arXiv:2304.02512v1 [math.NA] 5 Apr 2023

受任意牵引力作用的部分固定单位环域上混合边值问题的并行广义解

预印本

Luobin Lin福建省土木工程先进技术与信息化重点实验室，土木工程学院，福建理工大学，中国福建省福州市上街大学城学院路69号，邮编350118，luobin_lin@fjut.edu.cn

Fuquan Chen

福州大学土木工程学院，中国福建省福州市上街大学城学院路2号，邮编350108，phdchen@fzu.edu.cn

Xianhai Huang

中国福建省福州市上街大学城学院路69号，邮编350118，福建理工大学土木工程学院 hwhsh@163.com

2023年4月6日

摘要

本文采用复变函数法，给出了单位圆环在外周边部分固定、内周边承受任意牵引力作用下混合边值问题的两种并行解。通过解析延拓，将混合边值问题转化为外周边自由段上的黎曼–希尔伯特问题。对外周边上未使用的牵引力和位移边界条件，以及内周边上的牵引力边界条件，分别采用两种并行解释方法，由此构成两组并行复线性约束集；随后通过逐次逼近法迭代求解，并结合 Lanczos 滤波技术，得到相同且稳定的应力和位移解。最后，采用 FORTRAN 编写了四个典型数值算例，并进行了

计算，并与 ABAQUS 中的相同算例进行比较。结果表明，这两种并行解均准确、稳定、鲁棒且快速，同时也验证了两种并行解在数值上的相互等效性。

关键词 混合边值问题 · 单位圆环 · 黎曼–希尔伯特问题 · 逐次逼近

1 引言

弹性圆环的混合边值问题常见于复合材料、压力容器设计、输油管道建设、隧道工程等领域。线性问题的优点在于，弹性解可以通过解析甚至精确的方式表示，从而探寻深层机理。

艾里应力函数 [Timoshenko 和 Goodier， 1951] 是一种求解线弹性问题的经典方法，即根据边界条件求出势函数的系数；已有研究给出了弹性环域混合边值问题的若干解析解 [Duffy，2008年，Erdogan，1981年，Belfield 等人，1983]。近期，通过建立应变–位移关系和相容条件的联立方程，艾里应力函数法在混合边值问题方面取得了一些进展[Chawde 和 Bhandakkar，2021年，Singh 和 Bhandakkar， 2019] 。

与 Airy 应力函数相比，复变函数法 [Muskhelishvili, 1966, Chen, 1994] 采用一对复势，它们与位移和应力分量之间存在明确的关系。结合保角映射和解析延拓原理，复变函数法在求解形状复杂的弹性区域中的混合边值问题时展现出强大的能力和灵活性，尤其适用于单连通区域 [Hasebe and Sato, 2015, Hasebe, 2021, Verma, 1966, Paria, 1957, Ballarini, 1995, Hwu and Fan, 1998, Selvadurai and Singh, 1985, Fan and Keer, 1994, Mirsalimov and Kalantarly, 2015]。

本文着重研究弹性圆环中的混合边值问题，该圆环属于双连通区域。Yau [Yau, 1968] 针对一种双对称弹性圆环提出了一个特解：该圆环的外周边两段相对的四分之一圆弧上施加固定约束，整个内周边上施加恒定径向压力。Sugiura [Sugiura, 1973, 1969] 针对对称弹性圆环提出了一对特解，所研究的圆环受重力作用，并且在其中一个周边上施加轴对称固定约束。此后，鲜有研究采用复变函数法和解析延拓原理求解弹性圆环中的混合边值问题。Yau [Yau, 1968] 和 Sugiura [Sugiura, 1973, 1969] 提出的解法十分简洁，但只考虑了几种简单且对称的边界条件。尽管这些结果看似正确，其数学推导仍存在模糊之处。此外，受时代条件所限，当时也没有可用于验证结果的比较方法。

因此，我们的工作由以下三个部分组成：

（a）我们采用复变函数方法和解析延拓原理，提出了两种并行广义解，用于求解外周边受部分固定约束、内周边受任意牵引力作用的弹性环域问题。

(b) 通过解析推导和数值结果，证明了这两个并行广义解在数值上相互等价。

(c) 将解析结果与相应的有限元结果进行了全面比较，以验证所提出的并行解。

2 问题定义

假设一个线性弹性、各向同性且均匀的单位圆环位于复平面 $z(\rho o\theta)$中，如图1所示。该环域的泊松比和剪切模量分别记为 ν 和 G。外周边和内周边分别记为 $\boldsymbol{C}_1$ 和 $\boldsymbol{C}_2$，半径分别为 $r_o=1$ 和 $r_i=r_\circ$。外周边 $\boldsymbol{C}_1$将整个平面分为内区域 $\boldsymbol{\Omega}^+(\rho<r_o)$和外区域 $\boldsymbol{\Omega}^-(\rho>r_o)$。单位圆环占据区域 $r_i\le\rho\le r_o$，记为 $\boldsymbol{\Omega}$。

根据Muskhelishvili的复变函数法 [Chen, 1994年, Muskhelishvili, 1966], 环域中极坐标形式的应力和位移分量可表示为:

$$\sigma_\theta(z)+\sigma_\rho(z)=2[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}],\quad z=\rho\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\in\boldsymbol{\Omega} \tag{2.1a}$$

$$\sigma_\rho(z)+\mathrm{i}\tau_{\rho\theta}(z)=\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}-\overline{z}\overline{\varphi''(z)}-\frac{\overline{z}}{z}\overline{\psi'(z)},\quad z=\rho\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\in\boldsymbol{\Omega} \tag{2.1b}$$

$$g(z)=2G[u(z)+\mathrm{i}v(z)]=\kappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)},\quad z=\rho\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\in\boldsymbol{\Omega} \tag{2.1c}$$

其中 σ_θ、σ_ρ和$\tau_{\rho\theta}$ 分别表示环向、径向和剪切应力分量；$\varphi(z)$和 $\psi(z)$表示复势；上标 $'$ 和 $''$ 分别表示一阶和二阶导数；势函数上方的上划线表示取相应函数的共轭；u 和 v 分别表示水平和垂直位移分量；κ 表示Kolosov常数，在平面应变和平面应力条件下分别等于 $3-4\nu$ 和$(3-\nu)/(1+\nu)$；e和i分别表示自然对数底数和虚数单位（$\mathrm{i}^2=-1$）。

环域外周边的一部分是固定的，记为 $\boldsymbol{C}_{12}$；其余部分是自由的，记为 $\boldsymbol{C}_{11}$。连接点标记为 $t_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$ 和 $t_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，且 t_2 始终位于 t_1的逆时针方向。在内边界 $\boldsymbol{C}_2$上施加任意牵引力。因此，外周边和内周边上的边界条件可写成如下混合边界条件:

$$\sigma_\rho(t)+\mathrm{i}\tau_{\rho\theta}(t)=0,\quad t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\in\boldsymbol{C}_{11} \tag{2.2a}$$

$$u(t)+\mathrm{i}v(t)=0,\quad t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\in\boldsymbol{C}_{12} \tag{2.2b}$$

$$\sigma_\rho(s)+\mathrm{i}\tau_{\rho\theta}(s)=f(\sigma),\quad s=r_i\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\in\boldsymbol{C}_2 \tag{2.2c}$$

其中

$$f(\sigma)=f(\theta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(p_k+\mathrm{i}q_k)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} \tag{2.3}$$

p_k 和 q_k 分别表示牵引力的径向系数和切向系数，假定这些系数已预先给定。我们要根据式（2.2）中的混合边界条件，求出式（2.1）中复势的特解。

3 解析延拓与黎曼–希尔伯特问题

为求解上述混合边界条件问题，采用解析延拓将混合问题转化为黎曼–希尔伯特问题。为便于下文推导，将式（2.1）中复势的定义域扩展至 $\boldsymbol{\Omega}^+$。

将式（2.1b）代入式（2.2a），得

$$\varphi'(t) = -\overline{\varphi'(t)} + \bar{t}\,\overline{\varphi''(t)} + \frac{\bar{t}}{t}\,\overline{\psi'(t)}, \quad t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \boldsymbol{C}_{11} \tag{3.1}$$

由于当 $t \in \boldsymbol{C}_{11}$时等式$t = \frac{1}{t}$ 成立，方程（3.1）可化为

$$\varphi'(t) = -\overline{\varphi'}(\frac{1}{t}) + \frac{1}{t}\,\overline{\varphi''}(\frac{1}{t}) + \frac{1}{t^2}\,\overline{\psi'}(\frac{1}{t}), \quad t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \boldsymbol{C}_{11} \tag{3.2}$$

根据方程（3.2），$\varphi'(z)$的定义域可通过跨越边界 $\boldsymbol{C}_{11}$从 $\boldsymbol{\Omega}^+$ 扩展至 $\boldsymbol{\Omega}^-$：

$$\varphi'(z) = -\overline{\varphi'}(\frac{1}{z}) + \frac{1}{z}\,\overline{\varphi''}(\frac{1}{z}) + \frac{1}{z^2}\,\overline{\psi'}(\frac{1}{z}), \quad z \in \boldsymbol{\Omega}^- \tag{3.3}$$

由于 $\varphi(z)$、$\psi(z)$、$\varphi'(z)$和 $\psi'(z)$在区域 $\boldsymbol{\Omega}^+$内均解析，且当 $z \in \boldsymbol{\Omega}^-$时，$\frac{1}{z} \in \boldsymbol{\Omega}^+$，因此 $\varphi'(\frac{1}{z})$、$\varphi''(\frac{1}{z})$和 $\psi'(\frac{1}{z})$随后也将解析。因此，方程（3.3）的右端在区域 $\boldsymbol{\Omega}^-$内解析。随后，$\varphi'(\zeta)$在区域 $\boldsymbol{\Omega}^-$内解析。利用方程（3.3），方程（3.2）可改写为

$$\varphi'^{+}(t) - \varphi'^{-}(t) = 0, \quad t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \boldsymbol{C}_{11} \tag{3.4}$$

其中，上标 $^+$ 和 $^-$ 分别表示 $\varphi'(z)$ 从区域 $\boldsymbol{\Omega}^+$ 和 $\boldsymbol{\Omega}^-$ 趋近于 $\boldsymbol{C}_{11}$。

在方程（3.3）中用 z^{-1} 替换 z，并取共轭，得到

$$\psi'(z) = \frac{1}{z^2}\overline{\varphi'}(\frac{1}{z}) + \frac{1}{z^2}\varphi'(z) - \frac{1}{z}\varphi''(z), \quad z \in \boldsymbol{\Omega}^+ \tag{3.5}$$

方程（3.5）表明，$\psi'(z)$ 在 $\boldsymbol{\Omega}^+$ 中有定义且解析，但在 $\boldsymbol{\Omega}^-$ 中无定义。

将方程（2.1c）代入方程（2.2b），得到

$$g(t) = \kappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 0, \quad t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \boldsymbol{C}_{12} \tag{3.6}$$

对方程（3.6）中的 θ 求导（$t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$），得到

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}\theta} = \mathrm{i}t\kappa\varphi'(t) - \mathrm{i}t\overline{\varphi'(t)} + \mathrm{i}\bar{t}t\overline{\varphi''(t)} + \mathrm{i}\bar{t}\,\overline{\psi'(t)} = 0, \quad t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \boldsymbol{C}_{12} \tag{3.7}$$

注意到 $t = \frac{1}{t}$ 沿着 $\boldsymbol{C}_{12}$，并利用链式法则，方程（3.7）可写为

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{i}t}\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}\theta} = \kappa\varphi'(t) - \overline{\varphi'}(\frac{1}{t}) + \frac{1}{t}\overline{\varphi''}(\frac{1}{t}) + \frac{1}{t^2}\overline{\psi'}(\frac{1}{t}) = 0, \quad t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \boldsymbol{C}_{12} \tag{3.8}$$

显然，方程（3.8）右端的最后三项与方程（3.2）中的相同。考虑方程（3.3），方程（3.8）可改写为

$$\kappa\varphi'^{+}(t) + \varphi'^{-}(t) = 0, \quad t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \boldsymbol{C}_{12} \tag{3.9}$$

方程（3.4）和（3.9）构成整个平面上的齐次黎曼–希尔伯特问题 $0 < \rho < \infty$。

4 黎曼–希尔伯特问题的求解

式（3.9）表明，整个平面中的 $\boldsymbol{C}_{12}$ 上存在一条分支切割，并可根据普勒梅利公式 [Chen，1994年，Muskhelishvili，1966] 得到以下通解：

$$\varphi'(z) = X(z)\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k z^k, \quad 0 < \rho < \infty \tag{4.1}$$

其中

$$X(z)=(z-t_1)^{-\gamma}(z-t_2)^{\gamma-1},\quad \gamma=\frac{1}{2}+\mathrm{i}\lambda,\quad \lambda=\frac{\ln\kappa}{2\pi},\quad t_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},t_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} \tag{4.2}$$

d_k 是待定的复系数，需根据沿 $\boldsymbol{C}_2$ 的边界条件以及沿 $\boldsymbol{C}_1$未使用的边界条件来确定。通解表明在原点和无穷远处存在极点， t_1 和 t_2 也为极点。

注意，式（2.3）的右端是有理形式，因此，为了比较系数，应将 X（z）整理为有理形式。利用泰勒展开， X（z）可分别在区域 $\boldsymbol{\Omega}^+$ 和 $\boldsymbol{\Omega}^-$ 中展开为

$$X(z)=-t_1^{-\gamma}t_2^{\gamma-1}(1-t_1^{-1}z)^{-\gamma}(1-t_2^{-1}z)^{\gamma-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^k,\quad z\in\boldsymbol{\Omega}^+ \tag{4.3a}$$

$$X(z)=z^{-1}(1-t_1z^{-1})^{-\gamma}(1-t_2z^{-1})^{\gamma-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k z^{-k},\quad z\in\boldsymbol{\Omega}^- \tag{4.3b}$$

其中，详细的 α_k 和 β_k 的表达式可见附录。将式（4.3）代入式（4.1），得 s

$$\varphi'^{+}(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k z^k,\quad z\in\boldsymbol{\Omega}^+,\quad A_k=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l d_{k-l} \tag{4.4a}$$

$$\varphi'^{-}(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}B_k z^k,\quad z\in\boldsymbol{\Omega}^-,\quad B_k=\sum_{l=1}^{\infty}\beta_l d_{k+l} \tag{4.4b}$$

将式（4.4a）代入式（3.5），得

$$\psi'(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\overline{B}_{-k-2}-(k+1)A_{k+2}\right]z^k,\quad z\in\boldsymbol{\Omega}^+ \tag{4.5}$$

将方程（4.4）、（4.5）和（2.1b）代入方程（2.2c）中的内边界条件，可得

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[A_k r^k+(k+1)\overline{A}_{-k}(1-r^{-2})r^{-k}-B_k r^{-k-2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(p_k+\mathrm{i}q_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} \tag{4.6}$$

其中， r 为内半径 r_i的值。比较各系数，可得

$$r^{-1}A_{-1}-r^{-1}B_{-1}=p_{-1}+\mathrm{i}q_{-1} \tag{4.7a}$$

$$A_k r^k+(k+1)\overline{A}_{-k}(1-r^{-2})r^{-k}-B_k r^{-k-2}=p_k+\mathrm{i}q_k,\quad k\le -2\text{ or }k\ge 0 \tag{4.7b}$$

由于内边界允许任意变形，方程（4.7）中关于 d_k 的线性约束应完整涵盖方程（2.2c）中的边界条件。同时，方程（3.4）和（3.9）分别仅约束边界 $\boldsymbol{C}_{11}$ 和 $\boldsymbol{C}_{12}$上的牵引力与位移，但并不完全等同于方程（2.2a）和（2.2b）中的边界条件。因此，还应分别考察 $\boldsymbol{C}_{11}$ 和 $\boldsymbol{C}_{12}$ 上的位移与牵引力，从而为 d_k 补充必要的线性约束，形成联立线性约束。

沿 $\boldsymbol{C}_{11}$ 的位移和沿 $\boldsymbol{C}_{12}$ 的牵引力可通过以下两种并行方式进行解释，并相应地给出两个并行广义解。这两种解在应力和位移方面均具有令人满意的精度。这两种解的主要区别在于对边界 $\boldsymbol{C}_1$ 以及极点t_1 和 t_2的处理。

4.1 解 1

式（3.4）表明，沿边界 C_{11}的牵引力可以延拓，而沿边界 $\boldsymbol{C}_{12}$ 的牵引力尚未得到考察。根据整个环域的静力平衡，沿边界 $\boldsymbol{C}_{12}$作用的合力应为

$$\int_{\boldsymbol{C}_{12}} [\sigma_\rho(t) + \mathrm{i}\tau_{\rho\theta}(t)]\,\mathrm{d}t = -\oint_{\boldsymbol{C}_2} [\sigma_\rho(s) + \mathrm{i}\tau_{\rho\theta}(s)]\,\mathrm{d}s = -\mathrm{i}\int_{2\pi}^{0} (p_{-1} + \mathrm{i}q_{-1}) r \mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}(p_{-1} + \mathrm{i}q_{-1}) r \tag{4.8}$$

积分从 2π 到 0 的原因是为了使区域 $\boldsymbol{\Omega}$ 位于边界 $\boldsymbol{C}_2$的左侧。另一方面，

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{C}_{12}} [\sigma_\rho(t) + \mathrm{i}\tau_{\rho\theta}(t)]\,\mathrm{d}t &= \int_{\boldsymbol{C}_{12}} \left[\varphi'^{+}(t) - \varphi'^{-}(t)\right] \mathrm{d}t \\
&= \int_{\boldsymbol{C}_{12}} \left[\varphi'^{+}(t) - \varphi'^{-}(t)\right] \mathrm{d}t + \int_{\boldsymbol{C}_{11}} \left[\varphi'^{+}(t) - \varphi'^{-}(t)\right] \mathrm{d}t \\
&= \oint_{\boldsymbol{C}_1} \left[\varphi'^{+}(t) - \varphi'^{-}(t)\right] \mathrm{d}t \\
&= 2\pi\mathrm{i}A_{-1} - 2\pi\mathrm{i}B_{-1}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

式（4.9）中的最后一个等号是由代入式（4.4）并应用留数定理得到的。尽管式（4.4a）和式（4.4b）的定义域分别为 $z \in \boldsymbol{\Omega}^{+}(0 < \rho < r_o)$ 和 $z \in \boldsymbol{\Omega}^{-}(\rho > r_o)$，但应用留数定理的前提仅在于被积函数是否在某个区域内解析，定义域并非其前提。如式（4.4a）和式（4.4b）所示，$\varphi'^{+}(z)$ 和 $\varphi'^{-}(z)$ 均为有理式，除原点和无穷远点外，可在整个复平面上解析。因此，可以沿 $\boldsymbol{C}_1$ 应用留数定理，式（4.9）中的最后一个等号成立。式（4.8）和式（4.9）进一步从解析角度验证了式（4.7a）。

式（3.7）表明，沿边界 $\boldsymbol{C}_{12}$ 的位移为常数（具体而言为零），而沿边界 $\boldsymbol{C}_{11}$ 的位移尚未考察。显然，点 t_1 和 t_2 的位移应相等且为零，因此有

$$\begin{aligned}
g(t_1) - g(t_2) &= \int_{\boldsymbol{C}_{11}} [\kappa\varphi'^{+}(t) + \varphi'^{-}(t)]\mathrm{d}t \\
&= \int_{\boldsymbol{C}_{11}} [\kappa\varphi'^{+}(t) + \varphi'^{-}(t)]\mathrm{d}t + \int_{\boldsymbol{C}_{12}} [\kappa\varphi'^{+}(t) + \varphi'^{-}(t)]\mathrm{d}t \\
&= \oint_{\boldsymbol{C}_1} [\kappa\varphi'^{+}(t) + \varphi'^{-}(t)]\mathrm{d}t = 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

将式（4.4）代入式（4.10），并应用留数定理，得到

$$\kappa A_{-1} + B_{-1} = 0 \tag{4.11}$$

式（4.11）表明，区域 $\boldsymbol{\Omega}$ 内的位移具有单值性。

联立求解式（4.7a）和式（4.11），得到

$$\begin{cases}
A_{-1} = \dfrac{(p_{-1} + \mathrm{i}q_{-1}) r}{1 + \kappa} \\
B_{-1} = \dfrac{-\kappa(p_{-1} + \mathrm{i}q_{-1}) r}{1 + \kappa}
\end{cases} \tag{4.12}$$

式（4.12）中的系数与内周边 $\boldsymbol{C}_2$ 上的不平衡合力相吻合。式（4.7b）和式（4.12）构成了解 1 的 d_k 联立线性约束。

理论上有许多求解方法，我们也尝试过其中一些。例如，方程（4.7b）和（4.12）构成了一个复杂的线性方程组，理论上可以运用线性代数求得直接解；

然而，由于存在 r^k 和 r^{-k}，系数矩阵的条件数通常过大，难以得到正确解。此外，理论上也可以采用非凸优化技术求解；然而，由于可能存在许多局部极小值，收敛并无保证。经过尝试，最终采用了逐次逼近法 [Sugiura, 1969]，因为它能大幅降低系数矩阵的条件数，从而具有良好的数值稳定性和鲁棒性。

根据式（4.4）展开式（4.12）和式（4.7b），得到

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l d_{-1-l} = \dfrac{(p_{-1}+\mathrm{i}q_{-1})r}{1+\kappa} \\ \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l d_{-1+l} = \dfrac{-\kappa(p_{-1}+\mathrm{i}q_{-1})r}{1+\kappa} \end{cases} \tag{4.13a}$$

$$\begin{cases} r^{-k}\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l d_{-k-l} + (-k+1)(1-r^{-2})r^k \sum_{l=0}^{\infty} \overline{\alpha}_l \overline{d}_{k-l} - r^{k-2}\sum_{l=1}^{\infty} \beta_l d_{-k+l} = p_{-k}+\mathrm{i}q_{-k}, \quad k \geq 2 \\ r^{k}\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l d_{k-l} + (k+1)(1-r^{-2})r^{-k} \sum_{l=0}^{\infty} \overline{\alpha}_l \overline{d}_{-k-l} - r^{-k-2}\sum_{l=1}^{\infty} \beta_l d_{k+l} = p_{k}+\mathrm{i}q_{k}, \quad k \geq 0 \end{cases} \tag{4.13b}$$

式（4.13）可整理为以下平衡方程：

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l d_{-1-l} = \dfrac{(p_{-1}+\mathrm{i}q_{-1})r}{1+\kappa} \\ \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l d_{-k-l} = (k-1)(1-r^{-2})r^{2k}\overline{A}_k + r^{2k-2}B_{-k} + r^k(p_{-k}+\mathrm{i}q_{-k}), \quad k \geq 2 \end{cases} \tag{4.14a}$$

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l d_{-1+l} = & \dfrac{-\kappa(p_{-1}+\mathrm{i}q_{-1})r}{1+\kappa} \\ \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l d_{l} = & r^2 A_0 + (1-r^{-2})r^2\overline{A}_0 + r^2(p_0+\mathrm{i}q_0) \\ \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l d_{1+l} = & r^4 A_1 + 2(1-r^{-2})r^3\dfrac{x_0-\mathrm{i}y_0}{1+\kappa} + r^3(p_1+\mathrm{i}q_1) \\ \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l d_{k+l} = & r^{2k+2}A_k + (k^2-1)(1-r^{-2})^2 r^{2k+2}A_k + (k+1)(1-r^{-2})r^{2k}\overline{B}_{-k} \\ & +(k+1)(1-r^{-2})r^{k+2}(p_{-k}-\mathrm{i}q_{-k}) + r^{k+2}(p_k+\mathrm{i}q_k), \quad k \geq 2 \end{cases} \tag{4.14b}$$

其中，A_k（$k \geq 0$）和 B_{-k}（$k \geq 2$）根据式（4.4）计算。

假设 d_k 可展开为：

$$\begin{cases} d_k = \sum_{q=0}^{\infty} d_k^{(q)}, \quad k \geq 0 \\ d_{-k} = \sum_{q=0}^{\infty} d_{-k}^{(q)}, \quad k \geq 1 \end{cases} \tag{4.15}$$

我们寻求 $d_k^{(q)}$ $(k \geq 0)$ 和 $d_{-k}^{(q)}$ $(k \geq 1)$ 的近似解，根据方程 (4.14)，采用以下迭代方法。当 $q=0$ 时，我们设定

，

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l d_{-1-l}^{(0)} = \dfrac{(p_{-1}+\mathrm{i}q_{-1})r}{1+\kappa} \\ \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l d_{-k-l}^{(0)} = r^k(p_{-k}+\mathrm{i}q_{-k}), \quad k \geq 2 \end{cases} \tag{4.16a}$$

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l d_{-1+l}^{(0)} = \dfrac{-\kappa(p_{-1}+\mathrm{i}q_{-1})r}{1+\kappa} \\ \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l d_{l}^{(0)} = r^2(q_0+\mathrm{i}q_0) \\ \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l d_{1+l}^{(0)} = 2(1-r^{-2})r^3\dfrac{p_{-1}-\mathrm{i}q_{-1}}{1+\kappa} + r^3(p_1+\mathrm{i}q_1) \\ \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l d_{k+l}^{(0)} = (k+1)(1-r^{-2})r^{k+2}(p_{-k}-\mathrm{i}q_{-k}) + r^{k+2}(p_k+\mathrm{i}q_k), \quad k \geq 2 \end{cases} \tag{4.16b}$$

方程 (4.16) 确定 $d_k^{(0)}$ ($k \geq 0$) 和 $d_{-k}^{(0)}$ ($k \geq 1$) 以开始迭代。然后对于 $q \geq 0$，可根据方程 (4.4) 计算 $A_k^{(q)}$ ($k \geq 0$) 和 $B_{-k}^{(q)}$ ($k \geq 2$) 如下：

$$\begin{cases} A_k^{(q)} = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \alpha_l d_{k-l}^{(q)}, \quad k \geq 0 \\ B_{-k}^{(q)} = \sum\limits_{l=1}^{\infty} \beta_l d_{-k+l}^{(q)}, \quad k \geq 2 \end{cases} \tag{4.17}$$

对于 $q \geq 1$，可计算 $d_k^{(q)}$ ($k \geq 0$) 和 $d_{-k}^{(q)}$ ($k \geq 1$)：

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{\infty} \alpha_l d_{-1-l}^{(q)} = 0 \\ \sum\limits_{l=0}^{\infty} \alpha_l d_{-k-l}^{(q)} = (k-1)(1-r^{-2}) r^{2k} \overline{A}_k^{(q-1)} + r^{2k-2} B_{-k}^{(q-1)}, \quad k \geq 2 \end{cases} \tag{4.18a}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{\infty} \beta_l d_{-1+l}^{(q)} = 0 \\ \sum\limits_{l=1}^{\infty} \beta_l d_{l}^{(q)} = r^2 A_0^{(q-1)} + (1-r^{-2}) r^2 \overline{A}_0^{(q-1)} \\ \sum\limits_{l=1}^{\infty} \beta_l d_{1+l}^{(q)} = r^4 A_1^{(q-1)} \\ \sum\limits_{l=1}^{\infty} \beta_l d_{k+l}^{(q)} = r^{2k+2} A_k^{(q-1)} + (k^2-1)(1-r^{-2})^2 r^{2k+2} A_k^{(q-1)} + (k+1)(1-r^{-2}) r^{2k} \overline{B}_{-k}^{(q-1)}, \quad k \geq 2 \end{cases} \tag{4.18b}$$

然后设置 q： $q+1$ 代入式 (4.17)，继续迭代。

由于 $r \in (0,\ 1)$，式 (4.18) 中 $A_k^{(q-1)}$ ($k \geq 0$) 和 $B_{-k}^{(q-1)}$ ($k \geq 2$) 前面的所有系数（包括其共轭）均小于 1，因此，随着迭代进行，式 (4.18a) 和式 (4.18b) 的右端项将逐渐趋近于零。由于迭代过程中常数向量的所有元素都趋近于零，线性解也将趋近于零。因此，式 (4.16)–(4.18) 中迭代过程的收敛性得以保证。

4.2 解 2

在解 1 的式 (4.9) 和 (4.10) 中，应用留数定理，以一种数学上合理的方式通过越过 $\varphi'^{+}(z)$ 和 $\varphi'^{-}(z)$ 的定义域，消去了两个极点 t_1 和 t_2，并得到一个数学上优雅的解析解。在解 2 中，我们严格将 $\varphi'^{+}(z)$ 和 φ'^{-} 分别限制在定义域 $\boldsymbol{\Omega}^{+}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}^{-}$ 内，而不应用留数定理。

根据式 (3.9) 和 (3.4)，式 (4.9) 和 (4.10) 可分别改写为

$$\int_{\boldsymbol{C}_{12}} [\sigma_\rho(t) + \mathrm{i}\tau_{\rho\theta}(t)]\,\mathrm{d}t = \int_{\boldsymbol{C}_{12}} \left[\varphi'^{+}(t) - \varphi'^{-}(t)\right]\mathrm{d}t = -\frac{1+\kappa}{\kappa} \int_{\boldsymbol{C}_{12}} \varphi'^{-}(t)\mathrm{d}t = -\frac{1+\kappa}{\kappa} \int_{\boldsymbol{C}_{12}} \varphi'(t)\mathrm{d}t \tag{4.19}$$

$$g(t_1) - g(t_2) = \int_{\boldsymbol{C}_{11}} \left[\kappa\varphi'^{+}(t) - \varphi'^{-}(t)\right]\mathrm{d}t = (1+\kappa) \int_{\boldsymbol{C}_{11}} \varphi'^{+}(t)\mathrm{d}t = (1+\kappa) \int_{\boldsymbol{C}_{11}} \varphi'(t)\mathrm{d}t \tag{4.20}$$

在式 (4.19) 中，积分时使用 $\varphi'^{-}(z)$ 而非 $\varphi'^{+}(z)$，因为边界 $\boldsymbol{C}_{12}$ 上的牵引力是区域 $\boldsymbol{\Omega}^{-}$施加的约束力。同时，在式 (4.20) 中，积分时使用 $\varphi'^{+}(z)$ 而非$\varphi'^{-}(z)$，因为点 t_1 和 t_2 的位移差应发生在环域 $\boldsymbol{\Omega}$内，而该环域与区域 $\boldsymbol{\Omega}^{+}$存在相交区域。分别将式 (4.19) 和式 (4.20) 与式 (4.9) 和式 (4.10) 比较， $\varphi'^{+}(z)$ 和 $\varphi'^{-}(z)$ 的定义域并未被超出。这种差异会导致求解过程不同，并需要更多数学推导。

根据环域的静力平衡和式 (4.8)，式 (4.19) 应满足

$$\int_{\boldsymbol{C}_{12}} \varphi'(t)\mathrm{d}t = -\frac{2\pi\mathrm{i}\kappa}{1+\kappa}(p_{-1}+\mathrm{i}q_{-1})r \tag{4.21}$$

同时，根据式 (4.10) 中的位移相等关系，式 (4.20) 应满足

$$\int_{\boldsymbol{C}_{11}} \varphi'(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{4.22}$$

将式 (4.1) 代入式 (4.19) 和 (4.20)，得到

$$\int_{\boldsymbol{C}_{12}} \varphi'(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{12,k}d_k \tag{4.23}$$

$$\int_{\boldsymbol{C}_{11}} \varphi'(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{11,k}d_k \tag{4.24}$$

其中

$$c_{12,k} = \mathrm{i}\int_{\theta_2}^{\theta_1} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1})^{-\gamma}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2})^{\gamma-1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\theta}\mathrm{d}\theta \tag{4.25a}$$

$$c_{11,k} = \mathrm{i}\int_{\theta_2}^{\theta_1+2\pi} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1})^{-\gamma}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2})^{\gamma-1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\theta}\mathrm{d}\theta \tag{4.25b}$$

式 (4.25a) 和 (4.25b) 的积分区间分别为 θ_2 至 θ_1 和 θ_2 至 $\theta_1+2\pi$，以使区域 $\boldsymbol{\Omega}^-$ 和 $\boldsymbol{\Omega}^+$ 分别位于边界 $\boldsymbol{C}_{12}$ 和 $\boldsymbol{C}_{11}$的左侧。式 (4.25) 中的系数可通过数值积分近似求得，详情见附录 B。

我们将考察式 (4.23) 与 (4.7a) 之间的数学关系，以判断其是否与式 (4.9) 中的关系相同。式 (4.7a) 和 (4.23) 可展开并改写为

$$\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l d_{-1-l} + \sum_{l=1}^{\infty}(-\beta_l)d_{-1+l} = (p_{-1}+\mathrm{i}q_{-1})r \tag{4.26a}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(-\frac{1+\kappa}{2\pi\mathrm{i}\kappa}\right)c_{12,-1-l}d_{-1-l} + \sum_{l=1}^{\infty}\left(-\frac{1+\kappa}{2\pi\mathrm{i}\kappa}\right)c_{12,-1+l}d_{-1+l} = (p_{-1}+\mathrm{i}q_{-1})r \tag{4.26b}$$

在考虑式 (A.1) 中 α_l 的可能多值性的情况下，对比式 (4.26) 中的系数可得

$$c_{12,-1-l} = \begin{cases} -\dfrac{2\pi\mathrm{i}\kappa}{1+\kappa}\alpha_l, & \theta_1 \text{ and } \theta_2 \text{ are in same period} \\ \mathrm{e}^{-2\pi\lambda}\cdot\dfrac{2\pi\mathrm{i}\kappa}{1+\kappa}\alpha_l, & \theta_1 \text{ and } \theta_2 \text{ are in different periods} \end{cases}, \quad l\geq 0 \tag{4.27a}$$

$$c_{12,-1+l} = \frac{2\pi\mathrm{i}\kappa}{1+\kappa}\beta_l, \quad l\geq 1 \tag{4.27b}$$

在式 (4.27) 中，一个周期为 $[-\pi+2n\pi, \pi+2n\pi)$，其中 n 是任意整数。式 (4.27) 中的等式将在第 5 节的数值算例中进行数值检验。因此，式 (4.23) 等价于式 (4.7a)，这与根据式 (4.9) 推导出的结果完全相同。

式（4.24）和式（4.7）构成了解 2 的 d_k 同步线性约束系统，数值算例表明，该系统等价于解 1 的同步线性系统，这一点已在第 5 节中得到验证。与解 1 类似，这里采用逐次逼近法。为确保收敛，我们对解 1 的逼近策略稍作调整。式（4.7b）可展开并改写为

$$\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l d_{-k-l} = (k-1)(1-r^{-2})r^{2k}\overline{A}_k + r^{2k-2}B_{-k} + r^k(p_{-k}+\mathrm{i}q_{-k}), \quad k\geq 2 \tag{4.28a}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{\infty}\beta_l d_l = & r^2A_0+(1-r^{-2})r^2\overline{A}_0+r^2(p_0+\mathrm{i}q_0) \\ \sum\limits_{l=1}^{\infty}\beta_l d_{1+l} = & r^4A_1+2(1-r^{-2})r^2\overline{B}_{-1}+2(1-r^{-2})r^3(p_{-1}-\mathrm{i}q_{-1})+r^3(p_1+\mathrm{i}q_1) \\ \sum\limits_{l=1}^{\infty}\beta_l d_{k+l} = & r^{2k+2}A_k+(k^2-1)(1-r^{-2})^2r^{2k+2}A_k+(k+1)(1-r^{-2})r^{2k}\overline{B}_{-k} \\ & +(k+1)(1-r^{-2})r^{k+2}(p_{-k}-\mathrm{i}q_{-k})+r^{k+2}(p_k+\mathrm{i}q_k),\quad k\geq 2 \end{cases} \tag{4.28b}$$

而式（4.7a）和式（4.25）可展开并改写为

$$\alpha_0 d_{-1}-\beta_1 d_0=-\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_l d_{-1-l}+\sum_{l=2}^{\infty}\beta_l d_{-1+l}+r(p_{-1}+\mathrm{i}q_{-1}) \tag{4.29a}$$

$$c_{11,-1}d_{-1}+c_{11,0}d_0=-\sum_{l=2}^{\infty}c_{11,-l}d_{-l}-\sum_{l=1}^{\infty}c_{11,l}d_l \tag{4.29b}$$

假设 d_k 可以展开成与式 (4.16) 相同的形式，则应用以下迭代方法。当 $q=0$时，我们设

$$\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l d_{-k-l}^{(0)}=r^k(p_{-k}+\mathrm{i}q_{-k}),\quad k\geq 2 \tag{4.30a}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{\infty}\beta_l d_l^{(0)}=r^2(p_0+\mathrm{i}q_0) \\ \sum\limits_{l=1}^{\infty}\beta_l d_{k+l}^{(0)}=(k+1)(1-r^{-2})r^{k+2}(p_{-k}-\mathrm{i}q_{-k})+r^{k+2}(p_k+\mathrm{i}q_k),\quad k\geq 1 \end{cases} \tag{4.30b}$$

式 (4.30) 给出 $d_{-k}^{(0)}$ ($k\geq 2$) 和 $d_k^{(0)}$ ($k\geq 1$)，我们可以通过以下方式计算 $d_{-1}^{(0)}$ 和 $d_0^{(0)}$

$$\alpha_0 d_{-1}^{(0)}-\beta_1 d_0^{(0)}=-\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_l d_{-1-l}^{(0)}+\sum_{l=2}^{\infty}\beta_l d_{-1+l}^{(0)}+r(p_{-1}+\mathrm{i}q_{-1}) \tag{4.31a}$$

$$c_{11,-1}d_{-1}^{(0)}+c_{11,0}d_0^{(0)}=-\sum_{l=2}^{\infty}c_{11,-l}d_{-l}^{(0)}-\sum_{l=1}^{\infty}c_{11,l}d_l^{(0)} \tag{4.31b}$$

式 (4.30) 和式 (4.31)依次确定 $d_{-k}^{(0)}$ ($k\geq 2$) 和 $d_k^{(0)}$ ($k\geq 1$)，$d_{-1}^{(0)}$ 和 $d_0^{(0)}$ 用于开始迭代。对于 $q\geq 0$，A_k^q ($k\geq 0$) 和 $B_{-k}^{(q)}$ ($k\geq 1$) 可按如下方式计算

$$\begin{cases} A_k^{(q)}=\sum\limits_{l=0}^{\infty}\alpha_l d_{k-l}^{(q)},\quad k\geq 0 \\ B_{-k}^{(q)}=\sum\limits_{l=1}^{\infty}\beta_l d_{-k+l}^{(q)},\quad k\geq 1 \end{cases} \tag{4.32}$$

对于 $q\geq 1$，$d_{-k}^{(q)}$ （$k\geq 2$）和 $d_k^{(q)}$ （$k\geq 1$）可确定为

$$\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l d_{-k-l}^{(q)}=(k-1)(1-r^{-2})r^{2k}\overline{A}_k^{(q-1)}+r^{2k-2}B_{-k}^{(q-1)},\quad k\geq 2 \tag{4.33a}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{\infty}\beta_l d_l^{(q)} = & r^2A_0^{(q-1)}+(1-r^{-2})r^2\overline{A}_0^{(q-1)} \\ \sum\limits_{l=1}^{\infty}\beta_l d_{1+l}^{(q)} = & r^4A_1^{(q-1)}+2(1-r^{-2})r^2\overline{B}_{-1}^{(q-1)} \\ \sum\limits_{l=1}^{\infty}\beta_l d_{k+l}^{(q)} = & r^{2k+2}A_k^{(q-1)}+(k^2-1)(1-r^{-2})^2r^{2k+2}A_k^{(q-1)}+(k+1)(1-r^{-2})r^{2k}\overline{B}_{-k}^{(q-1)},\quad k\geq 2 \end{cases} \tag{4.33b}$$

然后我们可以通过 $d_{-1}^{(q)}$ 和 $d_0^{(q)}$ 计算

$$\alpha_0 d_{-1}^{(q)} - \beta_1 d_0^{(q)} = -\sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l d_{-1-l}^{(q)} + \sum_{l=2}^{\infty} \beta_l d_{-1+l}^{(q)} \tag{4.34a}$$

$$c_{11,-1} d_{-1}^{(q)} + c_{11,0} d_0^{(q)} = -\sum_{l=2}^{\infty} c_{11,-l} d_{-l}^{(q)} - \sum_{l=1}^{\infty} c_{11,l} d_l^{(q)} \tag{4.34b}$$

然后令 q： $q+1$ 代入式 (4.31)，继续进行迭代。

与解 1 类似， A_k（$k \geq 0$）和 B_{-k}（$k \geq 1$）前的所有系数（包括它们的共轭）都小于 1，因此，随着迭代的进行，式 (4.33) 的右端项将趋于零，左端的 $d_{-k}^{(q)}$（$k \geq 2$）和 $d_k^{(q)}$（$k \geq 1$）也将趋于零。随后，随着迭代的进行， $d_{-1}^{(q)}$ 和 $d_0^{(q)}$ 也将趋于零。因此，式 (4.30)–(4.34) 中迭代过程的收敛性得以保证。

4.3 带截断的最终解

为获得实际计算结果，我们必须将式 (2.3) 和 (4.1) 中的无穷级数截断为 $2N+1$ 项。对于解 1，式 (4.16a) 和 (4.18a) 转化为包含 N 个复变量和 N 个复线性方程的联立复线性方程组；式 (4.16b) 和 (4.18b) 转化为包含 $N+1$ 个复变量和 $N+1$ 个复线性方程的联立复线性方程组；式 (4.18) 也变为有限形式。对于解 2，式 (4.30a) 和 (4.33a) 转化为包含 $N-1$ 个复变量和 $N-1$ 个复线性方程的联立复线性方程组；式 (4.30b) 和 (4.33b) 转化为包含N 个复变量和 N 个复线性方程的联立复线性方程组；式 (4.32) 也变为有限形式。式 (4.16) 和 (4.18) 的系数矩阵彼此相同，式 (4.30) 和 (4.33) 的系数矩阵也彼此相同，且这些矩阵在迭代过程中不会改变；如数值算例所示，条件数较小。

当满足以下条件时，迭代可以停止

$$\max |d_k^{(q)}| \leq \epsilon, \quad -N \leq k \leq N \tag{4.35}$$

其中， ϵ 表示误差容限。迭代停止时，将最大迭代次数记录为 Q。

解 d_k 给出了式（4.4）中的 A_k 和 B_k，环域内的复势可通过式（4.4a）和（4.5）求得，形式如下:

$$\varphi'(z) = \sum_{k=-N}^{N} A_k z^k \cdot F(k), \quad z \in \boldsymbol{\Omega}, \quad A_k = \sum_{l=0}^{N+k} \alpha_l d_{k-l} \tag{4.36a}$$

$$\psi'(z) = \sum_{k=-N}^{N} \left[\overline{B}_{-k} - (k-1)A_k\right] z^{k-2} \cdot F(k), \quad z \in \boldsymbol{\Omega}, \quad B_k = \sum_{l=1}^{N-k} \beta_l d_{k+l} \tag{4.36b}$$

其中， F（k）（$-N \leq k \leq N$）表示 Lanczos 滤波参数 [Lanczos，1956年，Singh 和 Bhandakkar，2019年，Chawde 和 Bhandakkar， 2021]，可表示为

$$F(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \sin\left(\frac{|k|}{N}\pi\right) / (\frac{|k|}{N}\pi), & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.37}$$

最后，归一化后，式（2.1）中的应力和位移分量可表示为

$$\Sigma_\theta(\rho,\theta) + \Sigma_\rho(\rho,\theta) = 4\Re \sum_{k=-N}^{N} \frac{F(k)}{G} \cdot A_k \rho^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}, \quad z \in \boldsymbol{\Omega} \tag{4.38a}$$

$$\Sigma_\rho(\rho,\theta)+\mathrm{i}\Sigma_{\rho\theta}(\rho,\theta)=\sum_{k=-N}^{N}\frac{F(k)}{G}\cdot\left[\rho^k A_k+(k+1)(1-\rho^{-2})\rho^{-k}\overline{A}_{-k}-\rho^{-k-2}B_k\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta},\quad z\in\boldsymbol{\Omega} \tag{4.38b}$$

$$\begin{aligned}U(\rho,\theta)+\mathrm{i}V(\rho,\theta)=&\sum_{k=0}^{N}\frac{F(k)}{2Gr_o}\cdot\left[\kappa A_k\frac{\rho^{k+1}}{k+1}-\overline{A}_{-k}\rho^{-k+1}(1-\rho^{-2})-B_k\frac{\rho^{-k-1}}{-k-1}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\theta}\\&+\frac{F(1)}{2Gr_o}\cdot[(\kappa A_{-1}-B_{-1})\log\rho-\overline{A}_1\rho^2]-(D_x+\mathrm{i}D_y)\qquad,\quad z\in\boldsymbol{\Omega}\\&+\sum_{k=2}^{N}\frac{F(k)}{2Gr_o}\cdot\left[\kappa A_{-k}\frac{\rho^{-k+1}}{-k+1}-\overline{A}_k\rho^{k+1}(1-\rho^{-2})-B_{-k}\frac{\rho^{k-1}}{k-1}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-k+1)\theta}\end{aligned} \tag{4.38c}$$

其中，$\Sigma_\theta=\sigma_\theta/G$、$\Sigma_\rho=\sigma_\rho/G$、$\Sigma_{\rho\theta}=\tau_{\rho\theta}/G$、$U=u/r_o$、$V=v/r_o$、$D_x$ 和 D_y 分别表示归一化后的水平和垂直刚体位移。

5 数值算例

我们将通过四个平面应变条件下单位圆环的数值算例，考察上述两种并行解。这四个算例的解均使用 FORTRAN 编写，并在 GCC 11 上运行。使用 LAPAPCK/complex16 中的 ZGESVD 程序包计算式（4.17）和（4.19）中系数矩阵的条件数，并使用 ZGESV 程序包求解相应的复线性方程组。式（4.35）中的误差容限取$\epsilon=10^{-20}$。作为对比，采用 ABAQUS 2020，通过有限元法对相同算例进行计算。

这四个算例的示意图分别见图 2a–5a。情况 A 表示一个一般情形，即内边界上施加非平衡牵引力，外边界上设置任意支承。情况 B 是情况 A 的一个特例，其几何形状、支承和牵引力均为轴对称。情况 C 表示一个一般情形，即内边界上施加平衡牵引力，外边界上设置任意支承。工况D 是情况 A 的一个特例，其几何形状和支承为轴对称，牵引力则呈中心对称。

输入参数（$\nu, p_k+\mathrm{i}q_k, r_i/r_o, \theta_1, \theta_2, N$）、条件数（$N_{C1}, N_{C2}$）、最大迭代次数（$Q$）以及 M_1 和 M_2 列于表 1。为保证精度，截断数取 $N=60$。表 1 表明，系数矩阵的条件数较小，因此计算结果准确。

表 1 显示，迭代次数通常随环形区域内半径与外半径之比的增大而增加。更具体地说，除方程（4.18b）和（4.33b）中的（$1-r^{-2}$）r^2 外，方程（4.18）和（4.33）中的所有系数都可以写成 r^k（$k\geq 2$）的和。当 r 趋近于 0 时，r^k（$k\geq 2$）趋近于 0，收敛速度很快；而（$1-r^{-2}$）r^2 则趋近于 -1，收敛速度慢得多。同样，当 r 趋近于 1 时，（$1-r^{-2}$）r^2 趋近于 0，收敛速度很快；而 r^k（$k\geq 2$）则趋近于 1，收敛速度慢得多。这种系数安排揭示了一个规律：当 r 趋近于 0 或 1 时，求解中采用的逐次逼近法收敛相对较慢；而当其取 0 到 1 之间的某个值时，收敛速度可能达到最大。表 1 验证了这一规律。迭代计算速度很快，通常每种情况耗时不到 1 秒。因此，计算精度和速度都令人满意。

将这四种情况的相同输入参数代入 ABAQUS 2020，即可相应获得有限元解以供比较。为确保有限元解具有足够高的精度，我们在四种情况的有限元模型中，分别沿环形区域的内外周边设置 360 个和 720 个种子点；这四种情况下的单元数量分别为 95462、61817、38005 和 30007。

四种情况下解析解与有限元解的比较结果分别见图 2–5。请注意，ABAQUS 中的符号规则与本研究解析解中的符号规则不同。因此，为使结果与相应有限元解一致，这四种情况下的所有应力和位移分量均取负号。

图 2–5 表明，在半径为 r_o、 r_i 和 r_ρ 的三个数据选取圆上，解 1、解 2 与有限元解的应力和位移分量均吻合良好。图 2c–5c 和图 2d–5d 中半径为 r_i 的数据选取圆上的解析结果，分别与这四个环形区域内周边界条件的极坐标形式相应解析表达式完全一致（需取负号以遵循相同的符号规则），如图 2a–5a 所示。图 4c 中有限元结果的 r_i 径向应力与精确值 -1 略有偏差。其原因可能是，在 ABAQUS 中，位移约束边界条件严格满足预设的精度要求，而表面力边界条件则可采用较低的精度要求，以确保收敛。上述比较表明，本研究中的解 1 和解 2 得到的应力与位移结果几乎相同，且比有限元解更加准确、稳健。

图 2–5 中由解 1 和解 2 求得的应力与位移分量一致，这或许表明从数值角度来看，这两个解是相同的，尽管它们分别采用了式 (4.11) 和式 (4.24) 中不同的外边界条件。现在，我们应利用数值结果检查外边界 $\boldsymbol{C}_{12}$ 和 $\boldsymbol{C}_{11}$ 上的边界条件，以进一步确认并验证这一判断。

首先，我们通过验证式 (4.27) 中提出的等式，检查这两个解在边界 $\boldsymbol{C}_{12}$ 上的边界条件。为便于说明，定义以下四个变量：

$$S_1 = \frac{\Re\left[\frac{2\pi \mathrm{i}\kappa}{1+\kappa}\alpha_l\right]}{\Re[c_{12,-1-l}]}, \quad S_2 = \frac{\Im\left[\frac{2\pi \mathrm{i}\kappa}{1+\kappa}\alpha_l\right]}{\Im[c_{12,-1-l}]}, \quad S_3 = \frac{\Re\left[\frac{2\pi \mathrm{i}\kappa}{1+\kappa}\beta_l\right]}{\Re[c_{12,-1+l}]}, \quad S_4 = \frac{\Im\left[\frac{2\pi \mathrm{i}\kappa}{1+\kappa}\beta_l\right]}{\Im[c_{12,-1+l}]}$$

根据式 (4.27)， S_1 和 S_2 理论上应等于 -1，而 S_3 和 S_4 理论上应等于 1。由于$c_{12,\ k}$ 是通过式 (B.4) 中的数值积分计算得到的，且容易受到精度影响，因此我们将表 1 中 M_2 的值放大十倍。这四个变量在四种情况下的计算结果见图 6。显然，图 6 中的结果接近期望值。零值表示对称性。若采用更大的 M_2 值，振荡将逐渐消失。因此，图 6 中的数值结果验证了式 (4.27)，并进而确认了式 (4.7a) 与式 (4.23) 的一致性。

此外，我们通过比较由解 1 和解 2 求得的 d_k，考察沿边界 $\boldsymbol{C}_{11}$ 的边界条件。解 1 和解 2 均采用式（4.7）中的边界条件，但分别采用式（4.11）和式（4.24）。如果这两种解求得的 d_k 值相同，则式（4.11）和式（4.24）中的边界条件等价。图 7 对比了由解 1 和解 2 求得的 d_k 的实部和虚部，结果表明这两种解求得的 d_k 高度一致，说明式（4.24）是一个线性

组合，从线性代数的角度看，它由式（4.7）和式（4.11）组合而成；这两种解在数值上等价。

6 备注与讨论

(a) 为应用留数定理，解 1 中突破了 $\varphi'^{+}(z)$ 和 $\varphi'^{-}(z)$ 的定义域，并建立了一种数学上优雅而简洁的求解方法。严格来说，突破定义域在数学上可能存在缺陷。与此同时，解 2 中 $\varphi'^{+}(z)$ 和 $\varphi'^{-}(z)$ 的定义域保持完整。这种处理方式体现了更高的数学严谨性，但求解方法也更加复杂。与解 1 相比，解 2 中的每次迭代都被分为两个子迭代，以确保收敛。此外，式（4.25）中的反常积分是通过数值方法计算的。因此，在数值算例中，解 2 的计算量比解 1 更大，编码工作量也远多于解 1。四个数值算例详细验证了这两种并行解在数值上相互等价。因此，如果不优先考虑数学严谨性，实际应用中可以优先考虑解 1，以降低计算量和编码工作量。

(b) 式（4.9）—（4.11）的推导消除了文献 [Sugiura，1973年1969]中类似步骤所存在的歧义。式（4.1）中的未知系数 d_k 应当且只能依据边界条件确定，而不能依据其他条件，因为这是通解与定解之间正确而严格的求解步骤。文献 [Sugiura， 1969] 中的式（23）和文献 [Sugiura， 1973]中的式（33）似乎是由位移与复势之间的一般关系推导而来。为更具体、方便地说明，我们使用本文中的符号来展示这一过程。将式（4.4a）和（4.5）代入式（2.1），可得:

$$
\begin{aligned}
g(z) =& \kappa \int \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k z^k \mathrm{d}z - z \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{A}_k \overline{z}^k - \int \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[B_{-k-2} - (k+1)\overline{A}_{k+2} \right] \overline{z}^k \mathrm{d}\overline{z} \\
=& \kappa A_{-1} \mathrm{Log} z - B_{-1} \mathrm{Log} z + g_0(z, \overline{z}) \\
=& (\kappa A_{-1} + B_{-1}) \cdot 2\pi \mathrm{i} n + \kappa A_{-1} \log z - B_{-1} \log z + g_0(z, \overline{z})
\end{aligned}
$$

其中，Log 和 log 分别表示多值和单值自然对数函数， g_0（z， z）表示其余单值函数。显然，环域内位移的单值性要求 $\kappa A_{-1} + B_{-1} =$0，因此这与式（4.11）相吻合。由此看来，上述推导是正确的。然而，从概念层面看，这种推导是错误的。由于 A_{-1} 和 B_{-1} 是为求得式（4.4）中的 d_k 而引入的中间符号，因此它们属于式（4.1）—（4.23）中从通解到定解的求解过程，这意味着只能使用边界条件。然而，上述推导与任何边界条件都无关。因此，不能在求解过程中使用上述推导。

(c) 与参考文献 [Sugiura、1973年、1969年和 Yau、 1968], 中的解相比，本文的混合边界条件由作用于外周边的部分固定约束和作用于内周边的任意牵引力组成。因此，本文的并行解均具有广泛适用性，有望用于更复杂的实际情况。

(d) 本文的两种解均通过数值算例与相应的有限元结果进行比较，得到了验证。此外，结果表明，所提出的解比相应的有限元解具有高得多的精度和更好的鲁棒性。

A 附录 A

泰勒展开中系数的解析表达式如下:

$$\begin{cases} \alpha_0 = & -t_1^{-\gamma} t_2^{\gamma-1} \\ \alpha_1 = & -t_1^{-\gamma} t_2^{\gamma-1} [\gamma t_1^{-1} - (\gamma-1) t_2^{-1}] \\ \alpha_k = & -t_1^{-\gamma} t_2^{\gamma-1} [(-1)^k \frac{h(-\gamma,k)}{k!} t_1^{-k} + (-1)^k \frac{h(\gamma-1,k)}{k!} t_2^{-k} \\ & +(-1)^k \sum_{l=1}^{k-1} \frac{h(-\gamma,l)}{l!} \frac{h(\gamma-1,k-l)}{(k-l)!} \cdot t_1^{-l} t_2^{-k+l}], \quad k \geq 2 \end{cases} \tag{A.1}$$

$$\begin{cases} \beta_1 = & 1 \\ \beta_2 = & \gamma t_1 - (\gamma-1) t_2 \\ \beta_k = & (-1)^{k-1} \frac{h(-\gamma,k-1)}{(k-1)!} t_1^{k-1} + (-1)^{k-1} \frac{h(\gamma-1,k-1)}{(k-1)!} t_2^{k-1} \\ & +(-1)^{k-1} \sum_{l=1}^{k-2} \frac{h(-\gamma,l)}{l!} \frac{h(\gamma-1,k-l-1)}{(k-l-1)!} \cdot t_1^{l} t_2^{k-l-1}, \quad k \geq 3 \end{cases} \tag{A.2}$$

其中

$$\begin{cases} h(-\gamma,k) = -\gamma(-\gamma-1)(-\gamma-2)\cdots(-\gamma-k+1) \\ h(\gamma-1,k) = (\gamma-1)(\gamma-2)(\gamma-3)\cdots(\gamma-k) \end{cases} \tag{A.3}$$

B 附录 B

为避免式（4.26）中反常积分的多值性，我们将在实数域内进行积分。因此，式（4.26）中的被积函数应整理为以下形式：

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1})^{-\gamma}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2})^{\gamma-1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\theta}\\
=&K_0\left(\sin\frac{\theta-\theta_1}{2}\cdot\sin\frac{\theta-\theta_2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sin\frac{\theta-\theta_2}{2}}{\sin\frac{\theta-\theta_1}{2}}\right)^{\mathrm{i}\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta}\\
=&\begin{cases}
-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\pi\lambda}K_0\left(\sin\dfrac{\theta-\theta_1}{2}\cdot\sin\dfrac{\theta_2-\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[\cos\eta_2(k,\theta)+\mathrm{i}\sin\eta_2(k,\theta)\right], & \theta\in(\theta_1,\theta_2)\\
\quad K_0\left(\sin\dfrac{\theta-\theta_1}{2}\cdot\sin\dfrac{\theta-\theta_2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[\cos\eta_1(k,\theta)+\mathrm{i}\sin\eta_1(k,\theta)\right], & \theta\in(\theta_2,\theta_1+2\pi)
\end{cases}
\end{aligned}\tag{B.1}$$

其中

$$\begin{cases}
K_0=-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\exp\left[\dfrac{\lambda}{2}(\theta_1-\theta_2)-\dfrac{\mathrm{i}}{4}(\theta_1+\theta_2)\right]\\
\eta_2(k,\theta)=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\theta+\lambda\ln\dfrac{\sin\frac{\theta_2-\theta}{2}}{\sin\frac{\theta-\theta_1}{2}}\\
\eta_1(k,\theta)=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\theta+\lambda\ln\dfrac{\sin\frac{\theta-\theta_2}{2}}{\sin\frac{\theta-\theta_1}{2}}
\end{cases}\tag{B.2}$$

则式（4.26）中的广义积分可等价地改写为

$$\begin{aligned}
c_{12,k}=&-\mathrm{e}^{\pi\lambda}K_0\lim_{\delta\to0}\int_{\theta_1+\delta}^{\theta_2-\delta}\left(\sin\frac{\theta-\theta_1}{2}\cdot\sin\frac{\theta_2-\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos\eta_2(k,\theta)\mathrm{d}\theta\\
&-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\pi\lambda}K_0\lim_{\delta\to0}\int_{\theta_1+\delta}^{\theta_2-\delta}\left(\sin\frac{\theta-\theta_1}{2}\cdot\sin\frac{\theta_2-\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sin\eta_2(k,\theta)\mathrm{d}\theta
\end{aligned}\tag{B.3a}$$

$$\begin{aligned}
c_{11,k}=&\mathrm{i}K_0\lim_{\delta\to0}\int_{\theta_2+\delta}^{\theta_1+2\pi-\delta}\left(\sin\frac{\theta-\theta_1}{2}\cdot\sin\frac{\theta-\theta_2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos\eta_1(k,\theta)\mathrm{d}\theta\\
&-K_0\lim_{\delta\to0}\int_{\theta_2+\delta}^{\theta_1+2\pi-\delta}\left(\sin\frac{\theta-\theta_1}{2}\cdot\sin\frac{\theta-\theta_2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin\eta_1(k,\theta)\mathrm{d}\theta
\end{aligned}\tag{B.3b}$$

其中，δ 表示一个很小的数值。为便于计算，$c_{12,\ k}$ 的积分方向反转。于是，式（B.3）中的复积分分别转化为两个不含复变量分支的实积分，并可近似求得为

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to0}\int_{\theta_1+\delta}^{\theta_2-\delta}\left(\sin\frac{\theta-\theta_1}{2}\cdot\sin\frac{\theta_2-\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cos\eta_2(k,\theta)\mathrm{d}\theta\\
=&\sum_{m=1}^{M_2}\left(\sin\frac{\theta_{(m)}-\theta_1}{2}\cdot\sin\frac{\theta_2-\theta_{(m)}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos\eta_2(k,\theta_{(m)})\cdot\Delta\theta_2
\end{aligned}\tag{B.4a}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to0}\int_{\theta_1+\delta}^{\theta_2-\delta}\left(\sin\frac{\theta-\theta_1}{2}\cdot\sin\frac{\theta_2-\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin\eta_2(k,\theta_{(m)})\mathrm{d}\theta\\
=&\sum_{m=1}^{M_2}\left(\sin\frac{\theta_{(m)}-\theta_1}{2}\cdot\sin\frac{\theta_2-\theta_{(m)}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin\eta_2(k,\theta_{(m)})\cdot\Delta\theta_2
\end{aligned}\tag{B.4b}$$

其中

$$\begin{cases}
\Delta\theta_2=\dfrac{\theta_2-\theta_1}{M_2+1}\\
\theta_{(m)}=\theta_1+m\cdot\Delta\theta_2
\end{cases}\tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta\to 0}\int_{\theta_2+\delta}^{\theta_1+2\pi-\delta}\left(\sin\frac{\theta-\theta_1}{2}\cdot\sin\frac{\theta-\theta_2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos\eta_1(k,\theta)\mathrm{d}\theta_1\\&=\sum_{m=1}^{M_1}\left(\sin\frac{\theta_{(m)}-\theta_1}{2}\cdot\sin\frac{\theta_{(m)}-\theta_2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos\eta_1(k,\theta_{(m)})\cdot\Delta\theta_1\end{aligned}\tag{B.6a}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta\to 0}\int_{\theta_2+\delta}^{\theta_1+2\pi-\delta}\left(\sin\frac{\theta-\theta_1}{2}\cdot\sin\frac{\theta-\theta_2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin\eta_1(k,\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\sum_{m=1}^{M_1}\left(\sin\frac{\theta_{(m)}-\theta_1}{2}\cdot\sin\frac{\theta_{(m)}-\theta_2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin\eta_1(k,\theta_{(m)})\cdot\Delta\theta_1\end{aligned}\tag{B.6b}$$

其中

$$\begin{cases}\Delta\theta_1=\dfrac{\theta_1-\theta_2+2\pi}{M_1+1}\\\theta_{(m)}=\theta_2+m\cdot\Delta\theta_1\end{cases}\tag{B.7}$$

M_2 和 M_1 是两个较大的正整数。请注意，公式（B.4）和（B.6）中的求和分别从第 1 项开始，到 M_2和 M_1 为止，因此不会包含极点 t_1 和 t_2。只要 M_2 和 M_1 足够大，公式（B.4）和（B.6）的近似就会足够准确。

致谢

本研究得到中国福建省自然科学基金（项目编号：2022J05190）、福建理工大学科研基金（项目编号：GY-Z20094）、国家自然科学基金委员会（项目编号：52178318）和福建省教育基金会（项目编号：JAT210287）的资助。作者谨向郑昌杰教授、黄益群博士和张晓毅副教授对本研究提出的建议表示感谢。

Case	ν	$p_k + \mathrm{i}q_k$	r_i/r_o	θ_1	θ_2	N	$N_{C1,1}$	$N_{C2,1}$	Q_1 [1]	$N_{C1,2}$	$N_{C2,2}$	Q_2 [2]	M_1	M_2
A	0.3	$q_{-1} = 1$	0.1	$-\frac{\pi}{2}$	0	60	8.76	11.92	140	8.70	11.89	139	$3 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^4$
B	0.3	$p_{-1} = 1$	0.3	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	60	7.59	7.63	29	9.92	9.92	30	$2 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$
C	0.3	$p_0 = 1$	0.5	$-\frac{\pi}{2}$	0	60	8.76	11.92	79	9.32	9.32	239	$3 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^4$
D	0.3	$q_0 = 1$	0.7	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	60	7.59	7.63	286	7.52	7.59	286	$2 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$

[1] $N_{C1,\ 1}$、 $N_{C2,\ 1}$和 Q_1 表示解 1 的条件数和最大迭代次数。[2] $N_{C1,\ 2}$、 $N_{C2,\ 2}$和 Q_2 表示解 2 的条件数和最大迭代次数。表 1：四种情况下的参数

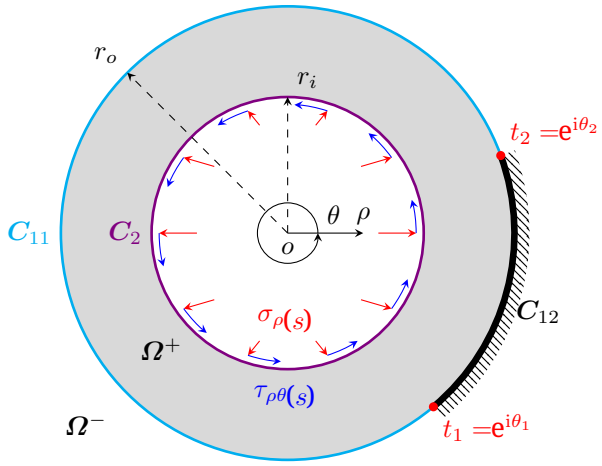
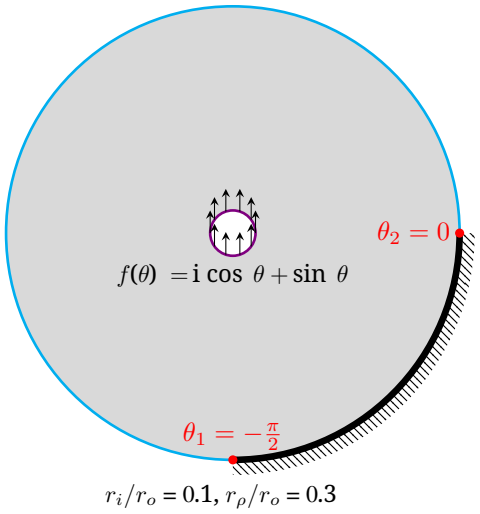
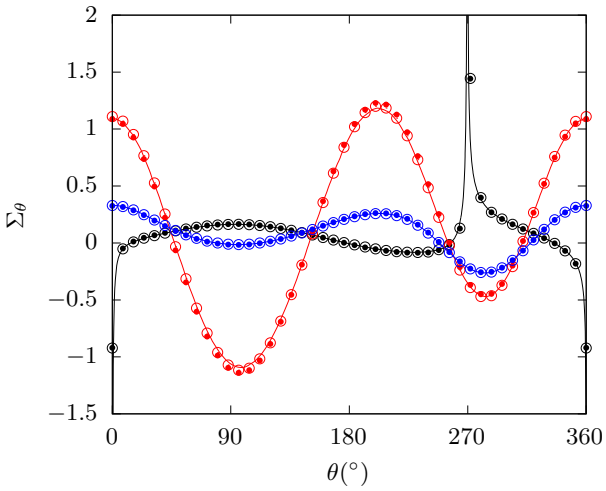


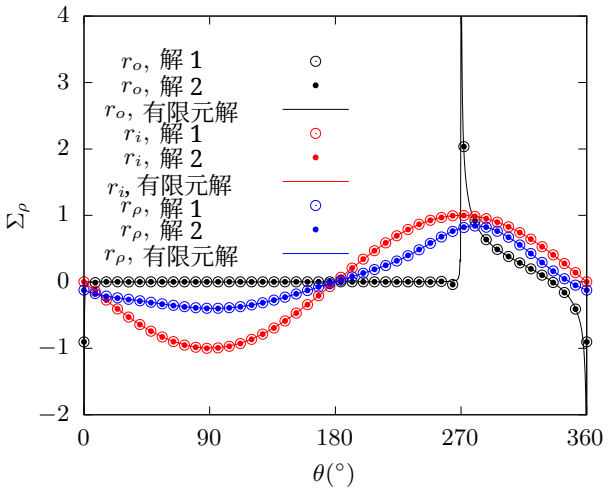
图1：承受任意牵引力的部分固定的单位环域示意图



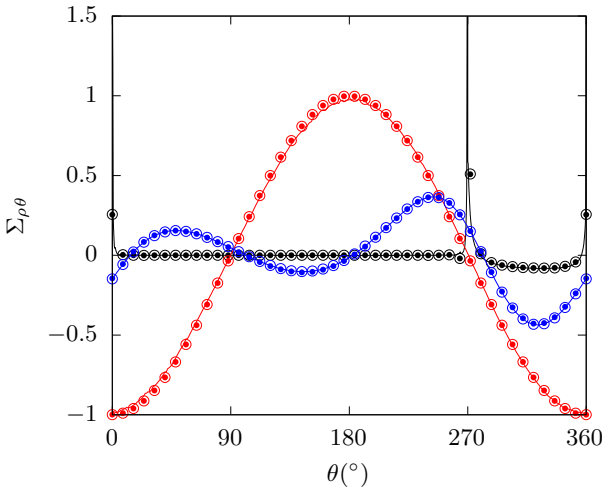
(a) 情况 A 示意图



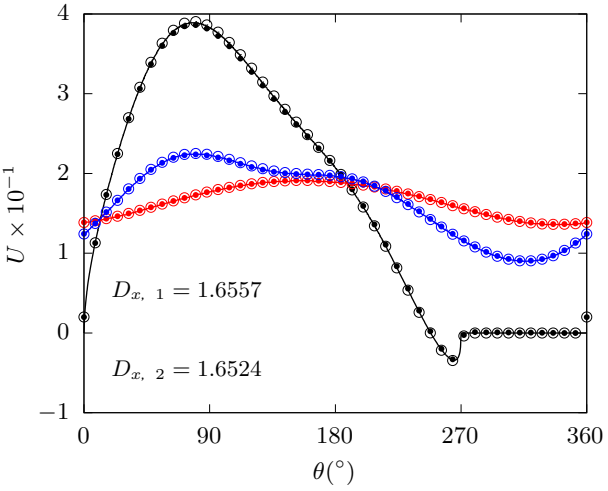
(b) 环向应力



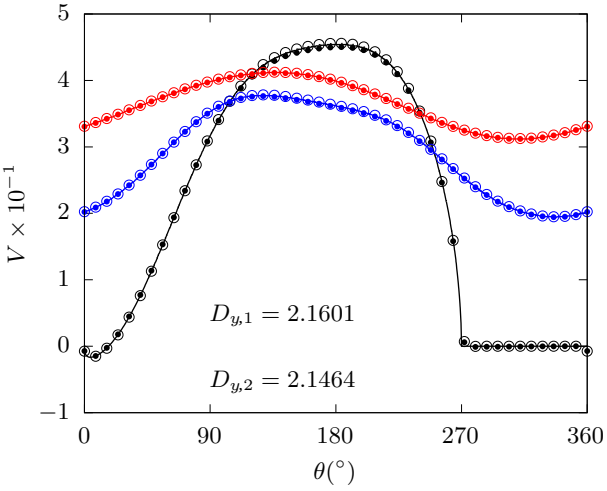
(c) 径向应力



(d) 剪切应力

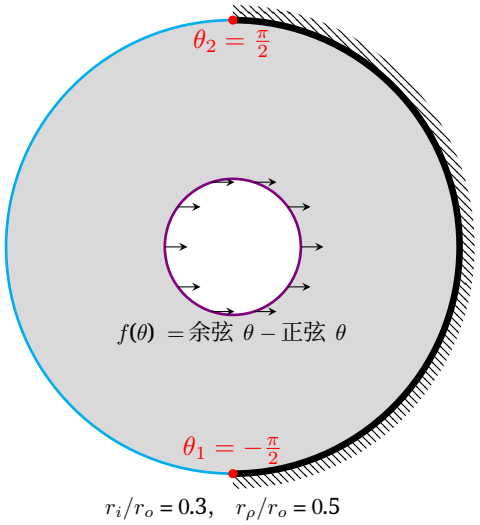


(e) 水平位移

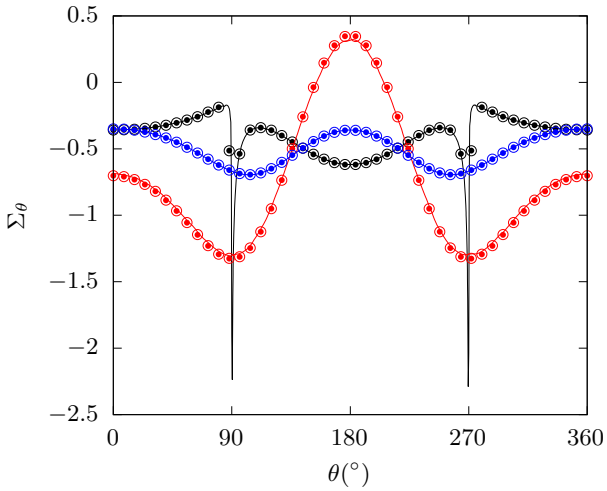


(f) 垂直位移

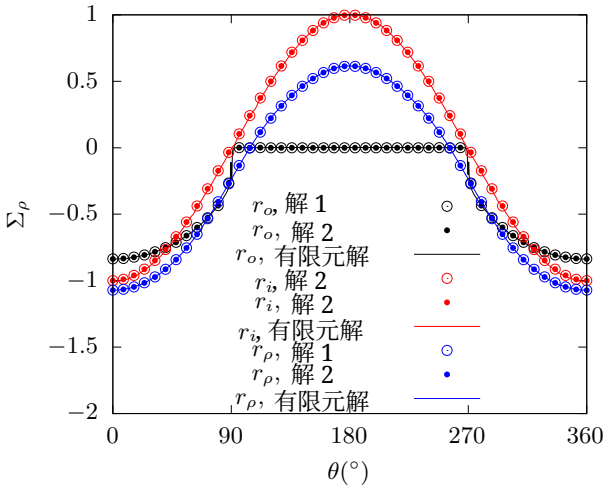
图 2：情况 A 的示意图及应力与位移比较



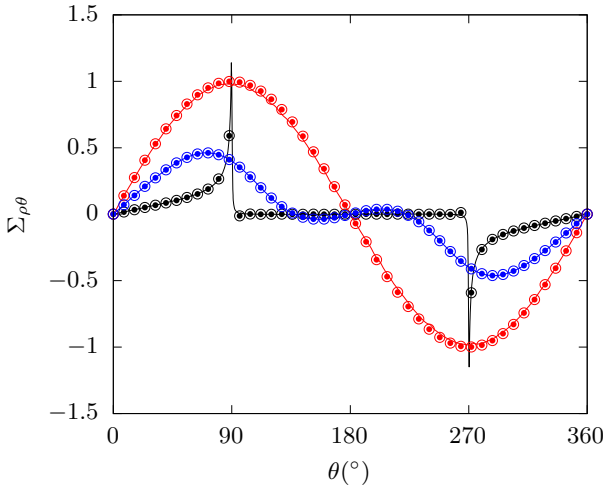
(a) 情况 B 示意图



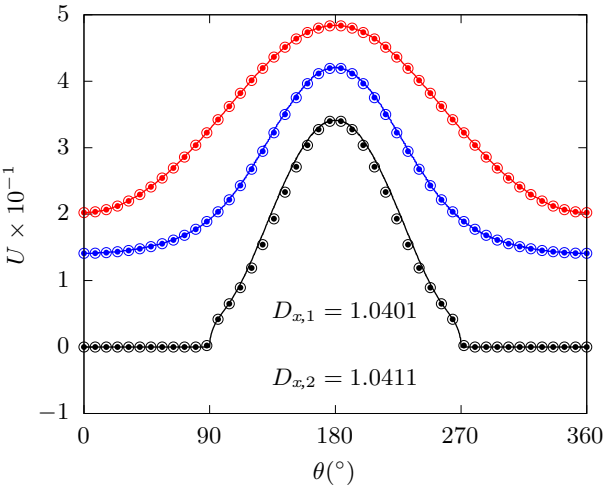
(b) 环向应力



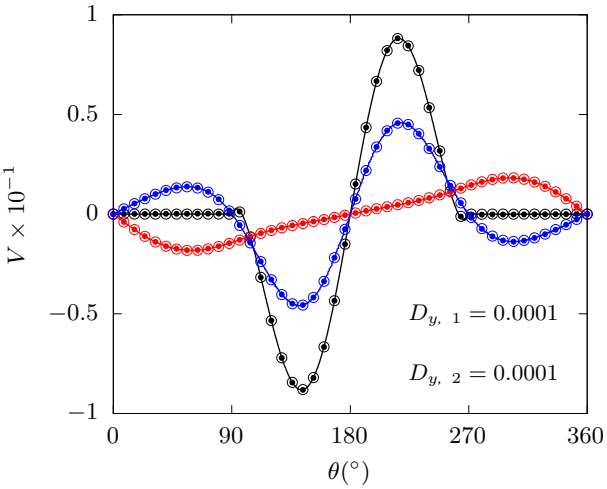
(c) 径向应力



(d) 剪切应力

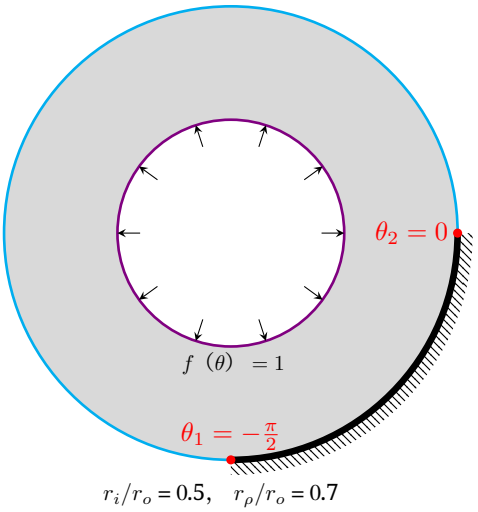


(e) 水平位移

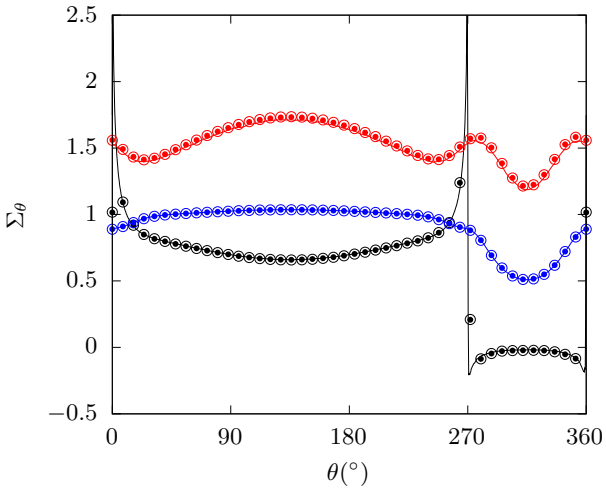


(f) 垂直位移

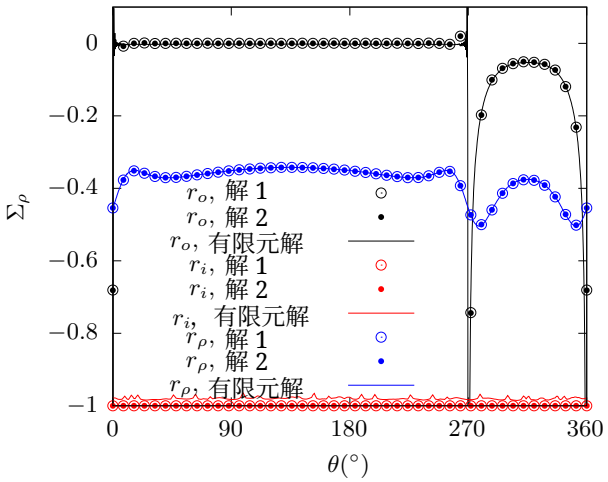
图 3：情况 B 的示意图以及应力与位移比较



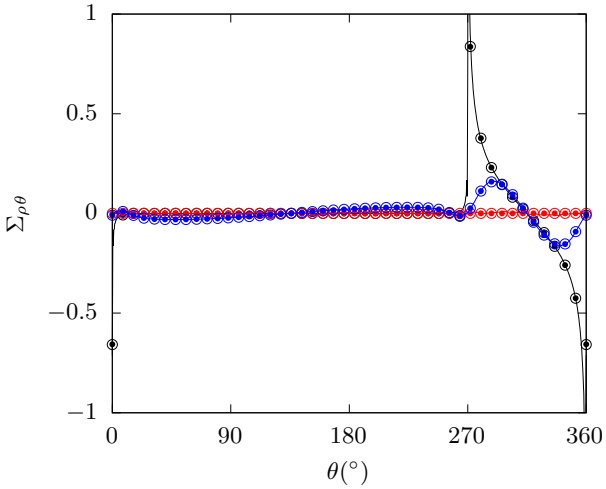
(a) 情况 C 示意图



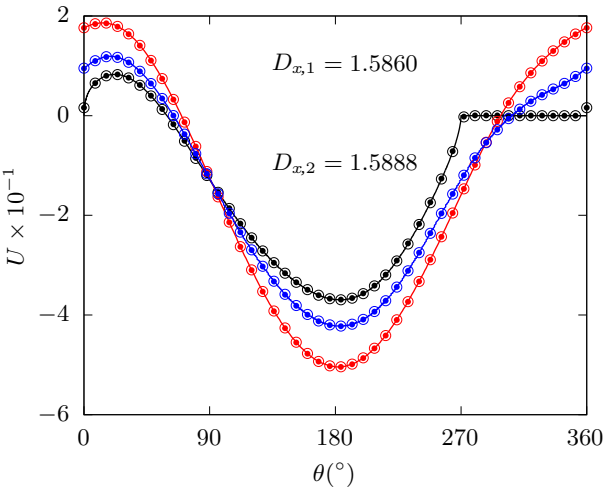
(b) 环向应力



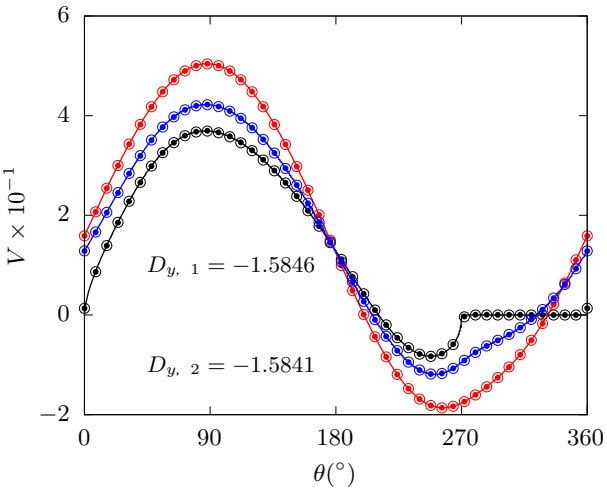
(c) 径向应力



(d) 剪切应力

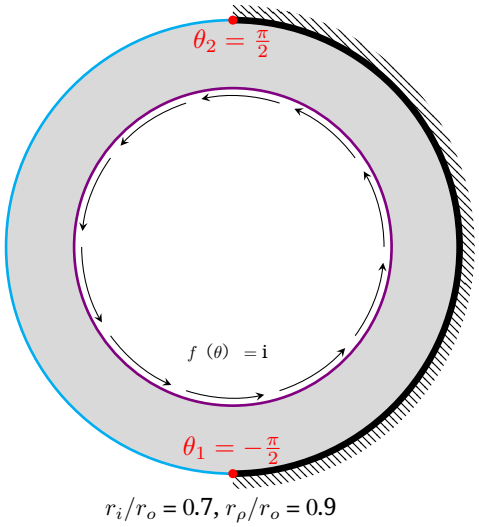


(e) 水平位移

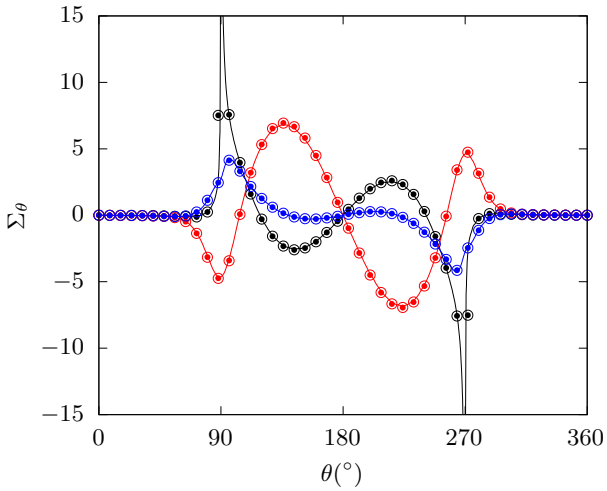


(f) 垂直位移

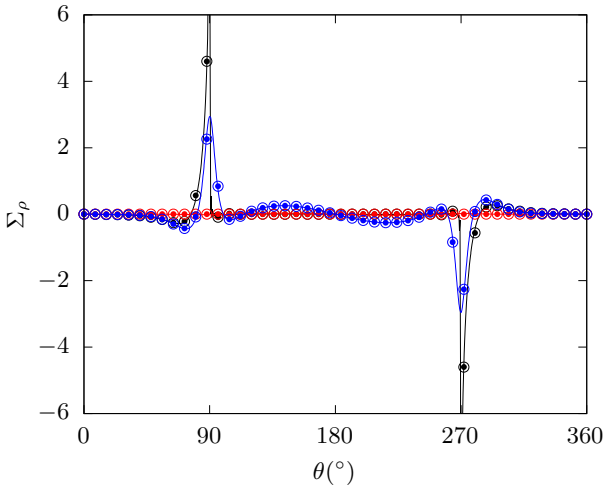
图 4: 情况 C 的示意图及应力与位移比较



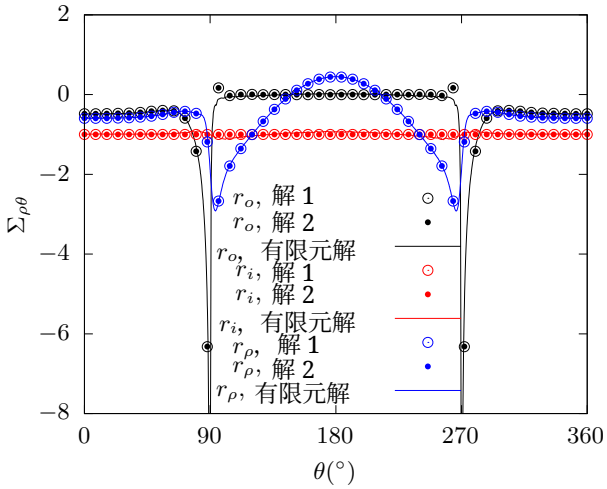
(a) 工况D示意图



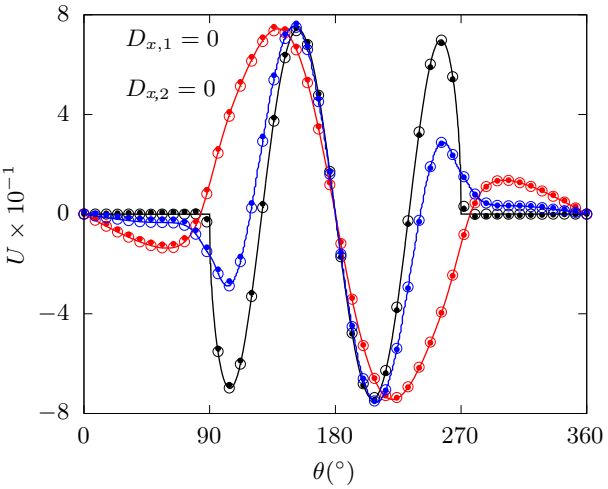
(b) 环向应力



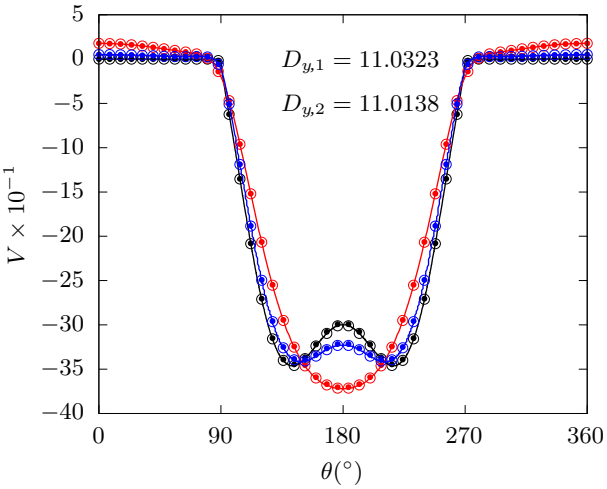
(c) 径向应力



(d) 剪切应力

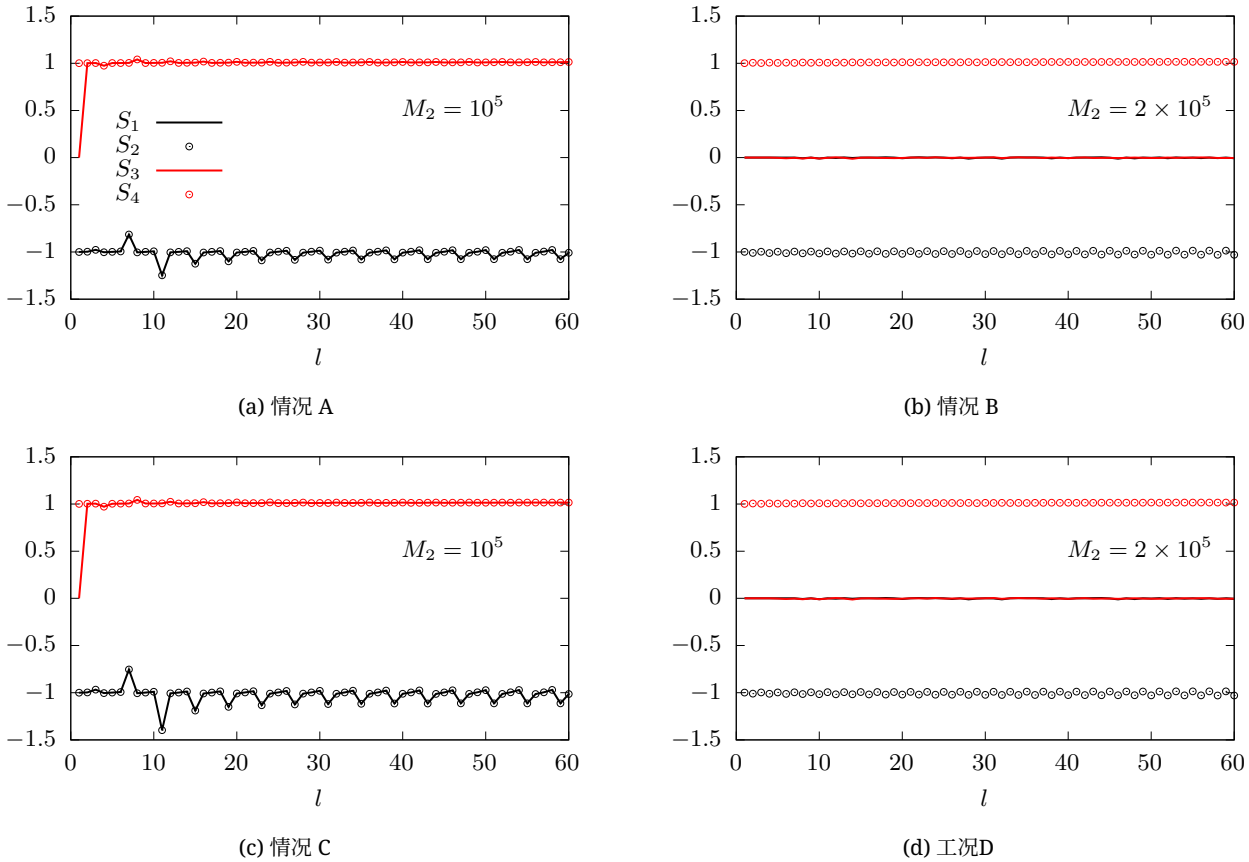


(e) 水平位移



(f) 垂直位移

图5：工况D的示意图及应力与位移比较



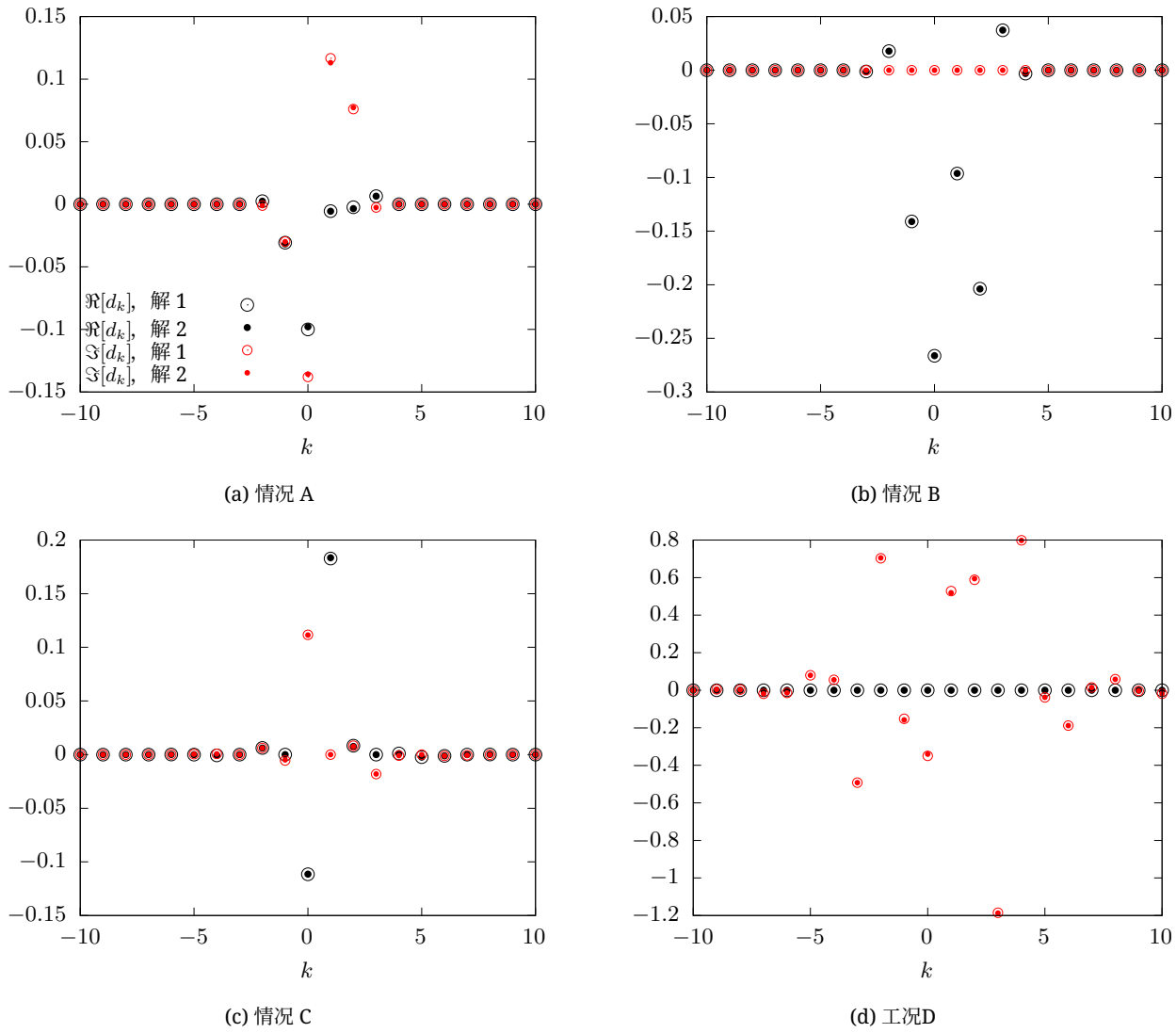
(a) 情况 A

(b) 情况 B

(c) 情况 C

(d) 工况D

图 6：解 2 中四种工况下公式 (4.27) 系数的比较



(a) 情况 A

(b) 情况 B

(c) 情况 C

(d) 工况D

图 7：四种情况下解 1 和解 2 的 d_k 实部和虚部对比

参考文献

Roberto Ballarini. 关于双材料界面的一个混合边值问题。*Internationaljournal of solidsandstructures*，32(3-4):279–289，1995年。AJ Belfield、TG Rogers 和 AJM Spencer. 同心圆排列的纤维增强弹性板中的应力。*Journal of the Mechanics and Physics of Solids*，31(1):25–54，1983年。Dinesh P Chawde 和 Tanmay K Bhandakkar. 幂律功能梯度圆环中的混合边值问题。*International Journal of PressureVessels and Piping*，192:104402，2021年。Ziyin Chen. 岩石力学分析的解析方法。中国煤炭工业出版社，北京，1994。Dean G Duffy. 混合边值问题。CRC出版社，2008年。F Erdogan. 混合边值问题。载于 S. Nemat-Nasser（编），*Mechanics Today*，第4卷，第1–86页。Pergamon，1981年。Hui Fan 和 LM Keer. 各向异性弹性半空间中的二维接触。*JournalofApplied Mechanics*，61 (2):250–255，1994。Norio Hasebe. 利用映射函数分析正交各向异性弹性中的混合边值问题。*International Journal of Solids and Structures*，208:154–166，2021年。Norio Hasebe 和 Masahiro Sato. 准正交各向异性弹性平面的混合边值问题。*Acta Mechanica*，226(2):527–545，2015年。Chyanbin Hwu 和 CW Fan. 扰动边界下二维各向异性弹性的混合边值问题。伦敦皇家学会会刊 *A*辑：数学、物理与工程科学，454(1973):1269–1282，1998年。C. Lanczos. 应用分析。Prentice-Hall，1956年。VM Mirsalimov 和 NM Kalantarly. 混合边界条件下圆盘中的裂纹萌生。*ArchivesofMechanics*，67(2):115–136，2015年。N. I. Muskhelishvili. 弹性数学理论的一些基本问题。剑桥大学出版社，剑桥，第4版，1966。Gunadhar Paria. 抛物线边界下的弹性混合边值问题。*Journal of Applied Mechanics*，24(1):122–124，1957年。APS Selvadurai 和 BM Singh. 各向同性弹性固体的环形裂纹问题。*The Quarterly Journal ofMechanics and Applied Mathematics*，38(2):233–243，1985年。Gaurav Singh 和 Tanmay K Bhandakkar. 弹性均匀圆形区域中混合边值问题的简化求解方法。*Journal of Applied Mechanics*，86(2):021007，2019年。Katsuo Sugiura. 由刚体部分支承的重型弹性圆环。*Bulletin of JSME*，12(52):709–714，1969年。Katsuo Sugiura. 重型弹性圆环的混合边值问题：第二报告，重型弹性圆环在外缘处由两个刚性支座部分支承。*Transactions of the Japan Society ofMechanicalEngineers*，39:3554–3559，1973年。

Stephen P. Timoshenko 和 J. N. Goodier. 弹性理论。McGraw-Hill，纽约，1951。HK Verma. 抛物线边界下的弹性混合边值问题。*Acta Mechanica*，2(4):392–397，1966。

Wen-Foo Yau。《弹性环的混合问题》。*Journal of Applied Mechanics*，35(2):724–728，1968。