加速高周相场疲劳预测

Philip K. Kristensen[a]、Alireza Golahmar[a, b]、Emilio Martínez-Pañeda[b]、Christian F. Niordson[a, *]

[a]丹麦技术大学土木与机械工程系，*DK-2800* 灵比，丹麦[b]伦敦帝国理工学院土木与环境工程系，伦敦 *SW7 2AZ*，英国

arXiv:2304.02516v1 [cs.CE] 5 Apr 2023

摘要

过去十年间，相场断裂模型得到了广泛应用。在这些应用中，利用该模型描述疲劳裂纹的演化尤其受到关注，因为它能够针对任意载荷历程、尺寸以及复杂的裂纹演化现象预测疲劳损伤行为。然而，尽管逐循环计算具有很强的灵活性，计算成本也相当高，限制了相场疲劳模型在技术相关问题中的应用。本文提出了一个用于加速相场疲劳计算的计算框架，并提出两种新颖的加速策略，可结合使用，也可与文献中已有的其他加速方案配合使用。通过一系列二维和三维边值问题，本文评估了所提方法的计算性能，展示了该框架即使在复杂疲劳问题中也具有良好的稳健性和效率。结果表明，同时采用这两种方法可将计算时间缩短至原来的 1/32；随着载荷循环次数增加，缩减幅度还可进一步提高。

关键词：
疲劳、相场断裂、断裂力学、有限元分析

1. 引言

相场断裂模型在过去十年中受到了广泛关注，原因充分。Bourdin等人 [1] 提出的原始模型，是对 Francfort 和 Marigo [2], 的变分断裂公式进行正则化的结果，具有灵活性且易于数值实现，

*通讯作者。电子邮箱： cfni@dtu.dk (Christian F. Niordson)

并且能够轻松捕捉复杂的开裂现象，例如裂纹分支 [3], 合并[4], 复杂的裂纹轨迹 [5]以及从非尖锐缺陷处发生的裂纹成核 [6]。此外，该模型能够自然地捕捉裂纹尺寸效应 [6, 7] ，并可轻松扩展以适应特定的失效面 [8, 9]。该模型已被证明极具通用性，因此广泛应用于各种场景，既用于内聚断裂[10, 11], 微观力学损伤 [12, 13], 和延性断裂 [14, 15], 等复杂断裂问题，也用于多物理场应用，涵盖热冲击 [16] 和湿度效应 [17] ，以及氢脆[18–21]和锂离子电池退化 [22–24]。

在众多推动相场发展的问题中，疲劳无疑是科学和技术领域最重要的问题之一。将相场用作疲劳模型的框架颇具吸引力 [25], ，因为疲劳一直是固体力学领域的一项长期挑战，而足够灵活的相场疲劳模型可以轻松涵盖前述相场模型及其应用。Carrara等人 [26], 的研究提供了这类灵活框架的一个例子：他们引入了一个历史变量，使断裂能取决于材料的加载历史。该模型自然地再现了巴黎定律和 S-N 曲线的行为，并已成为开发适用于各种应用的相场疲劳模型的理想平台 [27–30]。除文献[26], 外，还有其他几项值得关注的研究，既包括逐循环方法 [31–33] ，也包括将巴黎定律行为作为输入的更实用方法 [34]。

与相场断裂相关的两个已知缺点是：需要足够精细的网格来解析相场长度尺度所带来的计算成本 [7], ，以及由于平衡方程的非凸性而导致的求解效率低下 [35]。人们已投入大量努力来解决这两个问题。降低网格划分要求的策略包括自适应网格细化 [36–39], 、专用单元公式 [40] 以及采用有限元-有限体积相结合的方法 [41]。同样，针对求解策略也提出了大量改进方法，包括（残差）控制算法 [42, 43],、拟牛顿方法 [44, 45], 、线搜索算法 [35, 46, 47],以及多重网格方法 [48]。在逐载荷循环进行疲劳计算时，相场断裂的计算成本尤其高昂，从而阻碍了高周疲劳分析。一种常见策略

是采用所谓的 循环跳跃，以降低高周疲劳的计算成本；在该方法中，通过外推逐循环求解结果，跳过若干载荷循环的计算 [49]。Loew等 [27] 针对相场疲劳提出了这样一种方案，即对疲劳历程变量进行局部外推。

本文旨在介绍加速逐循环相场疲劳计算的替代方法。我们提出了两种彼此兼容的方法，它们各自都能显著提升计算性能。此外，这两种方法都不妨碍使用现有的循环跳跃策略；结合这些策略还能进一步提升性能。提出的第一种计算加速方法，是对相场文献中常用的现有交错求解策略进行修改 [43, 50, 51], ，使切线刚度矩阵无需在每个载荷步中更新，而是以因式分解形式存储，从而大幅降低后续增量和迭代的计算成本。下文将此方法称为修正牛顿法（*MN*）。该方法尤其适用于高周疲劳，因为在各个载荷增量之间，整个系统的变化非常微小。第二种方法称为恒定载荷累积 *(CLA)*，适用于载荷循环中仅有一个步骤对疲劳累积贡献显著的问题。对于满足这一假设的系统，可以调整疲劳累积规则，将载荷曲线简化为每个循环仅包含一个载荷增量，从而显著减少模拟中的增量总数。下文将会说明，对于高周问题，该方法还可扩展为在单个增量中捕捉多个载荷循环，且精度损失可以忽略不计，从而进一步提升计算性能。

本文的组织结构如下。第2节阐述了用于逐循环计算的相场疲劳框架。第3节介绍有限元求解的数值细节以及所提出的方法。随后，第4节分析一系列数值算例，以展示所提出方法的能力。最后，第5节给出结论。

2. 疲劳相场模型

本节介绍所采用的具体相场疲劳模型，该模型基于 Carrara等人 [26] 的研究。选择该模型是因为它具有灵活性、易于实现，并适合与其他加速方案（例如文献[27]中的方案）结合使用。此外，本文提出的疲劳加速策略可轻松应用于多种相场疲劳模型，因此，具体采用哪种相场模型并非关键。

2.1. 基本理论

考虑一个边界为 $\partial\Omega \in \mathbb{R}^{n-1}$的实体区域 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 。在小变形条件下，我们考虑位移场 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}$ 和相场变量 $\phi \in [0;\ 1]$, 其取值为 0 表示材料完好，取值为 1 表示材料断裂且刚度消失。随后，标准的所谓 AT2 相场断裂模型 [1] 可通过以下能量泛函的最小化来建立：

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \phi, \nabla\phi) = \int_\Omega \left[\psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \phi) + \frac{G_c}{2}\left(\frac{\phi^2}{\ell} + \ell\nabla\phi\cdot\nabla\phi\right)\right] \mathrm{d}V \tag{1}$$

其中， G_c 为临界能量释放率或材料韧度， ℓ 表示相场长度尺度，而 $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\ \phi)$ 是应变能密度；对于线弹性固体，可将其表示为：

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \phi) = (1-\phi)^2\psi_0(\mathbf{u}) = (1-\phi)^2\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{2}$$

这里，$\mathbf{C}_0$ 是材料的线弹性刚度张量， $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是无穷小应变张量，定义为 $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2$。相场变量 ϕ会使材料刚度退化。

2.2. 疲劳扩展

为将上述断裂框架扩展至考虑疲劳损伤，Carrara 及其合作者[26] 提出引入退化函数 $f(\bar{\alpha})$, 该函数根据累积疲劳历程变量 $\bar{\alpha}$降低材料韧度。退化函数和累积疲劳历程变量的定义均有多种选择。此处与参考文献 [52], 相同，将时间步 $n+1$ 的累积疲劳历程变量定义为未退化弹性应变能密度正增量的累计值：

$$\bar{\alpha}_{n+1} = \bar{\alpha}_n + |\psi_{0,n+1} - \psi_{0,n}| H(\psi_{0,n+1} - \psi_{0,n}), \tag{3}$$

其中， H 为海维赛德函数。我们也按照参考文献 [26],采用渐近疲劳退化函数:

$$f(\bar{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \bar{\alpha} \leq \alpha_T \\ \left(\dfrac{2\alpha_T}{\bar{\alpha} + \alpha_T}\right)^2 & \text{else} \end{cases}. \tag{4}$$

其中，阈值参数 α_T 引入了一个下限，低于该下限时，累积疲劳不会影响材料韧度。此处将该阈值选为 $\alpha_T = G_c/12\ell$。

2.3. 虚功率原理

首先，根据应变能密度 ψ定义柯西应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ ，

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1-\phi)^2 \boldsymbol{\sigma}_0 = (1-\phi)^2 \mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{5}$$

随后，系统的内能可表示为

$$\mathcal{W} = \int_\Omega (1-\phi)^2 \boldsymbol{\sigma}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \, \mathrm{d}V + \int_\Omega \int_0^t f(\bar{\alpha}(\tau)) \frac{G_c}{\ell} \left(\phi\dot{\phi} + \ell^2 \nabla\phi \cdot \nabla\dot{\phi} \right) \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}V. \tag{6}$$

或者 也可以用内功率密度表示为

$$\dot{\mathcal{W}} = \int_\Omega \left[(1-\phi)^2 \boldsymbol{\sigma}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \psi}{\partial \phi}\dot{\phi} + f(\bar{\alpha}(t)) \frac{G_c}{\ell} \left(\phi\dot{\phi} + \ell^2 \nabla\phi \cdot \nabla\dot{\phi} \right) \right] \mathrm{d}V. \tag{7}$$

外功率仅取决于外部机械载荷

$$\dot{\mathcal{F}} = \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, \mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, \mathrm{d}S, \tag{8}$$

其中， $\partial\Omega_t$ 表示施加机械牵引力的边界部分， $\mathbf{t}$ 而$\mathbf{b}$ 为体力。此处省略了相场变量及其功共轭量所产生的外部贡献，因为这里只考虑具有齐次相场边界条件的问题。虚功率平衡要求

$$\dot{\mathcal{W}} - \dot{\mathcal{F}} = 0, \tag{9}$$

经分部积分后，可表示为:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega - \left[(1-\phi)^2 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{b} \right] \cdot \dot{\mathbf{u}} \, \mathrm{d}V + \int_\Omega \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - \frac{G_c}{\ell} \left[f(\bar{\alpha}) \left(\ell^2 \nabla^2 \phi - \phi \right) + \ell^2 \nabla f(\bar{\alpha}) \cdot \nabla\phi \right] \right\} \dot{\phi} \, \mathrm{d}V \\ &+ G_c \ell \int_{\partial\Omega} f(\bar{\alpha}) \nabla\phi \cdot \mathbf{n} \dot{\phi} \, \mathrm{d}S + \int_{\partial\Omega_t} \left[(1-\phi)^2 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t} \right] \cdot \dot{\mathbf{u}} \, \mathrm{d}S = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

上述关系必须对速度 $\dot{\mathbf{u}}$ 和相场增量 ϕ 的任意运动学容许变分成立。根据标准论证，这意味着以下局部平衡方程及相应的边界条件成立：

$$\nabla \cdot \left[(1-\phi)^2 \boldsymbol{\sigma}_0\right] + \mathbf{b} = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{11}$$

$$-2(1-\phi)\psi_0 + f(\bar{\alpha})\frac{G_c}{\ell}\left(\phi - \ell^2\nabla^2\phi\right) - G_c\ell\nabla f(\bar{\alpha})\cdot\nabla\phi = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{12}$$

$$(1-\phi)^2\boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \qquad \text{on } \partial\Omega \tag{13}$$

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega \tag{14}$$

2.4. 应变能分解以妥善处理压缩行为

在其原始公式中，相场断裂模型预测材料在受拉和受压时表现对称。也就是说，压应力和拉应力同等驱动裂纹扩展；由于材料刚度的退化同样具有各向同性，裂纹面可能相互穿透，同时无法承受压缩载荷。常见的缓解策略是将应变能密度分解为主动部分和被动部分，使得：

$$\psi = (1-\phi)^2\psi_0^+(\mathbf{u}) + \psi_0^-(\mathbf{u}) \tag{15}$$

其中，只有应变能密度的主动部分（ψ_0^+）会促进裂纹扩展，且只有刚度的主动部分会因相场变量而退化。针对如何定义应变能密度的主动部分和被动部分，已有多种方案，其中最常用的两种是 Amor等人 [53] 提出的体积/偏偏应变分解，以及 Miehe等人 [54]提出的谱分解。体积/偏偏应变分解定义为

$$\begin{aligned}\psi_0^+ &= \frac{1}{2}K\left\langle \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\right\rangle_+^2 + \mu(\boldsymbol{\varepsilon}_{dev} : \boldsymbol{\varepsilon}_{dev}) \\ \psi_0^- &= \frac{1}{2}K\left\langle \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\right\rangle_-^2 ,\end{aligned} \tag{16}$$

其中$\langle\,\rangle_\pm$ 表示两个带符号的麦考利括号， $\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}$ 为应变张量的偏量部分，K 为体积模量， μ 为剪切模量或第二拉梅参数。另一方面，谱分解基于对应变张量进行谱分解： $\boldsymbol{\varepsilon}_\pm = \sum_{a=1}^3 \langle\varepsilon_I\rangle_\pm \mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I$，其中 ε_I 为主应变，$\mathbf{n}_I$ 表示主应变方向（其中 $I = 1,2,3$）。因此，谱应变能分解定义为

$$\psi_0^\pm = \frac{1}{2}\lambda\left\langle \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\right\rangle_\pm^2 + \mu\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_\pm^2\right), \tag{17}$$

其中 λ 表示第一拉梅参数，tr 表示迹算子。

Ambati 及其同事提出了所谓的混合方案，从而显著提升了这些分解方法的数值性能 [51], ；该方案仅让应变能的有效部分参与裂纹扩展，但损伤会使刚度发生各向同性退化，前提是只有在应力状态主要为拉伸时才会发生退化。另一种应变能分解方法已被证明特别适用于疲劳建模 [55], ，即 Freddi 和 Royer-Carfagni 提出的所谓无拉伸分解 [56]。无拉伸分解最初是为类砌体材料提出的，与其他方法相比，它能更有效地滤除压缩应变的贡献。用 λ 和 μ 表示拉梅参数，E 和 ν 分别表示杨氏模量和泊松比，并取 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 为主应变，其中 ε_1 为最大主应变，则应变能分解可表示为 [34]

若 $\varepsilon_3 > 0$，否则若 $\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_3 > 0$，则 then $\begin{cases} \psi_0^+ = \frac{\lambda}{2}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\right)^2 + \mu\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2\right) \\ \psi_0^- = 0 \end{cases}$ ($\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\nu\varepsilon_3{}^2 + \mu\left[\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_3{}^2 + \varepsilon_2 + \nu\varepsilon_3{}^2\right]$) ( ) ( )；否则若 $(1-\nu)\varepsilon_1 + \nu(\varepsilon_2+\varepsilon_3) > 0$，则 $\begin{cases} \psi_0^+ = \frac{\lambda}{2}\left[\left(1-\nu\right.\right. \\ \psi_0^- = \frac{E}{2}\varepsilon_3^2 \end{cases}$ $\left.\left.\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2+\nu\varepsilon_3\right]^2\right)$ $(\underline{(})$ ( )；否则 $\begin{cases} \psi_0^+ = 0 \\ \psi_0^- = \frac{\lambda}{2}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\right)^2 + \mu\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2\right) \end{cases}$ $\psi_0^- = \frac{E}{2\,1-\nu^2}\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+2\nu\varepsilon_2\varepsilon_3\right)$

$$\tag{18}$$

除非另有说明，本文数值实验均采用 Freddi 和 Royer-Carfagni 提出的这种无拉伸分解 [56] 。

3. 有限元实现

本节提供了第2节中提出的相场疲劳模型的数值实现细节。采用有限元法，所得系统的求解

方程进行了讨论，以及本工作中提出的疲劳加速方法：修正牛顿法（MN）和恒定载荷累积 (CLA) 求解策略。实现使用 Ferrite.jl 有限元库 [57] [1] 进行。

3.1. 裂纹不可逆性

在考虑非单调加载时，强制损伤不可逆性至关重要。为简单起见，我们将在此使用由 Miehe 等人 [50] 开创的所谓历史场 $\mathcal{H}$ 方法。因此，历史场定义为加载历史中某点所经历的最大活动应变能密度

$$\mathcal{H} = \max_{\tau \in [0,t]} \psi_0^+(\tau) \tag{19}$$

并在相场方程 (12) 中取代活动未退化应变能密度 ψ_0^+ 作为裂纹驱动力。虽然该方法方便且往往有助于相场方程的收敛，但它也受到了合理的质疑 [58, 59], ，尤其是关于其对非尖锐缺陷裂纹成核的影响及其非变分性质。后一问题在此无关紧要，因为此处采用的相场疲劳扩展形式并不变分一致。在疲劳情况下更关键的一点是，对于变幅加载，仅局部最大载荷会作为裂纹驱动力在也包括较低载荷的循环中被保留。然而，该情形与本工作无关，因为数值算例处理的是恒幅加载和预存尖锐缺陷。

另一种确保已完全形成的裂纹不可逆的方法是所谓的 Bourdin等人 [1], 提出的裂纹集方法：将相场超过给定阈值的节点加入施加了 $\phi = 1$ 狄利克雷条件的节点集合。经验上，我们发现，无论使用退化还是未退化应变能来计算疲劳变量，这种方法似乎都能缓解高周疲劳模拟中裂纹扩展到一定程度后原裂纹尖端出现的一些收敛问题。因此，本研究同时采用历史变量方法和裂纹集方法，并将加入裂纹集的节点阈值设为 0.95。

[1]开发的 Julia 实现已向社区公开共享，并可从以下位置下载 `www.empaneda.com/codes`。

3.2. 求解策略

控制方程 (11)–(14) 可改写为一种在数值计算上更方便的解耦形式:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left[(1-\phi)^2\boldsymbol{\sigma}_0 : \delta\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u}\right]\,\mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega_t}\mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}A = 0\\ \int_\Omega \left[-2(1-\phi)\psi_0^+\delta\phi + f(\bar{\alpha})G_c\left(\frac{\phi}{\ell}\delta\phi + \ell\nabla\phi\cdot\nabla\delta\phi\right)\right]\,\mathrm{d}V = 0\end{aligned} \tag{20}$$

随后，使用标准双线性单元对弱形式方程（20）进行离散化，得到以下方程组:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K}^{\mathbf{uu}} & \mathbf{K}^{\mathbf{u}\phi}\\ \mathbf{K}^{\phi\mathbf{u}} & \mathbf{K}^{\phi\phi}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}\\ \boldsymbol{\phi}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\mathbf{r}^{\mathbf{u}}\\ \mathbf{r}^{\phi}\end{Bmatrix} \tag{21}$$

其中，$\mathbf{K}$ 和$\mathbf{r}$ 分别为刚度矩阵和残差向量。相场方程关于变量$\mathbf{u}$ 和 ϕ 同时呈非凸性。因此，除非采用拟牛顿方法等非常规方案 [44, 45]，否则整个耦合系统很难以稳定且高效的方式求解。然而，这些方程分别关于各个主变量呈凸性。因此，常见的求解策略是采用交替最小化对系统进行解耦求解。下文将简要介绍常见的交错方案，随后介绍所提出的修正牛顿法，以加速疲劳计算。

3.2.1. 标准交替最小化技术

通过依次交替最小化两个解耦子问题来求解相场方程的方法，由 Miehe 等人 [50] 推广开来。随后提出的方案是分别独立求解各个子问题，直至其各自收敛，然后再进入下一个载荷增量。这种方法如今通常称为单遍方案，但它对载荷增量的大小十分敏感。正如文献[44], 所示，这种方法在疲劳计算中可能效率很低。另一种选择是采用所谓的多遍方案，即重复进行交替最小化，直至达到某个全局收敛准则。文献[43, 51]中给出了此类收敛准则的示例。本文采用与 [46], 相同的基于残差的多遍方法，并采用容差 $\texttt{TOL}_{\texttt{in}} = 10^{-5}$ 和 $\texttt{TOL}_{\texttt{out}} = 10^{-4}$。该方案见算法 1，与单遍算法的唯一区别是增加了 `while` 循环。

算法 1 多遍交替最小化

增量 $n+1$

初始化： $\phi_0 = \phi_n$，$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_n$，$k = 0$

当 $||R_\phi(\mathbf{u}_{k+1},\ \phi_{k+1})||_\infty \leq \mathtt{TOL}_{\mathtt{out}}$ **时执行**

求解 ϕ_{k+1}，使得 $||R_\phi(\mathbf{u}_k,\ \phi_{k+1})||_\infty \leq \mathtt{TOL}_{\mathtt{in}}$

求解 $\mathbf{u}_{k+1}$，使得 $||R_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_{k+1},\ \phi_{k+1})||_\infty \leq \mathtt{TOL}_{\mathtt{in}}$

$k \leftarrow 1$

结束循环

$\phi_{n+1} = \phi_k$, $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_k$

3.2.2. 加速疲劳计算的修正牛顿法

为加速高周疲劳计算，本文提出一种简单的修正牛顿法。在高周疲劳计算中，通常可以合理地认为，各个载荷增量之间解变量的变化较小。因此，系统的切线刚度矩阵也预计只会发生较小变化。由于基于牛顿－拉夫森方法并不要求切线刚度矩阵完全精确，本文提出对算法 1 中的多遍交错算法进行修改，使切线刚度仅在需要时才更新并进行因式分解。在此实现中，两个子问题的切线刚度矩阵仅在满足以下任一条件时才更新并进行因式分解：

- 分析开始
- 一个子问题在经过 n_i 次内部牛顿迭代后仍未收敛。
- 在未更新刚度矩阵的情况下，已过去 n_c 个载荷增量 s.

参数 n_i 和 n_c 可以采用不同的取值。虽然我们尚未对最优取值进行系统研究，而最优取值取决于边值问题的规模和失效循环数，但所得结果（见第4节）表明，在损伤子问题中选择较大的 n_c 可能会提升计算性能。

3.3. 通过在恒定载荷下累积疲劳损伤加速计算

另一种加速逐循环疲劳计算的技术可通过改变疲劳累积方式实现。此处，此后称为恒定

负载累积（CLA）加速策略。在当前疲劳模型中，疲劳通过主动应变能的正增量累积。载荷比 R 在此根据施加位移 $\bar{u}$ 宽松定义为

$$R = \frac{\bar{u}_{min}}{\bar{u}_{max}}. \tag{22}$$

在 $R \geq 0$ 的情况下，每个循环仅需两个载荷增量（加载和卸载）即可描述载荷循环。然而，其中只有一个增量实际会对疲劳产生影响。在 $R < 0$ 的情况下，每个循环需要四个增量（拉伸加载、卸载、压缩加载和卸载）。如果压缩加载阶段对疲劳的影响不显著，则只有拉伸加载增量与疲劳相关，如图 1 中蓝色虚线所示。请注意，这些考量仅适用于高周疲劳；此时材料响应通常远处于线性范围内，预计压缩塑性等效应不会显著发生。还应注意，在某些加载条件下，载荷循环中的多个点都可能相关，例如非比例加载。对于足够简单、使载荷循环中仅有一个增量显著的情况，可通过将疲劳累积从式 (3) 改为

$$\bar{\alpha}_{n+1} = \bar{\alpha}_n + \psi^+_{0,n+1}, \tag{23}$$

并将其与施加恒定载荷 $\bar{u} = \bar{u}_{max}$ 以及每个增量计为一个循环相结合。图 1 中的红色实线展示了该方法。为完整起见，我们指出，严格来说，为考虑 $R > 0$ 的情况，应将公式修正为

$$\bar{\alpha}_{n+1} = \bar{\alpha}_n + \psi^+_{0,n+1} \left[1 - R^2 H(R)\right], \tag{24}$$

尽管本文不考虑此类情况。

4. 数值实验

现在，我们将展示数值实验的结果，旨在评估本文提出的两种新型加速策略的性能：第3.2.2节介绍的修正牛顿（MN）方法，以及第3.3节所述的恒定载荷累积（CLA）方案。对于所有研究案例，材料参数设定为杨氏模量 $E = 210$ GPa、泊松比 $\nu = 0.3$，以及韧度 $G_c = 2.7$ kJ/m^2。首先，研究单边缺口拉伸（SENT）试样（第4.1节）中的疲劳裂纹扩展

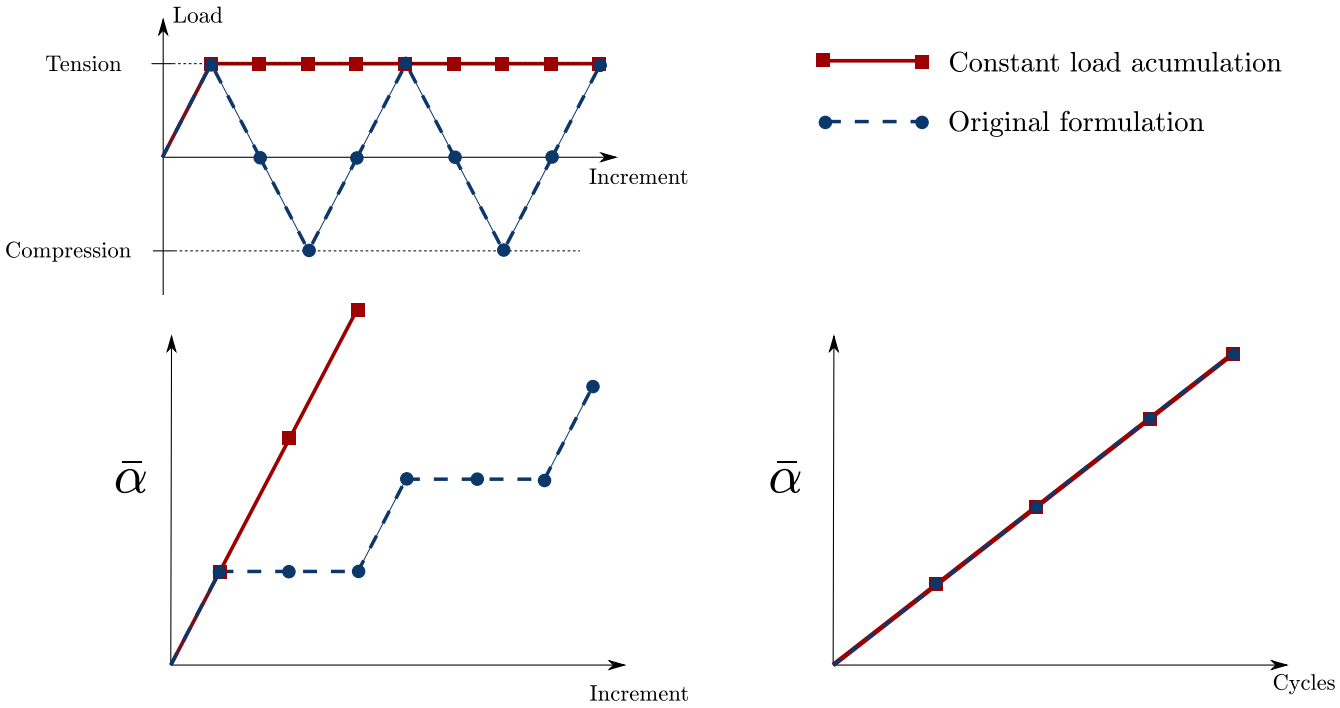


图1：左侧展示原始公式的加载模式和疲劳累积，右侧展示所提出的恒定载荷累积方案。如图所示，前者每个载荷循环至少需要四个增量，而后者仅需一个。

以比较不同加速方案，并量化相对于参考解系统的性能提升。随后，通过研究含多个孔洞的非对称三点弯曲试样（第4.2节）中裂纹的形核与扩展，模拟更复杂的开裂模式。此处的目标之一是比较采用不同应变能分解方法得到的裂纹轨迹。最后，在第4.3节中，展示模型的稳健性，以及其模拟大型三维问题中疲劳开裂的能力。

4.1. 单边缺口拉伸（*SENT*）试样的疲劳裂纹扩展

第一项案例研究所考虑的单边缺口拉伸（SENT）试样的几何形状和边界条件如图2a所示。采用公式（18）中的无拉伸应变能密度分解，并将初始裂纹作为相场上的狄利克雷条件进行初始化。在两排单元上施加狄利克雷边界条件，以定义初始裂纹的恒定宽度。

试样采用约 32,000 个双线性四边形单元进行离散，并在裂纹扩展区域设置细化区域。在该细化区域内，特征单元长度为 0.003 mm，比此处选用的相场长度尺度小五倍以上，后者取值为

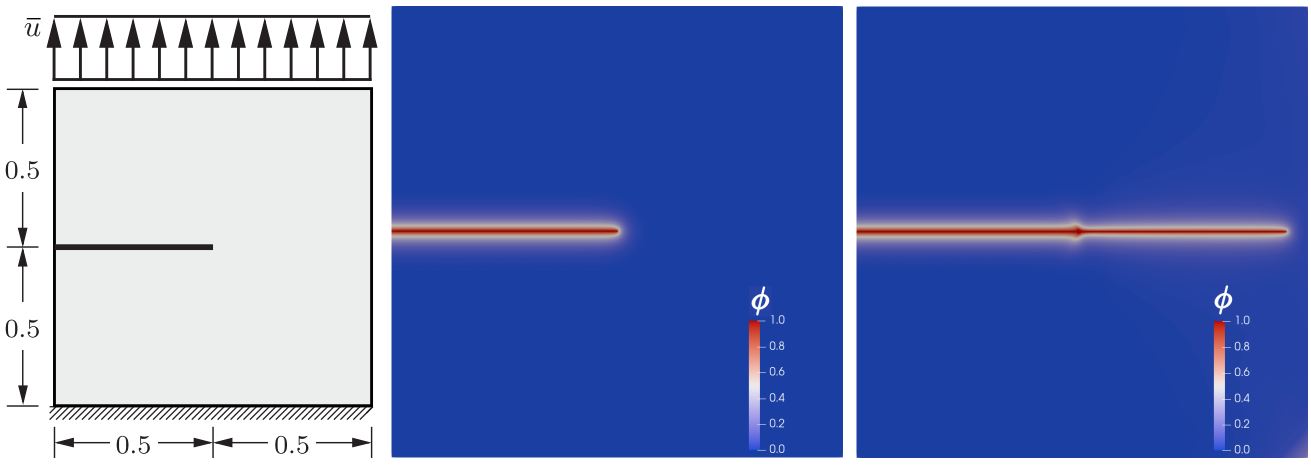


图 2：单边切口拉伸（SENT）试样中的疲劳裂纹扩展：(a) 几何形状（尺寸单位为 mm）和边界条件，(b) 初始裂纹轮廓，以及 (c) 疲劳裂纹扩展的最终阶段。

$\ell = 0.016$ mm。试样承受交变施加位移 $\bar{u}$。疲劳载荷重复 120.000 个循环，最大施加位移为 $\bar{u}_{max} = 0.0002$ mm。针对四种情形进行了计算。首先，采用式 (3) 中给出的标准疲劳累积和算法 1 中的多遍交错算法获得结果。这些结果作为基准条件，不包含本文提出的任何加速策略。第二种情形是采用第 3.2.2 节介绍的修正牛顿法（MN）方案模拟疲劳裂纹扩展。第三种情形则仅采用第 3.3 节所述的恒定载荷加速（CLA）方案。最后，第四种情形同时采用 MN 和 CLA 方法。MN 参数取为 $n_i = 25$ 和 $n_c = 100$，载荷比始终取$R = 0$。所有计算均使用一台 Xeon E5-2650 v4 型中央处理器的单个核心完成。

裂纹扩展随循环次数变化的有限元预测结果见图 3。这里，裂纹扩展量定义为原始裂纹尖端与具有 $\phi = 0.95$ 的最远点之间的距离。结果表明，与基准方案相比，加速方案本身不会导致裂纹扩展出现偏差。改进牛顿法始终如此；而当疲劳中不存在压缩贡献时，CLA 方案也同样如此。

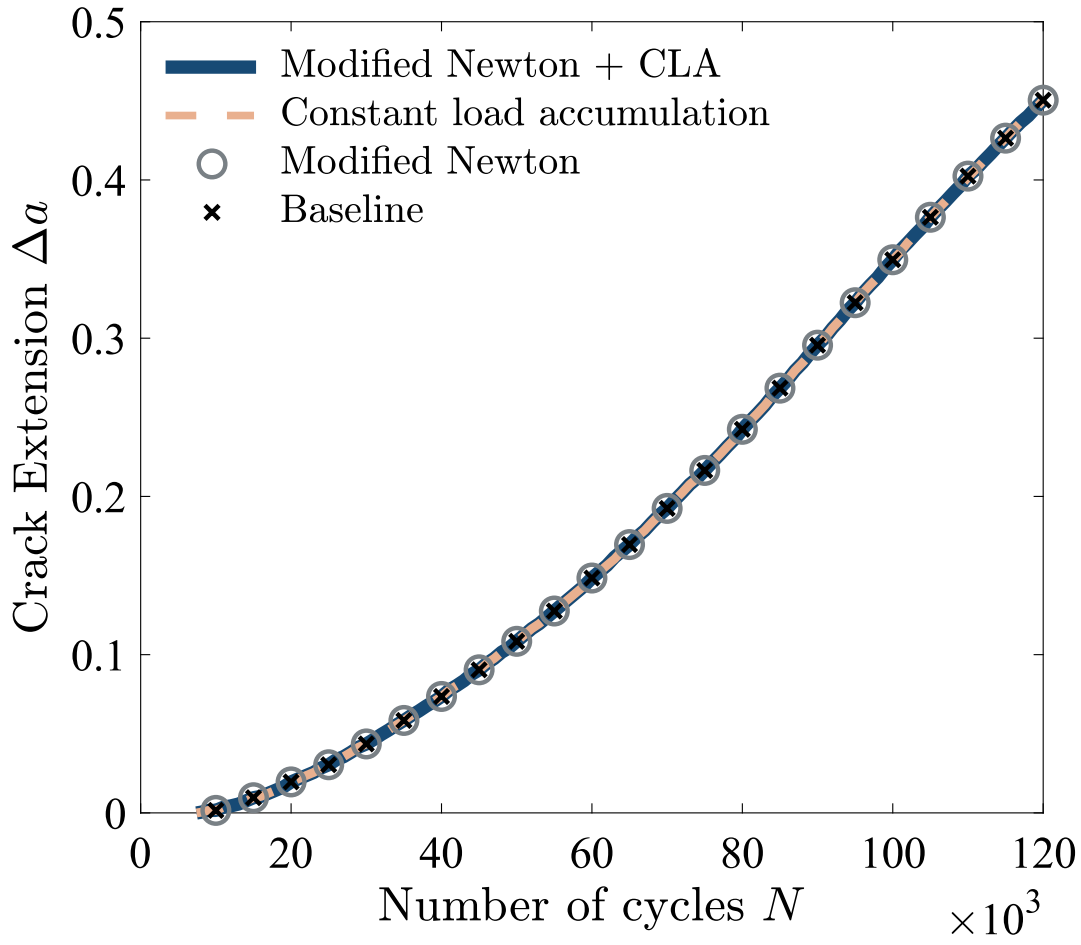


图 3：SENT案例研究中裂纹扩展 Δa 与循环次数 N 的关系预测。图中展示了采用参考（基准）条件以及本文提出的两种加速方案（修正牛顿法，NM；恒定载荷累积，CLA）分别单独使用和联合使用时得到的结果。

如表 1 所示，不同建模策略的计算性能通过多个因素进行衡量。第一项性能指标是实际计算时间（小时）。不过需要注意的是，尽管通过不采用并行计算并使用相同的 CPU 类型，已将这一指标中的噪声降至最低，但不应将单次计算时间测量结果视为对性能的精确量化。更客观的第二项性能指标是矩阵分解总次数，其中一次分解指对位移子问题和损伤子问题各进行一次分解。此外，表 1 还列出了相场子问题和位移子问题所需的迭代总次数。结果表明，采用恒定载荷累积加速策略可通过减少所需的载荷增量显著缩短计算时间，同时也带来相近幅度的迭代次数减少，并

在矩阵分解方面，修正牛顿法在减少矩阵分解次数与增加必要迭代次数之间存在权衡，尤其是在位移问题中。然而，对于修正牛顿法采用参数 n_i =25 和 $n_c = 100$ 时，该策略只需进行约为基准结果 1/100 的矩阵分解次数，代价是在位移问题中迭代次数增加到 4 倍。此外，我们强调，采用 MN 方法时，位移问题中的迭代成本很低，因为每次迭代只需重新构建残差，并利用现有的分解后刚度矩阵直接求解。结果表明，修正牛顿法（MN）和恒定载荷累积 (CLA) 两种累积策略（单独使用或结合使用）均能在不损失精度的情况下显著提升性能。此外，这些方法与现有的循环跳跃方案兼容，例如 [27] 和 [52] 中介绍的方案。

求解策略	MN + CLA	CLA	MN	基准
计算时间 [小时]	13.0	32.7	40.1	96.5
矩阵分解	1191	120032	2379	240032
总迭代次数 ϕ	120205	120032	240114	240032
总迭代次数**u**	276812	120032	973678	240032

表 1：SENT案例研究的性能详情，对比基准结果与采用修正牛顿法（MN）、恒定载荷累积 (CLA) 及其组合方案的结果。

4.1.1. 通过每个增量多个循环进一步加速

采用恒定载荷累积方案时，每个增量计为一个循环的选择多少有些随意，因为可以很容易地将累积疲劳变量 $\bar{\alpha}$ 从增量 n 到增量 $n+1$ 的更新修改为

$$\bar{\alpha}_{n+1} = \bar{\alpha}_n + \mathcal{N}\psi_{0,n+1}, \tag{25}$$

其中每增量循环数 $\mathcal{N}$ 可选择小于或大于一。虽然由于考虑 $\mathcal{N} > 1$ （“循环跳跃”）而对循环历史进行离散采样预计会产生一定程度的误差，但我们在此表明，对于涉及不同失效循环数的模拟，该误差可以忽略不计。为此，针对 SENT 几何构型进行了计算，考虑了三个最大施加位移值，即 $\bar{u}_{max} = 0.00016$ mm、$\bar{u}_{max} = 0.00020$ mm 和 $\bar{u}_{max} = 0.00025$ mm，以及相应的

特征循环次数分别等于 $60,000$、$120{,}000$ 和 $240,000$。每增量循环数 $\mathcal{N}$ 在 1 到 32 的范围内变化，以研究其对解精度的影响。在所有情况下，这种增强的 CLA方法 与改进牛顿法结合使用。所有三种情况的结果如图 4 所示。可以观察到累积误差很小，最终裂纹扩展与参考值$\mathcal{N} = 1$ 的偏差在所有情况下均低于 3%。此外，对于给定的 $\mathcal{N}$ 值，在特征循环次数结束时估计的裂纹扩展偏差随着特征循环次数的增加而减小。对于工程相关的高周疲劳问题，总循环次数可能达到数百万次，可以使用较大的 $\mathcal{N}$ 值而误差可忽略不计。类似于表 1 的性能表在附录 A 中提供。这些表明，虽然计算时间并不随 $\mathcal{N}$ 线性缩放，但在所研究的范围内它们确实单调递减。相对于表 1 中的基准情形，使用改进牛顿法和恒定载荷累积技术且 $\mathcal{N} = 16$ 的相应计算比基准情形快 32 倍。

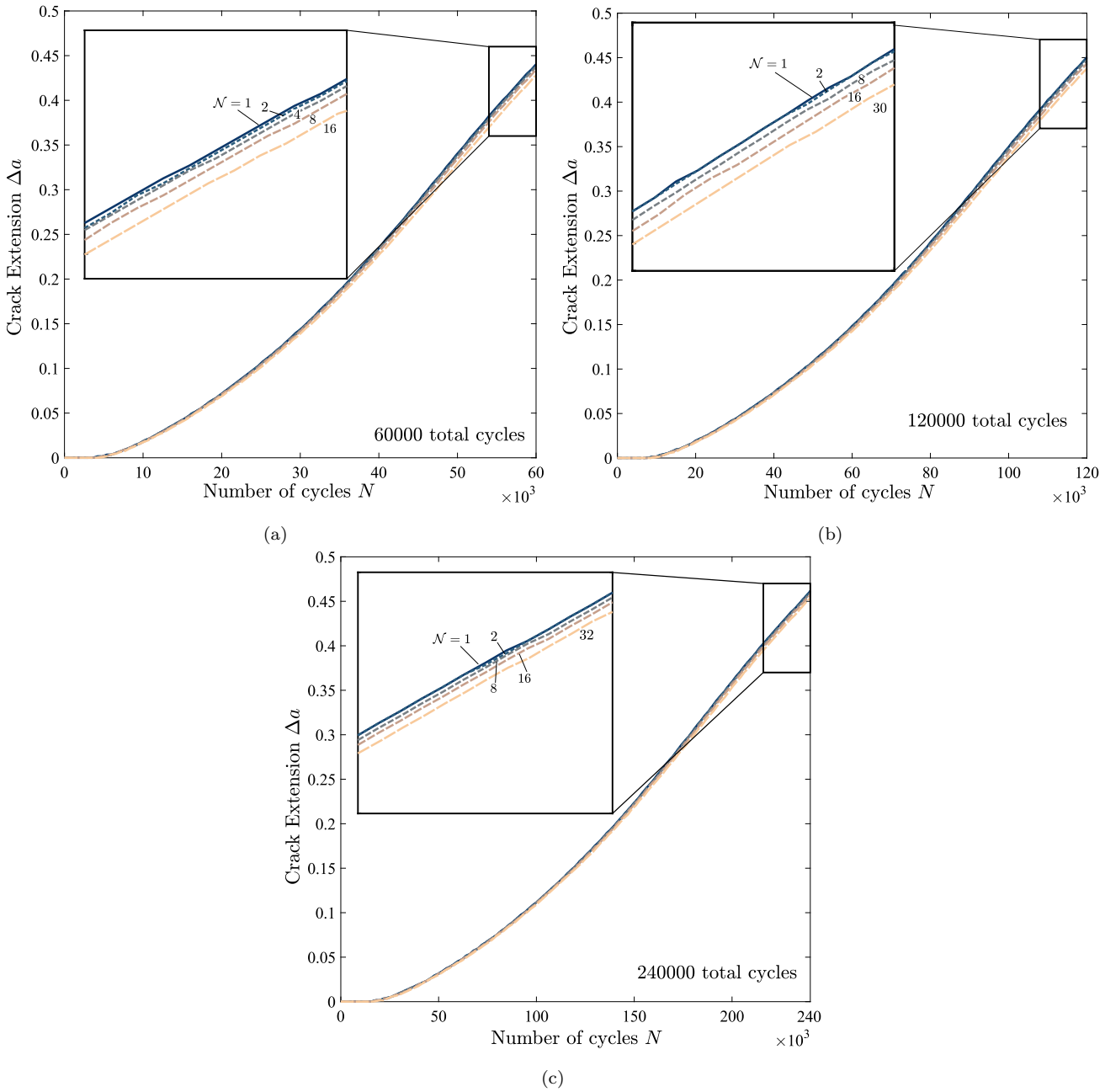


图 4：针对 SENT案例研究，考虑所选的 $\mathcal{N}$（每增量循环数）以及以下特征循环次数，预测裂纹扩展 Δa 与循环次数 N 的关系：(a) 60,000 次循环，(b) 120,000 次循环，(c) 240,000 次循环。

4.2. 非对称三点弯曲

第二个案例研究旨在将疲劳加速方案应用于裂纹扩展更为复杂的边值问题。如图 5 所示，一根带有孔阵列的平面应变梁承受三点弯曲载荷。初始裂纹相对于加载销和孔洞呈非对称分布，从而引发混合模态开裂。这一典型的

边值问题此前已在静载荷情形下进行过研究（例如，参见文献 [5, 60]）。

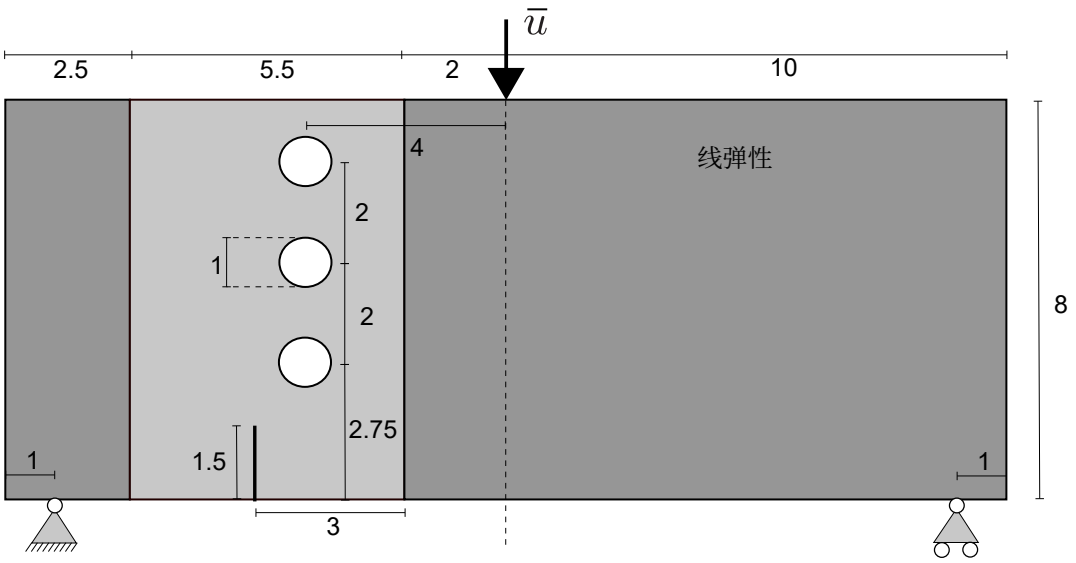
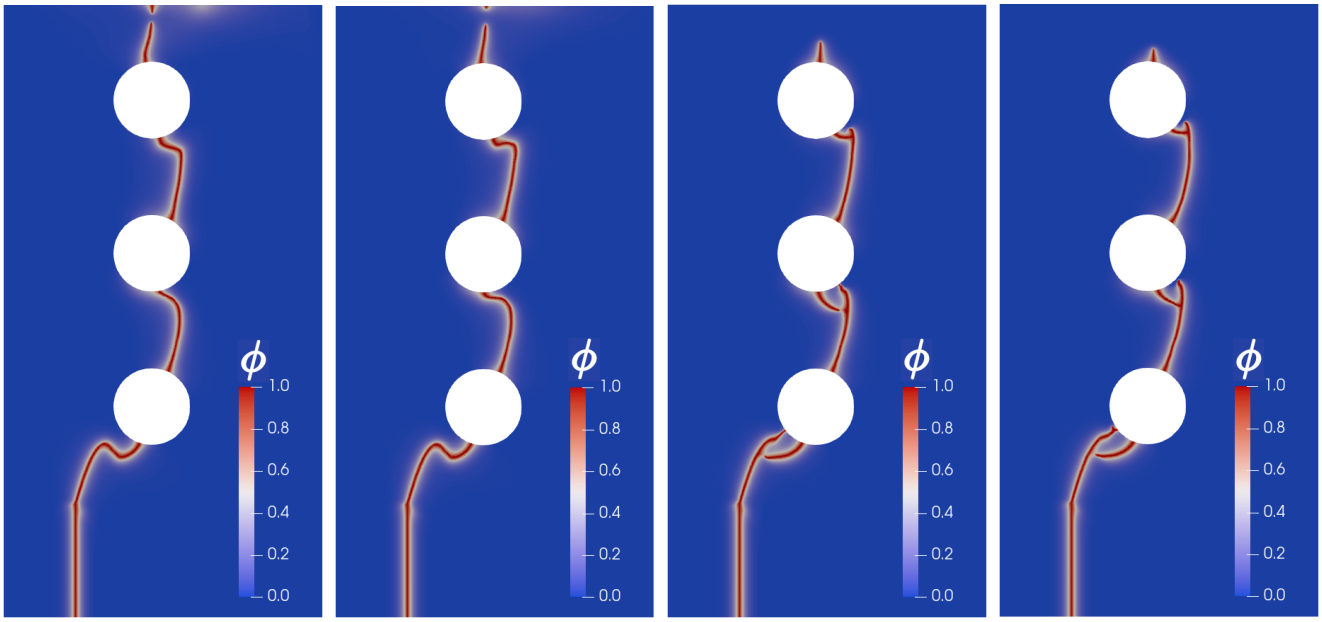


图 5：非对称三点弯曲问题示意图，包括尺寸（单位：mm）和边界条件。只有浅灰色区域会发生疲劳损伤。

计算域采用约128,000个线性四边形单元离散，特征单元尺寸为 $h_e = 0.01$ mm，比相场长度尺度小五倍。施加位移为 $\bar{u} = 0.003$ mm，并经历90,000次载荷循环。按照三点弯曲试验的通常做法，假定载荷比为 $R = 0$。采用修正牛顿法和恒定载荷累积方案，以高效捕捉疲劳历程。通过采用不同的应变能密度分解方法进行计算，比较其对裂纹轨迹预测的影响。分析结束时得到的裂纹路径如图6所示。



(a) 各向同性　(b) 体积/偏差　(c) 谱分解　(d) 无拉伸

图 6：非对称三点弯曲：采用 a) 无应变分解；b) [53] 的体积/偏差应变分解；c) [54] 的谱分解；d) [56] 的无拉伸分解时，经过 90,000 次疲劳循环后的相场裂纹扩展轮廓。

值得注意的是，所有情况下的裂纹路径都不同于单调加载下观察到的路径；例如，参见文献 [60, 61]。这种偏离是由于孔洞附近的疲劳累积所致，进而在主裂纹与孔洞相交之前诱发了新的次生裂纹形核。如果在相场疲劳公式中引入疲劳极限，就可以消除这些次生裂纹，并可能恢复单调加载下的裂纹路径。我们还指出，Strobl和Seelig [59], 强调的非尖锐缺陷处裂纹形核问题源于采用历史场方法实现裂纹不可逆性，但这一问题对该相场疲劳模型并不显著。四种计算的性能指标见表2。

应变分解	各向同性	体积/偏偏应变	谱分解	无拉伸	无拉伸*
计算时间 [小时]	44.9	44.4	60.3	75.5	399.0
矩阵分解	1249	1278	1341	1295	180130
总迭代次数 ϕ	91355	91400	91742	91624	180130
总迭代次数$\mathbf{u}$	314292	328948	400795	426645	180130

表2：非对称三点弯曲案例研究中，不同应变能分解方式下的性能详情。*未采用加速方案。

谱分解和无拉伸分解呈现出更复杂的裂纹模式，并且在位移问题上也需要显著更多的迭代次数。然而，在所有情况下，所提出的求解策略都大幅减少了所需的矩阵分解次数，代价是在位移问题上需要略微增加迭代次数。该案例研究的结果表明，即使对于复杂的裂纹扩展研究，这种性能提升仍然成立。对于采用修正牛顿法计算耗时最长的无拉伸分解，其计算速度仍比采用标准牛顿法且不进行恒定载荷累积时快五倍以上。可以预期，若不采用这些加速方案，计算时间大致与应变分解方式无关，因为即使在这一最复杂的案例中，每个增量的每个场也只需迭代一次。因此，对于各向同性分解和体积/偏偏应变分解，加速效果约为9倍。与SENT试样的情况一样，通过分别调整两个子问题的刚度更新频率，很可能获得更优的性能，因为损伤子问题可以大幅降低更新频率，而无需付出迭代次数显著增加的代价。

4.3. 带倾斜边缘裂纹的三维受拉梁

作为最后一个基准算例，我们考虑带有边缘裂纹的三维梁在单轴拉伸作用下的情况。由此产生复杂的裂纹行为，裂纹相对于梁横截面旋转了 $45°$，如图 7 所示。

梁的两端均施加位移边界条件，使其承受循环拉伸。载荷幅值为 $\bar{u} = 1\text{mm}$。采用修正牛顿法，结合 $n_i = 25$ 和 $n_c = 50$ 以及恒定载荷累积方案，计算了总计 600 000 次循环；每增量循环数为$\mathcal{N} = 4$ （见第 4.1.1 节）。计算

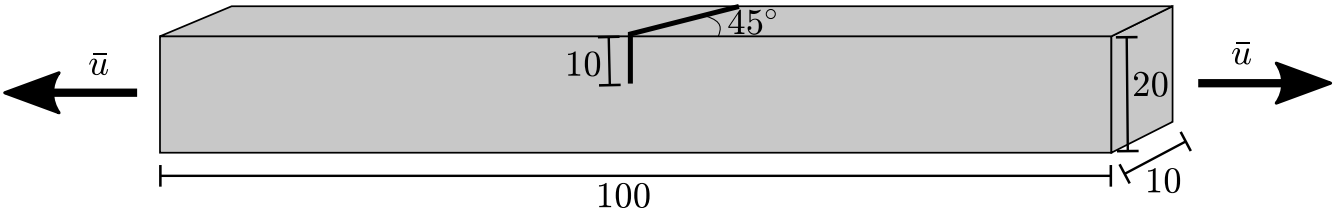
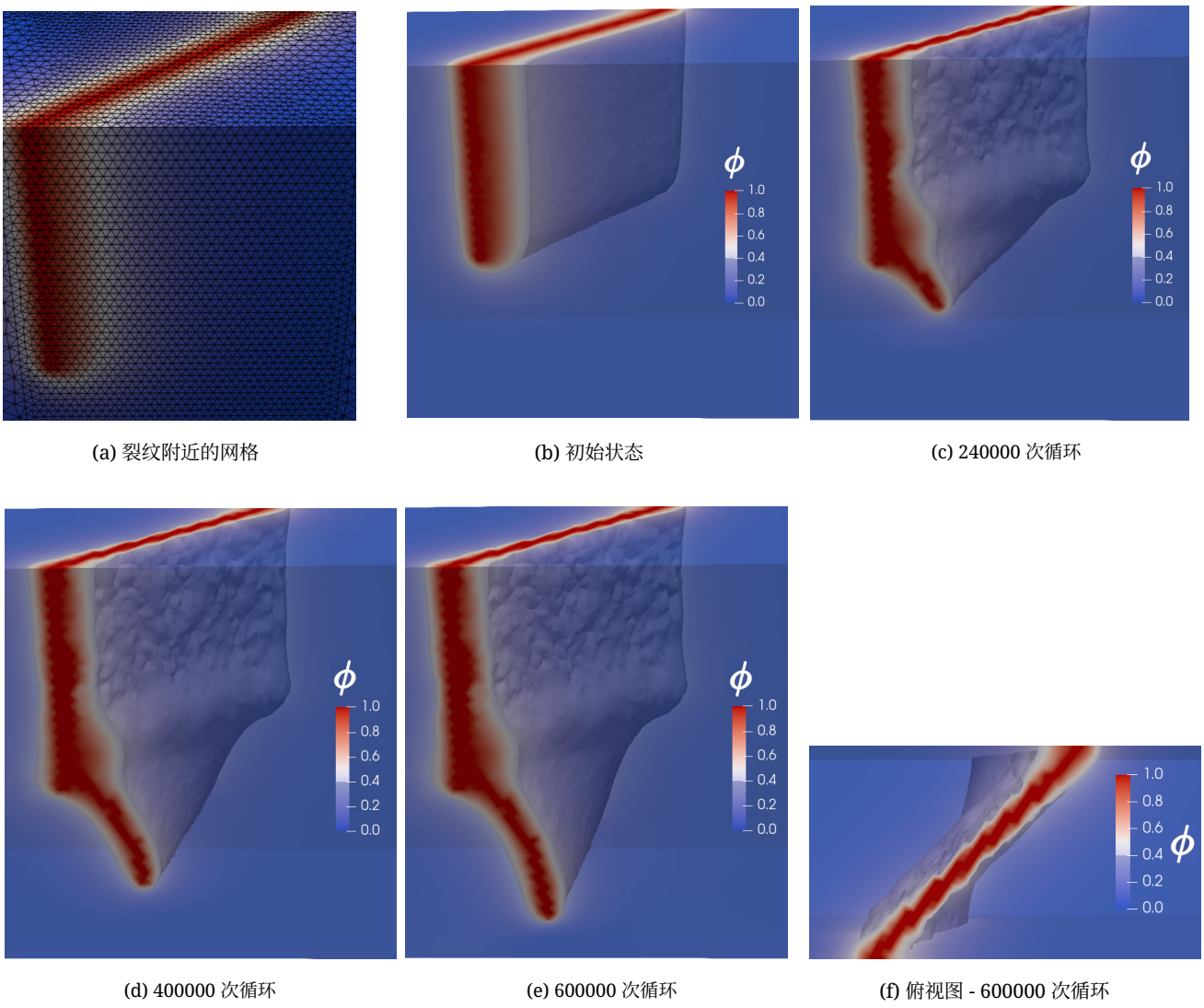


图7：承受单轴拉伸且含有倾斜边裂纹的三维梁示意图，包括试样尺寸（单位：mm）和边界条件。

域采用约 196,000 个线性四面体单元进行网格划分，裂纹附近的特征长度约为 $h_e = 0.35$ mm。此处将相场长度尺度设为$\ell = 1.2$ mm。结果以相场等值线的形式展示于图8，显示了裂纹扩展模式。



(a) 裂纹附近的网格　(b) 初始状态　(c) 240000 次循环

(d) 400000 次循环　(e) 600000 次循环　(f) 俯视图 - 600000 次循环

图 8：三维拉伸问题的等值线。裂纹旋转至与整体最大主应力垂直。

所得结果展现了预期的裂纹扩展行为：裂纹发生转向，使其与整体最大主应力方向垂直。所提出的方法显著加快了计算速度：仅需 150,000 个载荷增量即可模拟 600,000 次循环，期间只进行了 978 次矩阵分解。若不采用修正牛顿法和恒定载荷累积 (CLA) 加速策略，则至少需要 1,200,000 个增量、1,200,000 次矩阵分解，并且每个子问题都要进行 1,200,000 次迭代。结合本文提出的两种加速方案，位移问题仅需约 172,000 次迭代，相场问题仅需 160,000 次迭代即可完成计算。此外，其中大多数迭代所需

时间显著少于基准情形，因为只有少数迭代需要进行矩阵分解。对于大型问题，矩阵分解预计将主导计算时间；其总次数减少了 400 多倍。对于包含一百万次循环的问题，可以采用更大的每增量循环数$\mathcal{N}$，在不损失精度的前提下进一步提升计算性能。借助本文提出的加速策略，相场疲劳被证明是一种具有技术应用价值的工具，能够对三维条件下超过十万次循环的复杂疲劳裂纹扩展进行预测。

5. 结论

我们提出了两种有效而简单的方法来加速相场疲劳计算：（i）修正牛顿法（MN），该方法能够大幅减少求解高周疲劳问题所需的矩阵分解次数；（ii）恒定载荷累积 (CLA) 方法，通过仅考虑与疲劳变量演化相关的载荷增量，显著减少所需的载荷增量数。我们通过三个案例研究，分别及结合起来探究这两种加速策略的性能优势。我们预测了二维和三维情形下的疲劳裂纹扩展，并与基准模型进行了比较。结果表明，采用 MN 和 CLA 可将计算时间缩短数个数量级；即使面对复杂裂纹模式和三维裂纹扩展，这些方法仍然稳健。本文提出的加速方案能够预测三维复杂裂纹模式在超过十万次循环中的演化，使相场疲劳模型能够针对与工程实践相关的尺度给出预测。此外，所提出的方法还可与其他加速方法兼容，例如文献 [27]，中提出的循环跳跃方案，从而有望进一步提升性能。

致谢

作者衷心感谢丹麦海上技术中心（DHRTC）“结构完整性与寿命评估”项目提供的资金支持。此外，本项目的完成离不开DTU计算中心的专业知识与资源 [62]。Emilio Martínez-Pañeda还感谢英国研究与创新署（UKRI）未来领袖奖学金项目提供的资金支持 [资助编号 MR/V024124/1]。A. Golahmar

感谢Vattenfall Vindkraft A/S和丹麦创新基金（资助编号0153-00018B）提供的资金支持。

附录 A：每个增量包含多个循环次数的 SENT 试样性能数据

这里补充提供了第 4.1.1 节所述计算的性能数据。具体而言，特征循环次数为 60,000 的分析性能数据见表 3，循环次数为 120,000 的分析数据见表 4，循环次数为 240,000 的分析结果见表 5。与正文一致，矩阵分解指对损伤子问题和位移子问题的切线刚度矩阵进行分解。对于给定的每增量循环数$\mathcal{N}$，总循环次数结束时的裂纹扩展记为 a_N。此处相对于$\mathcal{N} = 1$ 情形测量裂纹扩展偏差，因此相对偏差 Δa_N 为：

$$\Delta a_N = \frac{a_N - a_1}{a_1}. \tag{26}$$

$\mathcal{N}$	1	2	4	8	16
计算时间 [小时]	8.7	6.8	4.0	2.2	1.2
矩阵分解	606	333	298	294	290
总迭代次数 ϕ	60314	30491	15600	8131	4528
总迭代次数$\mathbf{u}$	234934	210754	126138	71018	39680
裂纹扩展偏差 [%]	-	0.19	-0.64	-1.36	-2.9

表 3：特征循环次数为 60000 时 SENT 试样的性能详情。计算采用所提出的修正牛顿法和恒定载荷累积方案，每增量循环数为 N cycles。

$\mathcal{N}$	1	2	8	16	30
计算时间 [小时]	13.0	9.3	5.3	3.0	1.3
矩阵分解	1191	609	293	297	293
总迭代次数 ϕ	120205	60312	15634	8271	4778
总迭代次数$\mathbf{u}$	276812	227920	127541	70568	40896
裂纹扩展偏差 [%]	-	0.19	-0.89	-1.51	-2.85

表 4：特征循环次数为 120,000 时 SENT 试样的性能详情。计算采用所提出的修正牛顿法和恒定载荷累积方案，每增量循环数为 N 。

$\mathcal{N}$	1	2	8	16	32
计算时间 [小时]	20.6	12.4	7.0	4.0	2.2
矩阵分解	2378	1191	320	290	298
总迭代次数 ϕ	240150	120227	30501	15614	8186
总迭代次数$\mathbf{u}$	357149	266701	216611	127401	70764
裂纹扩展偏差 [%]	-	0.00	-0.43	-0.83	-1.74

表 5：特征循环次数为 240000 时 SENT 试样的性能详情。计算采用所提出的修正牛顿法和恒定载荷累积方案，每个增量包含 N 循环次数。

参考文献

[1] B. Bourdin, G. A. Francfort, J. J. Marigo, 重新审视脆性断裂的数值实验, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 48 (4) (2000年) 1–23.

[2] G.A. Francfort, J. J.Marigo, 将脆性断裂重新审视为能量最小化问题, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 46 (8) (1998年) 1319–1342.

[3] M.J. Borden, C. V. Verhoosel, M. A. Scott, T. J. Hughes, C. M. Landis, 动态脆性断裂的相场描述, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 217-220 (2012年) 77–95.

[4] P. K. Kristensen、C. F. Niordson、E. Martínez-Pañeda, 《相场断裂在氢致失效建模中的应用》, 《理论与应用断裂力学》110（2020年）。

[5] Hirshikesh、S. Natarajan、R. K. Annabattula、E. Martínez-Pañeda，《功能梯度材料中裂纹扩展的相场建模》，《复合材料B：工程》169（2019）239–248。

[6] E.Tanné、T. Li、B. Bourdin、J. J. Marigo、C. Maurini，《脆性断裂变分相场模型中的裂纹成核》，Journal of the Mechanics and Physics of Solids 110 (2018年) 80–99。

[7] P. K. Kristensen、C. F. Niordson、E. Martínez-Pañeda，《相场断裂评估：裂纹起始与扩展》，Philosophical Transactions of the RoyalSociety A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 379 (2203) (2021年)。

[8] Y. Navidtehrani、C. Betegón、E. Martínez-Pañeda，《相场断裂驱动力分解的一般框架：以 Drucker–Prager 破坏准则为例》，Theoretical and Applied Fracture Mechanics 121 (2022年) 103555。

[9] L. D. Lorenzis、C. Maurini，《脆性断裂变分相场模型中的多轴加载下的形核》，InternationalJournal of Fracture 237 (2022年) 61–81。

[10] J.-Y. Wu，损伤与准脆性破坏力学的统一相场理论，《Journal of the Mechanics and Physics of Solids》103（2017）：72–99。

[11] Y. Feng, J. Li，《相场内聚断裂理论：基于虚功变分不等式的耗散系统统一框架》，Journal of the Mechanics and Physics of Solids 159 (2022) 104737。[12] T. Guillén-Hernández, A. Quintana-Corominas, I. G. García, J. Reinoso, M. Paggi, A. Turón，《长纤维增强复合材料中的原位强度效应：采用断裂相场方法的微观力学分析》，《理论与应用断裂力学》108 (2020) 102621。[13] W. Tan, E. Martínez-Pañeda，《纤维增强复合材料微观断裂与R曲线行为的相场预测》，《Composites Science and Technology》202 (2021) 108539。[14] F. Aldakheel, P. Wriggers, C. Miehe，《有限应变下修正的Gurson型塑性模型：表述、数值分析与相场耦合》，Computational Mechanics 62 (4) (2018) 815–833。

[15] R. Alessi, M. Ambati, T. Gerasimov, S. Vidoli, L. D. Lorenzis, 《与塑性耦合的断裂相场模型比较》, Computational Methods in Applied Sciences 46 (2018) 1–21。[16] B. Bourdin, J.-J. Marigo, C. Maurini, P. Sicsic, 《热冲击诱导的复杂裂纹形态发生与扩展》, Physical Review Letters 112 (1) (2014) 14301。[17] J. Y. Ye, L. W. Zhang, 《耦合湿度效应下聚合物基多相复合材料的损伤演化》, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 388 (2022) 114213。[18] E. Martínez-Pañeda, A. Golahmar, C. F. Niordson, 《氢辅助裂纹扩展的相场表述》, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 342 (2018) 742–761。[19] F. P. Duda, A. Ciarbonetti, S. Toro, A. E. Huespe, 《弹塑性固体中溶质诱导脆性断裂的相场模型》, International Journal of Plasticity 102 (2017年11月) (2018) 16–40。[20] L. Anand, Y. Mao, B. Talamini, 《氢脆导致铁素体钢断裂的建模》, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 122 (2019) 280–314。[21] P. K. Kristensen, C. F. Niordson, E. Martínez-Pañeda, 《发生氢脆的弹性梯度塑性固体的相场模型》, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 143 (2020) 104093。[22] M. Klinsmann, D. Rosato, M. Kamlah, R. M. McMeeking, 《采用断裂相场方法建模锂嵌入过程中储存颗粒的裂纹扩展》, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 92 (2016) 313–344。[23] A. M. Boyce, E. Martínez-Pañeda, A. Wade, Y. S. Zhang, J. J. Bailey, T. M. Heenan, D. J. Brett, P. R. Shearing, 《通过X射线计算机断层扫描与建模预测锂离子电池电极开裂》, Journal of Power Sources 526 (2022) 231119。[24] W. Ai, B. Wu, E. Martínez-Pañeda, 《用于锂离子电池电极颗粒疲劳裂纹建模的相场耦合表述》, Journal of Power Sources 544 (2022) 231805。

[25] R. Alessi, J. Ulloa，赋予格里菲斯断裂理论描述疲劳裂纹的能力，《Engineering Fracture Mechanics》（2023）109048。[26] P. Carrara, M. Ambati, R. Alessi, L. De Lorenzis，基于变分相场方法的脆性材料疲劳行为建模框架，《Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering》361（2020年）112731。

[27] P. J. Loew, L. H. Poh, B.Peters, L.A. Beex，用于橡胶的相场损伤模型疲劳模拟加速，《Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering》370（2020年）113247。

[28] A. Golahmar, P.K. Kristensen, C. F. Niordson, E. Martínez-Pañeda，氢辅助疲劳相场模型，《国际疲劳学报》154（2022年）106521。

[29] M. Simoes，E. Martínez-Pañeda，形状记忆合金断裂与疲劳的相场建模，《Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering》373（2021年）113504。

[30] M. Simoes，C. Braithwaite，A. Makaya，E. Martínez-Pañeda，形状记忆合金的疲劳裂纹扩展建模，《工程材料与结构的疲劳与断裂》45（4）（2022年）1243–1257。

[31] M. Seiler，T. Linse，P. Hantschke，M. Kästner，延性材料疲劳断裂的高效相场模型，《Engineering Fracture Mechanics》224（2020年）106807。

[32] A. Mesgarnejad，A. Imanian，A. Karma，疲劳裂纹扩展的相场模型，《Theoretical and Applied Fracture Mechanics》103（2019）102282。

[33] J. Song, L. G. Zhao, H. Qi, S. Li, D. Shi, J. Huang, Y. Su, K. Zhang，耦合相场与黏塑性以模拟疲劳作用下的循环软化和裂纹扩展，《欧洲力学杂志—A辑：固体》92（2022年）104472。[34] Y.S.Lo, M. J.Borden, K. Ravi-Chandar, C. M.Landis，一种用于疲劳裂纹扩展的相场模型，Journal of the Mechanics and Physics of Solids 132（2019）103684。[35] T. Gerasimov, L. De Lorenzis，一种用于相场脆性断裂计算的线搜索辅助整体式方法，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 312（2016年）276–303。

[36] T. Heister, M. F. Wheeler, T. Wick，一种用于采用相场方法计算裂缝扩展的原始-对偶主动集方法与预测-校正网格自适应，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 290（2015）466–495。

[37] M. Klinsmann, D. Rosato, M. Kamlah, R. M. McMeeking, 《裂纹扩展相场表述的评估》, Computer MethodsinApplied Mechanics andEngineering 294 (2015) 313–330。

[38] F. Freddi, L. Mingazzi, 《脆性断裂相场方法的网格细化程序》, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 388 (2022年) 114214。

[39] F. Freddi, L. Mingazzi, 《相场方法的自适应网格细化：FEniCS 实现》, Applications in Engineering Science 14 (2023) 100127。

[40] D. Olesch, C. Kuhn, A. Schlüter, R. Müller, 《相场断裂模型中指数有限元的自适应数值积分》, Computational Mechanics 67 (3) (2021年) 811–821。

[41] J. M. Sargado, E. Keilegavlen, I. Berre, J. M. Nordbotten, 《相场断裂的有限元-有限体积组合框架》, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 373 (2021年) 113474。

[42] M. Ambati、R. Kruse、L. De Lorenzis，有限应变下延性断裂的相场模型及其试验验证, Computational Mechanics 57 (1) (2016年) 149–167。

[43] K. Seleš、T. Lesičar、Z. Tonković、J. Sorić，脆性断裂相场建模的残差控制交错求解方案，Engineering Fracture Mechanics 205 (2019) 370–386。

[44] P. K. Kristensen、E. Martínez-Pañeda，采用拟牛顿方法和新的自适应步长方案进行相场断裂建模，Theoretical and Applied Fracture Mechanics 107 (2020年) 102446。

[45] J.-y. Y. Wu, Y. Huang, V. Phu, V. P. Nguyen, 《统一相场损伤理论的 BFGS整体算法》, Computer MethodsinApplied Mechanicsand Engineering 360（2020年）112704。

[46] O. Lampron, D. Therriault, M. Lévesque, 《采用修正牛顿法求解相场脆性断裂的高效稳健整体式方法》, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 306（2021年）。[47] E. Börjesson, J. J. Remmers, M. Fagerström, 《用于稳健分析材料失效的广义路径跟踪求解器》, Computational Mechanics（2022年）。

[48] D.Jodlbauer, U.Langer, T. Wick, 《用于相场断裂问题的无矩阵多重网格求解器》, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 372（2020年）113431。

[49] D.Cojocaru, A. M. Karlsson, 《一种适用于循环载荷结构的循环跳跃简易数值方法》, 《国际疲劳学报》28（12）（2006年）1677–1689。

[50] C. Miehe, M. Hofacker, F. Welschinger, 《一种用于速率无关裂纹扩展的相场模型：基于算子分裂的稳健算法实现》, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 199（45-48）（2010年）2765–2778。

[51] M. Ambati, T. Gerasimov, L. De Lorenzis, 《脆性断裂相场模型综述及一种新的快速混合公式》, Computational Mechanics 55（2）（2014年）383–405。

[52] K. Seleš, F. Aldakheel, Z. Tonković, J. Sorić, P. Wriggers, 一种适用于脆性和延性固体疲劳失效的通用相场模型, Computational Mechanics 67 (5) (2021)1431–1452。

[53] H. Amor, J. J. Marigo, C. Maurini, 带单边接触的变分脆性断裂正则化形式：数值实验, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 57 (8) (2009) 1209–1229。

[54] C. Miehe, F. Welschinger, M. Hofacker, 断裂的热力学一致相场模型：变分原理与多场有限元实现, 《国际工程数值方法杂志》83 (2010) 1273–1311。

[55] A. Golahmar, C. F. Niordson, E. Martínez-Pañeda, 一种高周疲劳相场模型：全寿命分析, 《国际疲劳学报》170 (2023) 107558。

[56] F. Freddi、G. Royer-Carfagni, 《断裂的正则化变分理论：统一方法》, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 58 (8)（2010年）1154–1174。

[57] K. Carlsson、F. Ekre，贡献者，Ferrite.jl（3 2021年）。
网址 https://github.com/Ferrite-FEM/Ferrite.jl

[58] T. Linse, P. Hennig, M. Kästner, R. de Borst, 《脆性断裂相场模型的收敛性研究》，Engineering Fracture Mechanics 184 (2017) 307–318。

[59] M. Strobl, T. Seelig, 《赫兹压痕断裂的相场建模》，Journal of the Mechanics and Physics of Solids 143 (2020)。

[60] G. Molnár, A. Gravouil, 《用于脆性断裂建模的稳健交错相场求解的二维和三维 Abaqus 实现》，Finite Elements in Analysis and Design 130 (2017) 27–38。

[61] T. K. Mandal, V. P. Nguyen, J. Y. Wu, 《脆性断裂和内聚断裂相场模型的长度尺度与网格偏置敏感性》，Engineering Fracture Mechanics 217 (2019) 106532。[62] DTU计算中心, DTU计算中心资源（2021年）。