线性估计似乎颇具挑战。事5.6 实上，推论的证明5.5关键性地利用了横截性假设，这是调用定理5所必需的。因此，第§5节的方法并不适合处理共振波包之间的相互作用。

本节介绍了Bourgain 和 Guth（2011年）提出的一种巧妙方法，该方法确实能够将多线性估计转化为线性估计。如今，这种方法通常被称为*Bourgain–Guth* 方法或宽窄分析 并构成了调和分析诸多近期进展的基础。

宽窄分析最初是为研究著名的傅里叶限制猜想而提出的，但后来被 Bourgain（2013年）改用于推进 Carleson问题。它依赖于分解、缩放和尺度归纳技术，这些技术源自 Tao、Vargas 和Vega（1998年）以及 Wolff（2001年）等人更早期的工作。

6.2. $n = 1$ 的宽窄分析：一个示例

首先，我们在一个非常简单的情形下说明宽窄分析背后的核心思想。具体而言，我们利用命题 5.4 中的双线性估计，证明以下（稍弱的） $n = 1$ 情形的定理 5.1的变体。

命题 6.1。— 对于所有 $\varepsilon > 0$ 和所有 $R \geq 1$，不等式

$$\|Uf\|_{L^6(B^{1+1}(0,R))} \lesssim_\varepsilon R^\varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

在 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 时成立。

下面给出的命题 6.1 的证明仅作示例之用：在后续讨论中我们并不需要这一结果。不过，该证明确实为宽窄方法提供了一个简单而有效的入门介绍。

第一步是将线性算子 Uf 与双线性 Uf_1Uf_2 表达式联系起来，这些表达式涉及函数 f_1，f_2 并满足命题5.4的横截性假设。对于$n = 1$，这可以通过一个初等的逐点不等式轻松实现。

设 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 并假设，不失一般性，支集 $\hat{} f \subseteq B^1(0, 1/2)$。我们分解

$$f = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}} f_\tau,$$

类似于第 §4.4节中的讨论，从而每个 $f_\tau \in L^2(\mathbb{R})$ 满足 支集 $\hat{} f_\tau \subseteq$ τ.

引理 6.2（宽窄分解， $n = 1$）。— 对于所有 $z = (x, t) \in \mathbb{R}^{1+1}$，我们有

$$|Uf(z)| \lesssim \max_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}} |Uf_\tau(z)| + K \max_{(\tau_1,\tau_2)\in \mathcal{T}^{\mathrm{trans}}_{K^{-1}}} \prod_{j=1}^{2} |Uf_{\tau_j}(z)|^{1/2}. \tag{60}$$

此处 $\mathcal{T}^{\mathrm{trans}}_{K^{-1}}$表示所有 K^{-1}-横向帽对在 $\mathcal{T}_{K^{-1}}$中的集合，如（52）中所定义。等式（60）右端的第一项称为窄项，而第二项称为宽 项。

证明（引理 *6.2*）。——给定 $z = (x, t) \in \mathbb{R}^{1+1}$，令 $\tau_z \in \mathcal{T}_{K^{-1}}$ 为满足以下条件的帽

$$|Uf_{\tau_z}(z)| = \max_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}} |Uf_\tau(z)|.$$

We define the set of *narrow* and *broad* caps (for Uf at z) by

$$\mathcal{N}_z := \left\{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}} : |G(\tau) \wedge G(\tau_z)| < K^{-1}\right\} \quad \text{and} \quad \mathcal{B}_z := \mathcal{T}_{K^{-1}} \setminus \mathcal{N}_z,$$

respectively. Note that $\mathcal{N}_z$ simply consists of the cap τ_z and some of its neighbours.

The decomposition of $\mathcal{T}_{K^{-1}}$ into broad and narrow caps induces a decomposition of the operator

$$|Uf(z)| = \Big|\sum_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}} Uf_\tau(z)\Big| \le \Big|\sum_{\tau \in \mathcal{N}_z} Uf_\tau(z)\Big| + \sum_{\tau \in \mathcal{B}_z} |Uf_\tau(z)|. \tag{61}$$

对于涉及窄帽的项，我们只需注意到 $\#\mathcal{N}_z \lesssim 1$ 因此

$$\Big|\sum_{\tau \in \mathcal{N}_z} Uf_\tau(z)\Big| \lesssim \max_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}} |Uf_\tau(z)|. \tag{62}$$

另一方面，显然 $(\tau, \tau_z) \in \mathcal{T}\,\mathrm{trans}K^{-1}$ 对所有 $\tau \in \mathcal{B}_z$ 因此

$$\begin{aligned}\sum_{\tau \in \mathcal{B}_z} |Uf_\tau(z)| &\le \sum_{\tau \in \mathcal{B}_z} |Uf_\tau(z)|^{1/2} |Uf_{\tau_z}(z)|^{1/2} \\ &\lesssim K \max_{(\tau_1,\tau_2)\in \mathcal{T}^{\mathrm{trans}}_{K^{-1}}} \prod_{j=1}^{2} |Uf_{\tau_j}(z)|^{1/2}. \end{aligned} \tag{63}$$

Plugging (62) and (63) into (61), we deduce the desired estimate. □

作为引理中的逐点界的直接推论6.2，我们得出以下范数界。

推论 6.3（L^q 宽窄分解， $n = 1$）。— 对于所有 $1 \le q \le \infty$ 以及所有 $R \ge 1$，我们有

$$\|Uf\|_{L^q(B_R^{1+1})} \lesssim \Big(\sum_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}} \|Uf_\tau\|^q_{L^q(B_R^{1+1})}\Big)^{1/q} + K^3 \max_{(\tau_1,\tau_2)\in \mathcal{T}^{\mathrm{trans}}_{K^{-1}}} \Big\| \prod_{j=1}^{2} |Uf_{\tau_j}|^{1/2} \Big\|_{L^q(B_R^{1+1})}. \tag{64}$$

对于 $q = \infty$， ℓ^q 表达式应理解为最大值。

证明。—— $q=\infty$ 情形显然。固定 $1\le q<\infty$，用相应的 60 中的最大值来控制 ℓ^q 求和，并对所得表达式两边取 L^q范数（在 z 中）。然后交换 ℓ^q 和 L^q 范数即可得到所需结论。

□

为了引出下文，我们暂停考虑出现在右边的项 (64)。

–宽项涉及双线性表达式，并且对于适当的 q，可以使用命题 5.4 中的双线性 Strichartz 估计来估计。–为了估计窄项，关键观察是右边出现的表达式$\|Uf_\tau\|_{L^q(B_R^{1+1})}$与左边出现的表达式 $\|Uf\|_{L^q(B_R^{1+1})}$形式相同。这是不等式的一种对称性（或自相似性）。此外，右边出现的函数 f_τ 是左边函数 f 的频率局部化版本；从这个意义上说， f_τ 是比 f 更简单的对象。这些考虑自然导致归纳论证。

证明（命题 *6.1*）。 — 固定 $\varepsilon>0$。我们令 $\mathbf{C}_\varepsilon\ge 1$ 和 $K\ge 2$ 表示仅依赖于可容许参数 ε 的固定常数，它们被选得足够大以满足证明即将出现的要求。

我们对尺度参数 R进行归纳论证。作为柯西–施瓦茨不等式和普朗歇尔定理的一个简单推论，我们有

$$\|Uf\|_{L^6(B^{1+1}(0,R))}\lesssim R^{1/3}\|Uf\|_{L^\infty(B^{1+1}(0,R))}\lesssim R^{1/3}\|\hat f\|_{L^2(\mathbb{R})}=R^{1/3}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

因此，命题 6.1 对较小的尺度（例如 $R\le 100$）显然成立；这为归纳提供了一个基例。

固定 $R\ge 100$ 和 $f\in L^2(\mathbb{R})$，并且不失一般性地假设 $\operatorname{supp}\hat f\subseteq B^1(0,1/2)$。我们进一步假设以下条件成立。

Induction hypothesis. — *For all* $1\le\tilde R\le R/2$, *the inequality*

$$\|Ug\|_{L^6(B^{1+1}(0,\tilde R))}\le \mathbf{C}_\varepsilon\tilde R^{\varepsilon}\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

holds whenever $g\in L^2(\mathbb{R})$.

对于 $2\le q<\infty$ 我们应用推论中的宽窄分解 6.3 以推导出[18]

(65)
$$\|Uf\|_{L^q(B_R^{1+1})}\lesssim\Big(\sum_{\tau\in\mathcal{T}_{K^{-1}}}\|Uf_\tau\|^2_{L^q(B_R^{1+1})}\Big)^{1/2}+K^3\max_{(\tau_1,\tau_2)\in\mathcal{T}^{\mathrm{trans}}_{K^{-1}}}\Big\|\prod_{j=1}^{2}|Uf_{\tau_j}|^{1/2}\Big\|_{L^q(B_R^{1+1})}.$$

这里，我们利用范数的嵌套关系，将窄项中的 ℓ^q sum 弱化为 an ℓ^2 sum。

[18]稍后我们将固定 $q=6$，但暂时保留参数 q 自由，以便了解一般情况下数值关系如何展开。

宽项。我们首先估计宽贡献：也就是说，右侧的第二项（65）。这是通过直接应用命题 5.4 中的双线性 Strichartz 估计来实现的。特别地，由（54），对于 $4 \le q < \infty$ 我们有

$$\|Uf\|_{L^q(B_R^{1+1})} \lesssim \Big(\sum_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}} \|Uf_\tau\|^2_{L^q(B_R^{1+1})} \Big)^{1/2} + K^4 \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{66}$$

窄项。还需估计窄贡献，即右侧（65）中的第一项。这通过结合抛物缩放并应用归纳假设来实现。

For each $\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}$, as in (49) we decompose[19]

$$f_\tau = \sum_{S \in \mathbf{S}_\tau[R]} f_S \qquad \text{where} \qquad f_S := \sum_{T \in \mathbf{T}_S[R]} f_T. \tag{67}$$

By Lemma 4.16, we have

$$\|Uf_\tau\|^q_{L^q(B_R^{1+1})} \lesssim \sum_{S \in \mathbf{S}_\tau[R]} \|Uf_S\|^q_{L^q(\bar{S})} + R^{-100nq} \|f\|^q_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{68}$$

现在我们将引理 4.18中的抛物缩放形式应用于。特别地，对于每个$S \in \mathbf{S}_\tau[R]$，存在一个函数 $\tilde{f}_S \in L^2(\mathbb{R})$，其傅里叶支撑于 $B^1(0,1)$，并满足

$$\|Uf_S\|_{L^q(\bar{S})} \le K^{3/q-1/2} \|U\tilde{f}_S\|_{L^q(B^{1+1}(0,\tilde{R}))} \qquad \text{and} \qquad \|\tilde{f}_S\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_S\|_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{69}$$

其中 $\tilde{R} := 20R/K^2$。如果 K 取得足够大，则 $\tilde{R} \le R/2$，因此我们可以应用归纳假设得出结论：

$$\|U\tilde{f}_S\|_{L^q(B^{1+1}(0,\tilde{R}))} \le \mathbf{C}_\varepsilon \tilde{R}^\varepsilon \|\tilde{f}_S\|_{L^2(\mathbb{R})} \lesssim \mathbf{C}_\varepsilon K^{-2\varepsilon} R^\varepsilon \|f_S\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{70}$$

Combining (68), (69) and (70), we therefore deduce that

$$\Big(\sum_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}} \|Uf_\tau\|^2_{L^q(B_R^{1+1})} \Big)^{1/2} \lesssim \mathbf{C}_\varepsilon K^{3/q-1/2-2\varepsilon} R^\varepsilon \Big(\sum_{S \in \mathbf{S}[R]} \|f_S\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \Big)^{1/2} + R^{-10n} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{71}$$

其中 $\mathbf{S}[R]$ 表示所有集合 $\mathbf{S}_\tau[R]$ 在所有 $\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}$上的并集。定义（$\mathbf{T}_S[R]$ ）中出现的波包族 67在 S 遍历$\mathbf{S}[R]$时本质上互不相交。因此，由波包的正交性，

$$\Big(\sum_{S \in \mathbf{S}[R]} \|f_S\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \Big)^{1/2} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Applying this bound to (71), we deduce that

$$\Big(\sum_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}} \|Uf_\tau\|^2_{L^q(B_R^{1+1})} \Big)^{1/2} \lesssim \mathbf{C}_\varepsilon K^{3/q-1/2-2\varepsilon} R^\varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{72}$$

[19]根据条带进行的分解 S 对于这一论证的目的而言有些小题大做，但在调整这些方法以证明定理 3.7（见§7）时是一个重要特征。当前证明的另一种方法是直接利用 Uf_τ 推论4.8进行重新缩放。

which is the final estimate for the narrow term.

为完成证明，我们结合（66）和（72）；因此，对于 $4 \le q \le \infty$，我们有

$$\|Uf\|_{L^q(B_R^{1+1})} \le C\Big(\mathbf{C}_\varepsilon K^{3/q-1/2}K^{-2\varepsilon}R^\varepsilon + K^4\Big)\|f\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

其中 C 是合适的绝对常数，用来涵盖上述论证中隐含常数所产生的所有因子。注意，当且仅当 $q \ge 6$ 时，指数 $3/q - 1/2$ 非正。特别地，取 $q = 6$ 的情形，我们有

$$\|Uf\|_{L^6(B_R^{1+1})} \le C\Big(\mathbf{C}_\varepsilon K^{-2\varepsilon} + K^4\Big)R^\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{73}$$

估计（73）涉及两个自由参数（这两个参数都必须独立于 f 以及 R）：

– The constant $\mathbf{C}_\varepsilon$ appearing in the induction hypothesis;
– The intermediate scale K.

我们微调这些参数，以确保归纳过程闭合。我们首先选择 $\mathbf{C}_\varepsilon$关于 K，以满足 $\mathbf{C}_\varepsilon = 2CK^4$。因此，（72）变为

$$\|Uf\|_{L^6(B_R^{1+1})} \le \left(C\mathbf{C}_\varepsilon K^{-2\varepsilon}R^\varepsilon + \frac{\mathbf{C}_\varepsilon}{2}\right)\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

最后，我们选择 K，仅取决于 ε，使得 $CK^{-2\varepsilon} \le 1/2$。作此选择后，我们得出结论

$$\|Uf\|_{L^6(B_R^{1+1})} \le \mathbf{C}_\varepsilon R^\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

which closes the induction and completes the proof. □

上述给出的简单论证仅适用于 $n = 1$ 情形。这是由于当 $n = 1$时，窄项具有良性；在高维中，我们将看到窄项要复杂得多。

6.3. What is going on here?

命题证明中所使用的归纳论证6.1 非常简洁，但可能掩盖了证明过程中实际发生的机制。事实上，类似这样的论证有时可能显得有些神奇。为了更好地理解其中的运作方式，将归纳论证“展开”，并将其视为一个递归过程，会很有帮助。这通常会使论述更加繁琐，但能更好地说明该论证是如何运作的。这里我们对这一递归过程作一个非正式的概述，重新诠释上一小节中的证明。

As the process progresses, we pass through a decreasing chain of spatial scales

$$R \to R/K^2 \to R/K^4 \to \cdots \to R/K^{2N}, \tag{74}$$

其中 N 对应于递归中的步骤总数。在终止步骤（对应于命题6.1证明中的基例）中，我们已达到

单位尺度，因此我们有，比如说， $R/K^{2N} \leq 100$。由此可见，步数总量大约为

$$N \sim \frac{\log R}{\log K}.$$

在每一步中，我们都使用推论 6.3将范数分成两部分：直接进行分析的宽项，以及我们继续进行分解的窄项。因此，在每一步中，我们都会在分解中增加一个额外的部分，从而在整个过程中，我们将范数分成 $N+1$ 个部分。特别地，我们有：

– 该过程每个步骤的宽项；– 仅用于终止步骤的窄项。

由于 $N+1 \lesssim \log R \lesssim R^{\varepsilon/2}$，只需证明该分解中每一部分的贡献都是 $O_\varepsilon(R^{\varepsilon/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})})$。

终止步骤中剩余的窄项使用平凡能量估计进行控制，这对应于归纳设置中对基例的分析。另一方面，每个宽项都使用命题5.4中的双线性Strichartz不等式进行估计。通过应用抛物缩放，我们总能将宽项中出现的帽对分离开，以确保它们是 K^{-1}-横截的。这意味着双线性估计产生的常数在递归的所有步骤中都是一致的。[(20)]

还有一个最后的细微之处。在每一步进行宽窄分解时，我们的不等式中都会多出一个绝对常数 $C_\circ$，例如$C_\circ = 10$。这些常数单独来看无关紧要，但随着我们反复迭代这一过程，它们会以 $C_\circ^k$ 的幂次累积起来。在终止阶段，我们会额外得到一个因子 $C_\circ^N$：由于 N 关于 R呈对数增长，这可能会造成灾难性后果。参数 K正是用来处理这个问题的。具体而言，只要将 K 取得足够大，且仅依赖于 ε，我们就能确保

$$C_\circ^N = R^{C \log C_\circ / \log K} \leq R^{\varepsilon/2},$$

这对于我们的目的来说是可接受的。简言之， K越大，（74）中各尺度间的跳跃就越大，因此步骤 N 在递归过程中就越少。通过选择 K 足够大，我们可以有效控制递归过程中产生的常数 $C_\circ^N$。

(20)在命题 6.1 的归纳证明中，我们没有直接对宽项应用抛物缩放。不过，在过程的第 k 步对窄项应用抛物缩放，实际上等于对第 $k+1$ 步的宽项进行缩放（该宽项由分解第 k 步的窄项得到）。因此，上述内容确实准确地描述了命题 6.1 的证明。

6.4. Pointwise broad-narrow decomposition in higher dimensions

本节余下部分将探讨如何把第 §6.2 节介绍的简单思路推广到更高空间维数。这为下一节证明分形能量估计（定理 3.7）提供了框架。[21]

对我们而言，宽窄分解的正确实现方式$n \geq 2$ 事实证明极其复杂，并且依赖于深刻的*Bourgain and Demeter* 的解耦理论（2015年）。我们的第一步是将引理6.2 中的简单逐点宽窄分解推广到高维。这实际上将证明是一个失误，我们将在下文引理 6.7 的证明中回过头来细化我们的估计。尽管如此，我们仍然研究逐点分解，以初步了解这个问题。

回忆一下，在引理 6.2的证明中，我们定义了一族 窄帽，其法向量 $G(\tau)$ 沿着某个固定的 1 维线性子空间排列。更一般地，给定一个 d 维线性子空间 $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$，我们定义

$$\mathcal{T}_{K^{-1}}(V) := \Big\{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}} : |\sin \angle(G(\tau), V)| \leq C_n K^{-1}\Big\}. \tag{75}$$

这里 $\angle(G(\tau)\ V)$ 表示角度 $\angle(G(\xi)\ V)$ 在所有 $\xi \in \tau$和 $C_n \geq 1$中下确界为维数常数，取足够大以满足证明中即将提出的要求。采用此定义后，引理 6.2的一般形式如下。

引理 6.4（逐点宽窄分解）。—对所有 $z = (x,\ t) \in \mathbb{R}^{n+1}$，有

$$|Uf(z)| \lesssim \max_{V \in \mathrm{Gr}(n,\mathbb{R}^{n+1})} \Big| \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}(V)} Uf_\tau(z) \Big| + K^n \max_{(\tau_1,\ldots,\tau_{n+1}) \in \mathcal{T}_{K^{-1}}^{\mathrm{trans}}} \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_{\tau_j}(z)|^{1/(n+1)}. \tag{76}$$

Here the left-hand maximum is taken over all n-dimensional linear subspaces in $\mathbb{R}^{n+1}$.

我们立即看到，引理 6.4 蕴含引理 6.2 在 $n = 1$ 情形下。比较（76）与（60），高维中一个显著的额外复杂性在于窄项的形式。这涉及函数

$$f_V := \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}(V)} f_\tau,$$

它局限于一整族帽（沿条带排列），而不是单个帽。因此，对于 $n \geq 2$，对这一项的分析需要借助解耦理论中的复杂工具，详见§6.5。

[21]特别是，目标是不扩展命题6.1 （仅为说明之用）在高维中的证明。虽然宽窄分析可用于证明 $n \geq 2$ 的 Strichartz 估计，但与例如 Tomas5.1 的原始证明（1975年）相比，这种方法极其繁琐。另一方面，此处发展的工具在研究一般维数下的定理3.7 时十分有效。

我们指出，引理 6.4 的精确形式在后续分析中并未用到；相反，我们将依赖于 L^q 引理中提出的一个变体6.7 。[22] 尽管如此，引理6.4 仍为理解相关概念提供了有益的过渡。

证明（引理 *6.4*）。——证明是对用于证明 $n = 1$ 情形的论证的详细展开，见引理 6.2。第一步是找出一个余维 1 子空间$V_z \in \mathrm{Gr}(n, \mathbb{R}^{n+1})$，使其尽可能多地“捕获”较大的 $|Uf_\tau(z)|$。更准确地说，定义算子的宽部 为

$$U_{\mathrm{Br}} f(z) := \min_{V \in \mathrm{Gr}(n,\mathbb{R}^{n+1})} \max_{\tau \notin \mathcal{T}_{K^{-1}}(V)} |Uf_\tau(z)| \tag{77}$$

并设 $V_z \in \mathrm{Gr}(n, \mathbb{R}^{n+1})$ 在（77）中取得最小值。那么 V_z 具有所需性质，即对于 $|Uf_\tau(z)|$， $\tau \notin \mathcal{T}_{K^{-1}}(V)$ 的最大值最小。

出于一些略微技术性的原因，我们还定义

$$\mathcal{T}_{K^{-1}}(V, z) := \Big\{ \tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}(V) : |Uf_\tau(z)| \geq U_{\mathrm{Br}} f(z) \Big\}$$

并进一步选择 V_z，使得在所有于（77）中取得最小值的空间里，空间 V_z还使 $\#\mathcal{T}_{K^{-1}}(V, z)$最大。再次可以将此条件理解为确保 V_z尽可能多地捕获较大的 $|Uf_\tau(z)|$。

根据定义，帽 $\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z, z)$（或者更准确地说，是它们的法向量）围绕 n 维子空间 V_z 排列。然而，它们并不围绕任何更低维的子空间排列。

断言。不存在维数为 $n-1$ 的子空间 $W \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$，使得$\mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z, z) \subseteq \mathcal{T}_{K^{-1}}(W)$。

其思想是，如果 $\mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z, z)$ 中的所有帽都被一个 W 维数为 $n-1$的子空间“捕获”，那么我们就可以自由地将 W扩展为一个 V_z'维数为 n的子空间，从而捕获更多的大帽。但这与 V_z的极大性相矛盾。我们将把这一论证的精确细节推迟到证明的最后。

假设该断言成立，便可轻易得出引理的证明6.4。仿照引理 6.2 的证明，我们定义 窄 和 宽帽（对于 Uf 在 z）的集合如下

$$\mathcal{N}_z := \mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{B}_z := \mathcal{T}_{K^{-1}} \setminus \mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z),$$

respectively. By the triangle inequality and the defining properties of V_z, we have

$$\begin{aligned} |Uf(z)| &\leq \Big| \sum_{\tau \in \mathcal{N}_z} Uf_\tau(z) \Big| + \sum_{\tau \in \mathcal{B}_z} |Uf_\tau(z)| \\ &\lesssim \max_{V \in \mathrm{Gr}(n,\mathbb{R}^{n+1})} \Big| \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}(V)} Uf_\tau(z) \Big| + K^n U_{\mathrm{Br}} f(z). \end{aligned} \tag{78}$$

[22] 与 $n = 1$ 情况相比，在高维中我们对 L^q 宽窄分解的表述并不直接由逐点分解得出。

鉴于该断言，存在一个由 n 个帽组成的元组 $(\tau_{z,1}, \dots, \tau_{z,n}) \in \mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z, z)^n$，它是 $K^{-(n+1)}$-横截的，具体来说

$$\left|G(\tau_{z,1}) \wedge \cdots \wedge G(\tau_{z,n})\right| \geq K^{-(n-1)}. \tag{79}$$

要看出这一点，只需取 $(\tau_{z,1}, \dots, \tau_{z,n})$ 为使左侧楔积最大的一个元组。若此选择不满足（79），则

$$\left|G(\tau_{z,1}) \wedge \cdots \wedge G(\tau_{z,n-1}) \wedge G(\tau)\right| < K^{-(n-1)} \qquad \text{for all } \tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z, z).$$

定义 $W :=$ 张成$\{G(\xi_{\tau_z,1}) \dots, G(\xi_{\tau_z,n-1})\}$，其中$\xi_{\tau_z,j}$表示 $\tau_{z,j}$对于$1 \leq j \leq n-1$的中心。如果(75)中的常数 $C_n \geq 1$取得足够大，仅依赖于 n，那么 W是一个 $(n-1)$-维子空间，满足 $\mathsf{T}_{K^{-1}}(V_z, z) \subseteq \mathsf{T}_{K^{-1}}(W)$，这与该断言矛盾。因此，(79) 必须成立。

根据广义泛函的定义，存在一个帽 $\tau_{z,n+1} \notin \mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z)$，使得

$$|Uf_{\tau_{z,n+1}}(z)| = U_{\mathrm{Br}} f(z).$$

由此可得，$(n+1)$-元组 $(\tau_{z,1}, \dots, \tau_{z,n+1})$ 是 K^{-n}-横截的，并满足

$$U_{\mathrm{Br}} f(z) \leq \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_{\tau_{z,j}}(z)|^{1/(n+1)} \leq \max_{(\tau_1,\dots,\tau_{n+1}) \in \mathcal{T}^{\mathrm{trans}}_{K^{-1}}} \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_{\tau_j}(z)|^{1/(n+1)}. \tag{80}$$

The desired result now follows by combining (80) and (78).

仍需证明该断言。按照证明概要，我们通过矛盾来论证，假设存在这样一个子空间 W 存在。设 $\tau^* := \tau_{z,n+1}$ 如上所述，使得 $\tau^* \notin \mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z)$实现定义（77）中的最大值，对于 $V = V_z$。定义 V_z'为维数为 n 的子空间，它包含 W 和 $G(\xi_{\tau^*})$，其中 ξ_{τ^*} 是 τ^*的中心。

首先注意到 V_z' 在（77）中取到最小值。事实上，由于 W的假设以及 V_z'的定义，我们有 $\mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z) \subseteq \mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z')$ 因此

$$U_{\mathrm{Br}} f(x) = \max_{\tau \notin \mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z)} |Uf_\tau(z)| \geq \max_{\tau \notin \mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z')} |Uf_\tau(z)| \geq U_{\mathrm{Br}} f(x).$$

鉴于 V_z 的最大性，可知$\#\mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z', z) \leq \#\mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z, z)$。然而，显然根据定义，

$$\mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z, z) \subseteq \mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z', z), \qquad \text{whilst} \quad \tau^* \in \mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z', z) \quad \text{and} \quad \tau^* \notin \mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z, z).$$

因此，$\#\mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z, z) < \#\mathcal{T}_{K^{-1}}(V_z', z)$，这就产生了矛盾。 □

如同在 $n = 1$ 情况讨论于§6.2，不等式 (76) 旨在获取多线性理论从§5。特别地，多线性 Strichartz 估计可用于控制来自右侧第二项的‘宽’贡献 (76)。剩下的是设计一种方法来分析‘窄’贡献，对应于右侧第一项的 (76)。

在一维 Strichartz 估计（命题 6.1）的证明中，我们结合使用抛物缩放和尺度归纳来估计窄贡献。这种直接方法是一维情形所特有的，而当尝试将这些思想推广到高维时，会出现相当大的复杂性。

为理解其中的困难，回顾一下，窄项涉及算子 U，该算子作用于如下形式的函数

$$f_V := \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}(V)} f_\tau \qquad \text{for } V \in \mathrm{Gr}(d, \mathbb{R}^{n+1}).$$

当 $n = d = 1$时，函数 f_V 本质上对应于某个 f_τ。[(23)] 在这种情况下，Uf_V 在抛物线上的一个帽上具有傅里叶支撑，我们可以利用引理 4.18中抛物线的缩放结构。然而，对于高维情形，我们所能说的最好结果是，函数 Uf_V 支撑在一条抛物带上。不存在可行的缩放能将一条带映射到整个抛物面。

6.5. Analysis of the narrow term: decoupling

为了分析（76）中的窄项，我们采用解耦估计以及 Bourgain and Demeter 的以下著名定理。为介绍该结果，令$\mathcal{Q}_{K^2}$ 表示与 K^2-立方体相交的时空格点 $B^{n+1}(0, R)$的集合。

定理 6.5 (Bourgain and Demeter, 2015年).—令 $1 \le d \le n+1$和 $2 \le q \le 2 \cdot \frac{d+1}{d-1}$。对—于所有 $\varepsilon > 0$, $K \ge 1$ 我们有

$$\|Uf_V\|_{L^q(Q)} \lesssim_\varepsilon K^\varepsilon \Big(\sum_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}(V)} \|Uf_\tau\|^2_{L^q(w_Q)} \Big)^{1/2} \tag{81}$$

当 $Q \in \mathcal{Q}_{K^2}$ 且 $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个维数为 d 的线性子空间时。

不等式（81）被理解为对所有 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 满足 f_V 且 f_τ 均成立，其中各项如上所定义。权重 w_Q 与定义4.4中的相同。定理 6.5 的一个关键特点是，所隐含的常数不依赖于尺度参数 K。

注 *6.6*。— 定理 6.5 并未在 Bourgain and Demeter（2015年）中明确陈述，但可以很容易地由 Bourgain and Demeter（2015年）中的定理 1.1 推出：参见 Guth（2018年）中引理 9.5 的证明。

定理 6.5为函数 f_V 及其组成部分 f_τ （当 $\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}(V)$ 时）提供了有效的比较。注意，（81）右端涉及范数 $\|Uf_\tau\|_{L^q(w_Q)}$，这些范数适用于抛物缩放。因此，Bourgain–Demeter 定理使我们能够在高维中运用抛物缩放和尺度归纳论证，而这些方法在一维情形中更容易获得。

我们不会给出定理 6.5的证明；事实上，Bourgainand Demeter（2015年）的论证冗长而复杂，涵盖了我们迄今遇到的所有技术（波包分析、抛物缩放、多线性 Strichartz 估计、宽窄分析，等等）。不过，我们将作一些初步说明，以便为这一结果提供背景。

(23)更精确地说，f_V 是 f_τ 在一族 $O(1)$相邻帽上的和，但这种区别并不重要。

我们首先注意到，有一些初等方法可以将 f_V 与 f_τ进行比较。一个例子是三角不等式，它可以与柯西–施瓦茨不等式结合使用，从而得到

$$\|Uf_V\|_{L^q(Q)} \le \sum_{\tau\in\mathcal{T}_{K^{-1}}(V)} \|Uf_\tau\|_{L^q(Q)} \lesssim K^{(d-1)/2}\Big(\sum_{\tau\in\mathcal{T}_{K^{-1}}(V)} \|Uf_\tau\|^2_{L^q(Q)}\Big)^{1/2} \tag{82}$$

对所有 $1 \le q \le \infty$。然而，（当 K）很大时，$K^{(d-1)/2}$ 右侧的因子（82）比（81）右侧的相应因子大得多。三角不等式的不足之处在于，它没有考虑和中各项 Uf_τ在定义$Uf_V = \sum_{\tau\in\mathcal{T}_{K^{-1}}(V)} Uf_\tau$时的抵消。事实上，$Uf_\tau$以不同的频率振荡（也就是说，它们具有不相交的傅里叶支撑），因此自然可以预期会有显著的抵消。

对于 $q = 2$，我们可以利用普朗歇尔定理，借助互不相交的频率支撑，得出强得多的估计。

$$\|Uf_V\|_{L^2(Q)} \le \Big(\sum_{\tau\in\mathcal{T}_{K^{-1}}(V)} \|Uf_\tau\|^2_{L^2(w_Q)}\Big)^{1/2}.$$

随后可以将其与一个平凡的柯西–施瓦茨不等式估计[(24)] 进行插值，在 $q = \infty$处（利用$\#\mathcal{T}_{K^{-1}}(V) \lesssim K^{d-1}$这一事实）从而得到

$$\|Uf_V\|_{L^q(Q)} \lesssim K^{(d-1)(1/2-1/q)}\Big(\sum_{\tau\in\mathcal{T}_{K^{-1}}(V)} \|Uf_\tau\|^2_{L^q(w_Q)}\Big)^{1/2} \tag{83}$$

对 $2 \le q \le \infty$而言，尽管（83）通过考虑正交性改进了（82），但与（81）中的解耦估计仍相去甚远。要进一步改进（83），不仅要利用傅里叶支撑的基本不交性，还必须利用特定的抛物几何。因此，我们在§4和§5 中遇到的所有技巧，都与定理6.5的证明有关。

6.6. L^p 高维宽窄分解

我们希望应用定理6.5 中的解耦估计，来控制宽窄分解中出现的窄项。然而，引理6.4 中的逐点宽窄分解形式并不适用于此处。主要问题在于，对 $V \in \mathrm{Gr}(n, \mathbb{R}^{n+1})$ 取最大值是逐点进行的，因此极大化子空间 V_z 可能随点而变化。为了应用定理6.5，我们需要在整个单个 子空间 V 上固定一个 K^2立方体。

为了绕过这个问题，我们使用解算子 U 的局部常值性质，这由不确定性原理决定。特别地，由于 Uf(或 Uf_τ, 或Uf_V) 在单位尺度上频率局部化，$|Uf|$(或 $|Uf_\tau|$, 或 $|Uf_V|$) 应该在单位尺度上局部常值。因此，我们应该能够在任何给定的单位立方体上固定一个单一的极大化子空间 V。

(24)解耦不等式并非通常意义上线性算子的范数不等式，因此在涉及插值时必须格外谨慎。不过，通过恰当地解释这些估计，仍然可以借助经典的插值结果。

单位尺度立方体仍然太小，无法应用定理 6.5，该定理要求立方体的边长至少为 K^2。不过，我们可以调整上述论证，使其适用于 K^2空间尺度。其思路是，在 $|Uf|$ 上， K^2在 K^2立方体上仍然“局部常数到相差 [(25)] 因子”的程度。随后，我们像之前一样进行论证：对任意给定的 K^2立方体，固定一个极大化子空间 V，但由于在这一尺度下并非真正局部常数，还需纳入额外的 K^2 因子。不过，至关重要的是，必须妥善安排，使这些额外的 K^2 次幂只出现在宽项中。事实上，正如我们在命题 6.1的证明中所见，为了使分解有效，我们必须仔细控制窄项中的 K 次幂。

对这些想法进行严格推导，可得以下界。

引理 6.7（L^q 宽窄分解）。— 对于所有 $1 \le q \le \infty$ 和 $Q \in \mathcal{Q}_{K^2}$，有

(84)
$$\|Uf\|_{L^q(Q)} \lesssim \max_{V \in \mathrm{Gr}(n,\mathbb{R}^{n+1})} \|Uf_V\|_{L^q(Q)} + K^E \max_{(\tau_1,\dots,\tau_{n+1}) \in \mathcal{T}^{\mathrm{trans}}_{K^{-1}}} \Big\| \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_{\tau_j}|^{1/(n+1)} \Big\|_{L^{q,*}(Q)}.$$

这里， $E = E_n$ 是一个维数常数。

这里的 $L^{q,*}$ 表达式是通常 L^q 范数的一种“模糊”变体，其技术作用在很大程度上无关紧要。特别地，设 η_{K^2} 是一个连续的、 L^1-归一化函数，集中于 $[-K^2/2, K^2/2]^{n+1}$中，如引理 5.9的陈述所示。对于

$$\vec{\eta}_{K^2}(\vec{w}) := \eta_{K^2}(w_1) \cdots \eta_{K^2}(w_{n+1}), \qquad \vec{w} = (w_1, \dots, w_{n+1}) \in (\mathbb{R}^{n+1})^{n+1},$$

以及任意选取的可测集 $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$，我们定义

$$\Big\| \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_{\tau_j}|^{1/(n+1)} \Big\|_{L^{q,*}(S)} := \int_{(\mathbb{R}^{n+1})^{n+1}} \Big\| \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_{\tau_j}(\cdot - w_j)|^{1/(n+1)} \Big\|_{L^q(S)} \vec{\eta}_{K^2}(\vec{w})\, \mathrm{d}\vec{w}.$$

这类表达式的出现是由于在引理 4.1 和引理 5.9 中局部常值性质的严格表述里出现了光滑化函数。鉴于平移不变性，诸如 (55) 的多线性估计自动蕴含“模糊”变体，其中左边的 L^p 范数被替换为相应的 $L^{p,*}$ 范数。

在给出引理 6.7 的证明之前，我们先讨论一个直接推论。结合 L^q 宽窄分解与定理中的解耦不等式6.5，我们得到如下宽窄分解。

[(25)] 事实上，在启发式层面上，这只是单位尺度上局部常值性质的一个推论。为了严格实现这一原则，我们将应用引理 5.9 以 $M = K^2$.

PROPO命题 6.8. — 对于所有 $2 \le q \le q_n := 2 \cdot \frac{n+1}{n-1}$, $Q \in \mathcal{Q}_{K^2}$ 以及所有 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\|Uf\|_{L^q(Q)} \lesssim_\varepsilon K^\varepsilon \Big(\sum_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}} \|Uf_\tau\|^2_{L^q(w_Q)} \Big)^{1/2} + K^E \max_{(\tau_1,\dots,\tau_{n+1}) \in \mathcal{T}^{\mathrm{trans}}_{K^{-1}}} \Big\| \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_{\tau_j}|^{1/(n+1)} \Big\|_{L^{q,*}(Q)}. \tag{85}$$

Here $E = E_n$ is a dimensional constant.

注记 *6.9*。——通过考察下面的证明，可以取 $E := 4n^2$ 在引理6.7 和命题 6.8。

命题 6.8在定理 3.7的证明中发挥着核心作用。窄项现在具有与 $n = 1$情形（65）类似的形式，因此适合进行抛物缩放和归纳论证。命题 6.8的一个关键特征是指数 $2 \le q \le 2 \cdot \frac{n+1}{n-1}$ 的取值范围很大，在此范围内估计成立。人们可以尝试完全省略宽窄分解，直接将定理 6.5 应用于 $d = n+1$。这将得到界

$$\|Uf\|_{L^q(Q)} \lesssim_\varepsilon K^\varepsilon \Big(\sum_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}} \|Uf_\tau\|^2_{L^q(w_Q)} \Big)^{1/2} \qquad \text{for } 2 \le q \le 2 \cdot \tfrac{n+2}{n}.$$

然而，与§5.1中的观察类似，更受限的范围$2 \le q \le 2 \cdot \frac{n+2}{n}$ 不足以证明定理 3.7。

注记 *6.10*。——命题 6.8 基本上已出现在 Bourgain and Guth（2011年）中，适用于受限范围 $2 \le q \le 2 \cdot \frac{n}{n+1}$。更准确地说，Bourgain and Guth（2011年）的论证可用于证明：若解耦估计（81）对某个$q \ge 2$ （且 $d = n$）成立，则（85）对同一个 q也成立。由 Bourgain and Guth（2011年）的方法还可推出，解耦估计对 $2 \le q \le 2 \cdot \frac{n}{n+1}$ 成立（另见 Bourgain（2013年（a）），其中与解耦的联系更为明确）。解耦的完整范围 $2 \le q \le q_n$ 后来由 Bourgain and Demeter（2015年）给出。

证明（引理 *6.7*）。——给定一个立方体 $Q \in \mathcal{Q}_{K^2}$，我们定义 L^q 广义泛函

$$\|Uf\|_{\mathrm{BL}^q(Q)} := \min_{V \in \mathrm{Gr}(n,\mathbb{R}^{n+1})} \max_{\tau \notin \mathcal{T}_{K^{-1}}(V)} \|Uf_\tau\|_{L^q(Q)} \tag{86}$$

and let

$$\mathcal{T}_{K^{-1}}(V,Q) := \Big\{ \tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}(V) : \|Uf_\tau\|_{L^q(Q)} \ge \|Uf\|_{\mathrm{BL}^q(Q)} \Big\};$$

这些定义是自然的 L^q 类似物，对应于引理证明中出现的逐点定义6.4。

在（86）中所有达到最小值的空间中，选取 $V_Q \in \mathrm{Gr}(n,\mathbb{R}^{n+1})$，并使 $\#\mathcal{T}_{K^{-1}}(V,Q)$也达到最大值。定义 窄 和 宽 帽的集合（对 Uf关于 Q）如下：

$$\mathcal{N}_Q := \mathcal{T}_{K^{-1}}(V_Q) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{B}_Q := \mathcal{T}_{K^{-1}} \setminus \mathcal{T}_{K^{-1}}(V_Q).$$

仿照引理 6.4 的证明推理，可得

$$\begin{aligned}\|Uf\|_{L^q(Q)} &\le \Big\| \sum_{\tau\in\mathcal{N}_Q} Uf_\tau \Big\|_{L^q(Q)} + \sum_{\tau\in\mathcal{B}_Q} \|Uf_\tau\|_{L^q(Q)} \\ &\lesssim \max_{V\in \mathrm{Gr}(n,\mathbb{R}^{n+1})} \|Uf_V\|_{L^q(Q)} + K^n \|Uf\|_{\mathrm{BL}^q(Q)}. \end{aligned} \tag{87}$$

此外，

$$\|Uf\|_{\mathrm{BL}^q(Q)} \le \max_{(\tau_1,\dots,\tau_{n+1})\in \mathcal{T}^{\mathrm{trans}}_{K^{-1}}} \prod_{j=1}^{n+1} \|Uf_{\tau_j}\|^{1/(n+1)}_{L^q(Q)}. \tag{88}$$

将 (88) 右侧的“宽”项与 (84) 中对应的项进行比较，可以看到几何平均与 L^q 范数的次序互换了。事实上，只需利用 Hölder 不等式，就可以用 (84) 的右侧来界定 (88) 的右侧，但这个估计的方向恰好相反。因此，问题在于证明一个反向 Hölder 不等式，这可以借助局部常值性质来实现。

设 $\tilde\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ 满足 $|\tilde\chi(z)| \gtrsim 1$ 对所有 $|z| \le 2$ 均成立，且 $\operatorname{supp} \mathcal{F}\tilde\chi \subseteq B^{n+1}(0,1)$。固定帽 $\tau_j \in \mathcal{T}_{K^{-1}}$，其中 $1 \le j \le n+1$，并定义函数

$$F_j(z) := Uf_{\tau_j}(z)\cdot \tilde\chi(R^{-1}z), \quad \text{for } 1 \le j \le n+1.$$

由于每个立方体 $Q \in \mathcal{Q}_{K^2}$ 都满足 $Q \subseteq B^{n+1}(0, 2R)$，因此

$$\prod_{j=1}^{n+1} \|Uf_{\tau_j}\|^{1/(n+1)}_{L^q(Q)} \lesssim \prod_{j=1}^{n+1} \|F_j\|^{1/(n+1)}_{L^q(Q)} \le \Big[\prod_{j=1}^{n+1} |a_{j,Q}|^{1/(n+1)}\Big] |Q|^{1/q},$$

其中 $a_{j,\,Q}$ 表示 $|F_j(z)|$ 对所有 $z \in Q$。应用引理 5.9 于每个函数 F_j，其指数为 $s := 1/(n+1)$ 以及 $M := K^2$，我们可以推出

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n+1} \|Uf_{\tau_j}\|^{1/(n+1)}_{L^q(Q)} &\lesssim K^{2(n+1)} \Big\| \prod_{j=1}^{n+1} |F_j|^{1/(n+1)} * \eta_{K^2} \Big\|_{L^q(Q)} \\ &\lesssim K^{2(n+1)} \Big\| \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_{\tau_j}|^{1/(n+1)} \Big\|_{L^{q,*}(Q)}, \end{aligned} \tag{89}$$

其中第二步由 Minkowski 不等式得出。注意，额外的因子 $K^{2(n+1)}$ 是因为 F_j 仅局部化到尺度 1（而非尺度 K^{-2}），因此仅在单位尺度上具有局部常值性。结合（89）与（87）及（88），即可得到所需的界。

□

7. PROOF OF THE FRACTAL ENERGY ESTIMATE

7.1. Recap and a final reduction

现在，我们将前几节介绍的所有工具结合起来，证明分形能量估计。为方便起见，我们在此重述该结论。

定理 7.1 (Du 和 Zhang，2019年，参见定理3.7）。—对所有 $\varepsilon > 0$ 以及所有 $R \geq 1$, $1 \leq \alpha \leq n+1$，不等式

$$\|Uf\|_{L^2(Z_{\mathcal{Q}})} \lesssim_\varepsilon \Delta_\alpha(\mathcal{Q})^{1/(n+1)} R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{90}$$

只要 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 且 $\mathcal{Q}$是 $B^{n+1}(0,R)$ 中的一族格点单位立方体，就成立。

从 §3可知，定理 7.1 推出定理 L^2 3.1 中的锐利极大估计，3.1因此也推出定理 1.3中的薛定谔方程逐点收敛结果。

定理 7.1 的证明依赖于宽窄分解和按尺度归纳方法。在 Du 和Zhang（2019年）之前，这些技术已被 Bourgain（2013年）用于估计$H^s \to L^2$ 薛定谔极大函数在 $s > \frac{2n-1}{4n}$ 范围内的界，这比（本质上是尖锐的）条件 $s > \frac{n}{2(n+1)}$ 来自 Du 和 Zhang（2019年）的条件限制性更强。Du 和 Zhang（2019年）方法的主要优势之一是归纳命题的新颖形式，它允许在不同尺度之间转换大量信息。

与其试图直接证明 (90)，我们使用一个辅助的 $L^2 \to L^{q_n}$估计，其中 $q_n := 2 \cdot \frac{n+1}{n-1}$。这是命题 6.8 中宽窄分解所涉及的指数（这源于应用定理6.5的低维解耦不等式）。

命题 7.2. — 令 $q_n := 2 \cdot \frac{n+1}{n-1}$。对于所有—$0 < \varepsilon < 1$ 和 $R \geq 1$，定义$\delta := \varepsilon/100n^2$ 和 $K := R^\delta$，以下结论成立。假设 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 且 $\mathcal{Q}$ 是包含于 $B^{n+1}(0,R)$ 中的格点 K^2-立方体族，满足[26]

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Q)} \quad \textit{are dyadically constant over } Q \in \mathcal{Q}. \tag{91}$$

Then for all $1 \leq \alpha \leq n+1$, *we have*

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}})} \lesssim_\varepsilon \left[\frac{\Delta_\alpha(\mathcal{Q})}{\#\mathcal{Q}}\right]^{1/(n+1)} R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{92}$$

不难证明，命题7.2蕴含定理7.1。这依赖于一个抽屉原理论证，用于转到二进常数设定；我们在下面的引理 7.3 中将其单独列出。在给出这一约化的细节之前，我们先说明命题 7.2 的表述为何有用。我们分析中的两个主要要素是定理 5.5中的多线性 Strichartz估计，以及命题 6.8中宽窄分解所使用的解耦不等式。前者的临界指数为 $p_n := 2 \cdot \frac{n+1}{n}$，而后者的临界指数为 q_n。粗略地说，命题 7.2中的设定使我们能够在各自的临界指数处应用这两个估计。命题本身针对指数 q_n，而二进常值假设（91）则允许我们利用反向 Hölder 型论证（见下文 §7.4 ）高效地转到指数 p_n。因此，抽屉原理分组可以被看作

[26] For the definition of dyadically constant, see §4.6.

大致可视为实插值的一种弱形式，使我们能够调和两个在不同勒贝格指数下截然不同的估计。

引理 7.3。—— 令 $2 \le q \le \infty$ 和 $1 \le M \le R$。假设 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，且 $\mathcal{Q}_M$ 是包含于 $B^{n+1}(0,\ R)$中的格点 M-立方体的集合。那么存在一个子集合 $\mathcal{Q}'_M \subseteq \mathcal{Q}_M$，使得

$$\|Uf\|_{L^q(Q)} \quad \text{are dyadically constant over } Q \in \mathcal{Q}'_M. \tag{93}$$

and

$$\|Uf\|_{L^2(Z_{\mathcal{Q}_M})} \lesssim (\log R)^{1/2} \|Uf\|_{L^2(Z_{\mathcal{Q}'_M})} + R^{-100n} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{94}$$

Proof. — Begin by bounding

$$\|Uf\|_{L^2(Z_{\mathcal{Q}_M})} \le \Big(\sum_{Q \in \mathcal{Q}_{M,0}} \|Uf\|^2_{L^2(Q)} \Big)^{1/2} + \Big(\sum_{Q \in \mathcal{Q}_{M,1}} \|Uf\|^2_{L^2(Q)} \Big)^{1/2} \tag{95}$$

where $\mathcal{Q}_{M,0}$ and $\mathcal{Q}_{M,1}$ are defined by

$$\mathcal{Q}_{M,0} := \Big\{ Q \in \mathcal{Q}_M : \|Uf\|_{L^q(Q)} < R^{-200n} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \Big\}, \quad \mathcal{Q}_{M,1} := \mathcal{Q}_M \setminus \mathcal{Q}_{M,0}.$$

对（95）中源自立方体 $Q \in \mathcal{Q}_{M,\ 0}$ 的净贡献可以忽略，并且可以由（94）右侧的第二项界定。

By the definition of $\mathcal{Q}_{M,0}$ and elementary estimates,

$$R^{-200n} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|Uf\|_{L^q(Q)} \lesssim R^{(n+1)/q} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{for all } Q \in \mathcal{Q}_{M,1}.$$

因此，我们可以应用二进分割鸽巢原理，采用引理 4.21 ii）中的形式来找到$\mathcal{Q}'_M \subseteq \mathcal{Q}_M$ 满足（93）并且使得

$$\Big(\sum_{Q \in \mathcal{Q}_{M,1}} \|Uf\|^2_{L^2(Q)} \Big)^{1/2} \lesssim (\log R)^{1/2} \Big(\sum_{Q \in \mathcal{Q}'_M} \|Uf\|^2_{L^2(Q)} \Big)^{1/2},$$

which combines with (95) and our earlier observation to give the desired bound. □

证明（命题 *7.2* ⇒ 定理 *7.1*）。— 设$\mathcal{Q}$ 是$B^{n+1}(0, R)$ 中的格点单位立方体族，且 $\mathcal{Q}_{K^2}$ 是与 K^2相交的格点 $Z_{\mathcal{Q}}$立方体的集合。这里 $K := R^{\delta}$与命题 7.2 的陈述中相同。

由引理 7.3，存在一个子集合 $\mathcal{Q}'_{K^2} \subseteq \mathcal{Q}_{K^2}$ 使得

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Q)} \quad \text{are dyadically constant over } Q \in \mathcal{Q}'_{K^2}.$$

and

$$\|Uf\|_{L^2(Z_{\mathcal{Q}})} \le \|Uf\|_{L^2(Z_{\mathcal{Q}_{K^2}})} \lesssim (\log R)^{1/2} \|Uf\|_{L^2(Z_{\mathcal{Q}'_{K^2}})} + R^{-100n} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{96}$$

因此，我们可以将命题 7.2 应用于族 $\mathcal{Q}'_{K^2}$，从而得出

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}'_{K^2}})} \lesssim_{\varepsilon} \left[\frac{\Delta_\alpha(\mathcal{Q}'_{K^2})}{\#\mathcal{Q}'_{K^2}} \right]^{1/(n+1)} R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{97}$$

现在，我们应用 Hölder 不等式，并结合（96）和（97）得出 t

$$\|Uf\|_{L^2(Z_{\mathcal{Q}})} \lesssim (\log R)^{1/2}|Z_{\mathcal{Q}'_{K^2}}|^{1/(n+1)}\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}'_{K^2}})} + R^{-100n}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$\lesssim_\varepsilon R^{2\delta}(\log R)^{1/2}\Delta_\alpha(\mathcal{Q}'_{K^2})^{1/(n+1)}R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

其中我们使用了初等界

$$|Z_{\mathcal{Q}'_{K^2}}| \le K^{2(n+1)}[\#\mathcal{Q}'_{K^2}] = R^{2(n+1)\delta}[\#\mathcal{Q}'_{K^2}]$$

注意因子 $R^{2\delta}(\log R)^{1/2}$ 可以被 $R^{\varepsilon/2}$界定。

最后，由于每个 $Q_{K^2} \in \mathcal{Q}_{K^2}$ 具有性质：2· Q_{K^2} 至少包含来自$\mathcal{Q}$的一个立方体，因此容易得出 $\Delta_\alpha(\mathcal{Q}'_{K^2}) \lesssim \Delta_\alpha(\mathcal{Q})$。因此，

$$\|Uf\|_{L^2(Z_{\mathcal{Q}})} \lesssim_\varepsilon \Delta_\alpha(\mathcal{Q})^{1/(n+1)}R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

这正是所需的界。 □

7.2. 尺度归纳

命题的证明 7.2通过对尺度参数进行归纳 R。这里我们介绍基础的归纳方案。

固定 $\varepsilon > 0$， $1 \le \alpha \le n+1$并设 $\delta := \varepsilon/100n^2$。我们称一个参数是容许的，如果它只依赖于维数 n 和 ε。回顾（16）中的基本能量估计

$$\|Uf\|_{L^2(Z_{\mathcal{Q}})} \lesssim \Delta_\alpha(\mathcal{Q})^{1/(n+1)}R^{1/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

总是成立。因此，命题 7.2 在小尺度下是平凡的。特别地，令 $R_0 \ge 1$表示一个固定尺度，它仅取决于可容许参数 n 和 ε。对于 $\mathbf{C}_\varepsilon \ge 1$ 一个合适选取的可容许常数，

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}})} \le \mathbf{C}_\varepsilon\left[\frac{\Delta_\alpha(\mathcal{Q})}{\#\mathcal{Q}}\right]^{1/(n+1)}R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{98}$$

在命题7.2 的假设下成立，当 $1 \le R \le R_0$时成立。这为我们的归纳提供了基例。

今后我们假设 R_0 和$\mathbf{C}_\varepsilon$ 是固定的可容许常数，其选取使得上述基例成立，并且足够大以满足证明的后续要求。令 $R \ge R_0$ 并定义 $K := R^\delta$。我们将在以下归纳假设下进行工作。

归纳假设. — 令 $1 \le \tilde{R} \le R/2$，并定义 $\tilde{K} := \tilde{R}^\delta$。不等式

$$\|Ug\|_{L^{q_n}(Z_{\tilde{\mathcal{Q}}})} \le \mathbf{C}_\varepsilon\left[\frac{\Delta_\alpha(\tilde{\mathcal{Q}})}{\#\tilde{\mathcal{Q}}}\right]^{1/(n+1)}\tilde{R}^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

当 $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 且 $\tilde{\mathcal{Q}}$ 是一个非空的格点 $\tilde{K}^2$-立方体族，且包含于 $B^{n+1}(0,R)$ 时，

$$\|Ug\|_{L^{q_n}(\tilde{Q})} \quad \textit{are dyadically constant over } \tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{Q}}.$$

现在固定 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 并对 $R \geq R_0$ 如上所述，令 $\mathcal{Q}$ 为一个由 K^2-立方体组成的族，满足命题 7.2的假设。目标是证明（98）。不失ˆ一般性，我们可以假设 支集 $f \subseteq B^n(0, 1/2)$。

注记 *7.4*。——证明的总体结构与先前用于证明一维 Strichartz 估计（命题 6.1）的尺度归纳论证相似。不过，两者之间也有一些显著差异：

– 命题 K 的陈述中引入的中间尺度 K 在此处的作用与命题 6.1证明中的 $K = R^\delta$ 参数相同。不过，此处 R 取决于不容许参数，而命题6.1的证明中，参数 K 的选取则独立于 R。对 K 作这样的选取，使我们能够补偿由解耦不等式（定理 6.5）中的 K^ε 因子所导致的窄项的小损失。– 为了完成归纳，论证后续部分必须确保 K 足够大。与命题 6.1的证明中固定 K的具体取值不同，此处我们通过引入参数 $K = R^\delta$ ，为 R_0设定一个下界。

7.3. Broad / narrow dichotomy

下一步是应用第 §6.6节中所述的宽窄分解。这将使我们能够运用强大的多线性 Strichartz 估计。

根据命题 6.8，存在可容许常数 $C_\varepsilon^{\mathrm{bn}}$， $E \geq 1$ 使得

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Q)} \leq C_\varepsilon^{\mathrm{bn}} K^\varepsilon \Big(\sum_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}} \|Uf_\tau\|^2_{L^{q_n}(w_Q)} \Big)^{1/2} + C_\varepsilon^{\mathrm{bn}} K^E \max_{\tau \in \mathcal{T}^{\mathrm{trans}}_{K^{-1}}} \Big\| \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_{\tau_j}|^{1/(n+1)} \Big\|_{L^{q_n,*}(Q)}. \tag{99}$$

对所有情况都成立 $Q \in \mathcal{Q}$。这里的最大值取遍所有横向 $(n+1)$-元组$\tau = (\tau_1, \ldots\ldots, \tau_{n+1}) \in \mathcal{T}_{\text{横向}K^{-1}}$。根据注 6.9 我们可以（并且将会）取 $E := 4n^2$。

We say a cube $Q \in \mathcal{Q}$ is *narrow* if

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Q)} \leq 2C_\varepsilon^{\mathrm{bn}} K^\varepsilon \Big(\sum_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}} \|Uf_\tau\|^2_{L^{q_n}(w_Q)} \Big)^{1/2};$$

otherwise, we say Q is *broad*. As a consequence of (99), the inequality

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Q)} \leq 2C_\varepsilon^{\mathrm{bn}} K^E \max_{\tau \in \mathcal{T}^{\mathrm{trans}}_{K^{-1}}} \Big\| \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_{\tau_j}|^{1/(n+1)} \Big\|_{L^{q_n,*}(Q)} \tag{100}$$

只要 $Q \in \mathcal{Q}$ 为宽。

我们分别用$\mathcal{Q}_{\mathrm{broad}}$ 和$\mathcal{Q}_{\mathrm{narrow}}$ 表示宽立方体和窄立方体的集合。证明将分为两个子情况，具体取决于大多数立方体是宽立方体还是窄立方体。

7.4. 广主导情形

Suppose the majority of the cubes $Q \in \mathcal{Q}$ are broad: that is,

$$\#\mathcal{Q}_{\text{broad}} \geq \#\mathcal{Q}/2. \tag{101}$$

我们将其称为广主导情形。在此，我们直接应用定理 5.5 中的多线性 Strichartz 估计来界定我们的算子。这并不令人意外，因为我们已经在推论 5.6 中看到，定理 5.5 蕴含了多线性分形能量估计。由于所需估计（92）的形式，我们不直接应用推论 5.6，但其背后的思想仍然相同。

设 $\lambda \geq 1$ 和 $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}_{\text{broad}}$ 是满足 $\#\mathcal{Q}' \geq \lambda^{-1}\#\mathcal{Q}$ 的任意一组宽立方体。于是，根据二进常值假设（91），我们可以界定

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}})} \lesssim \lambda^{1/q_n}\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}'})} \leq \lambda\Big(\sum_{Q\in\mathcal{Q}'}\|Uf\|^{q_n}_{L^{q_n}(Q)}\Big)^{1/q_n}.$$

将其与（100）结合可知，存在一个将横向（$n+1$）元组的帽 $\tau_Q = (\tau_{Q,\,1},\ \ldots\ldots,\ \tau_{Q,\,n+1}) \in \mathcal{T}_{\text{trans}K^{-1}}$ 分配给每个 $Q \in \mathcal{Q}'$ 的方案，使得

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}})} \lesssim \lambda K^E\Big(\sum_{Q\in\mathcal{Q}'}\Big\|\prod_{j=1}^{n+1}|Uf_{\tau_{Q,j}}|^{1/(n+1)}\Big\|^{q_n}_{L^{q_n,*}(Q)}\Big)^{1/q_n}.$$

令 $p_n := \frac{2n+2}{n}$ 表示多线性 Strichartz 估计中的临界指数（定理 5.5）。根据推论 5.10中的局部多线性伯恩斯坦不等式，我们推得[27]

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}})} \lesssim \lambda K^E\Big(\sum_{Q\in\mathcal{Q}'}\Big\|\prod_{j=1}^{n+1}|Uf_{\tau_{Q,j}}|^{1/(n+1)}\Big\|^{q_n}_{L^{p_n,*}(w_Q)}\Big)^{1/q_n}. \tag{102}$$

估计 ℓ^{q_n} （102）右侧的和102）的嵌套关系 ℓ^p范数，以推导出

$$\Big(\sum_{Q\in\mathcal{Q}'}\Big\|\prod_{j=1}^{n+1}|Uf_{\tau_{Q,j}}|^{1/(n+1)}\Big\|^{q_n}_{L^{p_n,*}(w_Q)}\Big)^{1/q_n} \lesssim K^E \max_{\tau\in\mathcal{T}^{\text{trans}}_{K^{-1}}}\Big\|\prod_{j=1}^{n+1}|Uf_{\tau_j}|^{1/(n+1)}\Big\|_{L^{p_n,*}(w_{B_R})}. \tag{103}$$

这里我们交换了 ℓ^{p_n}-范数和 τ 中的最大值，代价是引入一个额外的因子 K^E。现在可以使用定理5.5来对这个多线性表达式给出界。然而，所得的估计不足以满足我们的目的，因此我们将利用选择 $\mathcal{Q}'$ 的灵活性来改进（103）。具体而言，我们通过分组论证来选择 $\mathcal{Q}'$ ，论证思路类似于引理4.22中的反向 Hölder 不等式。

抽屉原理分组将在接下来的论证中反复出现；为方便起见，我们引入渐近记号，以省略由此产生的对数因子。

[27]加权 $L^{p_n,*}$-范数以显然的方式定义；我们省略细节。

记号。——令 A、 B 为非负实数。若对所有 $\eta > 0$，存在常数 $C_{\varepsilon,\,\eta} \geq 1$，仅依赖于 η 和可容许参数 n 与 ε，使得 $A \leq C_{\varepsilon,\,\eta} R^{\eta} B$，则记作 $A \lessapprox B$ 或 $B \gtrapprox A$。

令$\mathcal{Q}_{\text{tiny}}$ 表示所有满足以下条件的立方体 $Q \in \mathcal{Q}_{\text{broad}}$ 的集合:

$$\Big\| \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_{\tau_{Q,j}}|^{1/(n+1)} \Big\|_{L^{p_n,*}(w_Q)} \leq R^{-100n} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

若 $\#\mathcal{Q}_{\text{tiny}} \geq \#\mathcal{Q}_{\text{broad}}/2$，则可将式（102）应用于 $\mathcal{Q}' := \mathcal{Q}_{\text{tiny}}$，从而得到一个非常有利的估计。因此，我们假设 $\#\mathcal{Q}_{\text{tiny}} < \#\mathcal{Q}_{\text{broad}}/2$。

注意,

$$R^{-100n} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \Big\| \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_{\tau_{Q,j}}|^{1/(n+1)} \Big\|_{L^{p_n,*}(w_Q)} \lesssim R \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

对所有 $Q \in \mathcal{Q}_{\text{broad}} \setminus \mathcal{Q}_{\text{tiny}}$ 均成立，其中上界是柯西–施瓦茨不等式和普朗歇尔定理的直接推论。因此，通过二进分割鸽巢原理，存在某个满足 $\#\mathcal{Q}' \gtrsim \#\mathcal{Q}$ 的$\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}_{\text{broad}}$，使得

$$\Big\| \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_{\tau_{Q,j}}|^{1/(n+1)} \Big\|_{L^{p_n,*}(w_Q)} \quad \text{are dyadically constant over } Q \in \mathcal{Q}'.$$

对于这个集合$\mathcal{Q}'$,，我们可以将式（103）加强为反向 Hölder 不等式

$$\Big(\sum_{Q \in \mathcal{Q}'} \Big\| \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_{\tau_{Q,j}}|^{1/(n+1)} \Big\|_{L^{p_n,*}(w_Q)}^{q_n} \Big)^{1/q_n}$$

$$\lessapprox K^E [\#\mathcal{Q}]^{-1/(2(n+1))} \max_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}^{\text{trans}}} \Big\| \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_{\tau_j}|^{1/(n+1)} \Big\|_{L^{p_n,*}(w_{B_R})}. \tag{104}$$

结合（102）（取$\mathcal{Q}'$ 如上）和（104），我们推得

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}})} \lessapprox K^{2E} [\#\mathcal{Q}]^{-1/(2(n+1))} \max_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}^{\text{trans}}} \Big\| \prod_{j=1}^{n+1} |Uf_{\tau_j}|^{1/(n+1)} \Big\|_{L^{p_n,*}(w_{B_R})}.$$

现在应用多线性 Strichartz 估计，[(28)]

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}})} \lessapprox K^{3E} [\#\mathcal{Q}]^{-1/(n+1)} [\#\mathcal{Q}]^{1/(2(n+1))} R^{\varepsilon/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

回想一下，$\#\mathcal{Q} \leq \Delta_\alpha(\mathcal{Q}) R^\alpha$，因此

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}})} \lessapprox K^{3E} [\#\mathcal{Q}]^{-1/(n+1)} \Delta_\alpha(\mathcal{Q})^{1/(2(n+1))} R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

F最后，由于 $\Delta_\alpha(\mathcal{Q}) \gtrsim K^{-2\alpha}$ 且 $K = R^\delta$ 其中 $\delta \leq \varepsilon/8E$，我们得出

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}})} \lesssim_\varepsilon \left[\frac{\Delta_\alpha(\mathcal{Q})}{\#\mathcal{Q}} \right]^{1/(n+1)} R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{105}$$

(28)这里我们估计的是加权范数 $L^{p_n}(w_{B_R})$，而非 $L^{p_n}(B_R)$-范数（如定理5.5中采用锐截断的情形）。不过，定理5.5 利用估计的平移不变性和权重的快速衰减，可自动推广到加权情形。

这在广主导情形中提供了有利的估计。

7.5. Narrow-dominant case: introduction

Now suppose (101) fails, so that

$$\#\mathcal{Q}_{\text{narrow}} \geq \#\mathcal{Q}/2$$

我们将此称为窄主导情形。这里我们结合抛物缩放和归纳假设来估计我们的算子。

窄主导情形的分析是 Du 和 Zhang（2019年）的一项重大创新。事实上，正如前文所述，Bourgain（2013年）将宽/窄二分法引入了对薛定谔极大算子的研究。Bourgain（2013年）和 Du 和 Zhang（2019年）的论证有许多相似之处（使用尺度归纳、[29] 宽/窄二分法、解耦型估计、多线性 Strichartz）；然而，Du 和 Zhang（92）的关键估计（2019年）的新颖形式使得信息能够在不同尺度之间高效传递，从而在窄主导情形下导出更加紧的界。

我们将详细讨论窄主导情形，并试图对该论证发展出既启发式又技术上详细的理解。特别地，以下各小节的结构如下：

– 在 §7.6 我们描述窄主导情形分析的初始步骤，为主要论证设定场景。–在 §7.7 我们提供主要论证的非技术性概述。对于此概述，我们做了一些简化假设。–在 §7.8 我们提供主要论证的严格描述。这里的目标主要是去除上一小节中使用的简化假设。

7.6. 窄主导情形：初始步骤

论证的前几步与一维 Strichartz 估计（命题 6.1）的归纳证明相类似。对于 $\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}$ 回顾，由于 f_τ 具有到立方体 τ 的频率局部化，波 Uf_τ 表现为伪局部。特别地，我们可以写成

$$f_\tau = \sum_{S \in \mathbf{S}_\tau[R]} f_S$$

as in (49) where, by Lemma 4.16, the pointwise inequality

$$|Uf_\tau(z)| \lesssim \sum_{S \in \mathbf{S}_\tau[R]} |Uf_S(z)|\chi_{\bar{S}}(z) + R^{-10n}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

holds for all $z \in B^{n+1}(0, R)$.

[29] Bourgain（2013年）的论证被呈现为一个递归过程，而不是归纳，但这与归纳本质上是同一回事。

Fix a narrow cube $Q \in \mathcal{Q}_{\mathrm{narrow}}$. Since the sets $\bar{S}$ have bounded overlap,

$$\|Uf_\tau\|_{L^{q_n}(w_Q)} \lesssim \Big(\sum_{S \in \mathbf{S}_\tau[R]} \|Uf_S\|^{q_n}_{L^{q_n}(w_Q)} \Big)^{1/q_n} + R^{-5n}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{106}$$

令 $\mathbf{S}$ 表示集合 $\mathbf{S}_\tau[R]$ 遍历所有 $\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}$所得集合的不交并。由（106）、$\mathcal{Q}_{\mathrm{narrow}}$ 的定义以及 ℓ^p 空间的嵌套关系可得，

$$\begin{aligned} \|Uf\|_{L^{q_n}(Q)} &\lesssim_\varepsilon K^\varepsilon \Big(\sum_{\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}} \|Uf_\tau\|^2_{L^{q_n}(w_Q)} \Big)^{1/2} \\ &\lesssim_\varepsilon K^\varepsilon \Big(\sum_{S \in \mathbf{S}} \|Uf_S\|^2_{L^{q_n}(w_Q)} \Big)^{1/2} + R^{-5n}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{107}$$

这种情况与命题 6.1 证明中对窄情形的分析非常相似。不过，关键区别在于，现在我们必须追踪各个立方体 $Q \in \mathcal{Q}$ 上的局部化。

7.7. 窄情形分析：非技术性概述

现在我们以非技术性的方式概述证明的其余部分。任何尚未解决的技术细节都将在下一小节中讨论。

由于权重 w_Q 远离 Q 时会迅速衰减，因此只有条带 S 会对（107）中的求和有显著贡献，这些条带属于

$$\mathbf{S}(Q) := \{S \in \mathbf{S} : S \cap Q \neq \emptyset\}.$$

Thus, we essentially have[(30)]

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Q)} \lesssim_\varepsilon K^\varepsilon \Big(\sum_{S \in \mathbf{S}(Q)} \|Uf_S\|^2_{L^{q_n}(Q)} \Big)^{1/2}.$$

我们注意到，对于任意固定的 $\tau \in \mathcal{T}_{K^{-1}}$，集合$\mathbf{S}(Q)$中位于$\mathbf{S}_\tau[R]$内的条带只有 $O(1)$ 个。因此，我们可以将$\mathbf{S}(Q)$视为一组经过 Q 且沿着方向之间相隔 K^{-1} 的条带。

我们希望对所有 $Q \in \mathcal{Q}$ 的贡献求和。为有效地做到这一点，我们应用 Hölder 不等式，将 ℓ^2 表达式转换为一个 ℓ^q 表达式：

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Q)} \lesssim_\varepsilon K^\varepsilon [\#\mathbf{S}(Q)]^{1/(n+1)} \Big(\sum_{S \in \mathbf{S}} \|Uf_S\|^{q_n}_{L^{q_n}(Q)} \Big)^{1/q_n}.$$

现在我们可以对所有 $Q \in \mathcal{Q}_{\mathrm{narrow}}$ 求 ℓ^q 和，从而得出

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}})} \lesssim_\varepsilon K^\varepsilon [\max_{Q \in \mathcal{Q}} \#\mathbf{S}(Q)]^{1/(n+1)} \Big(\sum_{S \in \mathbf{S}} \|Uf_S\|^{q_n}_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}})} \Big)^{1/q_n}. \tag{108}$$

(30)为便于讨论，我们将忽略估计中的快速衰减误差项，并假设使用锐截断，而非带权范数。我们将在下一小节讨论这些技术细节。

抛物缩放与归纳假设。——在此阶段，我们希望应用抛物缩放和归纳假设，为每一项 $\|Uf_S\|_{L^q(Z_{\mathcal{Q}})}$给出界。这与命题6.1的归纳证明完全相同。不过，当前设置中的一个主要难点是，我们的归纳假设涉及某个底层的 $\tilde{K}^2$-立方体族 $\tilde{\mathcal{Q}}$。因此，我们必须做好准备，以便缩放后能得到一个合适的 $\tilde{K}^2$-立方体族。

Fix $S \in \mathbf{S}$, so that

$$S = \Big\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x(S) - tv(S)| \le R/K \text{ and } |t| \le R\Big\}$$

对于初始位置的某种选择 $x(S) \in B^n(0,R)$ 和速度 $v(S) \in B^n(0,1)$。如 §4.5 中所述，令 $\mathcal{A}_S\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ 表示仿射变换

$$\mathcal{A}_S\colon (x,t) \mapsto \Big(K^{-1}(x - x(S) - tv(S)), K^{-2}t\Big)$$

which maps bijectively between S and $B^{n+1}(0, R/K^2)$. Define

$$\tilde{R} := 20R/K^2 \quad \text{and} \quad \tilde{K} := \tilde{R}^{\delta}. \tag{109}$$

令$\mathcal{P}(S)$ 表示用与 S 平行对齐且维数为 $K\tilde{K}^2 \times \cdots \times K\tilde{K}^2 \times K^2\tilde{K}^2$ 的平行六面体对条带 S 进行的覆盖。特别地，$\mathcal{P}(S)$ 由以下集合组成

$$P := \Big\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x(P) - tv(S)|_\infty \le K\tilde{K}^2/2 \text{ and } |t - t(P)| \le K^2\tilde{K}^2/2\Big\}, \tag{110}$$

其中，中心 $z(P) = (x(P)\ t(P))$ 遍历格点 $K\tilde{K}^2\mathbb{Z}^n \times K^2\tilde{K}^2\mathbb{Z}$。这些集合的维数经过选择，使得变换$\mathcal{A}_S$ 将每个平行六面体 $P \in \mathcal{P}(S)$ 映射到一个格点 $\tilde{K}^2$-立方体

$$\mathcal{A}_S(P) = \{(\tilde{x},\tilde{t}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |\tilde{x} - K^{-1}(x(S) - x(P))|_\infty \le \tilde{K}^2/2 \text{ and } |\tilde{t} - K^{-2}t(P)| \le \tilde{K}^2/2\Big\};$$

see Figure 6.

由于我们是在集合 $Z_{\mathcal{Q}}$ 上构造 L^q-范数，因此只需考虑所有与某个立方体 $Q \in \mathcal{Q}$ 相交的平行六面体 $P \in \mathcal{P}(S)$ 所构成的子集 $\mathcal{P}(S;\mathcal{Q})$。根据前面的讨论，

$$\tilde{\mathcal{Q}}(S) := \Big\{\mathcal{A}_S(P) : P \in \mathcal{P}(S;\mathcal{Q})\Big\} \tag{111}$$

是 $B^{n+1}(0,\ \tilde{R})$ 中的一组格点 $\tilde{K}^2$-立方体。

Since the set $S \cap Z_{\mathcal{Q}}$ is contained in

$$Z_{\mathcal{P}(S;\mathcal{Q})} := \bigcup_{P \in \mathcal{P}(S;\mathcal{Q})} P,$$

and by Lemma 4.16, the function Uf_S is essentially supported on S, we may estimate

$$\|Uf_S\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}})} \lesssim \|Uf_S\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{P}(S;\mathcal{Q})})}. \tag{112}$$

which combines with (108) to give

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}})} \lesssim_\varepsilon K^{\varepsilon}[\max_{Q \in \mathcal{Q}} \#\mathbf{S}(Q)]^{1/(n+1)} \Big(\sum_{S \in \mathbf{S}} \|Uf_S\|^{q_n}_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{P}(S;\mathcal{Q})})}\Big)^{1/q_n}. \tag{113}$$

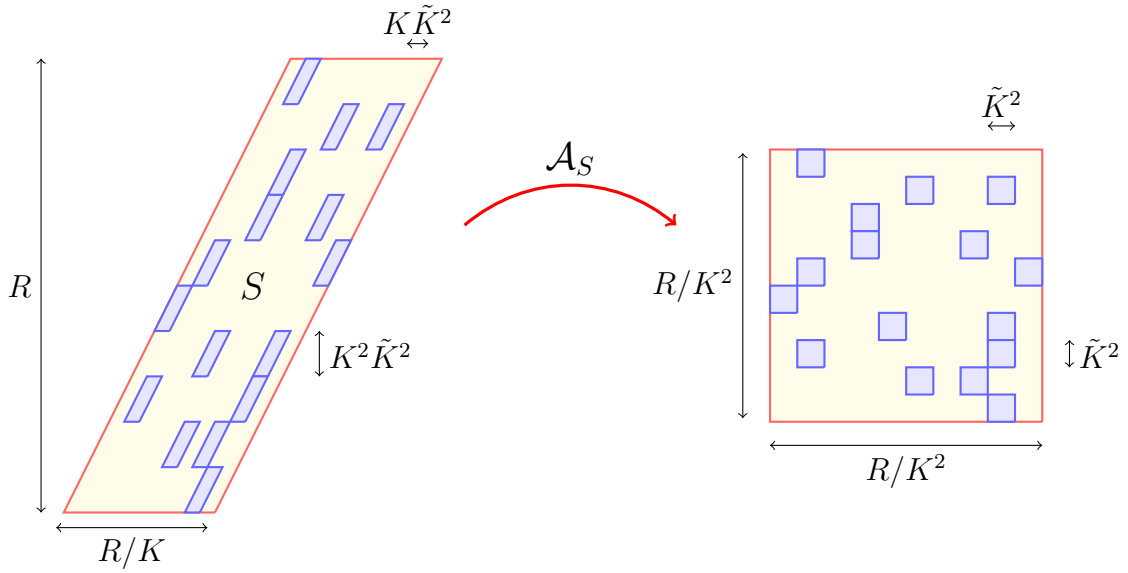


图6. 映射 $\mathcal{A}_S$ 将 S 映射到 $B^{n+1}(0, R/K^2)$ 并将每个平行六面体P 映射到一个格点 $\tilde{K}^2$-立方体。注意左右两侧以不同比例绘制（右侧的球实际上比条带小得多）。

In order to apply the induction hypothesis later in the argument, it is useful to make the following assumption.

Simplifying Assumption P1. For each $S \in \mathbf{S}$, we assume that

$$\|Uf_S\|_{L^{q_n}(P)} \quad \text{are dyadically constant over } P \in \mathcal{P}(S;\mathcal{Q}). \tag{114}$$

为了进行这一非技术性讨论，我们将作出若干此类简化假设。稍后，在 §7.7中，我们将运用抽屉原理分组，严格论证这些假设的合理性。

现在我们利用引理重新标度（112）右侧的范数，使用引理 4.18。特别地，

$$\|Uf_S\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{P}(S;\mathcal{Q})})} \le K^{(n+2)/q_n - n/2}\|U\tilde{f}_S\|_{L^{q_n}(Z_{\tilde{\mathcal{Q}}(S)})} = K^{-1/(n+1)}\|U\tilde{f}_S\|_{L^{q_n}(Z_{\tilde{\mathcal{Q}}(S)})}$$

for some function $\tilde{f}_S \in L^2(\mathbb{R}^n)$ satisfying

$$\|\tilde{f}_S\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f_S\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \text{and} \quad \operatorname{supp}\mathcal{F}(\tilde{f}_S) \subseteq B^n(0,1).$$

每个局部化范数$\|U\tilde{f}_S\|_{L^{q_n}(P)}$都会缩放为某个 $K^{-1/(n+1)}\|U\tilde{f}_S\|_{L^{q_n}(\tilde{Q})}$。因此，

$$\|U\tilde{f}_S\|_{L^{q_n}(\tilde{Q})} \quad \text{are dyadically constant over } \tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{Q}}(S),$$

as a consequence of (114). Therefore, we may apply the induction hypothesis to conclude that

$$\|Uf_S\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{P}(S;\mathcal{Q})})} \lesssim \mathbf{C}_\varepsilon K^{-1/(n+1)}\Big[\frac{\Delta_\alpha(\tilde{\mathcal{Q}}(S))}{\#\tilde{\mathcal{Q}}(S)}\Big]^{1/(n+1)}\tilde{R}^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Since $\tilde{R} = 20R/K^2$, this becomes

$$\|Uf_S\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{P}(S;\mathcal{Q})})} \lesssim \mathbf{C}_\varepsilon K^{-2\varepsilon}\Big[K^{-1-\alpha}\frac{\Delta_\alpha(\tilde{\mathcal{Q}}(S))}{\#\tilde{\mathcal{Q}}(S)}\Big]^{1/(n+1)} R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{115}$$

由归纳假设的应用所产生的 $K^{-2\varepsilon}$ 衰减因子，对于完成论证至关重要。

对估计求和。——下一步是对所有条带 $S \in \mathbf{S}$ 的选取，将局部化估计（115）求和。将估计（113）中的（115）代入，我们推得（116）

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}})} \lesssim \mathbf{C}_\varepsilon K^{-\varepsilon} M_K(\mathcal{Q})^{1/(n+1)} R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon}[\#\mathbf{S}]^{1/(n+1)}\Big(\sum_{S\in\mathbf{S}}\|f_S\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{q_n}\Big)^{1/q_n}$$

其中

$$M_K(\mathcal{Q}) := K^{-1-\alpha}\Big[\max_{Q\in\mathcal{Q}}\frac{\#\mathbf{S}(Q)}{\#\mathbf{S}}\Big]\Big[\max_{S\in\mathbf{S}}\frac{\Delta_\alpha(\tilde{\mathcal{Q}}(S))}{\#\tilde{\mathcal{Q}}(S)}\Big].$$

估计右侧的 ℓ^q 和（116）的一种方法，是直接利用 ℓ^q-范数的嵌套性质以及波包之间的正交性：

$$\Big(\sum_{S\in\mathbf{S}}\|f_S\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{q_n}\Big)^{1/q_n} \le \Big(\sum_{S\in\mathbf{S}}\|f_S\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{2}\Big)^{1/2} \lesssim \|f_S\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}. \tag{117}$$

不过，我们将采用一个更精细的界，改进上述结果。其思路是使用反向 Hölder 不等式，类似于 §7.4 中所用的方法。理想情况下，

$$\Big(\sum_{S\in\mathbf{S}}\|f_S\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{q_n}\Big)^{1/q_n} \lesssim [\#\mathbf{S}]^{-1/(n+1)}\Big(\sum_{S\in\mathbf{S}}\|f_S\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{2}\Big)^{1/2} \lesssim [\#\mathbf{S}]^{-1/(n+1)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{118}$$

这额外获得一个因子 $[\#\mathbf{S}]^{-1/(n+1)}$ 除以 (117)。由此引出下一个简化假设。

简化假设 S2。

$$\|f_S\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \text{are dyadically constant over } S \in \mathbf{S}. \tag{119}$$

在此假设下，所需的 (117) 中的反向 Hölder 不等式成立。

结合 (116) 和 (118)，可得

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}})} \lesssim \mathbf{C}_\varepsilon K^{-\varepsilon} M_K(\mathcal{Q})^{1/(n+1)} R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{120}$$

It remains to estimate the $M_K(\mathcal{Q})$ factor.

Closing the induction. — In order to conclude the argument, we shall show

$$M_K(\mathcal{Q}) \lesssim \frac{\Delta_\alpha(\mathcal{Q})}{\#\mathcal{Q}}. \tag{121}$$

确实，一旦我们有了这个界，我们就可以将其代入(120)然后选择 $\mathbf{C}_\varepsilon$ 和 R_0适当地来结束归纳并完成证明。

The definition of $M_K(\mathcal{Q})$ involves two factors:

$$\Big[\max_{Q\in\mathcal{Q}} \frac{\#\mathbf{S}(Q)}{\#\mathbf{S}}\Big] \qquad \text{and} \qquad K^{-1-\alpha}\Big[\max_{S\in\mathbf{S}} \frac{\Delta_\alpha(\tilde{\mathcal{Q}}(S))}{\#\tilde{\mathcal{Q}}(S)}\Big]. \tag{122}$$

我们将把（121）的证明分为 3 个步骤：前两个步骤将处理（122）中的第一因子，剩下的步骤处理其余部分。

1.重数界。回顾定义可知，$\#\mathbf{S}(Q)/\#\mathbf{S}$ 是所有经过 Q 的条带 $S \in \mathbf{S}$ 所占的比例。因此，我们将这个量称为 Q 的重数 。另一方面，如果我们定义

$$\mathcal{Q}(S) := \{Q \in \mathcal{Q} : S \cap Q \neq \emptyset\}, \qquad S \in \mathbf{S},$$

那么$\#\mathcal{Q}(S)/\#\mathcal{Q}$ 是所有位于固定条带 S 中的立方体 $Q \in\mathcal{Q}$ 所占的比例。我们将这个量称为 S 的重数 。理想情况下，我们希望证明

$$\max_{Q\in\mathcal{Q}} \frac{\#\mathbf{S}(Q)}{\#\mathbf{S}} \lesssim \max_{S\in\mathbf{S}} \frac{\#\mathcal{Q}(S)}{\#\mathcal{Q}}; \tag{123}$$

换句话说，如果存在一个高重数立方体，那么必然存在一个高重数条带。

例*7.5*。——不加额外假设，很容易看出（123）可能不成立。例如，假设 M 个条带位于 $\mathbf{S}$ 中， $M+1$ 个立方体位于 $\mathcal{Q}$ 中。我们可以作如下安排：

– 恰好存在一个立方体 $Q_0 \in \mathcal{Q}$ 位于每个条带中：$\#\mathbf{S}(Q_0) = M$;– 其他每个立方体位于恰好一个条带中：$\#\mathbf{S}(Q) = 1$ 对于所有 $Q \in \mathcal{Q}\setminus\{Q_0\}$;– 每个条带包含 2 个立方体：$\#\mathcal{Q}(S) = 2$ 对于所有 $S \in \mathbf{S}$。

Then

$$\max_{Q\in\mathcal{Q}} \frac{\#\mathbf{S}(Q)}{\#\mathbf{S}} = \frac{\#\mathbf{S}(Q_0)}{\#\mathbf{S}} = 1 \qquad \text{and} \qquad \max_{S\in\mathbf{S}} \frac{\#\mathcal{Q}(S)}{\#\mathcal{Q}} = \frac{2}{M+1}.$$

因此，如果 $M \gg 1$，那么这就违背了（123）。然而，这里的想法是，违背结论源于单个“异常值”立方体 Q_0；如果我们舍弃这类异常值，只关注“典型”的立方体，那么我们就可以希望（123）成立。

通过双重计数，我们总能得到一个平凡不等式

$$\min_{Q\in\mathcal{Q}} \frac{\#\mathbf{S}(Q)}{\#\mathbf{S}} \leq \max_{S\in\mathbf{S}} \frac{\#\mathcal{Q}(S)}{\#\mathcal{Q}}. \tag{124}$$

Indeed, (124) immediately follows once we note

$$\sum_{Q\in\mathcal{Q}} \#\mathbf{S}(Q) = \#\{(S,Q) : S \in \mathbf{S}, Q \in \mathcal{Q}(S)\} = \sum_{S\in\mathbf{S}} \#\mathcal{Q}(S).$$

To exploit the bound (124), we make a further assumption on the multiplicities of the cubes.

Simplifying Assumption Q.

(125) $\#\mathbf{S}(Q)$ are dyadically constant over $Q \in \mathcal{Q}$.

这个假设确保没有像例 7.5 中的'异常'立方体。特别地，使用 (125)，我们可以将 (124) 升级为所需的界 (123)。这有助于我们控制 (122) 中的第一因子。

˜2.从条带到平行六面体。下一步是将 #Q(*S*)与 #Q(*S*) 联系起来。我们首先回顾一些定义。对于每个条带 $S \in$S，都有一个与之关联的˜平行六面体族 P(*S*; Q)。此外，立方体族Q(*S*) 是通过在 $\mathbf{A}_S$ 下将 $P \in$ P(*S*; Q) 进行变换而得到的（见（111））。特别是，

(126) $$\#\mathcal{P}(S;\mathcal{Q}) = \#\tilde{\mathcal{Q}}(S).$$

Thus, our task here is to relate $\#\mathcal{Q}(S)$ to $\#\mathcal{P}(S;\mathcal{Q})$.

令 $\mathcal{P}(\mathcal{Q})$ 表示所有 $S \in \mathbf{S}$ 对应的 $\mathcal{P}(S;\mathcal{Q})$ 的并集，并令

$$\mathcal{Q}(P) := \{Q \in \mathcal{Q} : P \cap Q \neq \emptyset\} \qquad \text{for all } P \in \mathcal{P}(\mathcal{Q}).$$

由定义可知

$$\mathcal{Q}(S) = \bigcup_{P \in \mathcal{P}(S;\mathcal{Q})} \mathcal{Q}(P).$$

因此，我们可以通过以下简单不等式，将一个条带的重数与平行六面体的重数进行比较

$$\#\mathcal{Q}(S) \le \sum_{P \in \mathcal{P}(S;\mathcal{Q})} \#\mathcal{Q}(P) \le [\max_{P \in \mathcal{P}(S;\mathcal{Q})} \#\mathcal{Q}(P)][\#\mathcal{P}(S;\mathcal{Q})].$$

因此，根据（123）和（126），我们有

$$\max_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{\#\mathbf{S}(Q)}{\#\mathbf{S}} \le [\max_{P \in \mathcal{P}(\mathcal{Q})} \#\mathcal{Q}(P)][\max_{S \in \mathbf{S}} \#\tilde{\mathcal{Q}}(S)].$$

上述不等式右侧的最大值很难界定。不过，如果引入以下附加假设，情况会有所改善。

简化假设 P2。

(127) #Q(*P*) 在所有 $P \in \mathcal{P}(\mathcal{Q})$ 上均为二进制尺度上恒定。

简化假设 S2。

$\#\mathcal{P}(S;\mathcal{Q})$ are dyadically constant over $S \in \mathbf{S}$.

这些（谢天谢地！）是我们最后的简化假设。根据（127）和（119），可知

(128) $$\left[\max_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{\#\mathbf{S}(Q)}{\#\mathbf{S}}\right] \lesssim \frac{1}{\#\mathcal{Q}} [\min_{P \in \mathcal{P}(\mathcal{Q})} \#\mathcal{Q}(P)][\min_{S \in \mathbf{S}} \#\tilde{\mathcal{Q}}(S)].$$

˜**3. 比较密度**。 最后一步是将密度 $\Delta_\alpha(\mathcal{Q}(S))$ 和$\Delta_\alpha(\mathcal{Q})$联系起来。这通过以下简单引理实现。

LEMMA 7.6. — *With the above setup, for any* $S \in \mathbf{S}$ *we have*

$$[\min_{P\in\mathcal{P}(\mathcal{Q})} \#\mathcal{Q}(P)]\Delta_\alpha(\tilde{\mathcal{Q}}(S)) \lesssim K^{1+\alpha}\Delta_\alpha(\mathcal{Q}). \tag{129}$$

证明. — 设 $\tilde{B} \subseteq B^{n-1}(\mathbf{0}, \tilde{R})$ 是一个半径为 $r := \mathrm{rad}(\tilde{B}) \geq \tilde{K}^2$ 的球。注意 tha t

$$\#\{\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{Q}}(S) : \tilde{Q} \subseteq \tilde{B}\} = \#\{P \in \mathcal{P}(S;\mathcal{Q}) : P \subseteq \mathcal{A}_S^{-1}(\tilde{B})\},$$

˜其中我们使用了立方体族的定义 $\mathcal{Q}(S)$ （111）中。令$T :\ = \mathcal{A}_S^{-1}(\tilde{B})$，则可得

$$[\min_{P\in\mathcal{P}(\mathcal{Q})} \#\mathcal{Q}(P)][\#\{\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{Q}}(S) : \tilde{Q} \subseteq \tilde{B}\}] \leq \#\{Q \in \mathcal{Q} : Q \subseteq T\}.$$

由于 T 是一个维数为 $Kr \times \cdots \times Kr \times K^2 r$ 的条带，它可以被 $O(K)$个半径为 Kr 的球 $B \subseteq B^{n+1}(\mathbf{0}, R)$ 覆盖。此外，可以选择这样的覆盖，使得如果$Q \in \mathcal{Q}$ 满足 $Q \subseteq T$，那么对于覆盖中的某个球， $Q \subseteq B$ 。因此，

$$\#\{Q \in \mathcal{Q} : Q \subseteq T\} \lesssim K[\max_{\substack{B\subseteq B^{n+1}(0,R)\\ \mathrm{rad}(B)=Kr}} \#\{Q \in \mathcal{Q} : Q \subseteq B\}] \leq K^{1+\alpha} r^\alpha \Delta_\alpha(\mathcal{Q}). \tag{130}$$

Combining (7.7) and (130), we deduce that

$$[\min_{P\in\mathcal{P}(\mathcal{Q})} \#\mathcal{Q}(P)]\Delta_\alpha(\tilde{\mathcal{Q}};\tilde{B}) \lesssim K^{1+\alpha}\Delta_\alpha(\mathcal{Q})$$

and the desired result follows by taking a supremum over all choices of $\tilde{B}$. □

Combining (128) and (129), we therefore have

$$\Big[\max_{Q\in\mathcal{Q}} \frac{\#\mathbf{S}(Q)}{\#\mathbf{S}}\Big]\Big[\max_{S\in\mathbf{S}} \frac{\Delta_\alpha(\tilde{\mathcal{Q}}(S))}{\#\tilde{\mathcal{Q}}(S)}\Big] \lesssim K^{1+\alpha}\frac{\Delta_\alpha(\mathcal{Q})}{\#\mathcal{Q}}.$$

回顾 $M_k(\mathcal{Q})$，这立即推出所需的界（121）。因此，我们有窄估计。

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_\mathcal{Q})} \lesssim \mathbf{C}_\varepsilon K^{-\varepsilon}\Big[\frac{\Delta_\alpha(\mathcal{Q})}{\#\mathcal{Q}}\Big]^{1/(n+1)} R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

at least 在上述简化假设 P1、P2、S1、S2 和 Q 下 .

7.8. 窄情形的分析：技术细节

现在我们重新审视第 §7.7 节中的论证，并补充技术细节。主要新增的内容是一系列抽屉原理分组步骤，用以严格论证上文所用的各种简化假设。

定义尺度 R 和 K 如（109）。对于每个 $S \in \mathbf{S}$，我们将每个扩大的条带 S 分解为平行的平行六面体 $\mathcal{P}(S)$ 如（110）。特别地，每个 $P \in \mathcal{P}(S)$ 与 S 平行对齐，并具有维数 $K\tilde{K}^2 \times \cdots \times K\tilde{K}^2 \times K^2\tilde{K}^2$。由引理 4.16，我们有逐点界

$$|Uf_S(z)| \lesssim \sum_{P \in \mathcal{P}(S)} |Uf_S(z)|\chi_P(z) + R^{-100n}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{131}$$

我们令 $\mathcal{P}_{\mathrm{all}}$ 表示所有 $S \in \mathbf{S}$ 上集合 $\mathcal{P}(S)$ 的不交并。因此，给定一个平行六面体 $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{all}}$，存在唯一的元素 $S \in \mathbf{S}$ 使得 $P \in \mathcal{P}(S)$，我们将其记为 $S(P)$。

鸽巢原理。 — 我们首先对平行六面体 $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{all}}$ 应用鸽巢原理。为此，定义

$$\mathcal{P}_{\mathrm{tiny}} := \Big\{P \in \mathcal{P} : \|Uf_{S(P)}\|_{L^{q_n}(P)} \le R^{-100n}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\Big\}.$$

平行六面体 $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{tiny}}$ 对于我们的目的来说是可忽略的：关于这一点的形式化解释，请参见下面的（133）。另一方面，如果 $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{all}} \setminus \mathcal{P}_{\mathrm{tiny}}$，那么利用柯西–施瓦茨不等式和普朗歇尔定理进行直接估计可得

$$R^{-100n}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|Uf_{S(P)}\|_{L^{q_n}(P)} \lesssim |P|^{1/q}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim R\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

这将允许我们在$\|Uf_{S(P)}\|_{L^{q_n}(P)}$中进行二进鸽巢原理。我们还将在集合的基数中应用鸽巢原理

$$\mathcal{Q}(P) := \Big\{Q \in \mathcal{Q} : P \cap Q^{(\delta)} \neq \emptyset\Big\}, \quad \text{where} \quad Q^{(\delta)} := K^{\delta} \cdot Q \quad \text{for } Q \in \mathcal{Q};$$

也就是说，位于给定 P附近的 K^2-立方体 $Q \in \mathcal{Q}$ 的数量。

抽屉原理分组平行六面体。 平行六面体族 $\mathcal{P}_{\mathrm{all}} \setminus \mathcal{P}_{\mathrm{tiny}}$ 可以写成不交并 $\mathcal{P}_{\mathrm{all}} \setminus \mathcal{P}_{\mathrm{tiny}} = \mathcal{P}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_I$其中

$$\|Uf_{S(P)}\|_{L^{q_n}(P)} \quad \text{are dyadically constant over } P \in \mathcal{P}_i \tag{132}$$

and

$$\#\mathcal{Q}(P) \quad \text{are dyadically constant over } P \in \mathcal{P}_i$$

对每个 $1 \le i \le I$ 和 $I \lesssim 1$。这对应于 §7.7 中的简化假设 **P1** 和 **P2**。

现在我们转而对条带 $S \in \mathbf{S}$进行鸽巢分组。为此，先定义

$$\mathbf{S}_{\mathrm{tiny}} := \Big\{S \in \mathbf{S} : \|f_S\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le R^{-100n}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\Big\}.$$

条带 $S \in \mathbf{S}_{\text{tiny}}$ 对我们的目的而言可以忽略不计。更准确地说，令 $\mathcal{Q}_{\text{tiny}}$ 表示满足以下条件的立方体集合 $Q \in \mathcal{Q}$

$$\Big(\sum_{S\in\mathbf{S}} \|Uf_S\|^2_{L^{qn}(w_Q)}\Big)^{1/2} \le 2\Big(\sum_{S\in\mathbf{S}_{\text{tiny}}} \|Uf_S\|^2_{L^{qn}(w_Q)}\Big)^{1/2}.$$

如果 $\#\mathcal{Q}_{\text{tiny}} \ge \#\mathcal{Q}/2$，那么（107）和二进常值假设（91）立即给出一个非常有利的估计。因此，以下我们假设 $\mathcal{Q}_{\text{main}} := \mathcal{Q}\setminus \mathcal{Q}_{\text{tiny}}$ 满足 $\#\mathcal{Q}_{\text{main}} \ge \#\mathcal{Q}/2$。

如果 $S \in \mathbf{S}\setminus\mathbf{S}_{\text{tiny}}$，那么波包的正交性（见引理 4.15）意味着

$$R^{-100n}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|f_S\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

这将使我们能够在 $\|f_S\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ 中按二进制尺度进行鸽巢分组。我们还将按照集合的基数进行鸽巢分组

$$\mathcal{P}_i(S) := \mathcal{P}(S) \cap \mathcal{P}_i \qquad \text{for } S \in \mathbf{S} \text{ and } 1 \le i \le I.$$

对条带进行鸽巢分组。 对于每个 $1 \le i \le I$，条带族 $\mathbf{S}\setminus\mathbf{S}_{\text{tiny}}$ 可以写成不交并 $\mathbf{S}\setminus\mathbf{S}_{\text{tiny}} = \mathbf{S}_{i,1} \cup \cdots \mathbf{S}_{i,J_i}$ 其中

$$\|f_S\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{are dyadically constant over } S \in \mathbf{S}_{i,j}$$

and

$$\#\mathcal{P}_i(S) \qquad \text{are dyadically constant over } S \in \mathbf{S}_{i,j}$$

并且 $J_i \lessapprox 1$ 对所有 $1 \le i \le I$，$1 \le j \le J_i$。这对应于第 §7.7节中的简化假设 S1 和 S2。

最后，我们在立方体 $Q \in \mathcal{Q}$ 中应用鸽巢原理。这一步稍微复杂一些，我们需要进行若干初步观察。

Given $Q \in \mathcal{Q}$ and any set $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}_{\text{all}}$, define

$$w_Q|_{\mathcal{P}} := w_Q \cdot \sum_{P\in\mathcal{P}} \chi_P.$$

固定 $Q \in \mathcal{Q}_{\text{main}}$。由逐点界（131）以及 ℓ^q 范数的嵌套性，我们有 e

$$\|Uf_S\|_{L^{qn}(w_Q)} \lesssim \Big(\sum_{i=1}^{I} \|Uf_S\|^2_{L^{qn}(w_Q|_{\mathcal{P}_i(S)})}\Big)^{1/2} + R^{-10n}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{133}$$

这里，来自平行六面体 $P \in \mathcal{P}_{\text{tiny}}$ 的贡献被吸收到快速衰减项中。对 $S \in \mathbf{S}$ 取 ℓ^2-范数，可得

$$\Big(\sum_{S\in\mathbf{S}} \|Uf_S\|^2_{L^{qn}(w_Q)}\Big)^{1/2} \lesssim \Big(\sum_{S\in\mathbf{S}\setminus\mathbf{S}_{\text{tiny}}} \sum_{i=1}^{I} \|Uf_S\|^2_{L^{qn}(w_Q|_{\mathcal{P}_i(S)})}\Big)^{1/2} + R^{-5n}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)};$$

注意，由于 $Q \in \mathcal{Q}_{\text{main}}$，来自条带 $S \in \mathbf{S}_{\text{tiny}}$ 的贡献可以忽略。通过重新排列上述表达式右侧的求和，我们得到

$$\sum_{S\in\mathbf{S}\setminus\mathbf{S}_{\text{tiny}}} \sum_{i=1}^{I} \|Uf_S\|^2_{L^{qn}(w_Q|_{\mathcal{P}_i(S)})} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{S\in\mathbf{S}_{i,j}} \|Uf_S\|^2_{L^{qn}(w_Q|_{\mathcal{P}_i(S)})}.$$

Finally, we combine the above observations with (107) to deduce that

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Q)} \lesssim_\varepsilon K^\varepsilon \Big(\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{S\in \mathbf{S}_{i,j}} \|Uf_S\|^2_{L^{q_n}(w_Q|_{\mathcal{P}_i(S)})} \Big)^{1/2} + R^{-5n}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{134}$$

We now turn to pigeonholing the cubes $Q \in \mathcal{Q}$, which involves a two-step process.

对立方体进行抽屉原理分组。 设 $Q \in \mathcal{Q}_{\text{main}}$. 对(134)应用抽屉原理分组，存在某个指标对 (i_Q, j_Q) 使得 $\mathbf{S}^Q := \mathbf{S}_{i_Q,j_Q}$ 且 $\mathcal{P}^Q(S) := \mathcal{P}^{i_Q}(S)$ 满足

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Q)} \lessapprox K^\varepsilon \Big(\sum_{S\in \mathbf{S}_Q} \|Uf_S\|^2_{L^{q_n}(w_Q|_{\mathcal{P}_Q(S)})} \Big)^{1/2} + R^{-5n}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

此外，根据抽屉原理分组，存在某个细化 $\mathcal{Q}'_0 \subseteq \mathcal{Q}_{\text{main}}$ 和指标 (i_0, j_0)，使得 $\mathbf{S}' := \mathbf{S}_{i_0,j_0}$ 以及 $\mathcal{P}' := \mathcal{P}_{i_0}$ 满足

$$\mathbf{S}_Q = \mathbf{S}' \quad \text{for all } Q \in \mathcal{Q}'_0 \quad \text{and} \quad \#\mathcal{Q}'_0 \gtrapprox \#\mathcal{Q}$$

Given $Q \in \mathcal{Q}$, define

$$\mathbf{S}'(Q) := \big\{ S \in \mathbf{S}' : \bar{S} \cap Q^{(\delta)} \neq \emptyset \big\}$$

其中，如上所述，对于 $Q \in \mathcal{Q}$， $Q^{(\delta)} := K^\delta \cdot Q$ 。再次应用鸽巢原理，可找到进一步的细化 $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}'_0$ ，使得

$$\#\mathbf{S}'(Q) \quad \text{are dyadically constant over } Q \in \mathcal{Q}'. \tag{135}$$

这对应于简化假设 Q，见 §7.7.

如果 $Q \in \mathcal{Q}'$, 那么由上述构造和定义可得

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Q)} \lessapprox K^\varepsilon \Big(\sum_{S\in \mathbf{S}'(Q)} \|Uf_S\|^2_{L^{q_n}(w_Q|_{\mathcal{P}'(S)})} \Big)^{1/2} + R^{-5n}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

为了在 Q 中求和，我们应用 Hölder 不等式从 ℓ^2 范数过渡到 ℓ^q 范数。此外，由于权重 w_Q 远离 Q 时迅速衰减，我们可以从 $w_Q|_{\mathcal{P}'(S)}$ 过渡到支撑在平行六面体上的权重 $w_Q|_{\mathcal{P}'(S;\mathcal{Q}')}$

$$\mathcal{P}'(S;\mathcal{Q}') := \big\{ P \in \mathcal{P}'(S) : P \cap Q^{(\delta)} \neq \emptyset \text{ for some } Q \in \mathcal{Q}' \big\}.$$

特别地,

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Q)} \lessapprox K^\varepsilon [\#\mathbf{S}'(Q)]^{1/(n+1)} \Big(\sum_{S\in \mathbf{S}'(Q)} \|Uf_S\|^{q_n}_{L^{q_n}(w_Q|_{\mathcal{P}'(S;\mathcal{Q}')})} \Big)^{1/q_n} + R^{-5n}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

取 q_n 次幂并在精细化集合中的所有立方体上求和,

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}})} \lessapprox K^\varepsilon [\min_{Q\in\mathcal{Q}'} \#\mathbf{S}'(Q)]^{1/(n+1)} \Big(\sum_{S\in \mathbf{S}'} \|Uf_S\|^{q_n}_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{P}'(S;\mathcal{Q}')})} \Big)^{1/q_n} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{136}$$

其中 $Z_{\mathcal{P}'(S;\mathcal{Q}')}$ 表示 $P \in \mathcal{P}'(S;\mathcal{Q}')$的并。这里我们使用了二进常值假设 (91) 和 (135)。

抛物缩放和归纳假设。——固定 $S \in \mathbf{S}'$。我们应用引理 4.18 来推导出

$$\|Uf_S\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{P}'(S;\mathcal{Q}')})} \leq K^{-1/(n+1)} \|U\tilde{f}_S\|_{L^{q_n}(Z_{\tilde{\mathcal{Q}}(S)})}$$

where $\tilde{f}_S \in L^2(\mathbb{R}^n)$ satisfies

$$\|\tilde{f}_S\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f_S\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \text{and} \quad \operatorname{supp} \mathcal{F}(\tilde{f}_S) \subseteq B^n(0,1).$$

此处 $\tilde{\mathcal{Q}}(S)$ 是包含于 $B^{n+1}(\mathbf{0}, \tilde{R})$中的格点 $\tilde{K}^2$-立方体的集合。此外，对于$\tilde{\mathcal{Q}}$每个 $Q \in \mathcal{Q}(S)$，存在某个 $P \in \mathcal{P}'(S;\mathcal{Q}')$，使得

$$\|Uf_S\|_{L^{q_n}(P)} = K^{-1/(n+1)} \|U\tilde{f}_S\|_{L^{q_n}(\tilde{Q})};$$

it therefore follows from (132) that

$$\|U\tilde{f}_S\|_{L^{q_n}(\tilde{Q})} \qquad \text{are dyadically constant over } \tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{Q}}(S).$$

In light of the above, we may apply the induction hypothesis to conclude that

$$\|Uf_S\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{P}'(S;\mathcal{Q}')})} \lesssim \mathbf{C}_\varepsilon K^{-2\varepsilon} \Big[K^{-1-\alpha} \frac{\Delta_\alpha(\tilde{\mathcal{Q}}(S))}{\#\tilde{\mathcal{Q}}(S)} \Big]^{1/(n+1)} R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon} \|f_S\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{137}$$

这当然是估计（115）来自非技术性论证$\tilde{}$在 §7.7。这里的关键区别在于立方体族 $\mathcal{Q}(S)$ 是由平行六面体的细化集形成的 $\mathcal{P}'(S;\mathcal{Q}')$；这将使我们能够（严格地）利用各种二进常数性质。

对估计求和. — 与 §7.7 中一样，下一步是对条带 $S \in \mathbf{S}'$ 的所有取值，将局部化估计（137）求和。将（136）中的（137）代入，我们推得

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}})} \lessapprox \mathbf{C}_\varepsilon K^{-\varepsilon} M'_K(\mathcal{Q}')^{1/(n+1)} R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon} [\#\mathbf{S}']^{1/(n+1)} \Big(\sum_{S \in \mathbf{S}'} \|f_S\|^{q_n}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \Big)^{1/q_n}, \tag{138}$$

where

$$M'_K(\mathcal{Q}') := K^{-1-\alpha} \Big[\max_{Q \in \mathcal{Q}'} \frac{\#\mathbf{S}'(Q)}{\#\mathbf{S}'} \Big] \Big[\max_{S \in \mathbf{S}'} \frac{\Delta_\alpha(\tilde{\mathcal{Q}}(S))}{\#\tilde{\mathcal{Q}}(S)} \Big]. \tag{139}$$

is defined in a similar manner to the corresponding quantity in §7.7.

为了估计 ℓ^q sum 在 (138) 右侧，我们使用如 (118) 中的反向 Hölder 不等式。实际上，现在可以严格应用反向 Hölder 而无需进一步假设，因为范数 $\|f_S\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ 对于 $S \in \mathbf{S}'$ 根据构造是二进制尺度上恒定的。因此，

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}})} \lesssim \mathbf{C}_\varepsilon K^{-\varepsilon} M'_K(\mathcal{Q}')^{1/(n+1)} R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

重数界. — 窄分析的最后一步是控制常数$M_K'(\mathcal{Q}')$，特别是证明

$$M_K'(\mathcal{Q}') \lessapprox K^{O(\delta)} \frac{\Delta_\alpha(\mathcal{Q})}{\#\mathcal{Q}}. \tag{140}$$

Recall from our initial pigeonholing:

$$\begin{array}{ll} \#\mathbf{S}'(Q) & \text{are dyadically constant over } Q \in \mathcal{Q}'; \\ \#\mathcal{P}'(S;\mathcal{Q}') & \text{are dyadically constant over } S \in \mathbf{S}'; \\ \#\mathcal{Q}'(P) & \text{are dyadically constant over } P \in \mathcal{P}'. \end{array}$$

Arguing exactly as in §7.7, we therefore deduce that

$$\Big[\max_{Q\in\mathcal{Q}'} \frac{\#\mathbf{S}'(Q)}{\#\mathbf{S}'}\Big]\Big[\max_{S\in\mathbf{S}'} \frac{\Delta_\alpha(\tilde{\mathcal{Q}}(S))}{\#\tilde{\mathcal{Q}}(S)}\Big] \lesssim \frac{1}{\#\mathcal{Q}'}[\min_{P\in\mathcal{P}'(\mathcal{Q}')} \#\mathcal{Q}'(P)][\max_{S\in\mathbf{S}'} \Delta_\alpha(\tilde{\mathcal{Q}}(S))]. \tag{141}$$

As before, we can use Lemma 7.6 to compare the densities, giving

$$[\min_{P\in\mathcal{P}'(\mathcal{Q}')} \#\mathcal{Q}'(P)][\max_{S\in\mathbf{S}'} \Delta_\alpha(\tilde{\mathcal{Q}}(S))] \lesssim K^{O(\delta)} K^{1+\alpha} \Delta_\alpha(\mathcal{Q}'). \tag{142}$$

注意，由于平行六面体$\mathcal{P}(S;\mathcal{Q})$的集合是用放大的立方体 $Q^{(\delta)}$定义的，因此这里损失了一个 $K^{O(\delta)}$ 因子。

Combining (141) and (142), we have

$$\Big[\max_{Q\in\mathcal{Q}'} \frac{\#\mathbf{S}'(Q)}{\#\mathbf{S}'}\Big]\Big[\max_{S\in\mathbf{S}'} \frac{\Delta_\alpha(\tilde{\mathcal{Q}}(S))}{\#\tilde{\mathcal{Q}}(S)}\Big] \lessapprox K^{O(\delta)} K^{1+\alpha} \frac{\Delta_\alpha(\mathcal{Q})}{\#\mathcal{Q}};$$

此处我们还使用了这一事实：$\#\mathcal{Q}' \gtrsim \#\mathcal{Q}$ 和 $\Delta_\alpha(\mathcal{Q}') \le \Delta_\alpha(\mathcal{Q})$。回顾从 $M_K'(\mathcal{Q}')$ 在（139）中的定义，这立即推出了所需的界（140）。因此，我们得到了窄估计

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_\mathcal{Q})} \lesssim_\varepsilon \mathbf{C}_\varepsilon K^{-\varepsilon/2} \Big[\frac{\Delta_\alpha(\mathcal{Q})}{\#\mathcal{Q}}\Big]^{1/(n+1)} R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{143}$$

which essentially agrees with the bound derived in §7.7.

7.9. Concluding the argument

为完成证明，仍需汇总上述证明的估计，并说明可以利用它们完成归纳。回顾：

– 在 §7.4 中，我们证明了（105）在广主导情形下成立；– 在 §§7.6-7.8 中，我们证明了（143）在窄主导情形下成立。

结合（105）和（143），我们看到存在一个常数 $C_\varepsilon \ge 1$ 使得界

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_\mathcal{Q})} \le C_\varepsilon \Big(\mathbf{C}_\varepsilon K^{-\varepsilon/2} + 1\Big) K^{-\varepsilon/2} \Big[\frac{\Delta_\alpha(\mathcal{Q})}{\#\mathcal{Q}}\Big]^{1/(n+1)} R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{144}$$

holds in either case.

The estimate (144) involves two free parameters:

– We are free to choose the cutoff R_0 for the base case;

–我们可以自由选择归纳假设中出现的常数 $\mathbf{C}_\varepsilon$ ，只要我们的选择与 R 无关。[(31)]

此时，我们对这些参数进行微调，以确保归纳过程闭合。回顾 $K = R^\delta$，我们选择 R_0 足够大，使得 $C_\varepsilon K^{-\varepsilon/2} \le 1/2$ 只要 $R \ge R_0$ 并取$\mathbf{C}_\varepsilon = 2C_\varepsilon$。采用这些参数后，(144)推出

$$\|Uf\|_{L^{q_n}(Z_{\mathcal{Q}})} \le \mathbf{C}_\varepsilon \Big[\frac{\Delta_\alpha(\mathcal{Q})}{\#\mathcal{Q}}\Big]^{1/(n+1)} R^{\alpha/(2(n+1))+\varepsilon} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

which is precisely what is required to close the induction.

REFERENCES

JonathanBennett（2014）。“与横截性相关的多线性调和分析的若干方面”，载于：调和分析与偏微分方程。第612卷。《当代数学》。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，第1–28页。Jonathan Bennett、AnthonyCarbery和Terence Tao（2006年）。“关于多线性限制猜想和卡凯亚猜想”，*ActaMathematica* **196(2)**，第261–302页。Jean Bourgain（2013年（a））。“关于频谱位于曲超曲面上的三角多项式的矩不等式”，*Israel J. Math.* **193(1)**，第441–458页。（2013年）。“关于高维中的薛定谔极大函数”，*Tr. Mat.Inst. Steklova* **280**（正交级数、逼近理论及相关问题），第53–66页。（2016年）。“关于薛定谔极大函数的一则注记”，*J. Anal. Math.* **130**，第393–396页。Jean Bourgain和Ciprian Demeter（2015年）。“l^2 解耦猜想的证明”，*Annals of Mathematics (2)* **182(1)**，第351–389页。JeanBourgain和LarryGuth（2011年）。“基于多线性估计的振荡积分算子的界”，*Geom. Funct. Anal.* **21(6)**，第1239–1295页。Lennart Carleson（1980年）。“与统计力学相关的一些解析问题”。载于：欧几里得调和分析（马里兰大学大学公园市分校研讨会论文集，马里兰州大学公园市，*1979*年）。第779卷。《数学讲义》。施普林格，柏林，第5–45页。Björn E.J.Dahlberg和Carlos E.Kenig（1982年）。“关于薛定谔方程解几乎处处行为的一则注记”，载于：调和分析（明尼阿波利斯，明尼苏达州，*1981*年）。第908卷。《数学讲义》。施普林格，柏林—纽约，第205–209页。XiuminDu、LarryGuth和XiaochunLi（2017年）。“在 $\mathbb{R}^2$ 中的薛定谔极大函数的尖锐估计”，*Annals of Mathematics (2)* **186(2)**，第607–640页。

(31)补充一个次要的技术性说明，$\mathbf{C}_\varepsilon$ 应取足够大，其大小取决于 R_0 ，以确保基例成立。从这个意义上说，这两个参数并非完全相互独立。

Xiumin Du, Larry Guth, Xiaochun Li, and Ruixiang Zhang (2018年). “薛定谔方程的解的逐点收敛和多线性精细化斯特里卡茨估计”,*ForumMath. Sigma* **6**, Paper No. e14, 18. Xiumin Du, Jongchon Kim, Hong Wang, and Ruixiang Zhang (2020年). “薛定谔极大函数估计的下界”, *Math. Res. Lett.* **27**(3), pp. 687–692. Xiumin Du and Ruixiang Zhang (2019年). “高维中薛定谔极大函数的锐利 L^2 估计”, *Ann. of Math. (2)* **189**(3), pp. 837–861. Charles Fefferman (1970 年). “ 强奇异卷积算子的不等式”,*Acta Math.* **124**, pp. 9–36. Larry Guth (2015年). “多线性Kakeya不等式的简短证明”, *Math. Proc.Cambridge Philos. Soc.* **158**(1), pp. 147–153. (2016年). “使用多项式划分的限制估计”,*J. Amer. Math.Soc.* **29**(2), pp. 371–413. (2018年). “使用多项式划分的限制估计 II”, *Acta Math.* **221**(1), pp. 81–142. Larry Guth, AlexIosevich,YumengOu, andHong Wang (2020年). “平面上的Falconer 距离集问题”, *Invent. math.* **219**(3), pp. 779–830. Larry Guth and Nets Hawk Katz (2015年). “平面上的Erdős 不同距离问题”, *Ann. of Math. (2)* **181**(1), pp. 155–190. Carlos E. Kenig, Gustavo Ponce, and Luis Vega (1991年). “振荡积分和色散方程的正则性”, *Indiana Univ. Math. J.* **40**(1), pp. 33–69. Sanghyuk Lee (2006年). “关于 $\mathbb{R}^2$中薛定谔方程解的逐点收敛”, *Int. Math. Res. Not.*, Art. ID 32597, 21. Renato Lucà and Keith M. Rogers (2017年). “分形上的相干性与薛定谔方程的逐点收敛”, *Comm. Math. Phys.* **351**(1), pp. 341–359. (2019年). “关于薛定谔方程逐点收敛的注记”, *Math.Proc. Cambridge Philos. Soc.* **166**(2), pp. 209–218. Lillian B. Pierce (2020年). “关于薛定谔极大函数的Bourgain 反例”, *Q. J. Math.* **71**(4), pp. 1309–1344. Elias M. Stein (1986年). “傅里叶分析中的振荡积分”, in: 北京调和分析讲座 *(*北京*, 1984*年*)*. Vol. 112. Ann. of Math. Stud. 普林斯顿大学出版社, 新泽西州普林斯顿 , pp. 307–355. Robert S. Strichartz (1977 年). “ 傅里叶变换到二次曲面的限制以及波动方程解的衰减”, *Duke Math. J.* **44**(3), pp. 705–714. Terence Tao, Ana Vargas, and Luis Vega (1998年). “限制和卡凯亚猜想的双线性方法”, *J. Amer. Math. Soc.* **11**(4), pp. 967–1000. Peter A. Tomas (1975年). “傅里叶变换的限制定理”, *Bull. Amer.Math. Soc.* **81**, pp. 477–478. Hong Wang and Shukun Wu (2022年). “ $\mathbb{R}^3$中改进的限制估计”. 预印本: arXiv:2210.03878.

1205–72

Thomas Wolff (2001年). “尖锐双线性锥限制估计”, *Annals of Mathematics (2)*153(3), pp. 661–698.

JonathanHickman 数学学院，詹姆斯·克拉克·麦克斯韦大楼，国王大楼群，PeterGuthrie Tait Road，爱丁堡，EH93FD，英国。电子邮件：
jonathan.hickman@ed.ac.uk