圆形和直线状态下折叠环的弹性稳定性

Sophie Leanza[a]、Ruike Renee Zhao[a] 和 John W. Hutchinson[b]

[a]斯坦福大学机械工程系，斯坦福，CA，94305[b]哈佛大学工程与应用科学学院，剑桥，MA，02318

摘要： 单环弹性环可以折叠成多环平衡构型。本文对若干此类圆形或直线状态的多环构型进行解析稳定性研究，并通过实验演示加以说明。通过考察平衡态附近环在允许变形下弹性能的变化，分析确定其稳定性。本文采用弹性保守系统的传统稳定性分析方法，这与该类问题已发表的大多数分析方法不同；我们将通过复现并详细探讨文献中的若干问题来说明这一点。除了求解两个基本问题外，本文还分析并演示了折叠成直杆构型的六边形环的稳定性。[1]

1. 引言

由细长弹性杆弯成的环，除了基本的单环构型外，还可以呈现出令人惊讶的多种平衡形状。例如，由均匀直杆弯成的单环圆环，可以通过扭转形成一个由三个大小相等的圆形环圈组成的环；在这种圆形三环状态下，扭转基本为零。此外，对于截面几何形状使其面外弯曲刚度相较于平面内弯曲刚度足够大的杆，单环状态和三环状态都可能稳定。单环与三环构型之间的转变是三维的，涉及扭转和面外位移。多年来，人们一直了解并利用这一现象；然而，目前仍在发现和探索其他此类现象，Wu 等人（2021、2022）、Lu 等人（2023）和 Yu 等人（2023）近期发表的文章便展示了这一点。细长杆系统的三维行为受到众多科学家和数学家的关注，他们研究其在机械和生物领域中的应用。本文作者的研究动机主要源于轻质可收拢或

[1] 谨以此文献给维果·特维加德，以庆祝他的80th 生日。他是固体与结构稳定性领域的重要贡献者。

可折叠结构的结构应用（Mouthuy 等人（2012）；Leanza 等人（2022）；Sun 等人（2022）；Lachenal 等人（2012）；Mhatre 等人（2021））。

十九世纪，基尔霍夫提出了弹性杆的三维理论，推广了欧拉的二维弹性线。这类问题的许多研究都是在基尔霍夫所建立的框架内进行的，包括本文所提出的工作。本文主要研究的问题是由六根呈120° 或240° 圆弧形状的杆连接成完整环而形成的六边形环的稳定性。六个圆弧段中的每一个在卸载时都具有均匀的自然曲率$_{n}\kappa$ 。这些杆被弯曲成120° 或240°圆弧，并连接形成如图1所示的环。每个杆段在尖点处与相邻杆段连接。这个单环可以折叠成具有直边的三圈环。折叠状态中的弯曲应力取决于自然曲率，它们是结构中残余应力的来源。本文确定了折叠直线状态的稳定性，具体而言，获得了直线状态变得不稳定时的最大自然曲率。将展示这些环行为的实验演示。

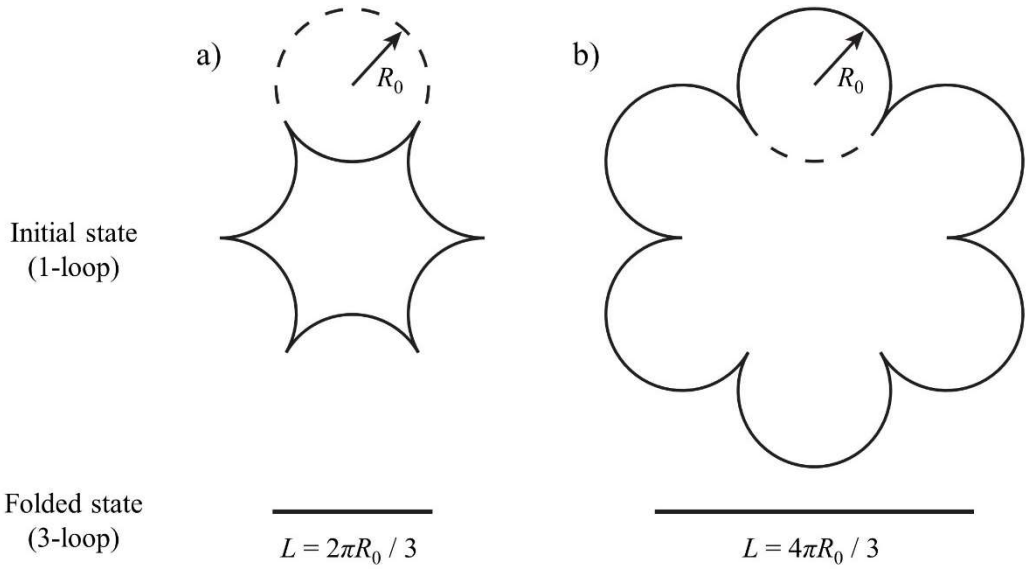
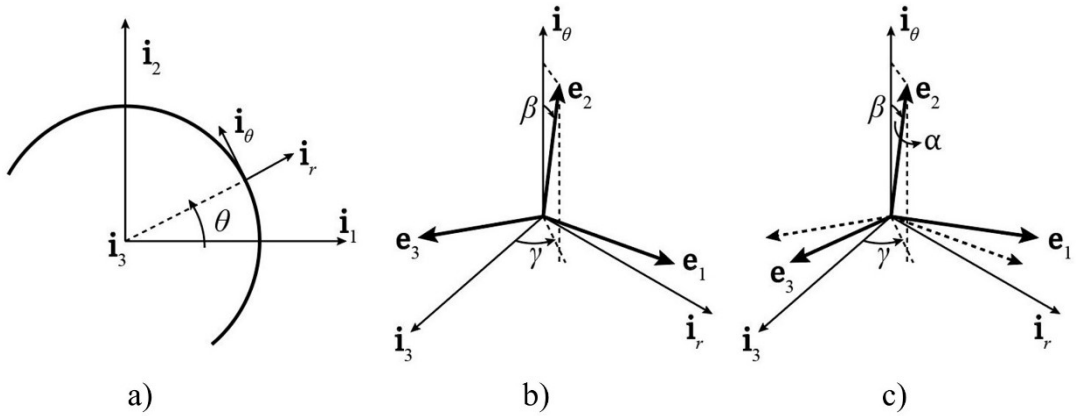


图1. a) 由120° 圆弧形成的六边形环，折叠成长度为$_{0}2 / 3R\pi$ 的直杆三圈构型。b) 由240° 圆弧形成的六边形环，折叠成长度为$_{0}4 / 3R\pi$ 的三圈直杆构型。

许多三维杆结构的稳定性研究可追溯到一些最早的论文，例如Michell（1889），这些研究基于对结构振动谱的考察。这些研究确定了至少一个固有频率变为零时的载荷或残余应力水平。这种方法是自然的选择，因为Kirchhoff杆理论是一种欧拉型表述，其中描述杆的变量定义在变形状态中。对于某些问题，例如本文所示的问题，基于Kirchhoff理论的等效但替代的拉格朗日方法可能具有优势，并可能提供更直接、更简单的途径来确定稳定性。第2节给出了用于研究圆形或直线构型稳定性的方程。第3节将重新分析文献中先前分析过的三个问题，以说明本文所采用方法的应用并确立其有效性。第3节中的三个问题之一是可施加于两端夹紧的均匀弯曲杆弧上的最大曲率。将强调该问题的重要性，并给出文献中先前未提供的详细结果。第4节分析了预应力双杆的模型问题，提供了基本见解，第5节分析了六边形环的三环折叠状态的稳定性。

2. 圆形和直线参考构形下环行为的控制方程

首先给出基于Kirchhoff杆理论从圆形参考状态出发的变形与应变相关方程，然后将其特化到直线参考状态。推导这些方程所采用的步骤与文献中许多论文和书籍（Antman, 1995）给出的相同，因此本文的表述将尽可能简短。如图2所示，参考状态中的右手单位向量组$_3(\ ,\ ,\ )_r\ _0\mathbf{i}\ \ \mathbf{i}\ \ \mathbf{i}$ 中，$_0\mathbf{i}$ 与参考圆相切，$_r\mathbf{i}$ 垂直于该圆，而$_3\mathbf{i}$ 垂直于该圆所在平面。变形状态中的嵌入单位向量组记为$_1\ \ _2\ \ _3(\ ,\ ,\ )\mathbf{e}\mathbf{e}\ \ \mathbf{e}$，其中$_2\mathbf{e}$ 与杆相切，$_1\ \ _3(\ ,\ )\mathbf{e}\ \ \mathbf{e}$ 随横截面转动。当环处于参考状态时，集合 $_1\ \ _2\ \ _3(\ ,\ ,\ )\mathbf{e}\ \ \mathbf{e}\ \ \mathbf{e}$ 与 $_3(\ ,\ ,\ )_r\ _0\mathbf{i}\ \ \mathbf{i}\ \ \mathbf{i}$ 重合。



a) b) c)

图 2. 单位向量和欧拉角。a) 笛卡尔基向量和参考柱坐标基向量。b) 局部柱坐标基向量和两个欧拉角 β 和 γ，它们用于确定三个嵌入基向量 $\mathbf{e}_i$，且绕杆轴 $\mathbf{e}_2$ 无转动。c) 与 b) 相同，但绕 $\mathbf{e}_2$ 转动 α 之后（虚线箭头表示转动前的 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_3$）。

采用欧拉角来描述杆从圆形参考状态偏离时的变形变化。定义杆轴线几何的两个欧拉角如图2b所示，此时嵌入单位向量绕轴线无转动。第三个角度是横截面绕$\mathbf{e}_2$轴的累积转动 α，发生在从圆形状态运动的过程中（图2c）。本文将注意力限于不可伸长杆，沿杆从某参考点量起并随周向角 θ 增大的距离记为s。本文分析将采用拉格朗日描述。以R 为参考状态中环（或诸环）的半径，上述引入的单位向量$\mathbf{i}_r(\theta), \mathbf{i}_\theta(\theta), \mathbf{i}_3$以及欧拉角$\alpha(\theta), \beta(\theta), \gamma(\theta)$ 均为 θ 或 s 的函数。两组单位向量之间的关系为:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \big(\cos(\alpha+\gamma)+(1-\cos\beta)\sin\alpha\sin\gamma\big)\mathbf{i}_r + \sin\alpha\sin\beta\,\mathbf{i}_\theta \\
&\quad + \big(-\sin(\alpha+\gamma)+(1-\cos\beta)\sin\alpha\cos\gamma\big)\mathbf{i}_3 \\
\mathbf{e}_2 &= \sin\beta\sin\gamma\,\mathbf{i}_r + \cos\beta\,\mathbf{i}_\theta + \sin\beta\cos\gamma\,\mathbf{i}_3 \\
\mathbf{e}_3 &= \big(\sin(\alpha+\gamma)-(1-\cos\beta)\cos\alpha\sin\gamma\big)\mathbf{i}_r - \cos\alpha\sin\beta\,\mathbf{i}_\theta \\
&\quad + \big(\cos(\alpha+\gamma)-(1-\cos\beta)\cos\alpha\cos\gamma\big)\mathbf{i}_3
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

轴之间的方向余弦，$l_{ij} = \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{i}_j$ 满足$\mathbf{e}_i = l_{ij}\mathbf{i}_j$，其中$(\alpha, \beta, \gamma) \to (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta)$ 为方便记号，并且$\mathbf{i}_i = l_{ij}\mathbf{e}_j$。这些内容见补充材料。

将相对于圆形参考状态的位移分量记为$\mathbf{u}_3\mathbf{i}_3 + \mathbf{u}_r\mathbf{i}_r + \mathbf{u}_\theta\mathbf{i}_\theta$。一个与中心线轴相切、方向指向的$\mathbf{e}_2$是

$$\mathbf{t} = (du_r/ds - R^{-1}u_\theta)\mathbf{i}_r + (1 + du_\theta/ds + R^{-1}u_r)\mathbf{i}_\theta + du_3/ds\,\mathbf{i}_3 \equiv -\varphi_3\mathbf{i}_r + (1+\varepsilon_\theta)\mathbf{i}_\theta + \varphi_r\mathbf{i}_3$$

不可伸长条件为

$$2(du_\theta/ds + R^{-1}u_r) + (du_\theta/ds + R^{-1}u_r)^2 + (du_r/ds - R^{-1}u_\theta)^2 + (du_3/ds)^2 = 0 \tag{2.2}$$

这也确保了$\mathbf{t} = \mathbf{e}_2$是一个单位向量。注意，$\varepsilon_\theta \equiv (du_\theta/ds + R^{-1}u_r)$，$\varphi_r = du_r/ds$和$\varphi_3 = -(du_r/ds - R^{-1}u_\theta)$分别是中心线线性化伸长应变，以及绕$\mathbf{i}_r$和$\mathbf{i}_3$的线性化转动。此外，将不可伸长条件中的$\varepsilon_\theta$用另外两个量表示（其中$\varphi_r^2 + \varphi_3^2 < 1$），可得约束表达式

$$\varepsilon_\theta = \sqrt{1 - \varphi_r^2 - \varphi_3^2} - 1 \tag{2.3}$$

通过比较$\mathbf{t}$的方程与$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{t}$的方程中的各项，还可得出以下精确关系：

$$\varepsilon_\theta = (du_\theta/ds + R^{-1}u_r) = \cos\beta - 1 \tag{2.4}$$

或$\cos\beta = \sqrt{1 - \varphi_r^2 - \varphi_3^2}$以及

$$\varphi_r = du_3/ds = \sin\beta\cos\gamma \quad \text{and} \quad \varphi_3 = -(du_r/ds - R^{-1}u_\theta) = -\sin\beta\sin\gamma \tag{2.5}$$

如果$\beta \neq 0$，还可以推出

$$\gamma = -\tan^{-1}\varphi_3/\varphi_r \tag{2.6}$$

其中，κ_1和κ_3分别是绕$\mathbf{e}_1$轴和$\mathbf{e}_3$轴的曲率，κ_2是沿杆的距离方向对扭转求导所得的导数，可使用 Frenet-Seret公式（参见 Champneys 和 Thompson，1996；Audoly 和 Seffen，2015年），

$$\kappa_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{d\mathbf{e}_j}{ds} \bullet \mathbf{e}_k, \tag{2.7}$$

以计算曲率。精确结果为

$$\kappa_1 = \cos\alpha\,(d\beta/ds - R^{-1}\sin\gamma) - \sin\alpha(-\sin\beta\ d\gamma/ds + R^{-1}\cos\beta\cos\gamma)$$
$$\kappa_2 = d\alpha/ds + \cos\beta\ d\gamma/ds + R^{-1}\sin\beta\cos\gamma \tag{2.8}$$
$$\kappa_3 = \cos\alpha\,(-\sin\beta\ d\gamma/ds + R^{-1}\cos\beta\cos\gamma) + \sin\alpha(d\beta/ds - R^{-1}\sin\gamma)$$

曲率分量是相对于变形状态中嵌入的单位向量系统$\mathbf{e}_i$定义的，如向量$\boldsymbol{\Omega} = \kappa_i \mathbf{e}_i$所反映。

对于接下来的稳定性分岔计算，杆的“自然”未卷曲状态长度为L，初始均匀曲率为κ_n，绕3轴。本文仅讨论具有线性弯曲和扭转特性的均匀杆。自然状态下横截面的主轴取为与$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$对齐，即参考状态下的$(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3)$；绕这两轴的弯曲刚度分别记为$B_1$和$B_3$。绕$\mathbf{e}_2$轴的扭转刚度记为$B_2$。除本文分析的一种问题外，杆在无应力状态下均具有均匀自然曲率κ_n，绕$\mathbf{i}_3$轴。随后，杆绕3轴均匀弯曲，形成半径为R的圆形环圈或圆弧段。我们将在半径为该值的圆形状态下研究其稳定性或失稳情况。此外，我们还将研究$R \to \infty$的直线状态的稳定性。在圆形参考状态下，非零曲率为$\kappa_3 = R^{-1}$，相对于自然状态的曲率变化为$-\kappa_n = -R^{-1}$，圆形状态下环中的力矩为$M_3(B_3) = B_3(\kappa_3 - \kappa_n)$。对于长度为$L$、参考状态为圆形或直线的杆，假设其偏离参考状态后的构型中的应变能由线性本构行为决定，即

$$SE = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{B_1\kappa_1^{\,2} + B_2\kappa_2^{\,2} + B_3(\kappa_3 - \kappa_n)^2\right\} ds \tag{2.9}$$

曲率由 (2.8) 给出。对于参考状态为直线的情形，只需将乘以 R^{-1}的项设为零，这些曲率表达式同样适用。方程 (2.8) 与 Champneys 和 Thompson（1996）在研究初始为直杆的情形时给出的结果一致，但符号表示不同。

2.1 中等转动近似

对于从圆形状态（无初始扭转）开始的中等转动，我们预期 α^2、φ^2 和 φ_3^2 都远小于 1。要进行圆形状态或直线状态的稳定性分岔计算，弹性系统的能量变化必须在相对于该状态的位移及其梯度的二阶精度上准确。由上述方程可知，β^2 也远小于 1；然而，在圆形状态下，无法由 $\tan\gamma = -\varphi$ 推知 γ。在此研究的问题中，随着分岔从参考状态开始发展，曲率必须从参考状态的曲率连续变化。若参考状态下无初始扭转，则圆形状态中（0, 0）$\alpha =$ $\beta =$对应的 κ_1 和 κ_3 公式表明，分岔发生时 γ 必须为零；给定初始曲率 $\kappa_1 = 0, \kappa_3 =$ $^{-1}$ $()R$以及曲率的连续变化，γ 必须从零连续产生。假设（, ,）α β γ 均较小，并将曲率表达式按这些量展开为泰勒级数，保留至二次项，可得:

$$\kappa_1 = \frac{d\beta}{ds} - R^{-1}\omega + O_3,\ \kappa_2 = \frac{d\omega}{ds} + R^{-1}\beta + O_3,$$

$$\kappa_3 = R^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\beta^2\right) - \beta\frac{d\omega}{ds} + \frac{d(\alpha\beta)}{ds} + O_4 \tag{2.10}$$

其中有 $\omega = \alpha + \gamma$。符号 O_3 和 O_4 分别表示未忽略三次阶和四次阶以下的任何项。因此，前两个曲率没有二次项，而第三个曲率没有三次项。取相同阶数，

$$\varepsilon_\theta = \left(\frac{du_\theta}{ds} + R^{-1}u_r\right) = -\frac{1}{2}\beta^2 = -\frac{1}{2}(\varphi_r^2 + \varphi_3^2),\ \varphi_r = \frac{du_3}{ds} = \beta,\ \varphi_3 = \left(\frac{du_r}{ds} - R^{-1}u_\theta\right) = -\beta\gamma \tag{2.11}$$

2.2 二次阶应变能泛函

保留至二次项（含二次项），应变能 (2.9) 为

$$SE = \tfrac{1}{2}B_3(1/R - \kappa_n)^2 L + P_2(\beta, \omega, M) \tag{2.12}$$

其中

$$P_2=\tfrac{1}{2}\int_0^L\left\{B_1\left(\frac{d\beta}{ds}-\frac{\omega}{R}\right)^2+B_2\left(\frac{d\omega}{ds}+\frac{\beta}{R}\right)^2-B_3M\left(\left(\frac{\beta}{R}\right)^2+\left(\frac{\omega}{R}\right)^2+2\frac{\beta}{R}\frac{d\omega}{ds}\right)\right\}ds+2B_3M\left.\frac{\alpha\beta}{R}\right|_0^L$$

with $\omega=\alpha+\gamma$, and $=1-\ \kappa_{n}M\ R$，由 Audoly 和 Seffen（2015年）引入的参数。由于环或圆弧的对称性，以及前面提到的曲率表达式的准确性，*SE* 没有三次项，因此，实际上，(2.12) 精确到 $_4O$ 。

二次泛函 2P 确定了参考状态下 SE 的二阶变分，并支配其稳定性。考虑完整环，其中 α 、 γ 和 β 在 = 0 s 和 s L= 处连续；或者考虑两端夹持的圆弧（$\alpha=\beta=0$）。对于这些对象，$\alpha\beta\,\big|_0^L=0$。泛函 2P 定义了一个以 $=1-\ \kappa\ \ \mathrm{nM\ R}$ 为特征值的特征值问题。在与分岔问题相关的阶次上，不可伸长条件要求 $(\ /\ /\ )\ \varepsilon_{\theta}=\ \ _{\theta}\ \ +\ _{r}\ \ =0\,\mathrm{du\ ds\ u\ R}$。位移约束对欧拉角施加的其他条件可能也必须纳入考虑，后文将对此加以说明。若 0M =, 则对于所有非零变分 (,)β ω ， 2 0P ≥ 。只有具有 $\omega=\beta'$和 $\omega'+\beta=0$ 的非零变分才会使 2P 取零；它们对应于线性化的刚体转动。换言之，若 0M = ，则对于所有非零且非刚体运动的容许变分，2 0P > 。对于完整环，分岔问题中的欧拉角及其对应位移须以 $=2\pi\ \ \ \mathrm{L\ NR}$ 为周期连续且可微，其中 N 为环圈数；位移沿环周的连续性要求 $\int_0^L\beta\ \ =0\mathrm{ds}$。对于完整环或圆弧，我们要确定 M 的取值范围，使得对于所有非零容许变分（不包括刚体运动），2 0P > 。在此范围内，圆形状态稳定；在此范围之外，则不稳定。对于完整环，涉及均匀轴对称扭转的变形类别，即 $\alpha=\omega$ 与 θ 无关且具有 $\beta=\gamma=0$，值得特别关注。该类变形的 2P 被积函数仅为 $_1-\ \ \alpha^2\ \ (\ )\mathrm{b\ M}$，因此，当 1M b> 时，环对均匀轴对称扭转不稳定；当 1M b< 时则稳定。后文将进一步讨论这一模态。

3. 文献中的三个已解决问题

本节采用上述用于分析弹性保守系统稳定性或屈曲的标准准静态方法，重现文献中先前分析并求解的三个问题的解。此处采用的拉格朗日准静态方法在某些情况下能更直接地得到结果。对于第二个问题，即夹持圆弧和直弧的纯弯曲稳定性，我们将给出比现有文献更完整、更详尽的结果，并在第4节和第5节进一步说明这一基础问题的重要性。

3.1 单环或三环状态下无扭转圆环的稳定性

当环圈数为奇数（3、5、.....N =）时，单环弹性圆环能够在无扭转的情况下变形为多环圆环，这一显著特性多年来已为人所知（Goto 等人，1992年；Stojanoska 和 Stoytchev，2008）；但显然，结构屈曲研究领域的相关学者并不普遍了解这一现象。两篇论文基于基尔霍夫杆理论，对多状态圆环进行了较为全面的分析，既讨论了圆形状态的稳定性，也讨论了连接这些状态的过渡行为（Manning 和 Hoffman，2001；Audoly 和 Seffen，2015年）。本文将分析圆形状态和直线状态的稳定性，但不讨论状态之间的转变。我们的结果重现了 Audoly 和 Seffen 的研究以及更早由 Manning 和 Hoffman 得出的一些结果。本节旨在介绍并验证本文针对一个已解决问题所采用的方法。

我们寻求临界特征值，$_{C}M^{-}$ 和 $_{C}M^{+}$，以及相关模态，它们定义了环的稳定范围，条件是 ( )β θ 和 ( )ω θ ，其中 /*s R*θ = ，具有周期性 2 *N*π 且具有连续导数。特征值方程通过使 $_{2}P$ 的变分相对于变量 (,)β ω 驻定而获得。控制特征值问题的常微分方程（常微分方程）为

$$\begin{aligned} b_2\omega'' + (M - b_1)\omega + (-M + b_1 + b_2)\beta' = 0 \\ b_1\beta'' + (M - b_2)\beta - (-M + b_1 + b_2)\omega' = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $_{1\,1\,3}/b\,B\,B=$，$_{2}=\ _{2}\ \ _{3}/b\,B\,B$，以及 ( ) ( ) /*d d*′ = θ 。这些方程不涉及 φ_3 或面内位移，$_{r}u$ 和 u_{θ}。由 (2.11) 可知，这些量均为二阶量，在一阶分岔问题中不起作用；该问题涉及面外位移

和扭转的组合，即 $_3u\ R' =\ \beta$ 。$_3u$ 的连续性要求 $\int_0^{2N\pi} \beta\ \theta = 0d$。

Audoly 和 Seffen（2015年）主要关注具有高长宽比横截面的带状杆，其弯扭行为会因带材发生可展变形而呈现非线性。本文将重点讨论具有线性弯扭本构行为的杆。假设横截面的高度与厚度之比处于不会出现带状非线性行为的范围内。考虑如下形式的模态

$$\omega = A\cos(j\theta / N),\ \beta = B\sin(j\theta / N) \tag{3.2}$$

其中 j 是任意非负整数。模态位移为 $_3(/)\cos(/)\ u\ B\ RN\ j\ j\ N= -$ θ，其中 $>0\ j$，且这些模态均满足 $\int_0^{2N\pi} \beta\ \theta = 0d$。（形式为 $.const\beta =$ 的潜在模态是周期的，但因条件 $\int_0^{2N\pi} \beta\ \theta = 0d$ 而被排除。）代数特征值问题为

$$\begin{aligned} &A\left[b_1 + b_2(j/N)^2 - M\right] - B\left[(b_1 + b_2 - M)(j/N)\right] = 0 \\ &-A\left[(b_1 + b_2 - M)(j/N)\right] + B\left[b_1(j/N)^2 + b_2 - M\right] = 0 \end{aligned}$$

导致

$$\left(M^2 - M(b_1 + b_2) + b_1 b_2\left(1 - (j/N)^2\right)\right)\left(1 - (j/N)^2\right) = 0$$

其解为$/=1\ j\ N$ 对于任意 M （刚体模态），以及

$$(M^+, M^-) = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(b_1 - b_2)^2 + b_2(j/N)^2}\ , \tag{3.3}$$

对于所有其他j和N均成立。这与 Audoly 和 Seffen（2015年）以及 Manning 和 Hoffman（2001）的解一致

为展示并验证所述方法，本小节仅考虑由各向同性弹性材料。制成、具有各向同性截面的环。对于实心或环形，圆形截面，这些截面的$_1$ 1b = 和$_2$ 1/ (= 1+ν)b 分别为ν ，其中泊松比为ν 。对于任意整数个环圈，对应于 0j =、具有Aω = , β = 0, $^+$ =1 M和$_2M$ b^- = 的均匀轴对称扭转模态，先前已有讨论。具有$_1$ 1b = 横截面的杆，在均匀扭转模态下是不稳定的，若 1 $_n$ 1M M R> $^+$ = − λ > ，即λ$_n$ < 0。如果杆在自然状态下是直的，即 λ$_n$ = 0，则很容易看出，环的应变能在均匀轴对称扭转作用下不会改变。对于这类变形，环处于中性稳定状态。任何具有初始曲率 λ$_n$ < 0 的此类杆，在成形为环时都会立即发生均匀轴对称扭转，从而有效地改变初始自然曲率的符号。换言之，均匀轴对称扭转模态表明，无需进一步考虑由自然曲率为负的杆制成、具有各向同性弯曲刚度的环。均匀轴对称扭转不会改变环的形状，但其材料会发生变形变化。第二特征值$_2M$ b^- = 是伪特征值，因为它对应于平凡特征模态 β = ω = 0 。

与 / = 1 j N 相关的模态对于任意 M 均为绕环平面内各轴的刚体转动。对于所假设的形式，B A= 使得 cos$A$ω = θ 、sin$_r$ Aφ = β = θ 、 φ$_3$ = 0、$_3$ cos$u$ AR = − θ 以及 $_r$ = $_\theta$ = 0 u u。唯一的例外是：若$_2$1M M b= $^+$ = + ，则还可能存在一种涉及环的变形的模态；不过这不会产生影响，因为与之相关的自然曲率$_{2n}R$ b κ = − 为负，且会被均匀轴对称扭转所取代。

对于单环（ 1N = ）和 2j ≥ ，第$_{阶}j$ 模态的稳定范围为MMM^- < < $^+$。由 (3.3) 给出的所有M^+ 值均满足 $^+$ > 1 M，因此稳定范围的上限由均匀轴对称扭转和 ^+_C = 1M决定。M^- 的最大值与 = 2 j 相关，而 (3.3) 给出 ^-_C = −0 861 M，适用于ν = 1 3/ 的圆形截面。因此，对于单环，稳定范围为 −0 861 < <1M。考虑由以下材料形成的环

其长度为 L、自然曲率为 κ_n 的杆，可形成一个或多个环圈，满足 $L = 2\pi R$ N。这是对由给定长度和自然曲率的杆形成、且具有一个或多个环圈的环所采用的相关归一化。自然曲率的稳定性极限为

$$\frac{L}{2\pi}\kappa_n^- = N(1 - M_C^+) \quad \text{and} \quad \frac{L}{2\pi}\kappa_n^+ = N(1 - M_C^-)$$

对于单环，圆形状态稳定的自然曲率范围为

$$0 < (L/2\pi)\kappa_n < 1.86 \quad (N = 1)$$

确定具有多个环圈的同一环的圆形状态的稳定性需要额外考虑。对于每个具有 $j > 1$ N 的模态，稳定范围再次由 $M_C^- < M < M_C^+$ 给出，但对于每个具有 $j > 1$ N 的模态，稳定范围为 $M < M_C^-$，其中 M_C^+ 不起作用。这很容易通过证明对于 $M < M_C^-$，$P_2 \geq 0$ 对所有 A 和 B 成立，而若 $M > M_C^-$，则对每个 M，某些 A 和 B 的组合存在 $P_2 < 0$ 的负值来确立。对于三圈环 ($N = 3$)，稳定性的 M 最大值由 $j = 2$ 设定，并由 $M = M_C^- = -0.284$ 给出。M 的最大下稳定性极限由 $M_C^- = -0.286$ 对于 $j = 4$ 确定。因此，$N = 3$ 的稳定范围为 $-0.286 < M < 0.284$。M 使得

$$2.15 < (L/2\pi)\kappa_n < 3.86 \quad (N = 3)$$

对于圆形截面，单环和三圈环的稳定范围并不重叠。如果杆的自然状态为直线，则单环圆形状态处于临界稳定（易受均匀轴对称扭转影响），而三环状态则不是。稳定的单环环可以变形为三环圆形状态，但该状态并不稳定。反之，如果自然曲率使三圈环稳定，那么从三环状态被扰动后，它不会转变为只有一圈的圆环。对于横截面平面外弯曲刚度相对于面内刚度足够大的杆，单环和三圈环的稳定范围会有重叠。模态位移 $u_3(\theta) = B\cos(N\theta - j\theta)$，伴随扭转（3.2），表现为各环圈沿环周逐渐分离，但不会使环自身接触。

伴随扭转（3.2）是各环圈沿环周逐渐分离的过程，不会使环自身发生接触。

3.2 两端夹持的直杆或自然弯曲杆的纯弯曲稳定性

考虑 Audoly 和 Seffen（2015）分析的另一个问题：具有自然曲率的杆绕$_3$**i** 轴纯弯曲时的稳定性。我们将在第4节和第5节看到，这一基本问题是更复杂结构稳定性现象的基础。这里将给出圆形或矩形横截面杆的较完整结果。如图3所示，杆的自然状态为均匀曲率，$\kappa_n > 0$；变形状态可以是弯曲的（$1/R\kappa =$），也可以是直的（$\kappa = 1 \quad = / 0R$）。杆不可伸长，长度为L。取$s\ R= \quad \theta$，以杆的中心为测量起点，使两端位于$/= \pm \quad 2 \quad s\ L$。杆受到大小为$_3 \ _nB \quad \kappa - \kappa$ 的等大反向端弯矩作用，其中$\kappa = 1 \quad /R$为变形状态下的曲率。在此状态下，梁的两端被固支，不能进一步转动。要使此状态稳定，对于当前圆形状态的所有非零容许变分，式（2.12）中的$_2 \quad 0P >$ 必须成立。由于固支端条件，$\alpha\beta \ _0^L = 0$。为消除$/\int_{-L}^{L} {}_2^2 \beta \quad = 0^{/L} \quad ds$要求所施加的约束，在$_2P$中代入$_3 /du\ ds\beta =$ 。以$_3(,)u \quad \omega$为未知量时，杆两端固支处的边界条件为$_3 \quad _3/ 0\ u \quad du \quad ds \quad = \qquad = \omega =$ 。

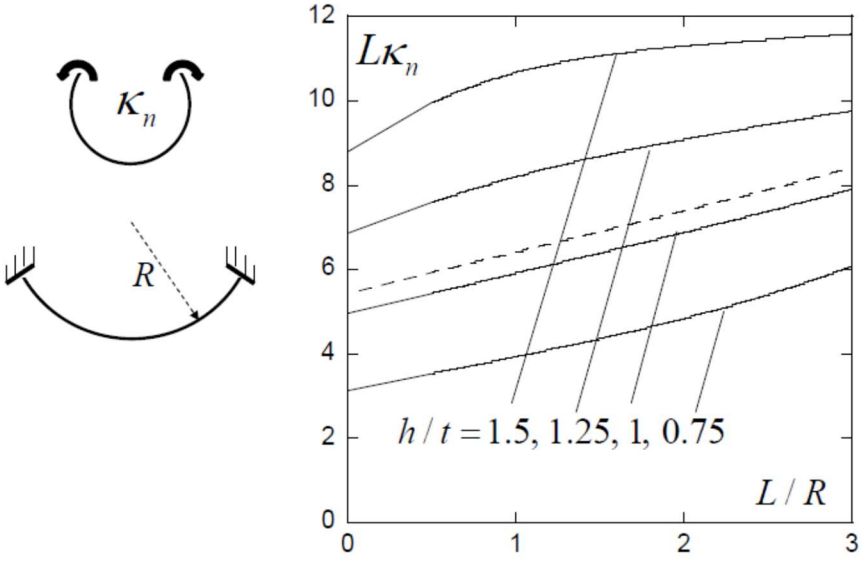


图3. 长度为L的杆的自然曲率稳定范围。杆的横截面为圆形（虚线）或矩形（实线，取决于/h t），弯曲成半径为R的圆弧，并在两端固支。自然曲率超过图示值时，圆弧将发生屈曲。此图中泊松比为1/3。弯曲杆为直杆的极限情况，/$\to 0L$ R，由式（3.9）给出。对于弯曲后的直杆，该结果适用于右端沿杆方向的位移不受约束的情况。

令/x s L= ， = $_3$/u u L、1 $_n M$ R= − $\bar{\kappa}$和/L L R= ，使(2.12)中的$_2 P$取驻值，得到的常微分方程为

$$\begin{aligned} &b_1(u'''-\bar{L}\omega'')-b_2\bar{L}(\omega''+\bar{L}u'')+M\bar{L}(\bar{L}u''+\omega'')=0\\ &b_1\bar{L}(u''-\bar{L}\omega)+b_2(\omega''+\bar{L}u'')+M\bar{L}(\bar{L}\omega-u'')=0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

这些方程的通解可分为对称部分（$_1 c$、$_2 c$ 、$_3 c$ ）和反对称部分（$_4 c$ 、$_5 c$ 、$_6 c$），即

$$\begin{aligned} u &= c_1+c_2\cos(\bar{L}x)+c_3\cos(\lambda\bar{L}x)+c_4x+c_5\sin(\bar{L}x)+c_6\sin(\lambda\bar{L}x)\\ \omega &= -\bar{L}\left(c_2\cos(\bar{L}x)+c_3q\cos(\lambda\bar{L}x)+c_5\sin(\bar{L}x)+c_6q\sin(\lambda\bar{L}x)\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中（预期$_1$ $_2$ ( )( ) 0 b Mb M– – > ）

$$\lambda=\sqrt{\frac{(b_1-M)(b_2-M)}{b_1b_2}}\ ,\ q=\frac{b_2-M}{b_2} \tag{3.6}$$

在 =1 2 /x处满足边界条件后得到的特征值方程为

$$\lambda\sin(\lambda\bar{L}/2)\cos(\bar{L}/2)-q\cos(\lambda\bar{L}/2)\sin(\bar{L}/2)=0 \qquad \text{(symmetric)} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} &2(1-q)\sin(\bar{L}/2)\sin(\lambda\bar{L}/2)-\lambda\bar{L}\sin(\bar{L}/2)\cos(\lambda\bar{L}/2)\\ &\quad+q\bar{L}\cos(\bar{L}/2)\sin(\lambda\bar{L}/2)=0 \end{aligned} \qquad \text{(anti-symmetric)} \tag{3.8}$$

在讨论这一解的一些细节之前，我们先给出一个将证明为重要极限情形的结果——即固支杆为直杆时的极限，$R\to\infty$ 并 / = $\to 0L$ L R。对于分岔分析所涉及的阶数，$_{-2}=0u$，以及

不可伸长性以及杆两端的完全固支条件在该极限下仍然适用。显然，以这种方式具有不可伸长性并受固支的直杆不可能偏离直线状态。然而，例如，如果稍微修改杆右端的支承条件，使杆在二方向上的位移不受约束，但在其他方面仍受到转动和位移约束，则杆可能在临界条件下发生屈曲位移。本分析同样适用于这一微小修改（类似地，如果在圆形状态下杆的一端可沿周向自由位移，本节中的分析仍然适用）。直线状态下杆的结果既可以通过取上述方程的极限得到，也可以从头开始使用带有 $0L$ = 的常微分方程（3.4）推导，注意到 $_nML\ L=\to -\ \kappa$ 。可以发现，临界模态是对称的，并且直线固支杆保持稳定时的最大自然曲率为

$$L\kappa_n = 2\pi \frac{\sqrt{B_1 B_2}}{B_3} \tag{3.9}$$

相应的模态是位移与转动的组合，表示为

$$u_3 = cL\left(1+\cos(2\pi s/L)\right),\ \omega = -c2\pi\sqrt{B_1/B_2}\left(1+\cos(2\pi s/L)\right) \tag{3.10}$$

弯曲刚度与扭转刚度的无量纲组合 $_{1\ 2\ 3}/BB\ B$ 控制临界自然曲率的量纲于图 4 中。图中所示的椭圆形截面和矩形横截面杆，其高度 h 沿 3 方向，厚度 t 沿 1 方向或 r 方向。回想一下，对于圆形截面（实心或环形），$_{1\ \ 1\ \ 3}/=\quad\quad=1\ b\ \ B\ \ B$ 且

$_{2\ 2\ 3}/=\quad\quad=1\ \ 1+\nu\ \ /(\ )\ b\sqrt{B\ B}$ 因此 $_{1\ 2\ 3}/=1\ \sqrt{1+\nu}\ /\ B\ B\ B$ 。对于椭圆形截面

$$\frac{\sqrt{B_1 B_2}}{B_3} = \frac{h}{t}\sqrt{\frac{2}{(1+\nu)(1+(t/h)^2)}} \tag{3.11}$$

对于实心矩形横截面，$_1=\quad\quad^2\ (\ /\ )b\ \ h\ \ t$，且使用 Sokolnikoff（1956）关于扭转刚度的结果，可得到 $_2b$ 的精确近似值：

$$b_2 = \frac{B_2}{B_3} = \frac{2}{1+\nu}\left(1 - \frac{195}{\pi^5}\frac{t}{h}\tanh\left(\frac{\pi}{2}\frac{h}{t}\right)\right) \tag{3.12}$$

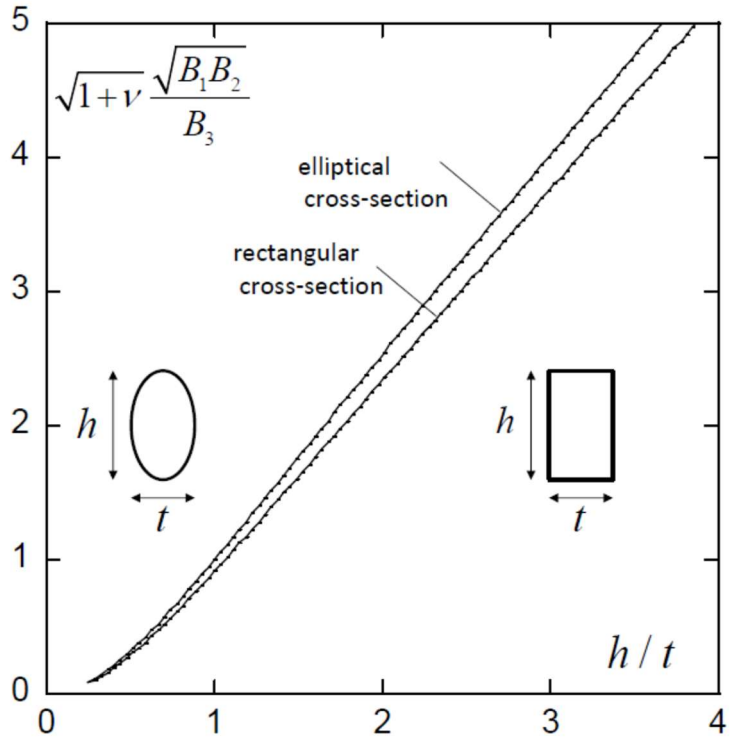


图 4. 矩形和椭圆形截面的弯曲刚度与扭转刚度的无量纲组合，对杆稳定性至关重要（见 3.9）。

圆形和矩形横截面杆的自然曲率稳定范围如图 3 所示。对于图中绘出的所有情况，预期条件 $_1$ $_2$ ( )( ) 0 b Mb $M-$ $-$ $>$ 均得到满足，且由 (3.7) 给出的特征值对应的对称模态是临界模态。尽管圆形横截面和正方形横截面都具有 $_1 = 1b$ ，但正方形横截面的 $_2b$ 略小，因此其稳定范围也略小。矩形横截面的长宽比 /h t 对稳定范围有很强的影响，这并不令人意外。图 3 中还包含一种平面内弯曲刚度高于面外刚度的横截面情况，/ $= 0.75h$ t，显示具有此类横截面的杆的稳定范围大幅缩小。当长宽比非常高时，例如 / $>> 1h$ t，(3.11)

预测表明稳定范围很大。此类横截面容易发生由 Audoly 和 Seffen（2015年）建模的带状失稳。

特征值条件（3.7）和（3.8）有两个分支。图 3 中绘出的分支以及（3.9）中直杆的公式对应于 1/$_n$ $R\kappa$ $>$ 。另一个分支给出 1/$_n$ $R\kappa$ $<$ 的取值。例如，对于直杆，由于对称性，第二个分支满足 $_{1\ 2\ 3}$2 / $_n$ B B $B\kappa$ $=-$ π，这一点显而易见。

考虑另一个由特征值方程（3.4）描述的基本问题：可弯曲成半径为 L 的固支圆弧且不会发生屈曲的直杆（$\kappa_n=0$） 的最大长度 R。方程（3.4）适用，其中 $=1$ M为两端的弯矩，且= $'=\omega=0$ u u 满足杆两端的固支条件。我们省略这一分析的细节，因为它与前文所述的分析类似。弯曲后的杆失去稳定性时对应的临界值 /L LR= 所对应的模态关于杆的中心对称，其特征值为：

$$\lambda\sin(\lambda\bar{L}/2)\cos(\bar{L}/2)-q\cos(\lambda\bar{L}/2)\sin(\bar{L}/2)=0,\quad \text{if}\ (b_1-1)(b_2-1)>0 \tag{3.13}$$

其中 $_{1\ 2\ 1\ 2}$($\lambda=\sqrt{\quad -1 \quad -1 \quad}$)( ) /b b bb以及 $_{2\ 2}$(1) /q b b= $-$，并且

$$\lambda\sinh(\lambda\bar{L}/2)\cos(\bar{L}/2)+q\cosh(\lambda\bar{L}/2)\sin(\bar{L}/2)=0,\quad \text{if}\ (b_1-1)(b_2-1)<0 \tag{3.14}$$

其中 $_{1\ 2\ 1\ 2}$($\lambda=\sqrt{\quad - \quad -1 \quad -1 \quad}$)( ) /b b bb且 $_{2\ 2}$(1) /q b b= $-$。图 5 绘出了矩形横截面杆的固支弯曲圆弧保持稳定时的最大归一化长度 /L R 随 /h t 的变化。对于弯曲刚度相等的杆，即 $_1=1b$，使得式 (3.13) 和 (3.14) 中的 $\lambda=0$ 成立，其临界长度为 / $=2\pi$ LR ；相应的模态是均匀轴对称扭转与刚体转动的组合，使环的固支处没有转动。对于面内与平面外弯曲刚度几乎相同的杆，临界稳定界限对横截面长宽比极其敏感。平面外弯曲刚度相对于面内刚度略有增加，就会显著提高稳定性极限。

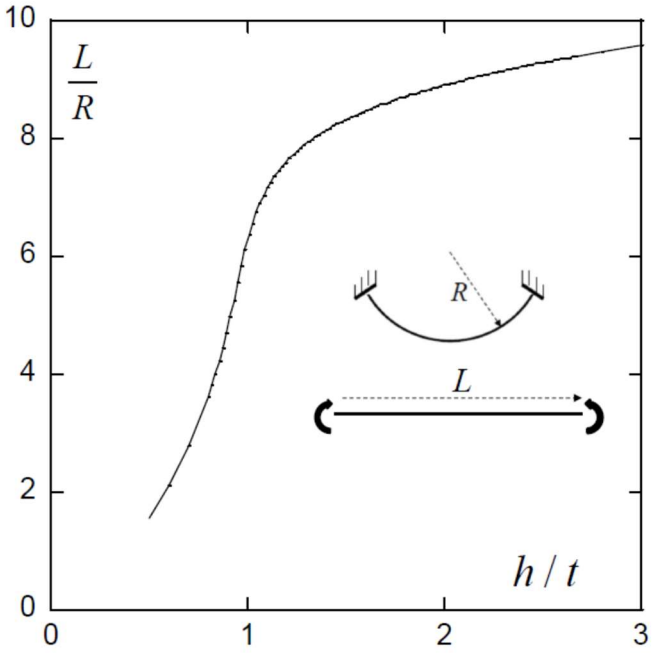


图 5. 矩形横截面的直杆弯曲成半径为R 的固支圆弧时，长度L的稳定性极限。垂直于弯曲平面的横截面高度为h，厚度为t，且在此图中 $\nu = 1\ \ 3$ /。对于 $/\ 1ht =$，$/ = 2\pi\ LR$。

固支弯杆能够储存相对大量的能量，同时保持稳定。为说明这一点，我们比较以下两者的弹性能：长度为 L、承受临界欧拉屈曲载荷轴向压缩的固支欧拉柱（假设其在受压状态下呈弹性行为），以及长度为 L、由达到临界值 (3.9) 的自然曲率形成的固支直杆所储存的弹性能。若两者具有相同的圆形横截面半径 r 和弹性性质，则所储存能量之比为

$$\frac{SE_{Euler\,column}}{SE_{straighten\,rod}} = (1+\nu)\pi^2\left(\frac{r}{L}\right)^2 \tag{3.15}$$

端部固支的细长杆在弯曲时能够储存远高于受压固支欧拉柱的能量，同时仍保持稳定。其影响将在后文讨论。

*3.3 Michell*问题：由扭转直杆弯成的圆形横截面圆环的稳定性

在自然状态下，杆是直的。它受到均匀的初始扭转$_0/\ /d\,ds\,R\omega \quad = \omega'$，其中 $(\ )(\ )/d\,d' = \quad \theta$ 和 ω_0' 为均匀初始扭转；随后弯成半径为R的一圈圆环，并将两端“焊接”。当前要解决的问题是：初始扭转最多能施加多大，才能使圆形状态保持稳定？Michell（1889）最早求解了这一问题，此后数年间文献中又陆续提出了若干种解法，其中包括Goriely（2006年）近期给出的一种简洁而优雅的解法；他还讨论了Michell及这一问题的有趣历史。本文基于对能量二阶变分的考察，补充另一种相对简洁直接的解法。本例说明，由于存在初始扭转，面内位移与面外位移会在分岔模态中相互耦合。

由（2.8）和（2.9）可得的环的精确能量泛函是

$$
\begin{aligned}
&SE/(B_3R^{-1}) \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{b_2\left(\omega'+(\cos\beta-1)\gamma'+\sin\beta\cos\gamma\right)^2+\left(\beta'-\sin\gamma\right)^2+\left(\sin\beta\gamma'-\cos\beta\cos\gamma\right)^2\right\}d\theta
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

其中 $\omega=\alpha+\gamma$， $_1 = \ _3B \ \ B$和 $_2 \ \ _2 \ \ _3/b \ \ B \ \ B=$ 。相关连接为

$$
\cos\beta=\sqrt{1-\varphi_r^{\,2}-\varphi_3^{\,2}}\,,\quad \varepsilon_\theta=R^{-1}(u_\theta'+u_r)=\cos\beta-1 \tag{3.17}
$$

$$
\varphi_r=R^{-1}u_3'=\sin\beta\cos\gamma\,,\quad \varphi_3=-R^{-1}(u_r'-u_\theta)=-\sin\beta\sin\gamma \tag{3.18}
$$

分岔前状态具有 $\omega'=\omega_0'$，$\beta=0$，其中 $_{1\,2\,0\,3\,2\,0}1\,(\ )\,SE\,R\,B\,b=\pi \ \ ^{-} \quad + \ \ \omega'$ 以及 γ 尚未确定。在 $\omega'=\omega_0'+\Delta\omega'$ 的条件下，并忽略阶数为 β^3 及更小的项，

$$
\frac{SE-SE_0}{B_3R^{-1}}=\int_0^{2\pi}\left\{b_2\left(\omega_0'\Delta\omega'+\omega_0'\beta\cos\gamma\right)-\left(\beta\sin\gamma\right)'\right\}d\theta+P_2\left(\omega_0',\Delta\omega',\beta,\gamma\right) \tag{3.19}
$$

其中

$$P_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{ b_2 \left((\Delta\omega' + \beta\cos\gamma)^2 - \omega_0'\beta^2\gamma' \right) + \beta'^2 + \beta^2\gamma'^2 - \beta^2\cos^2\gamma \right\} d\theta \tag{3.20}$$

式 (3.19) 中关于 $\Delta\omega'$ 和 β 的线性积分项为零，这是因为 $\Delta\omega$ 和 $\sin\beta$ γ 连续且为周期函数，同时因为 β $\gamma = {}^{-1}{}_3'\cos R\ u$，并忽略式 (3.18) 中 β^3 阶的项。第二个积分 $_2P$ 是关于 $\Delta\omega'$ 和 β 的二次项，它决定了圆形状态的稳定性。若预扭转为 ω_0'，则当对所有非零容许函数 $(,,)\Delta\omega\ \beta\ \gamma$（不包括刚体运动）均有 $_2\ 0P\ >$ 时，圆形状态稳定。稳定状态的临界值由满足以下条件的最小 ω_0' 决定：存在非零容许函数 $(,,)$ $\Delta\omega\ \beta\ \gamma$，使得 $_2 = 0P$。由于 $\Delta\omega$ 只出现在式 (3.20) 的第一项中，对 $\Delta\omega$ 最小化 $_2P$ 意味着 $\cos\Delta\omega' = -\beta$ γ，因此式 (3.20) 可化简为

$$P_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{ -b_2\omega_0'\beta^2\gamma' + \beta'^2 + \beta^2\gamma'^2 - \beta^2\cos^2\gamma \right\} d\theta \tag{3.21}$$

面内位移与面外位移通过 φ_3 $\varphi_r = -$ $\gamma / \tan$ 耦合，其中 $()\gamma\ \theta$ 未知。

处理该特征值问题的一种方法是利用使 $_2P$ 取驻值所生成的常微分方程。在此，我们将采用直接法，考虑如下形式的周期性正弦位移场

$$u_r = Raj\cos j\theta,\ u_\theta = -Ra\sin j\theta,\ u_3 = Rb\sin j\theta \quad (j = 2,\infty) \tag{3.22}$$

面内分量与面外分量之间的相位关系很重要：选择$_3$ $\cos()u$ $j\infty$ θ 不会导致分岔。这些模态满足最低阶不可伸长性条件$\varepsilon_\theta = 0$。具有$= 0\ j$ 和$= 1\ j$的模态因不可伸长性条件而被排除，或因为它们是刚体模态。忽略 β^3 阶及更小阶的项，可得

$$\beta\cos\gamma = \varphi_r = bj\cos j\theta,\ \beta\sin\gamma = -\varphi_3 = -a(j^2-1)\sin j\theta \tag{3.23}$$

由此可得，(3.21) 中被积函数的各项为

$$
\begin{aligned}
&(\beta\cos\gamma)^2=(bj)^2(\cos j\theta)^2\\
&\beta^2=\left(a(j^2-1)\sin j\theta\right)^2+\left(bj\cos j\theta\right)^2=(bj)^2\left((\cos j\theta)^2+r^2(\sin j\theta)^2\right)\\
&\beta'^2=\beta^{-2}\left[\left((a(j^2-1))^2-(bj)^2\right)j\sin j\theta\cos j\theta\right]^2=(bj)^2\frac{\left((r^2-1)j\sin j\theta\cos j\theta\right)^2}{(\cos j\theta)^2+r^2(\sin j\theta)^2}\\
&\beta^2\gamma'=-ab(j^2-1)j^2=-(bj)^2jr\\
&(\beta\gamma')^2=\beta^{-2}\left(a(j^2-1)bj^2\right)^2=(bj)^2\frac{j^4r^2}{(\cos j\theta)^2+r^2(\sin j\theta)^2}
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

其中 $=\quad{}^2-(1)/()\,r\,a\,j\,bj$。式 (3.21) 各项的积分都很直接，唯独 2nd 的积分例外，后者采用了以下方法

$$(1/\pi)\int_0^{2\pi}(\cos^2\psi+r^2\sin^2\psi)^{-1}\sin^2\psi\cos^2\psi\,d\psi=(1+\sqrt{r^2})^{-2}$$

计算 ${}_2P$，得到（各项顺序与式 (3.21) 相同）：

$$P_2=\frac{\pi}{2}(bj)^2\left\{2b_2\omega_0'jr+j^2(1-\sqrt{r^2})^2+2j^2\sqrt{r^2}-1\right\}\tag{3.25}$$

可简化为

$$P_2=\frac{\pi}{2}(bj)^2\left\{2b_2\omega_0'jr+j^2(1+r^2)-1\right\}\tag{3.26}$$

最低的非平凡特征值与 $=2\ j$ 相关，且为 ${}_{2\,0}\,3b\,\omega'=\sqrt{\ }$，其中$=-\sqrt{3}\quad 2\ /r$（或者，按 ${}_{2\,0}\,3\underline{b}\ \omega'=-\sqrt{\ }$，其中 $3\ \underline{/2}r\ =$），这与 Michell (1889) 的原始结果一致，也与 Goriely (2006年) 在问题发展史中的描述相符。面内位移与面外位移之间的耦合至关重要，其中 $=\pm\sqrt{3}\quad b\qquad a$取决于 ω_0' 的符号。

预计三环状态下的环对于任意初始扭转都不稳定，因为正如第3节第1小节所示，这种环即使没有任何扭转也会不稳定。这一点确实可以通过

在模态（3.20）中将$j\theta$ 替换为$/j\ N\theta$ ，并重新计算$_2P$ 来确认。结果是公式（3.26）右端乘以N，其中j替换为$/j\ N$。然后，当$3N\ =$时，很容易证明，对于ω_0' 的任意值，只要1或$2j\ =$，$_2P$ 就可以为负。

4. 模型问题：由两根自然曲率相同的杆组成的直双杆的稳定性

以下问题将说明下一节中用于更复杂几何形状的方法，但其本身也具有研究价值。该问题定义于图6。除开口位置外，两杆相同，具有均匀的弯曲刚度$_1B$ 和 $_3B$ 分别关于1轴和3轴，以及扭转刚度 $_2B$ 关于2轴。将上杆的自然曲率记为 $_{0n}\kappa\ =\kappa$ ，下杆的记为 $_{0n}\kappa\ =-\kappa$ ，均相对于 $_2x$ 轴定义。将杆弯曲至直线，然后将其端部焊接在一起。双杆的直杆构型是一个平衡态，杆中具有大小相等、方向相反的力矩，大小为 $_{3\ 0}B\ \kappa$ ，关于3轴。假设杆不可伸长，每根长度为 $_02L\ R=\ \psi$ ，其中 $_0=1\ \kappa_0\ /R$ 且 2ψ 是弯曲前圆弧所对的角度。分析直双杆的稳定性对 ψ 的依赖性，或等价地对 $_0/L\ \ R$ 的依赖性。

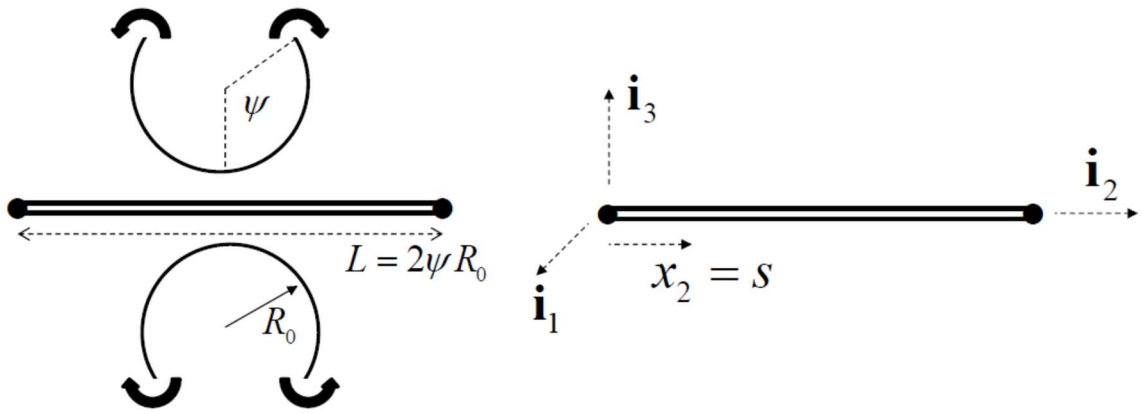


图6. 由两根自然曲率大小相等、方向相反的相同杆组成的双杆，$_{1\ 0\ 0\ n}R\kappa\ =\pm\kappa\ =\pm\ ^-$，绕3轴弯曲成直线段，并在端部焊接。

以直杆构型作为参考状态，从此状态起的曲率变化由下式给出

$$\kappa_1 = \cos\alpha\ \beta' + \sin\alpha\ \sin\beta\ \gamma',\ \kappa_2 = \alpha' + \cos\beta\ \gamma',\ \kappa_3 = \sin\alpha\ \beta' - \cos\alpha\ \sin\beta\ \gamma' \tag{4.1}$$

其中现在 ( ) ( ) /*d ds*′ = 。线性化应变和转动变量为

$$\varepsilon_2 = u_2' = \cos\beta - 1,\ \varphi_1 = u_3' = \sin\beta\ \cos\gamma,\ \varphi_3 = -u_1' = -\sin\beta\ \sin\gamma \tag{4.2}$$

双杆中的应变能为

$$SE = \tfrac{1}{2}\int_0^L \left\{B_1\kappa_1^{(1)2} + B_2\kappa_2^{(1)2} + B_3(\kappa_3^{(1)} - \kappa_0)^2\right\}ds + \tfrac{1}{2}\int_0^L \left\{B_1\kappa_1^{(2)2} + B_2\kappa_2^{(2)2} + B_3(\kappa_3^{(2)} + \kappa_0)^2\right\}ds \tag{4.3}$$

其中第一个积分是上杆中的能量，第二个是下杆中的能量。

在分岔前状态中，利用$\gamma = 0$ 和$\alpha = 0$ ，我们在分岔状态中计算*SE*，直至并包括α^2和β^2阶的项。（面内位移，带有/$\gamma = \pi$ 2 and$_3 = 0\,u$，不允许分岔。）在相同精度阶下，$_3u\beta =$ ′，代入后应变能为

$$\begin{aligned} SE &= B_3 L\kappa_0^{\ 2} + P_2 \\ P_2 &= \tfrac{1}{2}\int_0^L \left\{B_1 u_3^{(1)\prime\prime 2} + B_2\alpha^{(1)\prime 2} + 2B_3\kappa_0\alpha^{(1)\prime}u_3^{(1)\prime}\right\}ds - B_3\kappa_n\alpha^{(1)}u_3^{(1)\prime}\Big|_0^L \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\int_0^L \left\{B_1 u_3^{(2)\prime\prime 2} + B_2\alpha^{(2)\prime 2} - 2B_3\kappa_0\alpha^{(2)\prime}u_3^{(2)\prime}\right\}ds + B_3\kappa_n\alpha^{(2)}u_3^{(2)\prime}\Big|_0^L \end{aligned} \tag{4.4}$$

由于杆的两端焊接在一起，α 和$_3u$ 必须满足($\alpha^{\ 1} = \alpha$) (2)、 (1) (2) 3 $_3u$ *u*=以及(1) (′ = 2 ′) $_3$ $_3u$ *u*，且这些条件在双杆两端均成立。因此，在两端计算的式（4.4）中的两项贡献相加为零，可以略去。直线状态下的能量为 $_3$ $\kappa_0^{\ 2}$ *B L*，而$_2P$关于α 和$_3u$是二次的。若直线状态稳定，则对所有非零容许函数α 和$_3u$（不包括刚体运动），$_2P$均为正。我们要寻找稳定范围的上限，即满足存在非零容许函数α 和$_3u$ 的ψ 的最小值，使得

$_2 = 0P$。稳定性极限的特征值问题要求对所有容许变分都有$_2$ $0P\delta$ $=$ ，这反过来要求

$$
\begin{aligned}
&B_1 u_3^{(1)''''} - B_3\kappa_0\alpha^{(1)''} = 0,\ B_2\alpha^{(1)''} + B_3\kappa_0 u_3^{(1)''} = 0 \\
&B_1 u_3^{(2)''''} + B_3\kappa_0\alpha^{(2)''} = 0,\ B_2\alpha^{(2)''} - B_3\kappa_0 u_3^{(2)''} = 0
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

在$0x$ $L\leq$ $\leq$ 处，以及两端，

$$
\begin{aligned}
&u_3^{(1)''} + u_3^{(2)''} = 0,\ u_3^{(1)'''} + u_3^{(2)'''} - (B_3\kappa_0 / B_1)(\alpha^{(1)'} - \alpha^{(2)'}) = 0, \\
&\alpha^{(1)'} + \alpha^{(2)'} + (B_3\kappa_0 / B_2)(u_3^{(1)'} - u_3^{(2)'}) = 0
\end{aligned}
,
\tag{4.6}
$$

除$(\alpha^1 = \alpha)$ (2)、(1) $(= \ 2)$ 3 $3u$ u和(1) $('= \ 2')$ 3 $3u$ u外，条件（4.6）是自然边界条件，也称为动力边界条件，它确保两端没有外力或力矩作用。

（4.5）的通解为

$$
\begin{aligned}
&u_3^{(1)} = L\left(c_1^{(1)} + c_2^{(1)}(s/L) + c_3^{(1)}\sin(\lambda s/L) + c_4^{(1)}\cos(\lambda s/L)\right) \\
&\alpha^{(1)} = c_5^{(1)} + c_6^{(1)}(s/L) - K\left(c_3^{(1)}\sin(\lambda s/L) + c_4^{(1)}\cos(\lambda s/L)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_3^{(2)} = L\left(c_1^{(2)} + c_2^{(2)}(s/L) + c_3^{(2)}\sin(\lambda s/L) + c_4^{(2)}\cos(\lambda s/L)\right) \\
&\alpha^{(2)} = c_5^{(2)} + c_6^{(2)}(s/L) + K\left(c_3^{(2)}\sin(\lambda s/L) + c_4^{(2)}\cos(\lambda s/L)\right)
\end{aligned}
$$

其中$_3$ $_0$ $_1$ $_2/B$ $L\sqrt{BB\lambda} =$ κ $\sqrt{\quad}$和$_1$ $_2/K$ B $B=\lambda$。为排除刚体运动的可能性，将双杆的左端约束在$=0$ x处，使其不能发生位移或转动，即要求$(\alpha^1 = \alpha^2 = 0)$ $()$ 、$(_3^1 = {}_3^2 = 0)$ $()$ u u和$_3^{(1}{}' = {}_3^2{}' = 0)$ $()$ u u。在$=0x$处施加这些条件以及三个条件(4.6)，可得

$$
\begin{aligned}
&u_3^{(1)} = L\left(c_3^{(1)}\left(\sin(\lambda s/L) - \lambda s/L\right) + c_4^{(1)}\left(\cos(\lambda s/L) - 1\right)\right) \\
&\alpha^{(1)} = -K\left(c_3^{(1)}\left(\sin(\lambda s/L) - \lambda s/L\right) + c_4^{(1)}\left(\cos(\lambda s/L) - 1\right)\right) = -(K/L)u_3^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_3^{(2)} = -L\left(c_3^{(1)}\left(\sin(\lambda s/L) - \lambda s/L\right) + c_4^{(1)}\left(\cos(\lambda s/L) - 1\right)\right) = -u_3^{(1)} \\
&\alpha^{(2)} = -K\left(c_3^{(1)}\left(\sin(\lambda s/L) - \lambda x/L\right) + c_4^{(1)}\left(\cos(\lambda s/L) - 1\right)\right) = \alpha^{(1)}
\end{aligned}
$$

最后，需要指出，在 $s\ \ L=$ 处施加 $(1)\ (=\ \ 2\ )\ \ 3\ \ 3u\ \ u$和 $(1)\ (′=\ \ 2′)\ \ 3\ \ 3u\ \ u$后，该端的六个条件便全部满足。特征值方程为

$$c_3^{(1)}\left(\sin\lambda-\lambda\right)+c_4^{(1)}\left(\cos\lambda-1\right)=0$$
$$c_3^{(1)}\left(\cos\lambda-1\right)-c_4^{(1)}\sin\lambda=0$$

要求 1 cos (/ − λ − λ 2 λ = 0)sin 。

最低特征值为 $\lambda_C=2\pi$ ，这意味着 $(4)\ \ 1c$ 是特征模态的振幅，其中 $(31\ \ 0)\ \ c\ =\ \ ,$ 满足

$$u_3^{(1)}=-u_3^{(2)}=Lc_4^{(1)}\left(\cos(2\pi s/L)-1\right),\quad \alpha^{(1)}=\alpha^{(2)}=-K_Cc_4^{(1)}\left(\cos(2\pi s/L)-1\right) \tag{4.7}$$

临界条件 $3\ \ 0\ \ 1\ \ 2/\kappa\ \ \ ,\ \ \ \sqrt{2\pi}\ B\ \ L\ \ BB$表明，自然状态下圆弧半角的最大值为 $1\ \ 2\ \ 3/C$ $BB\ \ B\psi\ \ =\pi$ ，此时双杆在直线状态下稳定；等价地，可形成稳定双杆的杆的~~最长~~长度为

$$L/R_0=2\pi\sqrt{B_1B_2}/B_3 \tag{4.8}$$

对于具有圆形横截面的杆，极限为 $/\psi_C=\pi\ \ \sqrt{1+\nu}$ 。分岔模态在 3 方向上产生双杆的张开间距，并在杆中产生相等的转动，在右端没有位移或转动。因此，每根杆的解与第 3.2 节中拉直固支杆稳定性的解 (3.9) 相同。显然，由 (3.10) 构造的解是一个特征模态。然而，这绝非具有最低特征值的模态，因为它被约束为在右端满足 $_3=0u$，而双杆仅要求 $(1)\ (2)\ 3\ 3\ (\ /\ 2)\ (\ /2)\ u\ L\ u\ L=$ 。本节表明它确实生成临界模态，因为 $_3u$ 确实在双杆的右端消失，至少到分岔模态的阶次。此外，很容易确定，如果图6中弯曲成直杆构型之前的每根杆绕水平轴旋转 180 度，上杆的间隙在底部，下杆的间隙在顶部，此结果同样适用。

图7展示了两种具有圆形截面的钢制双杆的实验实现，一种由自然弯曲的杆形成，/ψ =π 4，远低于稳定性极限，另一种为 ψ =π，约高出稳定性极限 15%。端部由支架夹紧，该支架还在各杆端部之间提供一定恒定间距。图7a中的双杆在直线状态下显然稳定，需要端部反向扭转才能使其进入涉及弯曲和扭转的稳定屈曲后状态。扭转双杆时发生了一些塑性变形，因此图7a右侧照片中所见状态可能与严格弹性响应时不同。图7b中的双杆在折叠的直线状态下不稳定。该图显示了如何从稳定状态开始将双杆变形为直线状态，这需要约束以维持其稳定性。当移除该约束时，双杆弹回其初始稳定状态。两端接合前双杆“自然状态”的照片见补充材料的补充图1。此外，视频1描绘了状态之间的转变过程。

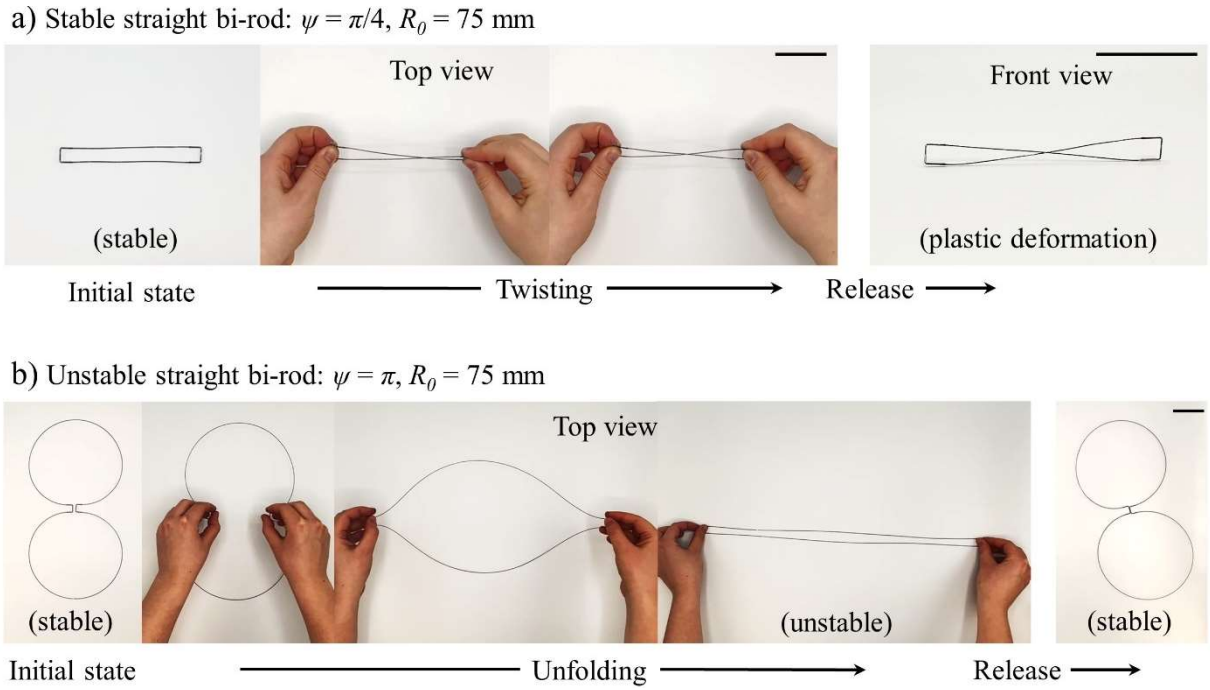


图 7. 实验演示：具有圆形截面的双杆在直线状态下于 a) 中稳定、于 b) 中不稳定。a) 一根稳定的直线双杆，/ψ =π 4 展示了将其从直线状态扭转至塑性变形的扭转状态的效果。b) 一根双杆

其中 $\psi=\pi$ 在直线状态下不稳定。该序列展示了初始稳定的非直线状态、经操作变为受约束的直线状态，以及最终释放后回到初始状态。比例尺：50 毫米。

5. 折叠成直线三圈的六边形环的稳定性

现在考虑图1a中的环。该环由六段杆段组成，每段均具有均匀的自然曲率 κ_n，并在均匀力矩 $M_3=B_3(\kappa-\kappa_0)$ 作用下弯曲成半径为 $R=1/\kappa_0=L_0/2\pi$ 的圆弧，并在圆弧形成尖点的位置通过六个接头“焊接”在一起。这个六边形单圈环可以扭转成三圈环，其直边长度为 $L_0=2\pi R/3$。三圈构型处于平衡状态，每个杆段中都有均匀弯矩，且相邻杆段的弯矩符号交替变化，$M_3=\pm B_3\kappa$。无论是在单圈状态还是直线三环状态下，都不存在扭转；但从一种状态转变到另一种状态时会发生扭转。[2]我们研究直线三环状态的稳定性。稳定性分析所采用的编号系统如图8a所示。如果环形成之前的杆段是直的，且 $\kappa_n=0$，则折叠状态中没有应力，显然是稳定的；但展开的单圈状态会有残余应力，其稳定与否尚不确定——本文不研究展开状态的稳定性。另一方面，如果杆段的自然曲率为 $\kappa_n=1/R=2\pi/L_0$，则单圈状态无应力且稳定，而折叠直线状态则存在应力，相邻杆段的弯矩符号交替变化，$M_3=\pm B_3\kappa=\pm B_3/R=\pm 2\pi B_3/L_0$。我们研究由具有任意均匀自然曲率 κ_n 的杆形成的环，其折叠直线状态的稳定性。

以折叠直线状态为参考状态时，环的弹性能为

$$SE=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{2}\int_0^L\left\{B_1\kappa_1^{(i)2}+B_2\kappa_2^{(i)2}+B_3\left(\kappa_3^{(i)}-\Delta\kappa_0^{(i)}\right)^2\right\}ds \tag{5.1}$$

[2] 三圈环有时也称为“覆盖环”（Manning 和 Hoffman，2006年）。形成三圈覆盖环时，将杆绕自身缠绕三圈，再将两端稍稍抬起，使其在环的交叉处交叉并连接起来。交叉处附近可能存在极小的扭转或非均匀弯曲，但随着杆越来越细，这些现象会趋于消失，因此在杆模型中予以忽略。

其中，$(\kappa_1^i, \kappa_2^i, \kappa_3^i)$ 表示相对于直线状态、绕嵌入的单位向量 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ 测得的曲率变化；在直线状态下，这些单位向量与固定笛卡尔单位向量 $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ 重合。此外，在第1、3和5段中，$\Delta\kappa_{0n}^i = -\kappa_0^i$；在第2、4和6段中，$\Delta\kappa_{0n}^i = \kappa_0^i$。$\Delta\kappa_{0i}$ 在相邻杆段之间符号改变，是因为折叠状态下各接头处杆段的取向发生翻转，而且我们采用了图8所示的参考坐标系。

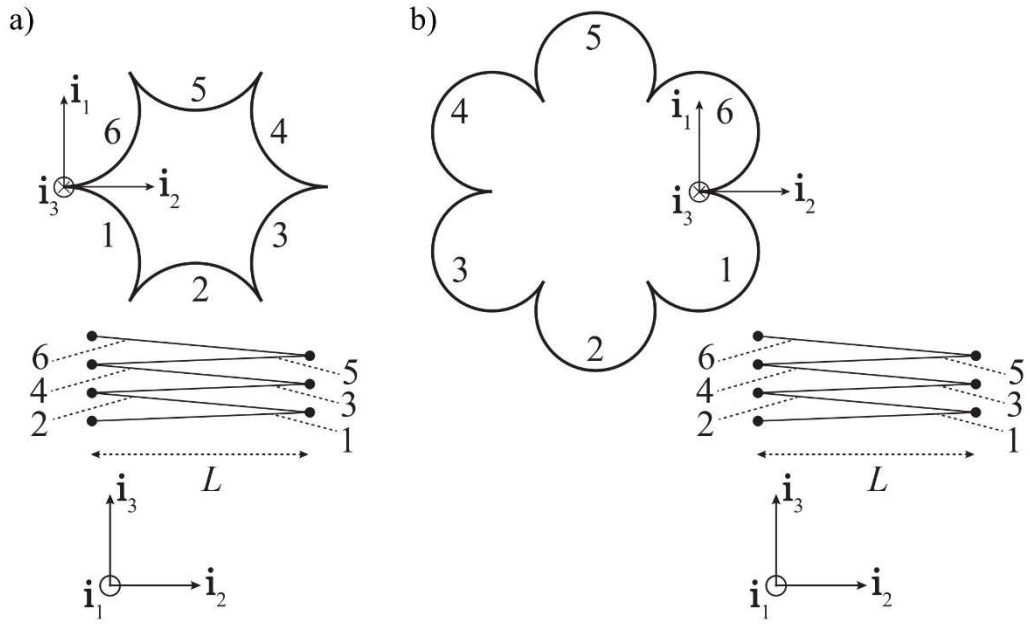


图 8. 折叠直线状态下的线段编号系统、坐标定义及排列示意图。a）含有120° 圆弧段的六边形环。b）含有240° 圆弧段的六边形环。两种情况下，线段 1 和 6 的左端均相连。在折叠直线状态下，左端与 $x_2 = 0$ 重合，右端与 $x_2 = L$ 重合。

按照双杆问题中所述的相同步骤，第 i 段杆的应变能用 $(\kappa_3^i)u_s$ 和 $(\kappa_3^i)\alpha_s$ 表示。随后保留直至并包括 u^2 阶及 α^2 的所有项，对其进行约化，使得第 i 段杆的应变能为

$$SE^{(i)} = \tfrac{1}{2} B_3 L\kappa_n^{\ 2} + \tfrac{1}{2}\int_0^L \left\{B_1 u_3^{(i)\prime\prime 2} + B_2\alpha^{(i)\prime 2} - 2B_3(\Delta\kappa_0^{(i)} u_3^{(i)\prime}\alpha^{(i)\prime})\right\} ds + B_3\Delta\kappa_0^{(i)}(u_3^{(i)\prime}\alpha^{(i)})\Big|_0^L \quad (5.2)$$

环的总应变能在此阶下为 $= 3\ _3\ \kappa^{\ 2} +\ _2\ _n SE\quad BL\quad P$其中，二次项（其总和即为直线状态下系统能量的二阶变分）为

$$P_2(u_3,\alpha,\kappa_n) = \sum_{i=1}^{6} \tfrac{1}{2}\int_0^L \left\{B_1 u_3^{(i)\prime\prime 2} + B_2\alpha^{(i)\prime 2} - 2B_3(\Delta\kappa_0^{(i)} u_3^{(i)\prime}\alpha^{(i)\prime})\right\} ds \quad (5.3)$$

接头处的几何条件要求$_3\ \ _3(\ ,\ ,\ )uu\quad '\alpha$ 在接头两侧连续，因此，式（5.2）中各杆段端点处的项相加为零。与双杆问题的情形一样，在分岔问题中，面内位移与$_3u$和α 相互解耦；除刚体运动外，它们对能量的二次变分的贡献为正，因此分岔由面外变形和扭转控制。若自然曲率为零，使得$(\ )\ \Delta\kappa_0^{\ i} = 0$，则$_2P$非负，且仅在刚体位移下为零。对于当前问题，我们寻求满足以下条件的$_n\kappa$ 的最大值：对于直线状态下除刚体运动以外的所有容许变分，$_2\quad 0P >\quad$ 。临界自然曲率由特征值问题决定，该问题对应于使$_2P$的一阶变分为驻值的非平凡解。使$_2P$的一阶变分为驻值所得到的微分方程和接头处的条件为

$$B_1 u_3^{(i)\prime\prime\prime\prime} + B_3\Delta\kappa_0^{(i)}\alpha^{(i)\prime\prime} = 0,\quad B_2\alpha^{(i)\prime\prime} - B_3\Delta\kappa_0^{(i)} u_3^{(i)\prime\prime} = 0,\ i = 1,6 \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} &u_3^{(i)}(L) - u_3^{(i+1)}(L) = 0,\ u_3^{(i)\prime}(L) - u_3^{(i+1)\prime}(L) = 0,\ \alpha^{(i)}(L) - \alpha^{(i+1)}(L) = 0 \\ &u_3^{(i)\prime\prime}(L) + u_3^{(i+1)\prime\prime}(L) = 0,\ \alpha^{(i)}(L)' + \alpha^{(i+1)}(L)' = 0 \\ &u_3^{(i)\prime\prime\prime}(L) + u_3^{(i+1)\prime\prime\prime}(L) = -(B_3\Delta\kappa_0^{(i)} / B_1)(\alpha^{(i)\prime}(L) - \alpha^{(i+1)\prime}(L)) \end{aligned} \quad (5.5)$$

对于 1、3、5i =，而对于 2、4、6i =

$$
\begin{aligned}
&u_3^{(i)}(0)-u_3^{(i+1)}(0)=0,\ u_3^{(i)\prime}(0)-u_3^{(i+1)\prime}(0)=0,\ \alpha^{(i)}(0)-\alpha^{(i+1)}(0)=0\\
&u_3^{(i)\prime\prime}(0)+u_3^{(i+1)\prime\prime}(0)=0,\ \alpha^{(i)}(0)'+\alpha^{(i+1)}(0)'=0\\
&u_3^{(i)\prime\prime\prime}(0)+u_3^{(i+1)\prime\prime\prime}(0)=-(B_3\Delta\kappa_0^{(i)}/B_1)(\alpha^{(i)\prime}(0)-\alpha^{(i+1)\prime}(0))
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

其中，当 $6i$ =、$1i+$ 时，必须取为 1。对于每组关节条件，前三项是几何要求，后三项是自然条件（或动力学条件）；这些条件源于接头上没有外力或力矩作用这一事实。

采用以下无量纲量：

$$
\bar{u}^{(i)}=u_3^{(i)}/L,\ \bar{\alpha}^{(i)}=\alpha^{(i)}/(B_3\kappa_n L/B_2),\ \lambda=B_3\kappa_n L/\sqrt{B_1B_2},\ x=s/L,\ B_2/B_1 \tag{5.7}
$$

特征值为 λ 。关于以下特征值问题的解的详细内容见补充材料。无量纲方程可通过解析方法求得六个线段端点处未知量之间的关系。令 $(\ )(\ )(\ )(\ )(\ )0(\ )(\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,\ )\ i\ i\ i\ i\ i\ i\ i\ u\ u\ u\ u\ u$ $[\quad]=\quad\quad{}'\alpha\quad{}''\quad{}'''\alpha\quad{}'$，可得

$$
\left[u^{(i)}(1)\right]=T_A\left[u^{(i)}(0)\right],\ i=1,3,5\ \ \&\ \left[u^{(i)}(1)\right]=T_B\left[u^{(i)}(0)\right],\ i=2,4,6 \tag{5.8}
$$

其中，$_AT$ 和 $_BT$ 是仅依赖于 λ 的 6×6 矩阵。接头处的条件可表示为

$$
\left[u^{(i+1)}(1)\right]=D_A\left[u^{(i)}(1)\right],\ i=1,3,5\ \ \&\ \left[u^{(i+1)}(0)\right]=D_B\left[u^{(i)}(0)\right],\ i=2,4,6 \tag{5.9}
$$

其中，$+1\ i$ 在 $6i$ = 时取为 1。$_AD$ 和 $_BD$ 是 6×6 对角矩阵，但有一个非对角元素 $_{56}D$ 例外，该元素取决于 $_2\ _1/B\ \ B$。利用这些矩阵，可用 $(\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix})(\ )u$ 计算 $(\begin{bmatrix}6 & 0\end{bmatrix})(\ )u$。然后，施加式 (5.9) 中杆段 1 和 6 之间接头处的条件，可得

$$
(A-I)\left[u^{(1)}(0)\right]=0 \tag{5.10}
$$

其中 $=\left(\quad\left(\ ^{-1}\quad\right)\right)^3\ _B\ _B\ _A\ _A\ A\ D\ T\ D\ T$ 仅取决于 λ 和 $_2\ _1/B\ B$。$A\ I-$ 的形式为

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & A^{(1)} \\ 0 & A^{(2)} \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

其中 $_{(1)}A$ 和 $_{(2)}A$ 是 3×3 矩阵。(5.10) 中的前三个方程要求

$$A^{(1)}\left[\bar{u}^{(1)\prime\prime}(0), \bar{u}^{(1)\prime\prime\prime}(0), \bar{\alpha}^{(1)\prime}(0)\right] = 0 \tag{5.12}$$

这要求$_{(1)}A$ 的行列式为零。按照上述方法进行数值计算，得到使$_{(1)}A$ 的行列式为零的 λ 最小值为 2π，且与$_2$ $_1/B$ B无关。方程 (5.12) 在 $\lambda = 2\pi$ 下的解为任意倍的

$$\left[\bar{u}^{(1)\prime\prime}(0), \bar{u}^{(1)\prime\prime\prime}(0), \bar{\alpha}^{(1)\prime}(0)\right] = [1, 0, 0] \tag{5.13}$$

此外，该解满足

$$A^{(2)}\left[\bar{u}^{(1)\prime\prime}(0), \bar{u}^{(1)\prime\prime\prime}(0), \bar{\alpha}^{(1)\prime}(0)\right] = 0$$

因此，临界特征值为 $\lambda = 2\pi$，使折叠直三圈环结构保持稳定的自然曲率κ_n 最大值为

$$L\kappa_n = 2\pi\sqrt{B_1 B_2}/B_3 \quad \text{with} \quad L = 2\pi R_0/3 \tag{5.14}$$

这与第 3.2 节中拉直的固支杆 (3.9) 的结果相同。决定特征函数的另外三个分量，($\begin{bmatrix} {}^1 & 0 & {}^{1\prime} & 0 & \alpha & {}^1 & 0 \end{bmatrix}$) 0 0 ( ), ( ), ( ) u _ u ,是刚体模态的振幅，可以任意选取。就本文而言，我们取($\begin{bmatrix} {}^1 & 0 & {}^{1\prime} & 0 & \alpha & {}^1 & 0 \end{bmatrix}$ =) 0 0 ( ), ( ), ( ) 0 u u . 图 9 绘出了完整特征模态中分量 ( )u s和 ( )$s\alpha$ 随距离 s变化的曲线；距离从第 1 段杆的左端开始，沿第 2 段杆从右端返回左端，随后朝第 3 段杆的右端延伸，依此类推。临界模态的解由六个长度为L的固支杆解拼接而成，使每个接头处的力矩分量大小相等、方向相反。注意，杆中的轴向力矩（即扭矩）$_2$ $_2M$ B= α'在接头处为零，参见 (3.10)。

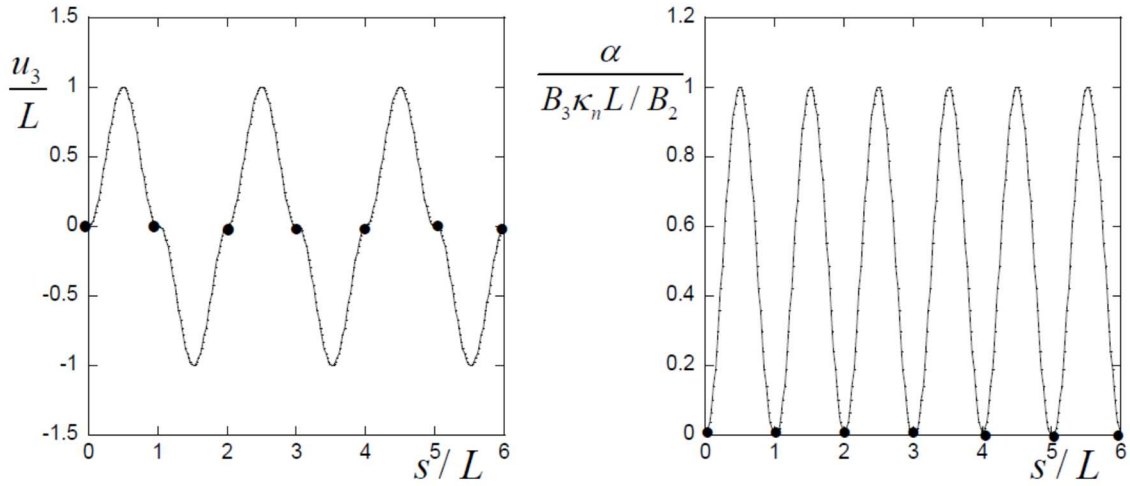


图 9. 分岔模态分量$_3u$和α 随距离变化绘制，该距离沿环连续推进，环由六段120º 圆弧段组成，从杆段 1 的左端开始。在此图中，每个杆段内的α 均为绕$_2$**i** 的转动。横截面为圆形，且ν =1 3/ 。接头以实心圆点标记。$_3$ /*u L*的最大振幅归一化为 1。

采用具有自然曲率的杆来构造这种结构可能有其优势（Olson 等，2013）。若自然曲率为零，折叠直线状态下的弹性能也为零；而若存在自然曲率，弹性能则不为零，可用于推动展开过程。对于某些设计，甚至可能希望折叠状态是不稳定的。只需对折叠状态施加约束，并在需要展开时解除该约束即可。储存的弹性能（如第 3.2 节所述，该能量可能相当可观）可以推动展开过程。式 (5.14) 中保证稳定性的最大自然曲率与$_1$ $_2$ $_3$/*BB B* 成正比，其矩形横截面的情况绘于图 4。因此，横截面的高度与厚度之比是影响稳定性的关键参数。

$$\sqrt{\qquad}$$

最后，无需重复分析即可指出，由图 1 和图 6 中的240º 圆弧构成的折叠六边形环，其自然曲率的稳定性极限同样由(5.14)决定。然而，其长度是120º圆弧结构的两倍，即 $_0$4 /3*L* *R*= π ，因此稳定性的极限自然曲率降低为原来的 1/2。

图10展示了六边形120º 圆弧环的单环态和三环态的实验演示。杆的横截面为矩形，且 / =4 *h t*，其自然

圆弧的曲率为 $_0 1/_n\ R\kappa\ =$ ，因此初始展开状态没有残余应力，故而稳定（见补充图2）。对于此环， $\kappa_n = 2\pi\ \ 3/L$，结合图4可知，根据判据（5.14），折叠三环状态远低于稳定性极限，这与图10所示的实验结果一致。对折叠环的两端施加弯曲，可使其达到一个中间状态，随后它会动态弹跳至展开状态。弹跳过程十分剧烈，与折叠状态中储存的大量弹性弯曲能相符。 补充材料中的补充图2展示了开放环两端连接前后的照片，视频2则展示了展开和弹跳过程。

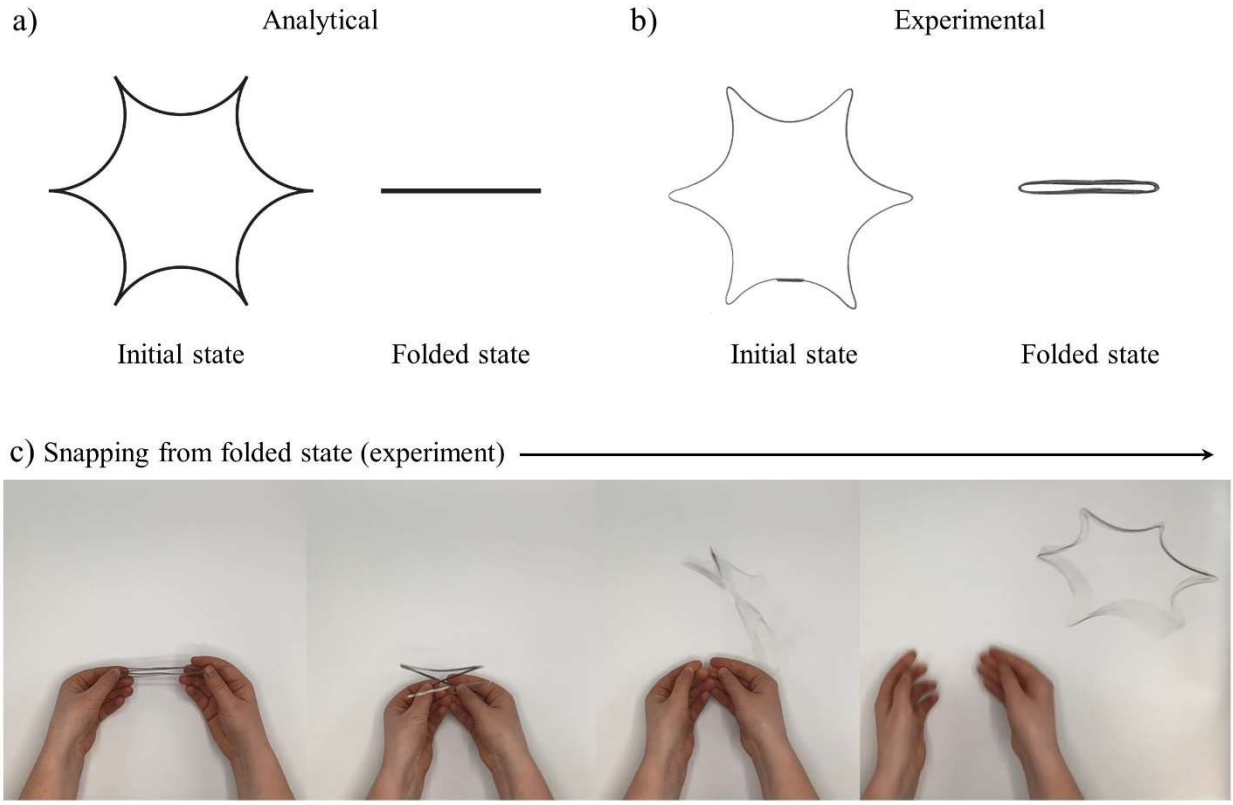


图10. 六边形120° 圆弧环的展开初始状态（单环状态）与折叠状态（三环状态）。该圆弧环由 $_0 1\ /_n\ R\kappa\ =$ 的圆弧构成，因此单环状态不含储存弹性势能。a）解析表示。b）两种状态的实验实现，预测二者均稳定。c）对稳定折叠状态的两端施加弯曲，直至其突然跳变为展开状态。

6. 结论

本文的主要发现是，双杆和直线折叠六边环的自然曲率稳定性极限为$\sqrt{2}/L$，$B\kappa = \pi$。分岔模态是杆在自然曲率平面外发生弯曲，并与沿杆长方向的扭转相耦合。本文强调了第 3.2 节所述基本问题的重要性，即通过弯曲固支杆来减小其自然曲率时的稳定性极限。对于杆弯曲至变直的情况，其自然曲率稳定性极限与双杆和直线折叠六边环的稳定性极限相同。

本文采用的稳定性分析方法基于保守载荷下的基尔霍夫杆理论关系，但将其专门化为拉格朗日表述，其中所研究的状态为圆形状态或直线状态。稳定性取决于系统能量二阶变分的正定性。本文仅考察了稳定与不稳定范围，以及参考状态的分岔模态。本文未探讨任何问题的分岔后行为，不过该表述可扩展至屈曲后范围，且尤其适合开展基于 Koiter（1945年）方法的初始屈曲后行为和缺陷敏感性研究。值得一提的是，Goto 等人（1992年）、Mouthuy 等人（2012）以及 Audoly 和 Seffen（2015年）已给出单环和三环圆环问题的数值分岔后结果；他们将自然曲率用作控制参数，以追踪两种圆形状态之间的准静态平衡态转变路径。

尽管对双杆和六边直线折叠环所进行的实验数量有限且远非全面，但它们确实表明，与许多由杆或梁构成的结构不同，这些实体可能表现出高度不稳定的分岔后行为和强烈的缺陷敏感性。已经注意到，在通过拉直初始弯曲杆而构成的双杆或直线折叠环等结构中，可以储存显著的弹性能。对这些结构的屈曲后行为和缺陷敏感性的未来研究，无论是基于当前表述还是经典Kirchhoff表述，都可能很有趣。

致谢

S.L. 和 R.R.Z. 感谢来自美国国家科学基金会 CPS-2201344 和美国国家科学基金会职业奖 CMMI-2145601 的资助支持。作者感谢与斯坦福大学戴继泽先生和陆璐博士的有益讨论。

附录A. 补充材料

以下是本文的补充材料。

视频 1：圆形横截面的双杆

视频 2：六边 120º 圆弧环 具有矩形横截面

参考文献

Antman, S.S., 1 995, 《弹性力学非线性问题》。施普林格，柏林、海德堡、纽约。

Audoly, B., Seffen, K.A., 2015 自然弯曲弹性带的屈曲：带状模型带来了不同。《弹性期刊》119，293-320。

Champneys, A.R., Thompson, J.M.T., 1996，扭转杆方程的多种局部屈曲模态。《伦敦皇家学会会刊A辑》452，2467-2491。

Goriely, A., 2006，扭转弹性环与米歇尔失稳的再发现。《弹性期刊》84，281-299。

Goto, Y., Watanabe, Y., Kasugai, T., Obata, M., 1992，适用于可展开环的弹性屈曲现象。《国际固体与结构杂志》29，893-909。

Koiter, W. T., 1945年，论弹性平衡的稳定性。博士论文，代尔夫特，荷兰。英文译本见：Tech. Trans. F 10，833。

Lachenal, X., Weaver, P. M. 和 Daynes, S., 2012,《用于变形应用的多稳态复合扭转结构》，英国皇家学会会刊 A：数学、物理与工程科学，468(2141)，第 1230-1251 页。

Leanza, S., Dai, J., Wu. S., Zhao, R.R., 2022, 《六边形环形折纸组件：具有极限紧密堆积特性的可折叠功能结构》。应用力学杂志 89，081003-1-10。

Lu, L., Leanza, S., Dai, J., Sun, X. 和 Zhao, R. R., 2023, 《通过几何改型实现六边形环形折纸的便捷卡扣折叠》，固体力学与物理学杂志，171，第 105142 页。

Manning,R.S.,Hoffman,K.A.,2001,恒定平面固有曲率弹性杆的n重覆盖圆稳定性。《弹性期刊》62, 1-23。

Mhatre, S., Boatti, E., Melancon, D., Zareei, A., Dupont, M., Bechthold, M., 以及 Bertoldi, K., 2021，《基于曲梁在旋转输入下屈曲的可展开结构》，Advanced Functional Materials，31(35)，第 2101144 页。Michell, J.H.，1889，《弯曲和扭转的金属丝的稳定性》。Messenger Math. 11，181-184。Mouthuy, P-O.、Coulombier, M.、Pardoen, T.、Raskin, J-P.、Jonas, A.M.，2012，过度曲率描述了从曲面折纸到可折叠帐篷的环的屈曲和折叠。Nature Comm. 3，1290。 https://doi.org/10.1038/ncomms2311。Olson, G.M.、Pellegrino, S.、Banik, J.，2013，适用于立方体卫星的可展开螺旋天线。AIAA J.，6，1671。 https://doi.org/10.2514/6.2013-1671。Stojanoska, V.、Stoytchev, O.，2008，触碰 Z_2 在三维旋转中的作用。Mathematics Magazine，81，345-357。Sokolnikoff, I. S.，1956，《弹性力学数学理论》。McGraw-Hill，纽约。Sun, X.、Wu, S.、Dai, J.、Leanza, S.、Yue, L.、Yu, L.、Jin, Y.、Jerry Qi, H. 和 Zhao, R. R.，2022，《通过扭转实现环形折纸突 snap 折叠的相图与力学》，International Journal of Solids and Structures，248，第 111685 页。Wu, S.、Yue, L.、Jin, Y.、Sun, X.、Zemelka, C.、Qi, H. J. 和 Zhao, R.，2021，《环形折纸：不同几何形状环的突 snap 折叠》，Advanced Intelligent Systems，3(9)，第 2100107 页。Wu, S.、Dai, J.、Leanza, S.、Zhao, R.R.，2022，六边形环形折纸——高填充率的突 snap 折叠。Extreme Mech. Letters 53，101713。Yu, T.、Marmo, F.、Cesarano, P. 和 Adriaenssens, S.，2023，《带可调双稳态和环绕行为的带折痕环形薄片连续建模》，Proceedings of the National Academy of Sciences，120(4)，第 e2209048120 页。